Отзыв
научного руководителя на диссертационную работу

Захара Николаевича Овсянникова

«Задачи об оптимальном соединении в пространствах компактов»

на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация Захара Николаевича Овсянникова посвящена изучению геометрии пространств компактных подмножеств евклидова пространства, в которых расстояние между двумя компактами понимается в смысле Хаусдорфа. Пространства компактов с метрикой Хаусдорфа появились в начале XX века и с тех пор интенсивно изучаются. Интерес к ним объясняется важностью этих пространств для таких приложений как компьютерная графика, распознавание образов, финансовая математика. Данная работа посвящена важной геометрической задаче исследования оптимальных соединений в пространствах компактов. Как известно, пространство компактов евклидова пространства с метрикой Хаусдорфа является геодезическим, т.е., любые две его точки-компакта можно соединить кратчайшей кривой. В диссертации изучается вопрос о возможном количестве таких кривых. Также рассматривается более общая задача об оптимальном соединении трех и более точек компактов с помощью кратчайшей сети – минимального дерева Штейнера. Кратчайшие деревья можно рассматривать как обобщение геодезических, возникающее, если допустить ветвления.

Задачи о кратчайших и, более общо, минимальных сетях сложны уже для случая сетей на обычной евклидовой плоскости. Это связано, прежде всего, с тем, что минимальные сети могут иметь дополнительные (не входящие в граничное множество) точки ветвления. Последнее приводит к экспоненциально большому перебору возможных комбинаторных структур сетей-кандидатов (какие вершины с какими соединяются). Поэтому на передний план выходят геометрические методы изучения минимальных сетей (попытки сократить перебор с помощью необходимых геометрических свойств минимальных сетей) и приближенные алгоритмы построения минимальных сетей, наиболее популярным из которых является замена кратчайшего дерева с данной границей на так называемое минимальное остовное дерево, и оценка погрешности этих алгоритмов. Относительная ошибка таких алгоритмов в наихудшей возможной ситуации измеряется так называемыми отношениями типа Штейнера. В рассматриваемой диссертации получено несколько важных результатов, касающихся отношений типа Штейнера пространств компактов.

Перечислим основные результаты диссертации.

В работе **показано, что отношение Штейнера и отношение Громова-Штейнера пространства компактов евклидова пространства равно 1/2.** Напомним, что отношение Штейнера евклидовой плоскости было введено в рассмотрение в 60е годы прошлого века (E.Gilbert и H.Pollack) как точная нижняя грань отношений длины кратчайшего и минимального оствовного деревьев, соединяющих одно и то же конечное подмножество плоскости, состоящее из двух и более точек, по всем таким подмножествам. Это понятие естественным образом обобщается на случай произвольного метрического пространства и может быть использована для оценки относительной ошибки приближения кратчайшего дерева минимальным остовным. Очевидно, отношение Штейнера не превосходит единицы, и несложно показать, что оно не может быть меньше 1/2. Однако точное вычисление отношения Штейнера – очень сложная задача, в настоящий момент оно известно для очень небольшого набора пространств. Например, гипотеза Джилберта-Поллака о том, что отношение Штейнера евклидовой плоскости достигается на множестве вершин правильного треугольника, остается недоказанной более 40 лет. В диссертации отношение Штейнера вычислено для пространства компактов евклидова пространства. Оно оказалось равным 1/2.

Отношение Громова-Штейнера возникло при изучении так называемых минимальных заполнений конечных метрических пространств. Теория минимальных заполнений конечных метрических пространств возникла недавно на стыке теории минимальных сетей и теории минимальных заполнений римановых многообразий в смысле М.Громова. Взвешенный граф G, множество вершин которого содержит конечное метрическое пространство X, называется заполнением этого пространства, если минимальный возможный вес пути в G, соединяющего произвольную пару точек из X, не может быть меньше расстояния между этими точками (неформально, «приклейка» графа не уменьшает расстояния). Минимальное заполнение – это заполнение минимального возможного веса. Оказывается, минимальные заполнения тесно связаны с кратчайшими деревьями, а именно, вес минимального заполнения для X равен наименьшей возможной длине кратчайшего дерева, соединяющего изометрический образ X при всевозможных изометричных вложениях во всевозможные метрические пространства. Отношение Штейнера-Громова метрического пространства M определяется как точная нижняя грань отношений веса минимального заполнения к длине минимального остовного дерева по всем конечным подмножествам метрического пространства M. В работе показано, что отношение Штейнера-Громова пространства компактов евклидова пространства также наименьшее возможное и равно 1/2.

В диссертации также **получен ряд оценок для суботношения Штейнера пространств компактов евклидова пространства.** Суботношение Штейнера определяется как точная нижняя грань отношения веса минимального заполнения к длине кратчайшего дерева по всем конечным подмножествам метрического пространства. Отметим, что суботношение Штейнера еще более сложно вычислимая характеристика, чем отношение Штейнера и отношение Громова-Штейнера, так как в его определении участвуют сразу две сложно вычислимых величины. Диссертанту удалось получить общую оценку для суботношения пространств компактов, а также точную оценку для случая пятиточечных выпуклых подмножеств плоскости.

Наконец, в диссертации **продолжено изучение возможного количества кратчайших кривых, соединяющих пару компактов евклидова пространства**. Как уже отмечалось выше, хорошо известно, что любые два таких компакта могут быть соединены некоторой кратчайшей кривой. Причем количество таких компактов равно количеству реберных покрытий некоторого двудольного графа, который строится по заданным компактам. В 2008-2009 году S.Schliker и другие обнаружили, что количество кратчайших может принимать любое значение в интервале от 1 до 36, за исключением 19. Возник естественный вопрос: какие еще лакун тут возникают. В 2013 году K. Honigs показала, что число 37 также не реализуется как количество кратчайших. Диссертанту удалось продолжить эту последовательность «запрещенных чисел». А именно, в работе показано, что **количество кратчайших, соединяющих пару компактов, не может равняться 41,59 и 67.** Кроме того, в интервале от 1 до 1000, все числа, кроме 19, 37, 41, 59, 67, а также, возможно, кроме 82, 97, 149, 197, 223, 257, 291, 379 реализуются как количества кратчайших. Доказательство основано на введенном З.Н.Овсянниковым понятии «атомарного графа», которое позволило организовать эффективный компьютерный перебор.

При решении этих задач З.Н.Овсянников использовал различные комбинаторные и геометрические методы, сведения о геометрии пространств компактов с метрикой Хаусдорфа, теория минимальных сетей.

По теме диссертации опубликованы три научные статьи в журналах из списка ВАК, а также несколько тезисов. Результаты докладывались на научных семинарах, на российских и международных конференциях.

Считаю, что работа З. Н. Овсянникова удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.04 (геометрия и топология), и может быть рекомендована к защите в диссертационном совете Д 501.001.84 при МГУ.

Доктор физико-математических наук

А.О. ИВАНОВ

21.01.16г

Подпись А.О.Иванова заверяю

И.О. декана механико-математического факультета МГУ
профессор

В.Н.ЧУБАРИКОВ