Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

На правах рукописи
УДК 517.965

Войнов Андрей Сергеевич

Многомерные уравнения самоподобия и приложения

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена на кафедре общих проблем управления Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Протасов Владимир Юрьевич**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Карасев Роман Николаевич** главный научный сотрудник кафедры высшей математики ФГАОУ «Московский физико-технический институт (государственный университет)»
	доктор физико-математических наук, профессор **Фарков Юрий Анатольевич** профессор кафедры прикладных информационных технологий Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Математический институт имени В.А.Стеклова Российской академии наук» МИАН

Защита состоится 21 октября 2016 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета:
http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi

Автореферат разослан   2016 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

Власов Виктор Валентинович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена исследованию функциональных уравнений самоподобия и возникающим при их изучении задачам выпуклой геометрии, теории Перрона-Фробениуса и других областей. Самоподобные функции нашли широкое применение в различных задачах анализа, в том числе, в теории всплесков, масштабирующих уравнениях (refinement equations), уточняющих алгоритмах (subdivision algorithms), комбинаторной теории чисел, теории вероятности. Исследованиям различных типов уравнений самоподобия посвящены работы многих авторов, в том числе Добеши, Лагариаса, Митчелли, Праутша, Протасова, Лау, Вонга, Джиа, Каваретта, Дахмена, Шейпака, Дюбука, Дерфеля, Дин, Левина, Кабрели, Коллелла, Хейля, Молтера и других.

Приведем определение одномерного уравнения самоподобия. В пространстве $\mathbb{R}^n$ зафиксируем некоторый набор аффинных операторов $B_1, \ldots, B_k$. Рассмотрим единичный отрезок $I = [0, 1]$. Через $g_1, \ldots, g_k$ обозначим одномерные аффинные операторы такие, что оператор g_i переводит единичный отрезок в отрезок $[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]$, $i = 1, \ldots, k$. Обозначим сужение функции f на каждый из этих отрезков через $f_i := f(g_i(t))$. Самоподобие функции $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ рассматривается как условие того, что сужение f_i на каждый из отрезков равносильно применению оператора B_i к исходной функции (рисунок 0.1). То есть $f_i(t) = B_i f(t)$ при всяком $i = 1, \ldots, k$.

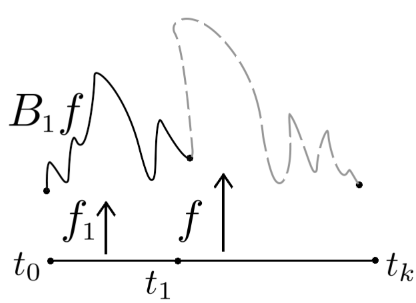

Рис.0.1. Самоподобие функции f.

Другими словами, требуется согласованность действия операторов g_i в области определения с действием операторов B_i в образе $f([0, 1])$. Таким образом, условие самоподобия функции $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ означает коммутативность для всякого $i = 1, \ldots, k$ диаграммы

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_i"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "B_i"] \\ {[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \tag{0.1}$$

Набор таких диаграмм равносилен следующей системе из k функциональных уравнений, которую мы называем просто *уравнением самоподобия*:

$$f(t) = B_i f(g_i^{-1}(t)),\ t \in [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}],\ i = 1, \ldots, k \tag{0.2}$$

В качестве важного примера задачи, в которой возникают уравнения самоподобия, приведем масштабирующие уравнения (refinement equations). Такого типа уравнения возникают при построении базисов всплесков и широко изучались в работах Добеши, Лагариаса, Протасова, Освальда, Плонки и других авторов.

Пример 1. Масштабирующие уравнения. Масштабирующие уравнения, то есть разностные уравнения со сжатием аргумента, применяются при построении всплесков с компактным носителем, при изучении уточняющих интерполяционных алгоритмов, в теории приближений, при изучении случайных степенных рядов и так далее. Предположим, задана последовательность чисел $c_0, c_1, \ldots, c_N$. *Масштабирующим уравнением* на функцию $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется уравнение

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{N} c_m \varphi(2x - m)$$

Оказывается, что если построить из решения масштабирующего уравнения вектор-функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$, определенную как

$$f(x) = (\varphi(x), \varphi(x+1), \ldots, \varphi(x+N-1)) \in \mathbb{R}^N,$$

то f будет решением уравнения самоподобия вида (0.1). Семейство из двух операторов B_1, B_2, задающих уравнение самоподобия здесь строится по последовательности $c_1, \ldots, c_N$ следующим образом. Рассматривается пара матриц с элементами $(B_1)_{ij} = c_{2i-j-1}$ и $(B_2)_{ij} = c_{2i-j},\ c_m = 0$ при $m < 0$ и $m \geqslant N+1$. Такая пара матриц будет обладать общим инвариантным аффинным подпространством. В ограничении на него и рассматривается уравнение самоподобия на функцию f, построенную по решению масштабирующего уравнения.

Центральными проблемами в круге задач, связанных с уравнениями самоподобия являются вопросы существования решения в различных классах функций и их численное нахождение. В то время, как линейные разностные уравнения имеют аналитические решения, разностные уравнения со сжатием аргумента, которые мы рассматривали, уже не обладают такими свойствами. Решения уравнений самоподобия, как правило, не являются не только аналитическими, но и бесконечно дифференцируемыми функциями. Они имеют переменную локальную гладкость и обладают другими фрактальными свойствами. В подавляющем большинстве приложений и работ ставится вопрос о разрешимости уравнений в классе непрерывных функций и в классах L_p. В последнем случае под коммутативностью диаграммы (0.1) подразумевается коммутативность, выполненная почти во всех точках $t \in [0,1]$ по мере Лебега. Естественным образом здесь возникает аффинный непрерывный оператор самоподобия $\mathbf{B}$, действующий в пространстве $L_p([0,1], \mathbb{R}^n)$ по правилу

$$[\mathbf{B}f](t) = B_i f(g_i^{-1}(t)), \quad t \in [t_{i-1}, t_i],\ i = 1, \ldots, k$$

Решение уравнения самоподобия является неподвижной точкой этого оператора. Ясно, что если оператор $\mathbf{B}$ – сжимающий в пространстве $L_p([0,1],\mathbb{R}^n)$, то по теореме о сжимающих отображениях, он имеет единственную неподвижную точку. Более того, для уравнения (0.2) верно и обратное. Если решение существует, то оператор $\mathbf{B}$ оказывается сжимающим в пространстве L_p. Тогда последовательно применяя его к произвольной начальной функции $f_0 \in L_p([0,1],\mathbb{R}^n)$, мы можем находить решение уравнения самоподобия в качестве предела итераций $\mathbf{B}^m f_0,\ m \to \infty$.

Если существует L_∞-решение уравнения (0.2), то его образ будет фракталом (с точностью до меры 0). В то же время, если не существует L_∞-решения уравнения самоподобия, образом решения (0.2) может быть уже некомпактное множество. Итак, для некоторых семейств операторов $\{B_1,\dots,B_k\}$ может не существовать фрактального множества в $\mathbb{R}^n$, но существовать решение уравнения (0.2).

Первая попытка классификации уравнений самоподобия была предпринята Митчелли и Праутшем в 1989 году. Они рассмотрели класс уравнений (0.2) следующего вида. Задана пара стохастических по столбцам $(n+1)\times(n+1)$ матриц A_1, A_2. Это значит, что каждая из матриц содержит только неотрицательные элементы и сумма элементов в любом столбце равна 1. Они обладают общим инвариантным подпространством $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$, состоящим из точек с единичной суммой координат. Рассматривалось следующее уравнение самоподобия в пространстве непрерывных функций $C([0,1],L)$:

$$f(t) = \begin{cases} A_1|_L\ f(2t), & t \in [0,\frac{1}{2}]; \\ A_2|_L\ f(2t-1), & t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Митчелли и Праутша получили конструктивные критерии существования непрерывного решения такого уравнения.

Позднее, в работах Протасова были найдены критерии существования суммируемых решений уравнений самоподобия одной переменной. Им было показано, что лишь существование решения уравнения (0.2) влечет его единственность. Было получено явное условие разрешимости уравнений самоподобия в терминах асимптотики произведений операторов $B_1,\dots,B_k$, действующих в образе.

При обобщении уравнений самоподобия на функции многих переменных, возникают специальные самоаффинные тела. В одномерном случае самоподобие функции определялось при помощи разбиения области определения, единичного отрезка, на меньшие отрезки. По аналогии, в многомерном случае уравнения самоподобия естественно определять на области в $\mathbb{R}^d$, допускающей разбиение на части, каждая из которых аффинно-подобна всей области. Такие множества называются *самоаффинными*. Нас будут интересовать в первую очередь выпуклые самоаффинные множества: в подавляющем большинстве приложений выпуклость предполагается, кроме того, без выпуклости самоаффинные множества имеют сложную фрактальную структуру, что существенно усложняет работу с ними. Итак, нас будут интересовать *самоаффинные тела*. Самоаффинным телом, точнее, самоаффинной парой, называется пара, состоящая из выпуклого тела K в $\mathbb{R}^d$ и конечного семейства невырожденных аффинных операторов $\{A_1, \ldots, A_k\}$ с условиями:

- $K = \bigcup_{i=1}^k A_i K$;
- $\mathrm{int}\, A_i K \cap \mathrm{int}\, A_j K = \varnothing$, то есть элементы разбиения могут пересекаться только по границам.

Самоаффинные множества тесно связаны с самоаффинными замощениями пространства. В литературе активно изучались условия на операторы разбиения $\{A_1, \ldots, A_k\}$, при которых самоаффинное множество имеет максимальную возможную размерность. Исследованиям самоаффинных множеств и самоаффинных тел посвящены работы Джоу, Рихтера, Хертеля и ряда других авторов. В сборнике открытых задач из области «интуитивной» геометрии Крофта, Фалконера и Гая 1991 года, приводится следующая проблема Валлета, цитируемая из книги 1978 года:

Верно ли, что любое самоаффинное тело либо является многогранником, либо аффинным образом прямой суммы самоаффинного многогранника на некоторое выпуклое тело?

Легко показать, что прямая сумма самоаффинного тела и выпуклого тела вновь является самоаффинным телом. Так, например, любой цилиндр, будучи прямой суммой отрезка на основание, всегда является самоаффинным.

В двумерном случае в работе Рихтера 2011 года было показано, что на плоскости любое самоаффинное тело действительно является многоугольником. Более того, нетрудные манипуляции с подсчетом углов позволяют доказать, что число его вершин не превосходит 5. В работе Рихтера и Хертеля было доказано, что любой четырехугольник допускает самоаффинное разбиение и была построена серия самоаффинных пятиугольников. В больших размерностях вопрос не изучался.

Многие функциональные уравнения, встречающиеся в теории приближений и смежных областях, имеют особый вид операторов семейства $\mathcal{B}$, действующих в образе. Напомним, что $d \times d$ матрица с неотрицательными элементами называется *стохастической по столбцам* (далее просто – стохастической), если сумма ее элементов во всяком столбце равна 1. Все стохастические матрицы обладают инвариантной аффинной гиперплоскостью с единичной суммой координат векторов $\sum_{i=1}^d x_i = 1$. В уравнениях Митчелли-Праутша, широком классе уточняющих алгоритмов и других задачах возникают уравнения самоподобия с семейством стохастических матриц $\mathcal{B}$, действующих в образе. Зачастую лишь комбинаторное строение этих матриц отвечает за разрешимость соответствующих уравнений самоподобия.

Неотрицательную матрицу мы будем называть положительной, если все ее элементы больше 0. Неотрицательная матрица A называется *примитивной*, если в некоторой степени она положительна, то есть найдется такое $N > 0$, что A^N – положительна.

Ясно, что если матрица имеет левый нижний блок нулей, то никакая ее степень не может быть положительной: блок нулей будет сохраняться. Если же неотрицательная матрица не обладает инвариантным подпространством, порожденным базисными векторами, то она называется *положительно неприводимой.*

Если матрица A положительно неприводима, то либо она примитивна, либо имеет $r \geqslant 2$ максимальных по модулю собственных значений. В этом случае существует разбиение множества базисных векторов $\{e_1, \ldots, e_d\}$ на r непустых подмножеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$, на которых A действует как циклическая перестановка, то есть переводит Ω_i в линейную оболочку Ω_{i+1}. Мы полагаем $\Omega_{r+1} = \Omega_1$. Таким образом, существует перестановка базисных векторов, после которой A имеет циклический блочный вид:

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & B_r \\ B_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & B_{r-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Число r называется *индексом импримитивности* матрицы A. Для примитивной матрицы $r = 1$, для непримитивной $r \geqslant 2$.

Эти условия непримитивности неотрицательной матрицы обычно называют теоремой Перрона-Фробениуса. Критерий примитивности был получен Фробениусом в 1912 году. Затем Романовским в работе 1933 года была добавлена комбинаторная интерпретация индекса импримитивности: r является наибольшим общим делителем длин циклов в графе матрицы A, что играет важную роль в теории графов.

Примитивные матрицы нашли широкое применение в цепях Маркова, теории алгоритмов, задачах функционального анализа, теории автоматов. Исследованиям в этой области посвящены работы Волкова, Трахтмана, Альпиных, Блонделя, Юнгерса, Ольшевского, Цициклиса, Коэна, Селлерса, Форназини, Валкера, Шнайдера, Виландта, Киркланда, Хольц, Раджави и других авторов.

Существенная часть диссертации посвящена смежным с теорией уравнений самоподобия задачам, в первую очередь вопросам о строении различных полугрупп аффинных операторов. В диссертации удается получить ряд фактов из области выпуклой геометрии о строении ограниченных полугрупп аффинных операторов и самоаффинных тел. Такого рода задачи изучались в работах Раджави, Омладича, Рихтера, Хертеля, Джоу и других авторов.

Цель работы

Перед автором стояли следующие задачи:

- Построить многомерный аналог уравнений самоподобия и перенести на них известные результаты со случая одной переменной;
- Применить результаты теории уравнений самоподобия к исследованию масштабирующих функциональных уравнений;
- Изучить строение самоаффинных тел;
- Изучить строение ограниченных полугрупп аффинных операторов;
- Расширить теорию Перрона-Фробениуса на полугруппы неотрицательных матриц.

Научная новизна

В диссертации получены следующие основные результаты:

- Доказан критерий разрешимости многомерных уравнений самоподобия в пространствах L_p и исследованы свойства решений;
- Получена теорема о структуре полугрупп ограниченных аффинных операторов в терминах их инвариантных норм и подпространств;
- Получена классификация самоаффинных тел в терминах их инвариантных сечений;
- Получено обобщение теории Перрона-Фробениуса на случай матричных полугрупп.
- Получен критерий разрешимости уравнений Митчелли-Праутша в пространстве L_p и полиномиальный алгоритм его проверки;

Основные методы исследования

В работе используются методы классического функционального анализа и современной выпуклой геометрии. Также привлекаются некоторые идеи из теории динамических систем, в том числе, топологических Марковских цепей, и теории графов.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. На практике может быть использован построенный в работе полиномиальный алгоритм проверки примитивности семейства неотрицательных матриц. Полученный критерий разрешимости масштабирующих уравнений с неотрицательными матрицами может быть применен при построении всплесков и в интерполяционных алгоритмах.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. "Geometry, Topology, Algebra and Number theory, Applications" конференция, посвященная 120-летию Б.Н.Делоне (Москва, МИ РАН, 2010);
2. "Approximation Theory" конференция, посвященная 90-летию С.Б.Стечкина (Москва, МИ РАН, 2010);
3. «Ломоносов» (Москва, МГУ, 2011);
4. 17-я конференция ILAS (Брауншвейг, Германия, 2011);
5. "Matrix Methods in Mathematics and Applications" (Москва, МИ РАН, 2011);
6. The 2012 Haifa Matrix Theory Conference (Haifa, Israel, 2012);
7. "International Conference on Wavelets and Applications" (Санкт-Петербург, Россия, Институт им. Л.Эйлера, 2012);
8. «Ломоносов» (Москва, МГУ, 2013);
9. "Summer School on Dynamical Systems" (Gdynia, Poland, 2013);
10. Конференция «Встреча поколений» (Москва, НМУ, 2015);
11. "International Conference on Wavelets and Applications" (Санкт-Петербург, Россия, Институт им. Л.Эйлера, 2015).
12. 4th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications (Москва, Россия, Skoltech, 2015).
13. The Fifth German-Russian Week of the Young Researcher on Discrete Geometry (Москва, Россия, МФТИ, 2015).

На научно-исследовательских семинарах:

1. Семинар по теории приближений и экстремальным задачам под руководством В.М.Тихомирова, МГУ им. М.В. Ломоносова (2009)
2. Семинар по теории функций под руководством Б.С.Кашина и С.В.Конягина, МГУ им. М.В. Ломоносова (2010);
3. Научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова (2012);
4. Семинар по геометрической теории оптимального управления под руководством М.И. Зеликина и Л.В. Локуциевского, МГУ им. М.В. Ломоносова (2012);
5. Семинар по дискретной математике под руководством М.Н.Вялого и С.П.Тарасова, ВЦ РАН (2012);
6. Межкафедральный семинар МФТИ по дискретной математике, Московский физико-технический институт (2013);
7. Семинара «Дискретная и вычислительная геометрия», ИППИ РАН (2015);

На конкурсах:

1. доклады в финалах конкурсов Мёбиуса в 2010 и 2012 годах (Москва, НМУ);

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 14 работах (6 в рецензируемых журналах, 8 в трудах конференций). Список литературы приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации Диссертационная работа состоит из 4 глав. Общий объем диссертации составляет 75 страницы. Список литературы содержит 74 наименования.

Краткое содержание работы

Глава I диссертации посвящена расширению теории уравнений самоподобия на случай функций нескольких переменных. В приложениях многомерные уравнения самоподобия встречались в связи с уточняющими уравнениями функций многих переменных, при построении многомерных вейвлетов, и в других областях. В качестве одного из первых уравнений самоподобия, определенных не на отрезке, приведем так называемое уравнение Митчелли-Праутша. В их работе рассматривалось следующее уравнение на вектор-функцию, определенную на единичном кубе $[0,1]^d$.

$$f(x) = B_i f(A_i^{-1}x), \quad i - \text{ номер ближайшей к } x \text{ вершины куба,} \qquad (0.4)$$

где $A_1, \ldots, A_{2^d}$ – аффинные операторы, сжимающие единичный куб в два раза к одной из его вершин, а $B_1, \ldots, B_{2^d}$ – некоторые операторы в $\mathbb{R}^n$.

Мы приходим к вопросу об обобщении уравнений самоподобия с одномерных областей на максимально широкий класс множеств. Вместо отрезка, выполняющего роль «эталонного» разбиения, мы будем рассматривать множества, допускающие разбиения на свои аффинные копии. Такие множества мы будем предполагать выпуклыми. В подавляющем большинстве задач, в которых встречаются многомерные уравнения самоподобия, это условие выполняется. Кроме того, без предположения выпуклости, область определения может иметь фрактальную структуру, что существенно затрудняет исследование. Итак, предположим, задана пара $(K, \mathcal{A})$, состоящая из выпуклого тела K в пространстве $\mathbb{R}^d$ и семейства невырожденных аффинных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$, задающих его разбиение: тело K совпадает с объединением своих образов $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i K$ и эти образы, элементы разбиения, не имеют общих внутренних точек и могут пересекаться только по своим границам. Такую пару $(K, \mathcal{A})$ мы называем *самоаффинной парой* в $\mathbb{R}^d$. Тело K из самоаффинной пары мы будем называть *самоаффинным телом.* Изложение в терминах самоаффинных пар удобно тем, что, вообще говоря, одно и то же тело может быть разбито на свои аффинные образы различными способами.

Как видно, система операторов разбиения $\mathcal{A}$ заменяет здесь систему одномерных операторов разбиения отрезка $\{g_i\}$. Отметим простое, но важное свойство самоаффинных пар: их разбиения можно итерировать, то есть пара $(K, \mathcal{A}^m)$ является самоаффинной парой, где $\mathcal{A}^m$ – семейство, состоящее из всевозможных произведений длины m исходных операторов. Простейшим примером самоаффинной пары служит симплекс, разбитый на некоторый набор симплексов.

Вернемся к многомерным уравнениям самоподобия. Как и в одномерном случае, мы предполагаем фиксированным семейство операторов $\{B_1, \ldots, B_k\}$, действующих в пространстве $\mathbb{R}^n$. Многомерным уравнением самоподобия на функцию $f : K \to \mathbb{R}^n$ мы называем систему функциональных уравнений, задающих условия коммутативности для каждого $i = 1, \ldots, k$ диаграмм:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ \Big\downarrow{\scriptstyle A_i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle B_i} \\ A_i K & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Явно уравнение самоподобия задается здесь системой

$$f(t) = B_i f(A_i^{-1}(t)), \ t \in A_i K, \ i = 1, \ldots, k \tag{0.5}$$

Как и в одномерном случае, здесь определен оператор самоподобия $\mathbf{B}_K$, действующий в пространстве $L_p(K, \mathbb{R}^n)$. Нами уже был упомянут один из частных случаев уравнений такого типа, система (0.4). Кроме того, многие уравнения, например, многомерные масштабирующие, имеют интерпретацию в виде (0.5) и разрешимость такого типа уравнений может быть сведена к вопросу разрешимости многомерных уравнений самоподобия.

Прежде всего, при рассмотрении многомерных уравнений самоподобия, интерес представляет вопрос о переносе известных условий существования решений с одномерного случая.

Кроме того, естественным образом возникает вопрос о возможной геометрии областей определения, то есть о структуре самоаффинной пары $(K, \mathcal{A})$. В первой главе диссертации, в параграфе I.3, на основе конструкций топологических марковских цепей, нами будет построен изоморфизм ϕ^* между пространством $L_p([0,1],\mathbb{R}^n)$ и пространством $L_p(K,\mathbb{R}^n)$, $K \subset \mathbb{R}^d$, сохраняющий самоаффинную структуру. Иными словами, оператор ϕ^* будет коммутировать с оператором самоподобия: $\phi^* \circ \mathbf{B} = \mathbf{B}_K \circ \phi^*$. Тем самым, появится возможность сведения вопросов разрешимости многомерных уравнений самоподобия к одномерному случаю. Перед формулировкой критерия разрешимости многомерных уравнений самоподобия в $L_p(K,\mathbb{R}^n)$, нам потребуется ввести еще несколько определений.

Через $\mathcal{B}_p$ обозначим множество операторов, состоящее из взвешенных линейных частей операторов семейства $\mathcal{B} = \{B_1,\dots,B_k\}$ с весами, соответствующими объемам элементов разбиения A_iK, $i = 1,\dots k$. Явно $\mathcal{B}_p$ состоит из линейных частей операторов $\{(k|\det\ A_1|)^{1/p}B_1,\dots,(k|\det\ A_k|)^{1/p}B_k\}$. Основным инструментом исследования уравнений самоподобия являются различные спектральные характеристики семейства операторов $\mathcal{B}_p$. Решающую роль здесь играет так называемый p-радиус семейства линейных операторов. Предположим, задано некоторое множество матриц $\mathcal{C}$, состоящее из k линейных операторов. Для натурального m, обозначим через $\mathcal{C}^m$ множество всевозможных произведений (с возможными повторениями) m матриц семейства $\mathcal{C}$. Определим величину $\mathcal{F}_m(p,\mathcal{C})$ как p-среднее норм всевозможных произведений m матриц семейства $\mathcal{C}$. Формально

$$\mathcal{F}_m(p,\mathcal{C}) = \left[k^{-m}\sum_{\Pi\in\mathcal{C}^m}\|\Pi\|^p\right]^{1/p}, \quad p \geqslant 1$$

при $p=\infty$ эта величина определяется как предел величины $\mathcal{F}_m(p,\mathcal{C})$ при $p\to\infty$.

Определение 1. *p-радиусом семейства линейных операторов $\mathcal{C} = \{C_1,\dots,C_k\}$ называется предел*

$$\rho_p(\mathcal{C}) = \lim_{n\to\infty}\left(\mathcal{F}_n(p,\mathcal{C})\right)^{1/n}$$

Известно, что такой предел всегда существует и не зависит от операторной нормы в $\mathbb{R}^n$. В случае, когда семейство $\mathcal{C}$ состоит лишь из одной матрицы, имеем $\rho_p(C) = \lim_{n\to\infty}\|C^n\|^{1/n}$, что по известной формуле Гельфанда равняется обычному спектральному радиусу.

Впервые такого типа характеристика была введена Ротой и Странгом в работе 1960 года. Ими была определена величина ρ_∞, называемая также совместным спектральным радиусом операторов. Позднее в работах Вонга, Джиа и Вонга, Лау было дано общее определение p-радиуса. Во многих областях p-радиус нашел обширное применение, в том числе, теории чисел, функциональном анализе, теории всплесков. Существует множество результатов о точном и приближенном вычислении p-радиуса для различных семейств операторов.

В главе I доказан следующий результат:

Теорема I.1 *Задана самоаффинная пара $(K,\mathcal{A})$ в $\mathbb{R}^d$ и неприводимое семейство аффинных операторов $\mathcal{B} = \{B_1,\dots,B_k\}$, действующих в $\mathbb{R}^n$. Уравнение (0.5) имеет решение $f \in L_1(K,\mathbb{R}^n)$ тогда, и только тогда, когда*

$\rho_1(\mathcal{B}_1) < 1$. Это решение единственно.
Если при некотором $p \in [1, +\infty]$ имеет место $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$, то $f \in L_p$. Для $p < \infty$ верно и обратное: если $f \in L_p$, то $\rho_p < 1$. Если $f \in L_\infty$, то $\rho_\infty \leqslant 1$.

Для одномерного случая, когда тело K является отрезком, данный результат был доказан Протасовым в 2008 году.

Неприводимость не является существенным условием: для приводимых семейств достаточно искать решения в пространстве $L_p(K, V)$, где $V \subset \mathbb{R}^n$ – инвариантное подпространство семейства $\mathcal{B}$. Следует отметить, что доказательство одномерного случая не может быть непосредственно перенесено на многомерный. В оригинальном доказательстве, итерируя разбиение отрезка, рассматриваются специальные кусочно-постоянные на каждом из отрезков разбиения функции, сходящиеся к неподвижной точке оператора $\mathbf{B}$. При этом существенно используется тот факт, что итерируя разбиение отрезка операторами $\{g_i\}$, длины всех отрезков разбиения стремятся к нулю. В многомерном случае это уже не так: существуют самоаффинные пары, в любой итерации разбиения которых присутствуют тела с диаметром, ограниченным снизу некоторой константой. Более того, существуют самоаффинные пары, при итерации разбиения которых, не стремится к нулю диаметр ни одного из элементов разбиения.

Более формально, будем называть самоаффинную пару $(K, \mathcal{A})$ *недробящейся*, если найдется такое положительное δ, что при всякой итерации разбиения m, элементы разбиения самоаффинной пары $(K, \mathcal{A}^m)$ имеют диаметр, превосходящий δ.

Сначала теорема I.1 будет доказана нами для дробящихся самоаффинных пар, а затем, после изучения геометрии самоаффинных пар, распространена на общий случай.

Глава II посвящена исследованию компактных полугрупп аффинных операторов. Вопросы, связанные с разрешимостью уравнений самоподобия в том, или ином пространстве, сводятся к изучению различных семейств аффинных операторов. Так, например, разрешимость уравнения самоподобия в пространствах L_p сводится к оценке нормы произведений операторов из $\mathcal{B}_p$. В то же время, вопрос о структуре недробящихся самоаффинных пар имеет схожую постановку: условие того, что самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ является дробящейся, равносильно условию $\rho_p(\mathcal{A}) < 1$.

Рассмотрим задачу в несколько более общей формулировке. Нас будут интересовать полугруппы аффинных операторов на элементы которых накладываются лишь ограничения сверху и снизу в некоторой норме. Последнее равносильно равенству единице p-радиуса для всякого конечного p. Результаты второй главы будут использованы как при изучении геометрии самоаффинных пар, так и для анализа уравнений самоподобия.

Итак, предположим, задано некоторое семейство $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ аффинных операторов, действующих в пространстве $\mathbb{R}^d$. Здесь мы уже не предполагаем их невырожденности как в случае операторов самоаффинного разбиения. Это семейство мы будем называть *ограниченным*, если под действием полугруппы, порожденной им, орбита любой точки пространства ограниченна. В частности, семейство, задающее самоаффинное разбиение тела, является ограниченным. Как будет показано, ограниченность равносильна существованию инвариантного тела: тело $G \subset \mathbb{R}^d$ инвариантно относительно $\mathcal{B}$, если для всякого оператора B семейства выполнено $BG \subset G$. Оказывается, что в некоторой норме линейные части операторов ограниченной полугруппы по норме не превосходят 1. Если в ограниченной полугруппе существует оператор с нормой строго меньшей 1, мы будем называть ее *сжимающей*. Как будет показано, сжимаемость ограниченного семейства $\mathcal{B}$ равносильна условию $\rho_p(\mathcal{B}) < 1$ для всякого конечного $p > 1$. Условие того, что самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ является дробящейся равносильно тому, что семейство $\mathcal{A}$ является сжимающим. Основной результат второй главы формулируется в параграфе II.3 и заключается в том, что ограниченная несжимающая полугруппа обязана обладать общим инвариантным аффинным пространством всех операторов.

Теорема II.1 *Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклое тело, $\mathcal{B}$ – ограниченное семейство аффинных операторов в $\mathbb{R}^d$ такое, что $BG \subset G$, $B \in \mathcal{B}$. Тогда либо семейство $\mathcal{B}$ сжимающее, либо операторы из $\mathcal{B}$ имеют общее инвариантное аффинное подпространство, пересекающее G, в ограничении на которое $\mathcal{B}$ является сжимающим.*

Идея доказательства теоремы состоит в следующем: по семейству операторов $\mathcal{B}$ строится некоторое семейство $\mathcal{B}_\varepsilon$ такое, что $\rho_p(\mathcal{B}_\varepsilon) < 1$ и при $\varepsilon \to 0$ имеет место $\mathcal{B}_\varepsilon \to \mathcal{B}$. Тогда одномерное уравнение самоподобия с набором операторов $\mathcal{B}_\varepsilon$ обязано иметь суммируемое решение. Затем находится подпоследовательность таких решений, сходящаяся к решению уже с семейством $\mathcal{B}$, из чего делается вывод, учитывая теорему A, что либо $\rho_p(\mathcal{B}) < 1$, либо семейство операторов $\mathcal{B}$ обладает общим инвариантным аффинным подпространством. Следует отметить, что полученное доказательство этого чисто геометрического утверждения является аналитическим. Результаты второй главы, помимо того, что, по мнению автора, сами по себе представляют интерес, применяются для исследования геометрии самоаффинных пар и, кроме того, в главе IV применяются для исследования комбинаторного строения полугрупп неотрицательных матриц.

Глава III посвящена изучению самоаффинных выпуклых тел. Как было отмечено, одной из основных задач, возникающих при изучении многомерных уравнений самоподобия, является вопрос о геометрии самоаффинных тел.

Еще раз приведем сформулированную в книге Крофта, Фалконера и Гая гипотезу Валлета о строении самоаффинных тел:

Верно ли, что любое самоаффинное тело либо является многогранником, либо аффинным образом прямой суммы самоаффинного многогранника на некоторое выпуклое тело?

В двумерном случае в положительный ответ был дан работе Рихтера 2011 года. В то же время ответ на приведенную гипотезу отрицателен начиная с размерности 3, в диссертации приводится серия соответствующих контрпримеров. Как ни странно, несмотря на несложность конструкции, до этого контрпримеры построены не были. Тем не менее, в некоторых случаях самоаффинные тела гарантированно являются многогранниками. Напомним, что самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ называется *дробящейся*, если итерируя ее разбиение, мы сможем получить элемент разбиения сколь угодно малого диаметра. Формально, для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное m такое, что на m-ой итерации разбиения, среди элементов разбиения самоаффинной пары $(K, \mathcal{A}^m)$, найдется хотя бы один с диаметром меньшим ε. В параграфе III.1 доказываются основные геометрические свойства дробящихся самоаффинных пар:

Теорема III.1 *Если самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ – дробящаяся, то K – многогранник.*

Для дробящихся самоаффинных пар имеет место теорема единственности:

Теорема III.2 *Если $(K, \mathcal{A})$ и $(G, \mathcal{A})$ – две самоаффинные дробящиеся пары с одним и тем же семейством операторов, то $K = G$.*

Таким образом, для дробящихся самоаффинных пар выполняется аналог теоремы Хатчинсона о существовании и единственности фрактальных множеств.

Мотивировкой разделять самоаффинные пары на дробящиеся и не дробящиеся служит теорема о факторизации: оказывается, что в любой недробящейся самоаффинной паре, самоаффинное тело обладает инвариантным относительно своих операторов разбиения сечением, которое является многогранником. Это сечение уже образует дробящуюся самоаффинную пару с сужениями исходных операторов. Кроме того, после факторизации по подпространству этого сечения, все операторы разбиения в некотором базисе оказываются ортогональными. Приведем полную формулировку соответствующей теоремы, доказательство которой находится в параграфе III.3.

Теорема III.3 *Для любой недробящейся самоаффинной пары $(K, \mathcal{A})$ в $\mathbb{R}^d$, операторы семейства $\mathcal{A}$ имеют общее инвариантное аффинное подпространство V, отличное от точки и пересекающее внутренность K. Ограничение исходного семейства $\mathcal{A}|_V$ является сжимающим. Все такие подпространства имеют одинаковую размерность, параллельны, и каждое из них пересекает K по многограннику. Существует базис, в котором матрицы линейных частей операторов A_i имеют вид:*

$$\tilde{A}_i \;=\; \begin{pmatrix} C_i & D_i \\ 0 & U_i \end{pmatrix}\;, \quad i = 1, \ldots, k\,,$$

где C_i – матрица линейной части ограничения оператора A_i на V, а U_i – ортогональная матрица

Обратно, если в некотором базисе матрицы линейных частей операторов A_i имеют приведенный вид с ортогональными матрицами U_i, то самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ недробящаяся.

При доказательстве теоремы сначала используется общее утверждение о наличии инвариантного подпространства семейства несжимающих операторов, теорема II.1, а затем из геометрических соображений показывается, что оно имеет положительную размерность и может быть выбрано проходящим через внутренность K.

Используя теорему III.3 о дробящемся сечении, удается завершить доказательство теоремы I.1 о существовании решения многомерного уравнения самоподобия уже в общем виде, для недробящихся областей. Строится проекция недробящегося самоаффинного тела K на его дробящееся сечение G. С ее помощью находится сохраняющее самоаффинную структуру отображение из $L_p(G)$ в $L_p(K)$, переводящее решение уравнения самоподобия в решение.

В некоторых случаях, в зависимости от размерности инвариантного подпространства V, удается построить полную классификацию недробящихся самоаффинных пары. В частности, в параграфе III.5 нами будет получена полная классификация самоаффинных пар в $\mathbb{R}^3$. В то же время, вопрос о структуре самоаффинных *дробящихся* многогранников, по-видимому, крайне сложен и даже на плоскости не решен полностью: неизвестно, при каких условиях пятиугольник является самоаффинным, то есть может быть разбит на свои аффинные образы.

Заключительный параграф главы III.6 посвящен вопросам построения замощения пространтсва при помощи образов самоаффинного тела.

Глава IV посвящена обобщению теории Перрона-Фробениуса на полугруппы неотрицательных матриц. Многие функциональные уравнения, встречающиеся в теории приближений и смежных областях имеют особый вид операторов семейства $\mathcal{B}$, действующих в образе. Напомним, что $d \times d$ матрица с неотрицательными элементами называется *стохастической*, если сумма ее элементов во всяком столбце равна 1. Все стохастические матрицы обладают инвариантной аффинной гиперплоскостью с единичной суммой координат векторов $\sum_{i=1}^{d} x_i = 1$. В уравнениях Митчелли-Праутша, широком классе уточняющих алгоритмов и других задачах возникают уравнения самоподобия с семейством стохастических матриц $\mathcal{B}$, действующих в образе. Соответственно, ищутся решения с образом, лежащим в инвариантном подпространстве стохастических матриц. В этом специальном случае проверка существования решения может быть осуществленна без явного вычисления p-радиуса операторов. Мы получим простой критерий разрешимости таких уравнений в пространствах L_p, сформулированный в чисто комбинаторном виде, зависящий лишь от позиций ненулевых элементов матриц.

Результаты, полученные в главе IV позволят нам построить полиномиальный алгоритм проверки существования решений широкого класса уравнений самоподобия. С другой стороны, используя результаты главы II о несжимающих операторных полугруппах, нам удастся обобщить классическую теорию Перрона-Фробениуса на матричные полугруппы.

Приступим у формулировке результатов заключительной главы диссертации.

Обозначим через $\mathcal{A}$ некоторое семейство неотрицательных $d \times d$ матриц, то есть матриц, чьи элементы – вещественные неотрицательные числа. Через $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ будем обозначать полугруппу по умножению, порожденную ими, которая, очевидно, также состоит из неотрицательных матриц. Многие вопросы об асимптотическом поведении произведений матриц из $\mathcal{A}$, или о строении $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, для неотрицательных матриц имеют комбинаторную интерпретацию и тесно связаны с понятием примитивности матрицы.

Неотрицательную матрицу мы будем называть положительной, если все ее элементы больше 0. Семейство $\mathcal{A}$ называется *примитивным*, если полугруппа $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ содержит положительную матрицу. Другими словами, должно существовать положительное произведение матриц семейства. Оказывается, что в общих предположениях для семейств стохастических матриц примитивность равносильна сжимаемости в ограничении на инвариантное подпространство $\sum_{i=1}^{d} x_i = 1$.

Ясно, что если все матрицы полугруппы имеют левый нижний блок нулей, то никакое их произведение не может быть положительным. Кроме того, если после подходящей перестановки базисных векторов все матрицы семейства имеют левый нижний блок нулей, то никакое их произведение не может быть положительным. Такие семейства матриц называются *положительно приводимыми.*

Теория Перрона-Фробениуса, обзор которой мы привели в первом разделе автореферата, связывает свойство примитивности одной матрицы с ее комбинаторными свойствами.

В главе IV теория Перрона-Фробениуса обобщается на случай матричных полугрупп. Находится критерий, выявляющий комбинаторную структуру непримитивных семейств матриц. В случае одной матрицы для наличия у непримитивной матрицы циклической структуры, нами естественно предполагалась неприводимость. В случае матричных полугрупп мы также будем предполагать неприводимость, однако возникает еще одно условие. Мы будем предполагать, что все матрицы неотрицательного семейства $\mathcal{A}$ не содержат ни нулевых строк, ни нулевых столбцов. В случае одной матрицы такое условие следовало непосредственно из неприводимости. Для полугрупп это уже не так, тем не менее, без этого условия критерий, который мы приведем, оказывается неверным.

Теорема IV.1 *Дано положительно неприводимое семейство неотрицательных матриц $\mathcal{A}$, чьи элементы не содержат ни нулевых строк, ни нулевых столбцов.*

Оно не является примитивным тогда и только тогда, когда существует разбиение множества базисных векторов на непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_r$, на котором все матрицы из $\mathcal{A}$ действуют как перестановки, причем:

- *Среди всех таких разбиений существует единственное разбиение с наибольшим числом множеств r, оно называется каноническим.*
- *Все блоки канонического разбиения заполняются, т.е., существует блочно-диагональная матрица $D \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, у которой все диагональные блоки (соответствующие множествам $\Omega_1, \dots, \Omega_r$) строго положительны.*
- *Число $r = r(\mathcal{A})$ называется индексом импримитивности семейства $\mathcal{A}$. Оно совпадает с минимальным числом n таким, что любая матрица полугруппы $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ имеет не менее n попарно ортогональных столбцов, а также не менее n максимальных собственных значений (с учетом кратности).*

Как мы видим, не все свойства переносятся со случая одной матрицы: так, матрицы семейства $\mathcal{A}$ уже не обязаны быть циклическими перестановками, кроме того, индекс импримитивности r не имеет прежней простой интерпретации в терминах длин циклов. Впервые теорема IV.1 была доказана в совместной статье автора и Протасова 2012 года. Изначальное доказательство имело геометрический характер несмотря на то, что формулировка является, по сути, комбинаторной: примитивность определяется лишь позициями ненулевых элементов матриц. В работе был поставлен вопрос о нахождении чисто комбинаторного доказательства. Независимо и практически одновременно двумя группами были найдены два различных комбинаторных доказательства: Альпиным и Альпиной, а также Блонделем, Юнгерсом и Ольшевским. Как и в оригинальной работе, оба комбинаторных доказательства имеют достаточно значительный объем. В диссертации мы приводим новое, по мнению автора, достаточно естественное и короткое доказательство. Идея состоит в следующем: не уменьшая общности, мы будем рассматривать только полугруппы стохастических неотрицательных матриц. Тогда можно показать, что наличие положительного произведения равносильно сжимаемости семейства $\mathcal{A}$, ограниченного на инвариантный симплекс – пересечение положительного октанта с инвариантным подпространством $\sum_{i=1}^{d} x_i = 1$. В предположении непримитивности, семейство будет несжимающим, а потому найдется инвариантное подпространство V в плоскости симплекса. Оно и будет задавать нужные нам классы $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$. Мы покажем, что базисные вектора e_i, e_j лежат в одном классе тогда, и только тогда, когда вектор $e_i - e_j$ параллелен V.

В заключительном параграфе IV.3 будет построен эффективный алгоритм проверки неравенства $\rho_p(\mathcal{A}) < 1$ для семейств стохастических матриц, ограниченных на их инвариантное подпространство. Алгоритм будет применен к некоторым уравнениям самоподобия для быстрой проверки существования суммируемых решений.

Заключение

В работе получены следующие основные результаты.

Доказан критерий разрешимости многомерных уравнений самоподобия в пространствах L_p и исследованы свойства решений. Получена теорема о структуре полугрупп ограниченных аффинных операторов в терминах их инвариантных норм и подпространств при помощи которой затем получена классификация самоаффинных тел в терминах их инвариантных сечений. Получено обобщение теории Перрона-Фробениуса на случай матричных полугрупп, описана структура непримитивных семейств неотрицательных матриц. Из этого получен критерий разрешимости уравнений Митчелли-Праутша в пространстве L_p и полиномиальный алгоритм его проверки.

Дальнейшие исследования.

Интерес представляют новые применения разработанного в работе аппарата изучения полугрупп аффинных и линейных операторов при помощи функциональных уравнений. Ведется исследование полугрупп линейных операторов с постоянным спектральным радиусом и их инвариантных множеств.

Развивая результаты о примитивных матричных полугруппах, предполагается найти новые связи с конечными автоматами. Также идет исследование мультивременных марковских цепей и k-примитивных семейств матриц.

В круге вопросов о самоаффинных телах особый интерес представляет задача о строении самоаффинных дробящихся многогранников. Интересно получить оценки на число их вершин и описать геометрическую структуру.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Юрьевичу Протасову за постановку задач, постоянное внимание к работе и многолетние полезные обсуждения. Автор благодарен коллективу кафедры общих проблем управления за многочисленные полезные обсуждения и творческую, дружелюбную обстановку.

Публикации автора по теме диссертации

В рецензируемых журналах:

[1] А.С. Войнов, "Самоаффинные многогранники. Приложения к функциональным уравнениям и теории матриц", *Мат. Сборник*, **202**:10 (2011), 3–30.

[2] A. Voynov, "A counterexample to Valette's conjecture", *Tr. Mat. Inst. Steklova*, **275** (2011), 301—303.

[3] V. Yu. Protasov and A. S. Voynov, "Sets of nonnegative matrices without positive products", *Linear Alg. Appl.*, **437**:3 (2012), 749–765.

[4] A. S. Voynov, "Shortest positive products of nonnegative matrices", *Linear Alg. Appl.*, **439**:6 (2013), 1627–1634.

[5] А.С. Войнов, "К вопросу о структуре самоаффинных выпуклых тел", *Мат. Сборник*, **204**:8 (2013), 41–50.

[6] А.С.Войнов, В.Ю.Протасов, "Компактные несжимающие полугруппы аффинных операторов", *Мат. Сборник*, **206**:7 (2015), 33–54.

Результаты из совместных статей, включенные в диссертацию, принадлежат автору.

В тезисах конференций:

[7] A. Voynov, "Self-affine polyhedra and p-radius of linear operators", *Delone 120 Conference: Geometry, Topology, Algebra and Number Theory, Applications*, 2010, 78–79.

[8] А. Войнов, "Уравнения самоподобия и самоаффинные фракталы", *Международная конференция «Теория приближения» посв. 90-летию С.Б.Стечкина*, 2010, 17–18.

[9] A.Voynov, "Strictly positive products of nonnegative matrices", *17th Conference of the International Linear Algebra society*, 2011, 139.

[10] A. Voynov, "Multivariate self-similarity equations", *International Conference "Wavelets and Applications"*, 2012, 99–101.

[11] A. Voynov, "Scrambling sets of column-stochastic matrices", *The 2012 Haifa Matrix Theory Conference*, 2012, 36.

[12] A. Voynov, "Multivariate refinement equations and subdivisions in L_p-spaces", *International Conference "Wavelets and Applications"*, 2015, 102.

[13] A. Voynov, "Invariant polyhedra of linear operators and the Černy conjecture", *4th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications*, 2015, 22.

[14] A. Voynov, "Self-affine convex bodies and bounded semigroups of affine operators", *The Fifth German-Russian Week of the Young Researcher on Discrete Geometry*, 2015, 55–56.