Отзыв официального оппонента
на диссертацию Бирюкова Олега Николаевича
«Топологическая энтропия кос Артина»,
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.04 — геометрия и топология

Теория кос — активно развиваемый раздел современной математики, находящийся на стыке маломерной топологии, комбинаторной теории групп и теории динамических систем. Косы с фиксированным числом нитей образуют группу — знаменитую группу кос, являющуюся одним из ключевых орудий маломерной топологии, имеющим многочисленные применения. Значительный вклад в изучение групп кос и инвариантов на них внесли работы таких известных математиков как В. Терстон (1988), В.А. Васильев (1990), М.Л. Концевич (1993), С. Бигелов (2000) и Д. Краммер (2000). С другой стороны, косу можно рассматривать как гомеоморфное отображение на себя гиперболической поверхности — двумерного круга с проколами, с точностью до непрерывных деформаций в классе таких отображений. Поэтому коса является дискретной (двумерной) динамической системой, и весьма актуальной задачей является изучение (топологических) динамических свойств кос, или инвариантов сопряженности на группе кос. Одной из важнейших характеристик динамической системы является ее энтропия — величина, характеризующая хаотичность данной динамической системы. Исследования энтропии кос проводились Т. Мацуокой (1986), Д. Фрайдом (1986), Б. Колевым (1989), Ж.-О. Муссафиром (2006) и другими отечественными и зарубежными математиками. Другую важную динамическую характеристику косы ввел В. Терстон (1988) при исследовании гипотезы Пуанкаре, построив геометрическую классификацию дискретных двумерных динамических систем (т.е. кос), разделяющую все косы на три типа — приводимые, периодические и псевдоаносовские косы. Поэтому задачи получения оценок для энтропии кос, алгоритмов ее вычисления, а также задача эффективного распознавания типа косы по классификации Нильсена-Терстона, изучаемые в диссертации О.Н. Бирюкова, представляются весьма актуальными.

Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения.

В первой, вводной главе обосновывается актуальность темы, вводятся базовые понятия из теории групп кос. Даётся обзор известных результатов по решению проблемы сопряженности в группе кос (результат Элрифая и Мортона, 1994, с использованием канонической формы косы и представительных множеств), а также по алгоритмическому распознаванию типа косы по Нильсену-Терстону (алгоритм Д. Бернардете, З. Нитецки и М. Гутиере, 1995, с использованием блочных разбиений, а также алгоритм М. Бествины и М. Хэндла, 1995, с использованием железнодорожных путей). Кратко излагается теория Перрона-Фробениуса о спектральных свойствах неотрицательных квадратных матриц.

Во второй главе формулируются определения энтропии, приводятся известные верхняя и нижняя (Д. Фрайд, 1986, и Б. Колев, 1989) оценки для энтропии косы через спектральные радиусы матриц Артина и Бурау этой косы. Основным результатом второй главы является распространение (в теореме 2.12) нижней оценки энтропии кос на все ненулевые комплексные значения параметра, присутствующего в матрицах Бурау.

В третьей главе исследуется группа кос из трёх нитей. Получена красивая формула для вычисления энтропии кос из трёх нитей (теорема 3.7), доказанная с помощью известного представления этой группы в группу $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Установлены (в теоремах 3.8—3.10) рекуррентные свойства многочленов, появляющихся в этой формуле. Описана неожиданная связь между этими многочленами и известным условием чётности Гейла, характеризующим наборы вершин гиперграней у любого циклического многогранника. Завершается третья глава конструированием алгоритма распознавания типа косы из трёх нитей по классификации Нильсена-Тёрстона (теоремы 3.15—3.18). Достоинством этого алгоритма является тот факт, что он имеет линейную сложность и не использует никакие разновидности железнодорожных путей либо представительных множеств, на которых основаны известные ранее алгоритмы (Бествины-Хэндла и Элрифая-Мортона).

В заключении формулируются основные результаты диссертации.

Научные результаты, выносимые на защиту, являются новыми, получены автором самостоятельно и обоснованы в виде строгих математических доказательств. Основные результаты диссертации опубликованы в трёх работах из перечня ВАК. Результаты работы докладывались на научных конференциях и ряде семинаров. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

По диссертационной работе имеются следующие замечания.

1. Доказательство теоремы 2.12 показывает, что теорема 2.12 (стр.75) допускает усиление путем замены верхнего предела ($\overline{\lim}$) в определении величины $m(\beta, |t|)$ нижним пределом ($\underline{\lim}$), а нижнего предела — верхним. Действительно: верхний предел ($\overline{\lim}$) в левой части неравенства на странице 76, 4-я строка снизу, в действительности совпадает с обычным пределом (lim) согласно формуле Гельфанда (см. теорему 1.9 на стр.50). Поэтому верхний предел ($\overline{\lim}$) в правой части этого неравенства $\leq$ можно заменить нижним пределом ($\underline{\lim}$), усилив это неравенство. Отсюда получается усиление неравенства на странице 76, 2-я строка снизу, путем замены двух верхних пределов ($\overline{\lim}$ и $\overline{\lim}$) нижним и обычным пределами ($\underline{\lim}$ и lim) соответственно. Здесь второй из верхних пределов совпадает с обычным пределом по упомянутой формуле Гельфанда.

2. Доказательство теоремы 2.13 (стр.77) необосновано. Дело в том, что если $0 < R(B_\beta(t_0)) < \infty$ и $m(\beta, |t|) < 0$, то при стремлении $t \to t_0$, где $|t_0| = 1$ и $|t| = 1+\varepsilon > 1$, имеем $R(B_\beta(t)) = R(B_\beta(t_0)) + O(\varepsilon)$ и $|t|^{-m(\beta,|t|)} = (1+\varepsilon)^{-m(\beta,|t|)} = 1 - m(\beta, |t|)\varepsilon + o(\varepsilon) > 1$. Но отсюда не следует, что величина $R(B_\beta(t)) \cdot |t|^{-m(\beta,|t|)} = R(B_\beta(t_0)) + O(\varepsilon) + R(B_\beta(t_0))(-m(\beta, |t|))\varepsilon + o(\varepsilon)$ из теоремы 2.12 превосходит величину $R(B_\beta(t_0))$, так как вклад слагаемого $O(\varepsilon)$ может быть отрицательным и может «перевесить» вклад положительного слагаемого $R(B_\beta(t_0))(-m(\beta, |t|))\varepsilon$.

3. Замечание 3.1 (на стр.85) недостаточно обосновано. В нем сказано, что теоремы 3.3 и 3.6 дают эффективный способ определения типа косы по Нильсену-Терстону в случае кос

из трех нитей, за время порядка $O(l)$, где l есть длина задающего косу слова в образующих σ_i. Но длина слова равна $l = \sum_{i=1}^{s} |k_i| + |m_i|$, а время равно времени вычисления значения многочлена P_{2s} на наборе $(k_1, m_1, \ldots, k_s, m_s)$, причем старший моном многочлена имеет вид $\prod_{i=1}^{s} k_i m_i$. Поэтому замечание 3.1 будет обосновано, если обосновать, что значение $\prod_{i=1}^{s} k_i m_i$ можно вычислить за время порядка $l = \sum_{i=1}^{s} |k_i| + |m_i|$, и что количество мономов многочлена P_{2s} имеет порядок $l = \sum_{i=1}^{s} |k_i| + |m_i|$. Хотелось бы видеть обоснование этих свойств.

4. В доказательстве теоремы 3.16 (стр.96—97) имеется неточность. Дело в том, что в доказательстве сказано: «и запишем косу β в виде слова w в алфавите F, отслеживая движение выбранной нити» (стр.97, 1-я строка сверху). Но если выбранная нить является средней (т.е. второй), то записать косу β в алфавите F невозможно.

Указанные замечания не влияют на общую положительную оценку работы.

Представленная диссертация является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержится решение важных задач геометрии и топологии. Диссертация О.Н. Бирюкова полностью отвечает требованиям пп. 9, 10, 11, 13, 14 «Положения о порядке присуждения учёных степеней» ВАК Минобрнауки РФ от 24.09.2013 г. № 842, предъявляемым ВАК к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор, Бирюков Олег Николаевич, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология.

Официальный оппонент
Кудрявцева Елена Александровна
кандидат физико-математических наук (специальность 01.01.02)
доцент кафедры дифференциальной геометрии и приложений
механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова Кудр / Е. А. Кудрявцева /
15.09.16г

Сведения об официальном оппоненте.

Место работы: ФГБОУ ВО «Московский Государственный университет имени М.В. Ломоносова», механико-математический факультет, кафедра дифференциальной геометрии и приложений.

Почтовый адрес: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, дом 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–19.

Телефон: +7 495 939-39-40.

Адрес электронной почты: ekudr@list.ru.

Подпись Кудрявцевой Е.А. заверяю.