

# ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

## на диссертационную работу З. Н. Овсянникова

### ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ СОЕДИНЕНИИ

### В ПРОСТРАНСТВАХ КОМПАКТОВ

представленную к защите на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация З. Н. Овсянникова посвящена решению актуальных задач метрической, дискретной и дифференциальной геометрии, связанных с оптимальным соединением точек на евклидовой плоскости, в трёхмерном пространстве и в пространстве компактов евклидова пространства с метрикой Хаусдорфа.

В диссертации рассматриваются четыре основных объекта: кратчайшая кривая, минимальное дерево Штейнера, минимальное остовное дерево и одномерное минимальное заполнение.

Минимальное дерево Штейнера — это классический объект, представляющий собой обобщение понятия кратчайшей геодезической на случай более чем двух граничных точек, которые требуется соединить как можно более коротким связным «графом». Причём в этом графе помимо исходных точек допускаются дополнительные вершины. Возможность использования этих дополнительных вершин, называемых часто точками Штейнера, делает задачу о поиске такого минимального дерева геометрически, комбинаторно и вычислительно сложной.

Сложность этой задачи делает актуальным изучение приближений к минимальному дереву Штейнера и оценку точности этих приближений. Классический подход — это рассмотрение минимального остовного дерева (т.е. дерева без дополнительных вершин) и оценка величины отношения длины дерева Штейнера к длине минимального остовного дерева. Инфимум этой величины по всем конечным подмножествам пространства называется отношением Штейнера.

В 2012 году А.О. Иванов и А.А. Тужилин ввели понятие одномерного минимального заполнения конечного метрического пространства. Минимальное заполнение имеет смысл кратчайшего из всех деревьев Штейнера, которые только можно получить, изометрично вкладывая данное конечное метрическое пространство во всевозможные связные метрические пространства. Возникла задача об оценке соотношения между весом минимального заполнения и длиной минимального дерева Штейнера в фиксированном пространстве. Инфимум соответствующего отношения по всем конечным подмножествам данного пространства называется суботношением Штейнера. Суботношение Штейнера позволяет оценивать длину минимального дерева Штейнера через вес минимального заполнения.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения. В главе 1 диссертации вводятся понятия и формулируются известные факты, необходимые для доказательства результатов диссертации.

В главе 2 рассматривается пространство компактов евклидова пространства с метрикой Хаусдорфа. Найдено отношение Штейнера и в случае трёх- и четырёхточечных подмножеств — суботношение Штейнера. Все три отношения оказались равны наименьшим возможным для этих отношений значениям. Это означает, неформально говоря, что приближение деревьев Штейнера минимальными остовными деревьями и минимальными заполнениями в этом пространстве имеет настолько низкую точность, насколько это возможно. Доказательство теорем этой главы проводится с помощью придуманного автором интересного метода — перехода от пространства компактов к прямой сумме нескольких экземпляров этого пространства и обратно.

В главе 3 рассматриваются евклидова плоскость и трёхмерное пространство. Доказано, что значение пятиточечного суботношения Штейнера в случае выпуклых множеств на плоскости равно трёхточечному (оно же четырёхточечное) значению (известному до работ автора), и приведён пример, показывающий, что в невыпуклом случае пятиточечное отношение оказывается меньше этого значения. Кроме того, точно вычислено четырёхточечное суботношение Штейнера в трёхмерном пространстве.

В главе 4 снова рассматривается пространство компактов евклидова пространства с метрикой Хаусдорфа, но на этот раз изучается вопрос о возможном количестве различных кратчайших путей, соединяющих две данные точки. Результаты этой главы используют и существенно усиливают результаты 2009 г. группы Chantel S. Blackburn, Kristina Lund, Steven Schlicker, Patrick Sigmon, Alexander Zupan и результат 2013 г. K.Honigs. В диссертации показано, как меняется количество путей при операциях склейки графов, вводится и исследуется понятие атомарного графа. Эти теоретические результаты позволили автору диссертации достигнуть успеха при машинном переборе.

Автор диссертации продемонстрировал хорошее владение методами евклидовой, метрической и дискретной геометрии, знание теории минимальных сетей, теории одномерных минимальных заполнений и свойств пространств компактов с метрикой Хаусдорфа. Доказательства диссертации отличаются разнообразием подходов и изобретательностью. Практически каждое доказательство содержит новую нетривиальную идею или конструкцию.

По затронутым в диссертации работам ведутся активные исследования. Задачи об оптимальном соединении в рассматриваемых пространствах имеют большое прикладное значение.

По работе имеются следующие замечания.

- Ошибки в орфографии (например, в слове «Фибоначчи»), пунктуации (например, отсутствие запятой в конце причастных оборотов) и незначительные опечатки (например, в конце доказательства теоремы 2.9 вместо  $2/3$  написано  $3/4$ , а на стр.31 написано «ровно одно ребро невырождено» вместо «ровно одно ребро вырождено»).
- Опечатки, затрудняющие понимание текста.
  - На стр. 20 при определении множества  $B$  (и в некоторых других местах работы) вместо знака «принадлежит» используется знак «включается». Различие между этими знаками в контексте работы принципиально, так как

один и тот же объект то представляет собой подмножество, то является элементом множества (например, точкой пространства компактов).

- В конце доказательства леммы 2.2 перепутан знак неравенства.
- На стр. 23 написано, что суботношение Штейнера трёх- четырёхточечного множества на плоскости равно  $3/2$ , а на самом деле имеется в виду «корень из трёх пополам».
- Неаккуратность при использовании терминологии. Определение 1.17 дано для локально кратчайших сетей, а далее в том же смысле используется термин «локально минимальная сеть». В этой области очень много различных по сути терминов с похожими названиями, поэтому внезапное использование такого рода синонимов вводит в заблуждение.
- На стр. 27 в скобках утверждается, что минимальное параметрическое дерево с топологией  $G$  обязательно будет локально минимальным, что неверно. Это можно утверждать только при условии, что минимальное параметрическое дерево невырождено. Иначе уже для достаточно вытянутого прямоугольника на плоскости и «неудачной» топологии минимальная параметрическая сеть не будет локально минимальной. К счастью, в дальнейших рассуждениях это неверное утверждение не используется.

Эти небольшие замечания никоим образом не снижают ценность работы.

Основные результаты работы доложены на научных семинарах, конференциях и опубликованы в рецензируемых журналах. Полученные в работе результаты являются нетривиальными, новыми и могут быть использованы для дальнейшего изучения задач оптимального соединения в евклидовых пространствах и в пространствах компактов с метрикой Хаусдорфа, а также при чтении специальных курсов.

Результаты работы актуальны, новы и должным образом опубликованы. Автореферат правильно отражает содержание работы. Таким образом, диссертационная работа З.Н.Овсянникова полностью соответствует требованиям «Положения о порядке присуждения учёных степеней», утверждённого Постановлением Правительства РФ № 842, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата наук, а Захар Николаевич Овсянников заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04 — геометрия и топология.

Официальный оппонент, кандидат физико-математических наук

12 мая 2016 г.

Наталия Павловна Стрелкова

[nstrelk@gmail.com](mailto:nstrelk@gmail.com)

8916-219-4839

Подпись Н.П. Стрелковой заверяю

Руководитель СП №15 ГБОУ «Школа №171



В.К. Ильчишин