ФГБОУ ВО
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Овсянников Захар Николаевич

Задачи об оптимальном соединении в пространствах компактов

Специальность 01.01.04 —
геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Иванов Александр Олегович**
Официальные оппоненты:	**Карасев Роман Николаевич,** доктор физико-математических наук, доцент, Московский Физико-Технический Институт, преподаватель, **Стрелкова Наталия Павловна,** кандидат физико-математических наук, Средняя общеобразовательная школа №54 г. Москвы, учитель
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВПО «Челябинский Государственный Университет»**

Защита состоится 3 июня 2016 года на заседании диссертационного совета Д.501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: РФ, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова, по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А,

http://mech.math.msu.su/ snark/files/diss/0118diss.pdf

Автореферат разослан 29 апреля 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84,
доктор физико-математических
наук, профессор **Шафаревич Андрей Игоревич**

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Расстояние Хаусдорфа было введено в начале XX века Ф.Хаусдорфом и широко используется в различных прикладных областях, таких как распознавание образов, биология и финансовая математика. В процессе изучения свойств этих пространств с точки зрения схожести изображений возник вопрос о свойствах кратчайших в нем. Так, например, можно показать, что между каждой парой компактов в евклидовом пространстве существует кратчайшая в смысле Хаусдорфа и ее длина равняется расстоянию между точками, то есть, метрика Хаусдорфа является строго внутренней[1].

Дальнейшее изучение кратчайших в этом пространстве показало, что практически для всех пар компактов в евклидовом пространстве существует бесконечное количество кратчайших, а случаи, когда число кратчайших конечно, подчиняются строгим законам[2]. Более того, оказалось, что не существует такой пары компактов в евклидовом пространстве, что между ними существует ровно 19 кратчайших, а для любого числа от 1 до 36 кроме 19 такая пара компактов существует[3]. Эти исследования были продолжены Хёнигс[4], ей было показано, что и 37 кратчайших быть не может.

Общая проблема Штейнера была, по всей видимости, впервые сформулирована в современном виде Ярником и Кесслером в 1934 году [5], хотя простейший ее вариант, известный как задача Ферма, был решен еще в XVII веке Б. Кавальери и Э. Торричелли. Задача Штейнера — это задача поиска кратчайшего соединения с возвожными разветвеле-

[1]см., например, J. Henrikson *Completeness and total boundedness of the Hausdorff metric* MIT Undergraduate Journal of Mathematics, 1999

[2]K. Lund, P. Sigmon, and S. Schlicker, *Fibonacci sequences in the space of compact sets*, Involve 1 (2008), pp 197–215.

[3]C. C. Blackburn, K. Lund, S.Schliker, P. Sigmon, A. Zupan *A Missing Prime Configuration in the Hausdorff Metric Geometry*, J. Geom, 92 (2009), pp 28-59

[4]K. Honigs, *Missing edge coverings of bipartite graphs and the geometry of the Hausdorff metric*, Journal of Geometry, 2013.

[5]V. Jarnik, O. Kossler, *O minimalnich grafech obsahujicich n danych bodu*, Cas, Pestovani Mat. (Essen), 1934, T. 63 pp 223-235

нимяи заданного набора точек, ее решение называют минимальным деревом Штейнера. Поиск минимальных деревьев Штейнера является NP-сложной задачей[6], поэтому особый интерес представляют приближенные решения этой задачи, в частности, минимальные остовные деревья, которые характерны тем, что их легко построить с одной стороны, и что их длина превышает длину минимальных деревьев Штейнера для тех же множеств не более, чем в определенное число раз, которое зависит от метрического пространства, в котором они находятся, но никогда не превышает 2. Инфинум отношения длины минимального дерева Штейнера к длине минимального остовного дерева (или супремум обратного отношения) по всем конечным множествам называется отношением Штейнера и позволяет характеризовать метрическое пространство с точки зрения минимальных деревьев Штейнера. Это число или его оценки были найдены для плоскости, сферы, плоскости с манхеттенской нормой, плоскости Лобачевского, пространств Адамара отрицательной кривизны, проективной плоскости, плоских торов, бутылок Клейна, поверхностей равногранных тетраэдров и некоторых других пространств[7].

Нахождение непосредственно отношения Штейнера представляется довольно сложной задачей, в частности, эта задача до сих пор не решена для евклидовой плоскости[8], несмотря на то, что доказательство (как выяснилось, ошибное) было опубликовано. Поэтому уже в работе Джильберта и Поллака[9], в которой была поставлена эта проблема, была сделана попытка упростить задачу, ограничившись множествами, состоящими из не более, чем конкретного числа n точек. Такие отношения мы называем отношеними Штейнера степени n.

Исследования отношения Штейнера степени n для евклидовой плоскости хорошо характеризуют сложность поиска отношения Штейнера: в исходной работе было найдено отношение Штейнера степени 3, затем

[6] M. R. Garey, R. L. Graham, D. S. Johnson, *The Complexity of Computing Steiner Minimal Trees*, SIAM J. Appl. Math, 4 (32), 1977, pp 835-859

[7] Обзор пространств, для которых были получены оценки и значения, можно посмотреть в http://stubber.math-inf.uni-greifswald.de/biomathematik/cieslik/massey.pdf

[8] A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin *The Steiner Ratio Gilbert–Pollak Conjecture Is Still Open*, Algorithmica, 62 (2012), issue 1, pp 630-632

[9] E. N. Gilbert, H. O. Pollak, *Steiner Minimal Trees*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 16, pp 1–29, 1968

Поллаком в 1978 году[10] было найдено отношение Штейнера степени 4. Отношение Штейнера степени 5 было получено Ду, Хвангом и Яо в 1985 году[11], а степени 6 — Рубинштейном и Томасом в 1991[12]. Затем, после большого перерыва, в 2008 году де Ветом было найдено отношение Штейнера степени 7[13], а в 2014 Кирсзенблатом — отношение Штейнера степени и 8[14].

Несмотря на важность отношений Штейнера степени n они дают, скорее, ограничение сверху на отношение Штейнера, нежели его оценку. Так, Ду и Смитом было сделано предположение[15], что отношение Штейнера для трехмерного евклидового пространства не достигается на конечном множестве и была приведена бесконечная последовательность множеств с уменьшающимся отношением Штейнера, при этом оценка на отношение Штейнера, определяемая этими множествами, до сих пор не улучшена.

Наряду с проблемой Штейнера имеются и другие вариационные задачи о поиске сетей, соединяющих множество точек некоторого метрического пространства. Задача о минимальном заполнении была предложена Громовым в 1983 году[16]. В общей постановке задачи требуется для данного замкнутого пространства с заданной метрикой найти затягивающее его многообразие-пленку наименьшего объема такую, что расстояние по пленке не меньше расстояния в исходной метрике. Одномерный стратифицированный вариант этой задачи был предложен Ивановым и Тужилиным в 2012 году[17]. Они предложили затягивать конечное метрическое пространство взвешенным графом с внутренней метрикой, порожденной неотрицательной весовой функцией.

Минимальные заполнения конечных метрических пространств тесно

[10]H. O. Pollak, *Some remarks on the Steiner problem*, J. Combin, Theory Ser. A 24 (1978), pp 278–295

[11]D. Z. Du, F. K. Hwang, E. Y. Yao *The steiner ratio conjecture is true for five points*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 38 (1985), pp 230-240

[12]J. H. Rubinstein, D. A. Thomas *A variational approach to the Steiner network problem*, Annals of Operations Research 33 (1991), pp 481-499

[13]P. O. De Wet *Geometric Steiner minimal trees*, Ph.D. thesis, Univ. of South Africa, Pretoria 2008

[14]D. Kirszenblat *The Steiner ratio conjecture for eight points*, M. Thesis, Uni. Melbourne, 2014

[15]D. Z. Du, W. D. Smith *Disproofs of Generalized Gilbert–Pollak Conjecture on the Steiner Ratio in Three or More Dimensions*, J. of Comb. Th. Series A, 74 (1996), pp. 115–130

[16]Gromov M., *Filling Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. 1983. 18 (1, pp. 1-147.

[17]А. О. Иванов, А. А. Тужилин *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении*, Матем. сб., 2012, том 203, номер 5, стр. 65–118

связаны с минимальными деревьями Штейнера. Так, для произвольного конечного метрического пространства вес его минимального заполнения равен инфинуму длин минимальных деревьев Штейнера, затягивающих изометрические вложения исходного пространства в произвольное конечное метрическое пространство. Впрочем, как выяснилось, не обязательно перебирать вложения и пространства, достаточно взять вложение Куратовского в пространство ℓ_∞^n — конечномерное нормированное пространство с нормой максимума.

Оказалось также, что если рассмотреть конечное подмножество метрического пространства как метрическое пространство, то отношение веса его минимального заполнения к длине его минимального дерева Штейнера не может быть меньше некоторой величины (а значит, то же верно и для отношения веса минимального заполнения к длине минимального остовного дерева). Отношением Громова-Штейнера метрического пространства называется точная нижняя грань отношений веса минимального заполнения к длине минимального остовного дерева, взятой по всем конечным подмножествам этого пространства, а суботношением Штейнера — отношений веса минимального заполнения к длине минимального дерева Штейнера, взятого по тем же множествам. Эти отношения называются отношениями типа Штейнера. Аналогично определяются отношение Громова-Штейнера и суботношение Штейнера степени n.

Пахомова показала в 2014 году[18], что отношения типа Штейнера не меньше $\frac{1}{2}$ и не больше 1, причем для любого числа между ними существует метрическое пространство с таким значением выбранного отношения типа Штейнера, также была исследована непрерывность отношений типа Штейнера. В исходной работе Иванова и Тужилина были найдены отношения типа Штейнера степени 3, а в работе Степановой[19] — степени 4 для евклидовой плоскости. Беднов и Бородин показали[20], что суботношение Штейнера для так называемых пространств Линденштраусса

[18] А. С. Пахомова *Оценки для суботношения Штейнера и отношения Штейнера-Громова*, Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика. - 2014. - № 1. - С. 17-25

[19] Е. И. Степанова *Суботношение Штейнера евклидовой плоскости*, дипломная работа, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2012

[20] Б. Б. Беднов, П. А. Бородин *Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения*, Матем. сб., 205 (2014), выпуск 3, стр. 3–20

– нормированных пространств, сопряженное к которым является пространством $L_1(\mu)$ для некоторой меры μ, равно 1, то есть, вес минимального заполнения в точности совпадает с длиной минимального дерева Штейнера.

Цель работы

Настоящая работа посвящена развитию теорий минимальных сетей и кратчайших применительно к метрическому пространству компактов евклидового пространства с расстоянием Хаусдорфа в качестве метрики с целью выявления отношений типа Штейнера для этого пространства, доказательства того, что минимальное дерево Штейнера не лучше минимального остовного дерева по отношению к минимальным заполнениям в этом пространстве, а также продолжения помледовательности чисел, для которых не существует пары точек в этом пространстве с таким количеством кратчайших.

Научная новизна

Все основные результаты являются новыми, получены автором самостоятельно и заключаются в следующем:

1. Доказана минимальность отношений Штейнера и Громова-Штейнера метрического пространства компактов евклидового пространства, для того же пространства доказана минимальность суботношения Штейнера степени 3 и 4.
2. Получена точная оценка минимума суботношений Штейнера для выпуклых пятиточечных множеств на плоскости и произвольных четырехточечных множеств в пространстве
3. Доказана невозможность наличия ровно 41, 59 или 67 кратчайших между двумя компактами евклидового пространства.

Методы исследования

В диссертации применяются методы геометрии, топологии, теории графов. Используется метод машинного перебора. Вводится новый подход к исследованию реберных покрытий через склейки графов с выделенной вершиной и атомарные графы.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характре. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов в области метрической геометрии, теории минимальных сетей, дискретной математике и теории графов.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- на семинаре "Оптимальные сети" под руководством профессора А. О. Иванова и А. А. Тужилина (МГУ, 2010-2014 гг.)
- на второй международной конференции "Вероятность, анализ и геометрия" (МГУ, 2014 год)
- на семинаре "Дифференциальная геометрия и приложения" под руководством академика А. Т. Фоменко (МГУ, 2014 год)
- на семинаре "Дискретная геометрия и теория чисел" под руководством профессора М. Д. Ковалева (МГУ, 2015 год)

Публикации

Основное содержание диссертации опубликовано в трех работах, все — в журналах из перечня ВАК (для работ [2] и [3] в перечень входит версия журнала на английском языке).

Структура и объем диссертации

Работа состоит из введения, четырех глав, списка литературы и приложения. Библиография содержит 27 наименований. Текст диссертации изложен на 51 странице и содержит 13 рисунков.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации излагается история рассматриваемой проблемы, формулируются основные результаты, приводится краткое описание работы вместе с информацией о публикациях и апробации.

В приложении приводится исходный код программы, производящей поиск возможного количества кратчайших в пространстве компактов евклидового пространства.

Содержание главы 1

В первой главе вводятся понятия сетей, различных отношений для конечных множеств и пространств, реберных покрытий и формулируются результаты, необходимые для доказательства основных утверждений диссертации, в том числе отношение между реберными покрытиями двудольного графа и кратчайшими в пространстве компактов.

Содержание главы 2

Во второй главе исследуются кратчайшие сети на пространстве компактов евклидового пространства, их переход при некотором отображении в пространство "большей размерности', определяемое как прямая сумма конечного числа копий исходного пространства с метрикой максимума, показывается, что при этом отображении не изменяются длины кратчайших сетей. Показывается, что отношения Штейнера и Штейнера-Громова, а также суботношения Штейнера степеней 3 и 4 в этих пространствах принимают минимально возможные значения.

Теорема 1. *Отношения Штейнера и Громова-Штейнера на пространстве компактов евклидового пространства с расстоянием Хаусдорфа равны минимально возможному значению* $\frac{1}{2}$. *Суботношения Штейнера степеней 3 и 4 равны минимально возможным значениям* $\frac{3}{4}$ *и* $\frac{2}{3}$ *соответственно.*

Данные значения суботношения Штейнера степеней 3 и 4 порождают ограничение на обычное суботношение Штейнера, которое, таким образом, не больше $\frac{2}{3}$. Утверждения относительно всех отношений доказываются с помощью построения примеров, на которых искомое отношение достигается.

Содержание главы 3

Третья глава посвящена исследованиям суботношения Штейнера для пятиточечных множеств на плоскости и четырехточечных множеств в пространстве. Опровергается имевшаяся гипотеза, что суботношение Штейнера для пятиточечных множеств на плоскости равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$, что верно для трех- и четырех- множеств, с помощью примера находится оценка сверху на это суботношение, равная $0.865\ldots < 0.866\ldots = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тем не менее, эта гипотеза оказывается верной для выпуклых пятиточечных множеств:

Теорема 2. *Суботношение Штейнера выпуклого пятиточечного множества на плоскости не меньше* $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вводится и исследуется параметрическое суботношение Штейнера степени 4, доказывается ряд его свойств для случая трехмерного пространства, что приводит к теореме о суботношении Штейнера степени 4:

Теорема 3. *Суботношение Штейнера степени 4 для трехмерного евклидового пространства равно* $\frac{1}{7}(2\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

Содержание главы 4

В четвертой главе исследуются возможные количества кратчайших между двумя компактами в евклидовом пространстве Как известно, эта задача редуцируется к задаче поиска возможных количеств реберных покрытий двудольных графов. Вводятся и исследуются понятия α и β-значений для графа с выделенной вершиной, показывается их рекурсивная природа. Вводится понятие атомарного графа, производится поиск всех атомарных двудольных графов с числом реберных покрытий не выше 67, таких графов оказывается 7.

Оказывается, любой двудольный граф с выделенной вершиной можно "собрать" из некоторого количества атомарных, при этом для нахождения значений α и β важны только значения α и β графов, из которых составлен граф, а внутренняя структура этих графов не имеет значения. Это позволяет разработать алгоритм машинного перебора построения графов со всеми возможными значениями α и β, не превышающих 67.

Теорема 4. *У двудольного графа не может быть 19, 37 (число 37 было получено автором независимо, но результат был получен раньше К. Хенигс), 41, 59 или 67 реберных покрытий. Существует двудольный граф с произвольным количеством реберных покрытий от 1 до 67 за исключением указанных выше.*

Числа 19 и 37 были известны ранее, а следующие три представляют собой новый результат.

Заключение

В этом разделе мы еще раз перечислим основные результаты работы и возможные дальнейшие пути исследования.

В главе 2 были найдены отношения Штейнера и отношение Штейнера-Громова для пространства компактов в евклидовом пространстве. Также были найдены суботношения Штейнера степеней 3 и 4. Возможными путями для продолжения исследований в том же направлений видятся следующие задачи:

- Поиск отношений Штейнера и Штейнера-Громова для пространств компактов в банаховых пространствах
- Поиск суботношения Штейнера и суботношений Штейнера более высоких степеней с помощью описанной операции увеличения размерности, проверка гипотезы о минимальности этих суботношений

В главе 3 были найдены ограничения на суботношение Штейнера для выпуклых пятиточечных множеств на плоскости, а так же для четырехточечных множеств в пространстве, была показана неверность гипотезы о том, что суботношение Штейнера для плоскости равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Идеи, использованные в этой главе можно попытаться перенести на случай большего количества точек и для проверки гипотезы о том, что суботношение Штейнера не меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$ для всех конечных выпуклых множеств.

В главе 4 была разработана теория, позволяющая машинным перебором доказать невозможность существования двудольного графа, имеющего 19, 37, 41, 59 или 67 реберных покрытий. Дальнейшие исследования могут включать в себя следующие задачи

- Поиск продолжения данной последовательности
- Существует ли натуральное число n такое, что не существует дерева с таким количеством реберных покрытий, но существует лес?
- Существует ли натуральное число n такое, что не существует двудольного планарного графа, имеющего такое количество реберных покрытий, но существует двудольный непланарный граф с таким количеством покрытий?
- Существует ли составное натуральное число n такое, что не существует двудольного планарного графа, имеющего такое количество реберных покрытий?

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность профессору А. О. Иванову и профессору А. А. Тужилину за постановку задач, поддержку и внимание к работе, а также П. А. Бородину, Н. П. Стрелковой, И. Л. Лауту и другим слушателям и докладчикам семинара “Оптимальные сети” за полезные обсуждения и предложения.

Список публикаций по теме диссертации

[1] З.Н.Овсянников, *Количество реберных покрытий двудольных графов или кратчайших с фиксированнми концами в пространстве компактов в* $\mathbb{R}^n$, Доклады Академии Наук, 466(2016), выпуск 4, стр. 402–405

[2] З. Н. Овсянников *Отношения Штейнера, Штейнера–Громова и суботношения Штейнера для пространства компактов в евклидовой*

плоскости с расстоянием Хаусдорфа, Фундаментальная и прикладная математика, 18(2013), выпуск 2, стр. 157-165

[3] З. Н. Овсянников *Суботношение Штейнера для пяти точек на плоскости и четырех точек в пространстве*, Фундамент. и прикл. матем., 18 (2013), стр. 167–179