Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи.

Войнов Андрей Сергеевич

Многомерные уравнения самоподобия и приложения

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор В.Ю.Протасов

Москва – 2016

Содержание

Введение

Диссертация посвящена исследованию функциональных уравнений самоподобия и их приложениям к теории фрактальных кривых, выпуклой геометрии, теории Перрона-Фробениуса и другим областям. Решения такого типа уравнений позволяют эффективно параметризовать различные фрактальные множества и могут существовать тогда, когда фракталов в обычном понимании не существует. Самоподобные функции нашли широкое применение в различных областях анализа, в том числе, в теории всплесков, масштабирующих уравнениях (refinement equations), уточняющих алгоритмах (subdivision algorithms), комбинаторной теории чисел, теории вероятности.

Многие фрактальные множества определяются как самоподобные объекты: фиксируется некоторый набор аффинных операторов $B_1, \dots, B_k$, действующих в $\mathbb{R}^n$, и рассматривается компакт $X \subset \mathbb{R}^n$, совпадающий с объединением своих образов под действием этих операторов: $X = \bigcup_{i=1}^k B_i X$. Зачастую, в современном анализе встречаются аналогичные объекты, но на «функциональном» уровне: самоподобие рассматривается не в терминах множеств, а в терминах функций. Вообще говоря, условие, что операторы являются аффинными, не обязательно для определения фрактального множества, однако, в диссертации мы будет рассматривать только такие, аффинные, фракталы.

Предположим, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ задано семейство аффинных операторов $B_1, \dots, B_k$. При каких условиях найдется фрактал, порожденный этим семейством? Теорема Хатчинсона [23] дает достаточное условие: если все операторы являются сжатиями, то найдется, причем единственный, компакт $X \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $X = \bigcup_{i=1}^k B_i X$. Это условие не является необходимым. Из существования фрактала X не следует, что все операторы сжимающие, соответствующие примеры элементарны. Без условия сжимания существование фрактального множества не гарантирует его единственность. Кроме того, часто условие, что все операторы являются сжатиями, весьма ограничительно. При рассмотрении фракталов на функциональном уровне, существование гарантировано при гораздо более слабых условиях на семейство операторов $B_1, \dots, B_k$ и влечет единственность.

Помимо изучения самоподобных функций (глава I), диссертация охватывает ряд задач выпуклой геометрии и теории матриц, возникающих при изучении уравнений самоподобия. Полученные в этих областях результаты занимают существенную часть диссертации и представляют, как нам кажется, самостоятельный интерес. В главе III изучаются самоаффинные тела (self-affine bodies), выпуклые компакты, допускающие разбиение на свои аффинные образы. Самоаффинные тела естественным образом возникают при изучении многомерных уравнений самоподобия и имеют весьма нетривиальную геометрию. Кроме того, такого типа множества тесно связаны с задачами замощения пространства. Также в диссертации рассматривается ряд вопросов о строении различных полугрупп аффинных операторов (глава II). Задачи, которые рассматриваются во второй главе возникают при изучении структуры самоаффинных тел, но могут быть сформулированы независимо. При этом в доказательствах чисто геометрических фактов о строении полугрупп аффинных операторов, находит применение аппарат функционального анализа из главы I. Наконец, используя результаты главы II, приводится обобщение теории Перрона-Фробениуса для полугрупп неотрицательных матриц (глава IV).

Перед формулировкой результатов диссертации, дадим точные определения уравнений самоподобия и их решений – самоподобных функций и приведем некоторые сведения о них. Единичный отрезок $[0,1]$ обладает очевидной фрактальной структурой: он может быть разбит некоторой последовательностью точек $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{k-1} \leqslant t_k = 1$ на k отрезков. Тогда, обозначив через g_i одномерный аффинный оператор, переводящий единичный отрезок в отрезок $[t_{i-1}, t_i]$, мы придем к разбиению $[0,1] = \bigcup\limits_{i=1}^{k} g_i([0,1])$. Обозначим сужение функции f на каждый из отрезков разбиения через $f_i := f(g_i(t))$. Самоподобие функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ рассматривается как условие того, что сужение f_i на каждый из отрезков равносильно применению оператора B_i к исходной функции (рисунок 0.1). То есть $f_i(t) = B_i f(t)$ при всяком $i = 1, \ldots, k$.

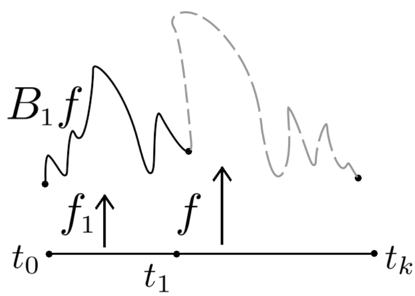


Рис.0.1. Самоподобие функции f.

Другими словами, требуется согласованность действия операторов g_i в области определения с действием операторов B_i в образе $f([0,1])$. Таким образом, условие самоподобия функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ означает коммутативность для всякого $i = 1, \ldots, k$ диаграммы

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ \big\downarrow g_i & & \big\downarrow B_i \\ [t_{i-1}, t_i] & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \end{array} \qquad (0.1)$$

Набор таких диаграмм равносилен следующей системе из k функциональных уравнений, которую мы называем просто *уравнением самоподобия*:

$$f(t) = B_i f(g_i^{-1}(t)),\ t \in [t_{i-1}, t_i],\ i = 1, \ldots, k \qquad (0.2)$$

Приведем в качестве примеров две задачи, в которых возникают уравнения самоподобия.

Пример 1. Кривая коха. Одной из наиболее известных самоподобных кривых является кривая Коха. Рассмотрим равнобедренный треугольник abc с основанием ab и углом при вершине c равным 120^o. Первым приближением кривой Коха служит двухзвенная ломанная acb. Возьмем две точки d и e на стороне ab, так, что угол $\angle adc = 120^o$ и $\angle ced = 120^o$. От ломанной acb перейдем теперь к четырехзвенной ломанной $adceb$. Отметим, что треугольники $\triangle adc$ и $\triangle ceb$ подобны исходному треугольнику $\triangle acb$. Для каждого из треугольников $\triangle adc$, $\triangle ceb$ повторим приведенный шаг итерационного процесса с выбором пары точек на основании. Мы получим новую ломанную, состоящую из боковых сторон равнобедренных треугольников. Таким образом, мы получаем итерационный процесс, «ломая» каждое звено, делая из него пару звеньев, образующих угол 120^o. На каждой итерации число ребер удваивается. Предельная ломанная такого процесса называется кривой Коха, или снежинкой Коха (рис 0.2). Она является образом решения следующего уравнения самоподобия:

$$f(t) = \begin{cases} B_1 f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ B_2 f(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{0.3}$$

Через B_1 и B_2 мы обозначили два аффинных оператора, переводящих треугольник acb в треугольники adc, ceb соответственно.

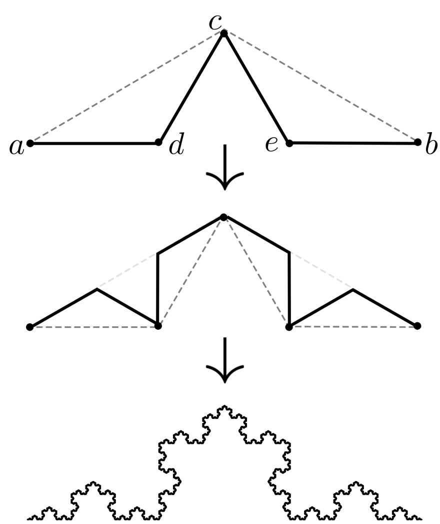


Рис.0.2. Итеративное построение кривой Коха.

Пример 2. Масштабирующие уравнения. Масштабирующие уравнения, то есть разностные уравнения со сжатием аргумента, применяются при построении всплесков с компактным носителем, при изучении уточняющих интерполяционных алгоритмов, в теории приближений, при изучении случайных степенных рядов и так далее. Предположим, задана последовательность чисел $c_0, c_1, \ldots, c_N$. *Масштабирующим уравнением* на функцию $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется уравнение

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{N} c_m \varphi(2x - m)$$

Оказывается, что если построить из решения масштабирующего уравнения вектор-функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$, определенную как

$$f(x) = (\varphi(x), \varphi(x+1), \ldots, \varphi(x+N-1)) \in \mathbb{R}^N,$$

то f будет решением уравнения самоподобия вида (0.3). Семейство из двух операторов B_1, B_2, задающих уравнение самоподобия здесь строится по последовательности $c_1, \ldots, c_N$ следующим образом. Рассматривается пара матриц с элементами $(B_1)_{ij} = c_{2i-j-1}$ и $(B_2)_{ij} = c_{2i-j}$, $c_m = 0$ при $m < 0$ и $m \geqslant N+1$. Такая пара матриц будет обладать общим инвариантным аффинным подпространством. В ограничении на него и рассматривается уравнение самоподобия на функцию f, построенную по решению масштабирующего уравнения.

Видно, что образ самоподобной функции f состоит из множеств $B_i f([0,1])$, причем $f([0,1]) = \bigcup_{i=1}^{k} B_i f([0,1])$. Это разбиение параметризуется разбиением единичного отрезка точками $t_0, \ldots, t_k$. Как уже было сказано, уравнения такого типа возникают в уточняющих алгоритмах, масштабирующих уравнениях, при построении вейвлетов, и в других областях. Исследованиям различных типов уравнений самоподобия посвящены работы многих авторов, в том числе Добеши, Лагариаса [11], Мичелли, Праутша [32], Протасова [39, 38], Лау, Вонга [31], Каваретта, Дахмена, Мичелли [8].

Важными проблемами в круге задач, связанных с уравнениями самоподобия, являются вопросы существования решения в некотором классе функций и их численное нахождение. В то время, как линейные разностные уравнения имеют аналитические решения, разностные уравнения со сжатием аргумента, которые мы рассматривали, уже не обладают такими свойствами. Решения уравнений самоподобия, как правило, не являются не только аналитическими, но и бесконечно дифференцируемыми функциями. Они имеют переменную локальную гладкость и обладают другими фрактальными свойствами. В подавляющем большинстве приложений и работ ставится вопрос о разрешимости уравнений в классе непрерывных функций и в классах L_p. В последнем случае под коммутативностью диаграммы (0.1) подразумевается коммутативность, выполненная почти во всех точках $t \in [0,1]$ по мере Лебега. Естественным образом здесь возникает аффинный непрерывный оператор самоподобия $\mathbf{B}$, действующий в пространстве $L_p([0,1], \mathbb{R}^n)$ по правилу

$$[\mathbf{B}f](t) = B_i f(g_i^{-1}(t)), \quad t \in [t_{i-1}, t_i],\ i = 1, \ldots, k$$

Решение уравнения самоподобия является неподвижной точкой этого оператора. Ясно, что если оператор $\mathbf{B}$ сжимающий в пространстве $L_p([0,1], \mathbb{R}^n)$, то по теореме о сжимающих отображениях [35], он имеет единственную неподвижную точку. Более того, для уравнения (0.2) верно и обратное. Если решение существует, то оператор $\mathbf{B}$ оказывается сжимающим в пространстве L_p. Тогда последовательно применяя его к произвольной начальной функции $f_0 \in L_p([0,1], \mathbb{R}^n)$, мы можем находить решение уравнения самоподобия в качестве предела итераций $\mathbf{B}^m f_0$, $m \to \infty$.

Если существует L_∞-решение уравнения (0.2), то его образ будет фракталом (с точностью до меры 0). В то же время, если не существует L_∞-решения уравнения самоподобия, образом решения (0.2) может быть уже некомпактное множество. Итак, для некоторых семейств операторов $\{B_1, \ldots, B_k\}$ может не существовать фрактального множества в $\mathbb{R}^n$, но существовать решение уравнения (0.2).

Как мы увидим, в некотором смысле, вопрос о существовании суммируемого решения является наиболее естественным. Причина состоит в наличии в этом случае общих теорем единственности, легкости алгоритмической проверки разрешимости и наличия быстрых способов нахождения решения. Соответствующие результаты приведены в параграфах I.2, I.4.

Первая попытка классификации уравнений самоподобия была предпринята Мичелли и Праутшем в 1989 году [32]. Они рассмотрели класс уравнений (0.2) следующего вида. Задана пара стохастических по столбцам $(n+1) \times (n+1)$ матриц A_1, A_2. Это значит, что каждая из матриц содержит только неотрицательные элементы и сумма элементов в любом столбце равна 1. Они обладают общим инвариантным подпространством $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$, состоящим из точек с единичной суммой координат. Рассматривалось следующее уравнение самоподобия в пространстве непрерывных функций $C([0,1], L)$:

$$f(t) = \begin{cases} A_1|_L \ f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ A_2|_L \ f(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Мичелли и Праутш получили конструктивные критерии существования непрерывного решения такого уравнения. Однако, они оказались весьма трудоемкими в смысле алгоритмической проверки и, по-видимому, принципиально неулучшаемыми. Тем временем вопрос разрешимости уравнений, которые они рассматривали, в классе суммируемых функций оказывается значительно более удобным для изучения и существует быстрый полиномиальный алгоритм проверки существования решения. Он приведен в параграфе I.4.

Как будет показано, существование суммируемого решения уравнения (0.2) полностью определяется семейством операторов $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$, действующих в образе. Критерий может быть сформулирован в терминах совместных спектральных характеристик операторов из $\mathcal{B}$. Такого рода показатели хорошо изучены и весьма удобны для анализа.

Через $\mathcal{B}_p$ обозначим множество операторов, состоящее из взвешенных линейных частей операторов семейства $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$ с весами, соответствующими длинам отрезков разбиения $[t_{i-1}, t_i]$. Таким образом, $\mathcal{B}_p$ состоит из линейных частей операторов $\{(k|t_1 - t_0|)^{1/p} B_1, \dots, (k|t_k - t_{k-1}|)^{1/p} B_k\}$. Основным инструментом исследования уравнений самоподобия являются различные спектральные характеристики семейства операторов $\mathcal{B}_p$. Решающую роль здесь играет так называемый p-радиус семейства линейных операторов. Предположим, задано некоторое множество матриц $\mathcal{C}$, состоящее из k линейных операторов. Для натурального m, обозначим через $\mathcal{C}^m$ множество всевозможных произведений (с возможными повторениями) m матриц семейства $\mathcal{C}$. Определим величину $\mathcal{F}_m(p, \mathcal{C})$ как p-среднее норм всевозможных произведений m матриц семейства $\mathcal{C}$. Формально

$$\mathcal{F}_m(p, \mathcal{C}) = \left[k^{-m} \sum_{\Pi \in \mathcal{C}^m} \|\Pi\|^p \right]^{1/p}, \quad p \geqslant 1$$

при $p = \infty$ эта величина определяется как предел величины $\mathcal{F}_m(p, \mathcal{C})$ при $p \to \infty$.

Определение 1. *p-радиусом семейства линейных операторов $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ называется предел*

$$\rho_p(\mathcal{C}) = \lim_{n\to\infty} \left(\mathcal{F}_n(p, \mathcal{C})\right)^{1/n}$$

Известно, что такой предел всегда существует и не зависит от операторной нормы в $\mathbb{R}^n$. В случае, когда семейство $\mathcal{C}$ состоит лишь из одной матрицы, имеем $\rho_p(C) = \lim_{n\to\infty} \|C^n\|^{1/n}$, что по известной формуле Гельфанда равняется обычному спектральному радиусу.

Впервые такого типа характеристика была введена Ротом и Странгом в работе [48] 1960 года. Ими была определена величина ρ_∞, называемая также совместным спектральным радиусом операторов. Позднее в работах Вонга [56], Джиа [25], Вонга и Лау [31] было дано общее определение p-радиуса. Во многих областях p-радиус нашел обширное применение, в том числе, теории чисел, функциональном анализе, теории всплесков. Существует множество результатов о точном и приближенном вычислении p-радиуса для различных семейств операторов.

При помощи p-радиуса семейства операторов $\mathcal{B}_p$ оказывается возможным установить критерий существования и единственности суммируемого решения уравнения (0.2). Учитывая широкий набор инструментов для изучения p-радиуса различных семейств линейных операторов, во многих случаях это существенно упрощает изучение уравнений самоподобия. Перед формулировкой критерия разрешимости уравнения (0.2), нам понадобится еще одно определение. Будем называть семейство аффинных операторов *приводимым*, если они обладают общим аффинным инвариантным подпространством. В 2008 году в работе Протасова был доказан следующий критерий существования L_p-решения уравнения самоподобия.

Теорема A [39; теорема 2]. *Для неприводимого семейства аффинных операторов $\mathcal{B}$ уравнение самоподобия (0.2) имеет решение $f(t) \in L_1([0,1], \mathbb{R}^n)$ тогда, и только тогда, когда $\rho_1(\mathcal{B}_1) < 1$. Это решение единственно.*
Если при некотором $p \in [1, +\infty]$ имеет место $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$, то $f \in L_p$. Для $p < \infty$ верно и обратное: если $f \in L_p$, то $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$. Кроме того, в этом случае оператор $\mathbf{B}$ является сжимающим в пространстве L_p и решение уравнения самоподобия является его неподвижной точкой. Если $f \in L_\infty$, то $\rho_\infty \leqslant 1$.

Таким образом, одно лишь существование решения уравнения (0.2) в предположении неприводимости операторов семейства $\mathcal{B}$, гарантирует его единственность. Отметим, что предположение неприводимости в теореме не является ограничительным. При наличии общего инвариантного аффинного подпространства L операторов семейства $\mathcal{B}$, мы можем перейти к классу функций, действующих из отрезка $[0,1]$ в линейное пространство L, и применять теорему для ограничения семейства $\mathcal{B}$ на L. Тогда при существовании решения уравнения самоподобия, L будет совпадать с аффинной оболочкой образа функции-решения.

Итак, уравнения самоподобия широко изучались в литературе и нашли обширное применение в теории всплесков, уточняющих алгоритмах и многих других областях. Имеется критерий существования и единственности решения такого типа уравнений и эффективные алгоритмы его нахождения. Данная диссертационная работа посвящена расширению понятия уравнений самоподобия на случай функций многих переменных. Попутно нами решаются возникающие задачи из области выпуклой геометрии и теории матриц.

Цель работы

Перед автором стояли следующие задачи:

- Построить многомерный аналог уравнений самоподобия и перенести на них известные результаты со случая одной переменной;
- Применить результаты теории уравнений самоподобия к исследованию масштабирующих функциональных уравнений;
- Изучить строение самоаффинных тел;
- Изучить строение ограниченных полугрупп аффинных операторов;
- Расширить теорию Перрона-Фробениуса на полугруппы неотрицательных матриц.

Научная новизна

Основные результаты, изложенные в работе являются новыми. На защиту выносятся следующие результаты:

- Доказан критерий разрешимости многомерных уравнений самоподобия в пространствах L_p и исследованы свойства решений;
- Получена теорема о структуре полугрупп ограниченных аффинных операторов в терминах их инвариантных норм и подпространств;
- Получена классификация самоаффинных тел в терминах их инвариантных сечений;
- Получено обобщение теории Перрона-Фробениуса на случай матричных полугрупп;
- Получен критерий разрешимости уравнений Митчелли-Праутша в пространстве L_p и полиномиальный алгоритм его проверки.

Основные методы исследования

В работе используются методы классического функционального анализа и современной выпуклой геометрии. Также привлекаются некоторые идеи из теории динамических систем, в том числе, топологических Марковских цепей, и теории графов.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. На практике может быть использован построенный в работе полиномиальный алгоритм проверки примитивности семейства неотрицательных матриц. Полученный критерий разрешимости масштабирующих уравнений с неотрицательными матрицами может быть применен при построении всплесков и в интерполяционных алгоритмах.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. "Geometry, Topology, Algebra and Number theory, Applications" конференция, посвященная 120-летию Б.Н.Делоне (Москва, МИ РАН, 2010);
2. "Approximation Theory" конференция, посвященная 90-летию С.Б.Стечкина (Москва, МИ РАН, 2010);
3. «Ломоносов» (Москва, МГУ, 2011);
4. 17-я конференция ILAS (Брауншвейг, Германия, 2011);
5. "Matrix Methods in Mathematics and Applications" (Москва, МИ РАН, 2011);
6. The 2012 Haifa Matrix Theory Conference (Haifa, Israel, 2012);
7. "International Conference on Wavelets and Applications" (Санкт-Петербург, Россия, Институт им. Л.Эйлера, 2012);
8. «Ломоносов» (Москва, МГУ, 2013);
9. "Summer School on Dynamical Systems" (Gdynia, Poland, 2013);
10. Конференция «Встреча поколений» (Москва, НМУ, 2015);
11. "International Conference on Wavelets and Applications" (Санкт-Петербург, Россия, Институт им. Л.Эйлера, 2015).
12. 4th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications (Москва, Россия, Skoltech, 2015).
13. The Fifth German-Russian Week of the Young Researcher on Discrete Geometry (Москва, Россия, МФТИ, 2015).

На научно-исследовательских семинарах:

1. Семинар по теории приближений и экстремальным задачам под руководством В.М.Тихомирова, МГУ им. М.В. Ломоносова (2009)
2. Семинар по теории функций под руководством Б.С.Кашина и С.В.Конягина, МГУ им. М.В. Ломоносова (2010);
3. Научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова (2012);
4. Семинар по геометрической теории оптимального управления под руководством М.И. Зеликина и Л.В. Локуциевского, МГУ им. М.В. Ломоносова (2012);
5. Семинар по дискретной математике под руководством М.Н.Вялого и С.П.Тарасова, ВЦ РАН (2012);
6. Межкафедральный семинар МФТИ по дискретной математике, Московский физико-технический институт (2013);
7. Семинара «Дискретная и вычислительная геометрия», ИППИ РАН (2015);

На конкурсах:

1. доклады в финалах конкурсов Мёбиуса в 2010 и 2012 годах (Москва, НМУ);

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 14 работах (6 в рецензируемых журналах, 8 в трудах конференций). Список литературы приводится в конце диссертации.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из 4 глав. Общий объем диссертации составляет 75 страниц. Список литературы содержит 74 наименования.

Краткое содержание работы

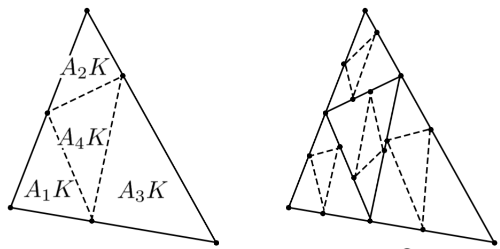
Глава I диссертации посвящена расширению теории уравнений самоподобия на случай функций нескольких переменных. Таким образом, вместо фрактальных кривых возникают фрактальные поверхности. В приложениях многомерные уравнения самоподобия встречались в связи с уточняющими уравнениями функций многих переменных, при построении многомерных вейвлетов, и в других областях [32, 15, 59, 7]. В качестве одного из первых уравнений самоподобия, определенных не на отрезке, приведем так называемое уравнение Мичелли-Праутша. В их работе [32] рассматривалось следующее уравнение на вектор-функцию, определенную на единичном кубе $[0,1]^d$.

$$f(x) = B_i f(A_i^{-1}x), \quad i - \text{ номер ближайшей к } x \text{ вершины куба,} \tag{0.4}$$

где $A_1, \dots, A_{2^d}$ – аффинные операторы, сжимающие единичный куб в два раза к одной из его вершин, а $B_1, \dots, B_{2^d}$ – некоторые операторы в $\mathbb{R}^n$.

Мы приходим к вопросу об обобщении уравнений самоподобия с одномерных областей на максимально широкий класс множеств. Вместо отрезка, выполняющего роль «эталонного» разбиения, мы будем рассматривать множества, допускающие разбиения на свои аффинные копии. Такие множества мы будем предполагать выпуклыми. В подавляющем большинстве задач, в которых встречаются многомерные уравнения самоподобия, это условие выполняется. Кроме того, без предположения выпуклости, область определения может иметь фрактальную структуру, что существенно затрудняет исследование. Итак, предположим, задана пара $(K, \mathcal{A})$, состоящая из выпуклого тела K в пространстве $\mathbb{R}^d$ и семейства невырожденных аффинных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$, задающих его разбиение: тело K совпадает с объединением своих образов $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i K$ и эти образы, элементы разбиения, не имеют общих внутренних точек и могут пересекаться только по своим границам. Такую пару $(K, \mathcal{A})$ мы называем *самоаффинной парой* в $\mathbb{R}^d$. Выпуклое тело K из самоаффинной парой мы называем *самоаффинным телом.*

Как видно, система операторов разбиения $\mathcal{A}$ заменяет здесь систему одномерных операторов разбиения отрезка $\{g_i\}$. Отметим простое, но важное свойство самоаффинных пар: их разбиения можно итерировать. То есть пара $(K, \mathcal{A}^m)$, где $\mathcal{A}^m$ – семейство, состоящее из всевозможных произведений длины m исходных операторов, является самоаффинной. Простейшим примером самоаффинной пары служит симплекс с семейством операторов, реализующих его разбиение на некоторый набор симплексов. На рисунке (0.3) слева изображено самоаффинное разбиение треугольника K на четыре части. Справа изображена вторая итерация этого разбиения $(K, \mathcal{A}^2)$. Необходимость разделять самоаффинное тело и самоаффинную пару заключается в том, что любое самоаффинное тело K может быть разбито на свои аффинные образы не единственным способом.



$(K, \mathcal{A})$ $(K, \mathcal{A}^2)$

Рис.0.3. Самоаффинное разбиение треугольника K и его итерация.

Вернемся к многомерным уравнениям самоподобия. Как и в одномерном случае, мы предполагаем фиксированным семейство операторов $\{B_1, \ldots, B_k\}$, действующих в пространстве $\mathbb{R}^n$. Многомерным уравнением самоподобия на функцию $f : K \to \mathbb{R}^n$ мы называем систему функциональных уравнений, задающих условия коммутативности для каждого $i = 1, \ldots, k$ диаграмм:

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "A_i"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "B_i"] \\
A_iK \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$

Явно уравнение самоподобия задается здесь системой

$$f(t) = B_i f(A_i^{-1}(t)), \ t \in A_iK, \ i = 1, \ldots, k \tag{0.5}$$

Как и в одномерном случае, здесь определен оператор самоподобия $\mathbf{B}_K$, действующий в пространстве $L_p(K, \mathbb{R}^n)$. Нами уже был упомянут один из частных случаев уравнений такого типа, система (0.4). Кроме того, многие уравнения, например, многомерные масштабирующие, имеют интерпретацию в виде (0.5) и разрешимость такого типа уравнений может быть сведена к вопросу разрешимости многомерных уравнений самоподобия.

Прежде всего, интерес представляет вопрос о переносе известных условий существования решений с одномерного случая на многомерный.

Кроме того, естественным образом возникает вопрос о возможной геометрии областей определения, то есть о структуре самоаффинной пары $(K, \mathcal{A})$. В первой главе диссертации, в параграфе I.3, на основе конструкций топологических марковских цепей, нами будет построен изоморфизм ϕ^* между пространством $L_p([0,1], \mathbb{R}^n)$ и пространством $L_p(K, \mathbb{R}^n)$, $K \subset \mathbb{R}^d$, сохраняющий самоаффинную структуру. Иными словами, оператор ϕ^* будет коммутировать с оператором самоподобия: $\phi^* \circ \mathbf{B} = \mathbf{B}_K \circ \phi^*$. Тем самым, появится возможность свести вопрос о разрешимости многомерных уравнений самоподобия к одномерному случаю. Будет доказан следующий результат:

Теорема I.1 *Задана самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ в $\mathbb{R}^d$ и неприводимое семейство аффинных операторов $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$, действующих в $\mathbb{R}^n$.*
Уравнение (0.5) имеет решение $f \in L_1(K, \mathbb{R}^n)$ тогда, и только тогда, когда $\rho_1(\mathcal{B}_1) < 1$. Это решение единственно.

Если при некотором $p \in [1, +\infty]$ имеет место $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$, то $f \in L_p$. Для $p < \infty$ верно и обратное: если $f \in L_p$, то $\rho_p < 1$. Если $f \in L_\infty$, то $\rho_\infty \leqslant 1$.

Отметим, что здесь $\mathcal{B}_p$ определяется как семейство линейных частей операторов $\{(k|\det A_1|)^{1/p}B_1, \ldots, (k|\det A_k|)^{1/p}B_k\}$. Доказательство этого результата будет проведено в два этапа: сначала в параграфе I.3 мы докажем его для специального вида самоаффинных пар, затем, после подробного изучения структуры самоаффинных тел, мы завершим доказательство в параграфе III.4.

Приведем пример, когда не существует непрерывного решения уравнения (0.5), но существуют суммируемые решения.

Пример 3. Мы приведем здесь лишь семейство $\mathcal{B}$ из двух операторов B_1, B_2, действующих в $\mathbb{R}^2$, для которых при любом самоаффинном теле K, найдется суммируемое решение уравнения (0.5). Через e_1, e_2 обозначим базисные вектора в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим пару двумерных операторов, действующих на $x \in \mathbb{R}^2$ следующим образом:

$$B_1 x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x + e_1, \qquad B_2 x = \begin{pmatrix} 0 & 1/8 \\ 1/8 & 0 \end{pmatrix} x + e_2.$$

Эти операторы не имеют общих инвариантных подпространств. Учитывая, что орбита любой точки под действием оператора B_1 неограничена, не может существовать непрерывного решения уравнения (0.5). С другой стороны, $\rho_1(\mathcal{B}_1) = \rho_1(4B_1, \frac{1}{32}B_2) < 1$ и по теореме I.1 существует L_1-решение. Последнее неравенство проверяется явно.

Как и в одномерном случае, неприводимость не является существенным условием. Следует отметить, что доказательство одномерного случая не может быть непосредственно перенесено на многомерный. В доказательстве из работы [39], когда область определения является отрезком, итерируя разбиение, рассматриваются специальные кусочно-постоянные на каждом из отрезков разбиения функции, сходящиеся к неподвижной точке оператора $\mathbf{B}$. При этом существенно используется тот факт, что итерируя разбиение отрезка операторами $\{g_i\}_{i=1}^k$, длины всех отрезков разбиения стремятся к нулю. В многомерном случае это уже не так: существуют самоаффинные пары, в любой итерации разбиения которых присутствуют тела с диаметром, ограниченным снизу некоторой константой. Более того, существуют самоаффинные пары, при итерации разбиения которых, диаметр ни одного из элементов разбиения не стремится к нулю.

Более формально, будем называть самоаффинную пару $(K, \mathcal{A})$ *недробящейся*, если найдется такое положительное δ, что при всякой итерации разбиения m, элементы разбиения самоаффинной пары $(K, \mathcal{A}^m)$ имеют диаметр, превосходящий δ.

Приведем простейший пример недробящейся самоаффинной пары. Рассмотрим квадрат на вершинах $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ в плоскости. Рассмотрим его разбиение двумя операторами, тождественными в ограничении на ось y и сжимающими вдоль оси x в два раза к вертикальным сторонам квадрата. Тогда на m-ой итерации квадрат будет разбит на 2^m прямоугольника с горизонтальными основаниями длины 2^{-m} и вертикальными сторонами длины 1.

Сначала теорема I.1 будет доказана нами для дробящихся самоаффинных пар, а затем, после изучения геометрии самоаффинных пар, распространена на общий случай.

Глава II посвящена исследованию компактных полугрупп аффинных операторов. Вопросы, связанные с разрешимостью уравнений самоподобия в том, или ином пространстве, сводятся к изучению различных семейств аффинных операторов. Так, например, разрешимость уравнения самоподобия в пространствах L_p сводится к оценке нормы произведений операторов из $\mathcal{B}_p$. В то же время, вопрос о структуре недробящихся самоаффинных пар имеет схожую постановку: условие того, что самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ является дробящейся, равносильно условию $\rho_p(\mathcal{A}) < 1$.

Рассмотрим задачу в несколько более общей формулировке. Нас будут интересовать полугруппы аффинных операторов на элементы которых накладываются лишь ограничения сверху и снизу в некоторой норме. Последнее равносильно равенству единице p-радиуса для всякого конечного p. Результаты второй главы будут использованы как при изучении геометрии самоаффинных пар, так и для анализа разрешимости уравнений самоподобия.

Итак, предположим, задано некоторое семейство $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$ аффинных операторов, действующих в пространстве $\mathbb{R}^d$. Здесь мы уже не предполагаем их невырожденности как в случае операторов самоаффинного разбиения. Это семейство мы будем называть *ограниченным*, если под действием полугруппы, порожденной им, орбита любой точки пространства ограниченна. В частности, семейство, задающее самоаффинное разбиение тела, является ограниченным. Как будет показано, ограниченность равносильна существованию инвариантного тела: тело $G \subset \mathbb{R}^d$ инвариантно относительно $\mathcal{B}$, если для всякого оператора B семейства выполнено $BG \subset G$. Оказывается, что в некоторой норме линейные части операторов ограниченной полугруппы по норме не превосходят 1. Если в ограниченной полугруппе существует оператор с нормой строго меньшей 1, мы будем называть ее *сжимающей*. Как будет показано, сжимаемость ограниченного семейства $\mathcal{B}$ равносильна условию $\rho_p(\mathcal{B}) < 1$ для всякого конечного $p > 1$. Условие того, что самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ является дробящейся равносильно тому, что семейство $\mathcal{A}$ является сжимающим. Основной результат второй главы формулируется в параграфе II.3 и заключается в том, что ограниченная несжимающая полугруппа обязана обладать общим инвариантным аффинным пространством всех операторов.

Теорема II.1 *Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклое тело, $\mathcal{B}$ – ограниченное семейство аффинных операторов в $\mathbb{R}^d$ такое, что $BG \subset G$, $B \in \mathcal{B}$. Тогда либо семейство $\mathcal{B}$ сжимающее, либо операторы из $\mathcal{B}$ имеют общее инвариантное аффинное подпространство, пересекающее G, в ограничении на которое $\mathcal{B}$ является сжимающим.*

Идея доказательства теоремы состоит в следующем: по семейству операторов $\mathcal{B}$ строится некоторое семейство $\mathcal{B}_\varepsilon$ такое, что $\rho_p(\mathcal{B}_\varepsilon) < 1$ и при $\varepsilon \to 0$ имеет место $\mathcal{B}_\varepsilon \to \mathcal{B}$. Тогда одномерное уравнение самоподобия с набором операторов $\mathcal{B}_\varepsilon$ обязано иметь суммируемое решение. Затем находится подпоследовательность таких решений, сходящаяся к решению уже с семейством $\mathcal{B}$, из чего делается вывод, учитывая теорему А, что либо $\rho_p(\mathcal{B}) < 1$, либо семейство операторов $\mathcal{B}$ обладает общим инвариантным аффинным подпространством. Следует отметить, что полученное доказательство этого чисто геометрического утверждения является аналитическим. Результаты второй главы, помимо того, что, по мнению автора, сами по себе представляют интерес, применяются для исследования геометрии самоаффинных пар и, кроме того, в главе IV применяются для исследования комбинаторного строения полугрупп неотрицательных матриц.

Глава III посвящена изучению самоаффинных выпуклых тел. Как было отмечено, одной из основных задач, возникающих при изучении многомерных уравнений самоподобия, является вопрос о геометрии самоаффинных тел и операторов, реализующих их разбиение. В сборнике [10] открытых задач из области «интуитивной» геометрии Крофта, Фалконера и Гая 1991 года, приводится следующая проблема Валлета, цитируемая из книги [53] 1978 года:

Верно ли, что любое самоаффинное тело либо является многогранником, либо аффинным образом прямой суммы самоаффинного многогранника на некоторое выпуклое тело?

Легко видеть, что прямая сумма самоаффинного тела и выпуклого тела вновь является самоаффинным телом. Действительно, пусть $(K, \mathcal{A})$ – самоаффинная пара в $\mathbb{R}^d$, а M – некоторое выпуклое тело в пространстве $\mathbb{R}^{d'}$. Тогда тело $X \oplus M$ в пространстве $\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^{d'} = \mathbb{R}^{d+d'}$ является самоаффиным с набором операторов $\{A_1 \oplus \mathrm{Id}, \ldots, A_k \oplus \mathrm{Id}\}$. Так, например, любой цилиндр, будучи прямой суммой отрезка на основание, всегда является самоаффинным. Линейные части операторов разбиения тождественны в ограничении на основания, а в ограничении на образующие, операторы действуют как сжатия, задающие некоторое разбиение отрезка (рис 0.4).

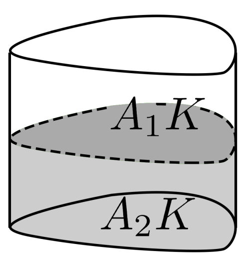


Рис.0.4. Самоаффинное разбиение цилиндра K двумя операторами.

В двумерном случае в работе Рихтера [46] 2012 года было показано, что на плоскости любое самоаффинное тело действительно является многоугольником. Более того, нетрудные манипуляции с подсчетом углов позволяют доказать, что число его вершин не превосходит 5. Им же было доказано, что любой четырехугольник допускает самоаффинное разбиение и была построена серия самоаффинных пятиугольников. В то же время ответ на приведенную гипотезу отрицателен начиная с размерности 3, в диссертации приводится серия соответствующих контрпримеров. Как ни странно, несмотря на несложность конструкции, до этого контрпримеры построены не были. Тем не менее, в некоторых случаях самоаффинные тела гарантированно являются многогранниками. Напомним, что самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ называется *дробящейся*, если итерируя разбиение, мы сможем получить элемент разбиения сколь угодно малого диаметра. Формально, для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное m такое, что на m-ой итерации, среди элементов разбиения самоаффинной пары $(K, \mathcal{A}^m)$, найдется хотя бы один с диаметром меньшим ε. Когда это не будет приводить к путанице, самоаффинное тело K из самоаффинной недробящейся пары $(K, \mathcal{A})$, мы будем также называть недробящимся. Отметим, что если даны две самоаффинные пары $(K, \mathcal{A})$ и $(K, \mathcal{A}')$, то из того, что первая является дробящейся, не следует, что вторая – дробящаяся.

В параграфе III.1 доказываются основные геометрические свойства дробящихся самоаффинных пар:

Теорема III.1 *Если самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ – дробящаяся, то K – многогранник.*

Для дробящихся самоаффинных пар имеет место теорема единственности:

Теорема III.2 *Если $(K, \mathcal{A})$ и $(G, \mathcal{A})$ – две самоаффинных дробящихся пары с одним и тем же семейством операторов, то $K = G$.*

Таким образом, для дробящихся самоаффинных пар выполняется аналог теоремы Хатчинсона о существовании и единственности фрактальных множеств [23].

Мотивировкой разделять самоаффинные пары на дробящиеся и не дробящиеся служит теорема о факторизации: оказывается, что любое недробящееся самоаффинное тело обладает инвариантным относительно своих операторов разбиения сечением, которое уже является дробящимся самоаффинным многогранником. Кроме того, после факторизации по подпространству этого сечения, все операторы разбиения в некотором базисе оказываются ортогональными. Приведем полную формулировку соответствующей теоремы, доказательство которой находится в параграфе III.3.

Теорема III.3 *Для недробящейся самоаффинной пары $(K, \mathcal{A})$ в $\mathbb{R}^d$, операторы семейства $\mathcal{A}$ имеют общее инвариантное аффинное подпространство V, отличное от точки и пересекающее внутренность K. Ограничение исходного семейства $\mathcal{A}|_V$ на инвариантное подпространство является сжимающим. Все такие подпространства имеют одинаковую размерность, параллельны, и каждое из них пересекает K по многограннику. Существует базис, в котором матрицы линейных частей операторов A_i имеют вид:*

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} C_i & D_i \\ 0 & U_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

где C_i – матрица линейной части ограничения оператора A_i на V, а U_i – ортогональная матрица

Обратно, если в некотором базисе матрицы линейных частей операторов A_i имеют приведенный вид с ортогональными матрицами U_i, то самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ недробящаяся.

Проиллюстрируем теорему на примере.

Пример 4. Пусть σ – симплекс в $\mathbb{R}^3$ с вершинами a_1, a_2, a_3, a_4. Через m_1 и m_2 обозначим середины скрещивающихся ребер a_1a_2 и a_3a_4. Образуется четыре отрезка: $a_1m_1, m_1a_2, a_3m_2, m_2a_4$. Выбрав по одному на каждом из исходных ребер, мы приходим к паре скрещивающихся отрезков, образующих симплекс.

Четыре построенных таким образом симплекса будут реализовывать разбиение исходного. Семейство аффинных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots A_4\}$ переводит симплекс σ в один из четырех новых и реализует самоаффинное разбиение σ. Таким образом, например, оператор A_1 переводит вершины $a_1a_2a_3a_4$ в вершины $a_1m_1a_2m_2$, и так далее. Тогда инвариантным подпространством операторов из $\mathcal{A}$ будет центральное сечение симплекса σ, параллельное ребрам a_1a_2 и a_3a_4 и проходящее через его центр масс.

При доказательстве теоремы сначала используется общее утверждение о наличии инвариантного подпространства семейства несжимающих операторов, теорема II.1, а затем из геометрических соображений показывается, что оно имеет положительную размерность и может быть выбрано проходящим через внутренность K.

Используя теорему III.3 о дробящемся сечении, удается завершить доказательство теоремы I.1 о существовании решения многомерного уравнения самоподобия уже в общем виде, для недробящихся областей. Строится проекция недробящегося самоаффинного тела K на его дробящееся сечение G. С ее помощью находится сохраняющее самоаффинную структуру отображение из $L_p(G)$ в $L_p(K)$, переводящее решение уравнения самоподобия в решение.

В некоторых случаях, в зависимости от размерности инвариантного подпространства V, удается построить полную классификацию недробящихся самоаффинных пар. В частности, в параграфе III.5 нами будет получена полная классификация самоаффинных пар в $\mathbb{R}^3$. В то же время, вопрос о структуре самоаффинных дробящихся многогранников, по-видимому, крайне сложен и даже на плоскости не решен полностью: неизвестно, при каких условиях пятиугольник является самоаффинным.

В заключительном параграфе III.6 главы обсуждаются вопросы замощения пространства при помощи аффинных образов самоаффинных тел. Доказывается, что всякая самоаффинная дробящаяся пара $(K, \mathcal{A})$ задает некоторое семейство разбиений $\mathbb{R}^d$ на аффинные образы K.

Глава IV посвящена обобщению теории Перрона-Фробениуса на полугруппы неотрицательных матриц. Многие функциональные уравнения, встречающиеся в теории приближений и смежных областях имеют особый вид операторов семейства $\mathcal{B}$, действующих в образе. Напомним, что $d \times d$ матрица с неотрицательными элементами называется *стохастической*, если сумма ее элементов во всяком столбце равна 1. Все стохастические матрицы обладают инвариантной аффинной гиперплоскостью с единичной суммой координат векторов $\sum_{i=1}^{d} x_i = 1$. В уравнениях Мичелли-Праутша, широком классе уточняющих алгоритмов и других задачах возникают уравнения самоподобия с семейством стохастических матриц $\mathcal{B}$, действующих в образе. Соответственно, ищутся решения с образом, лежащим в инвариантном подпространстве стохастических матриц. В этом специальном случае проверка существования решения может быть осуществленна без явного вычисления p-радиуса операторов. Мы получим простой критерий существования L_p-решений таких уравнений, сформулированный в чисто комбинаторном виде, зависящий лишь от позиций ненулевых элементов матриц.

Результаты, полученные в главе IV позволят нам построить полиномиальный алгоритм проверки существования решений широкого класса уравнений самоподобия. С другой стороны, используя результаты главы II о несжимающих операторных полугруппах, нам удастся обобщить классическую теорию Перрона-Фробениуса на матричные полугруппы.

Приступим у формулировке результатов заключительной главы диссертации.

Обозначим через $\mathcal{A}$ некоторое семейство неотрицательных $d \times d$ матриц, то есть матриц, чьи элементы – вещественные неотрицательные числа. Через $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ будем обозначать полугруппу по умножению, порожденную ими, которая, очевидно, также состоит из неотрицательных матриц. Многие вопросы об асимптотическом поведении произведений матриц из $\mathcal{A}$, или о строении $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, для неотрицательных матриц имеют комбинаторную интерпретацию и тесно связаны с понятием примитивности матрицы.

Неотрицательную матрицу мы будем называть положительной, если все ее элементы больше 0. Семейство $\mathcal{A}$ называется *примитивным*, если полугруппа $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ содержит положительную матрицу. Другими словами, должно существовать положительное произведение матриц семейства. Оказывается, что в общих предположениях для семейств стохастических матриц примитивность равносильна сжимаемости в ограничении на инвариантное подпространство $\sum_{i=1}^{d} x_i = 1$.

В случае, когда семейство $\mathcal{A}$ состоит лишь из одной матрицы A, примитивность означает, что в некоторой степени она положительна, то есть, существует $m > 0$ такое, что A^m – положительна. Такие матрицы называются *примитивными.* Ясно, что если матрица имеет левый нижний блок нулей, то никакая ее степень не может быть положительной: блок нулей будет сохраняться. То же верно и для матричных полугрупп: если после подходящей перестановки базисных векторов все матрицы семейства имеют левый нижний блок нулей, то никакое их произведение не может быть положительным. Такие семейства матриц называются положительно приводимыми.

Если матрица A положительно неприводима, то либо она примитивна, либо имеет $r \geqslant 2$ максимальных по модулю собственных значений. В этом случае существует разбиение множества базисных векторов $\{e_1, \ldots, e_d\}$ на r непустых подмножеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$, на которых A действует как циклическая перестановка, то есть переводит Ω_i в линейную оболочку Ω_{i+1}. Мы полагаем $\Omega_{r+1} = \Omega_1$. Таким образом, существует перестановка базисных векторов, после которой A имеет циклический блочный вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & B_r \\ B_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & B_{r-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Число r называется *индексом импримитивности* матрицы A. Для примитивной матрицы $r = 1$, для непримитивной $r \geqslant 2$.

Эти условия непримитивности неотрицательной матрицы обычно называют теоремой Перрона-Фробениуса. Критерий примитивности был получен Фробениусом в 1912 году [16]. Затем Романовским в работе [47] 1933 года была добавлена комбинаторная интерпретация индекса импримитивности: r является наибольшим общим делителем длин циклов в графе матрицы A, что играет важную роль в теории графов.

Примитивные матрицы нашли широкое применение в цепях Маркова, теории алгоритмов, задачах функционального анализа [4]. Так, например, сходимость случайных цепей Маркова может быть сведена к оценке показателя Ляпунова случайных матриц, что оказывается равносильно вопросу о примитивности [40, 17, 64]. Многие задачи теории автоматов, в частности, проблема существования синхронизирующего слова, имеют переформулировку на матричном языке [54]. В ряде задач, как отмечалось выше, примитивность семейства матриц определяет разрешимость функциональных уравнений со сжатием аргумента [32].

В главе IV теория Перрона-Фробениуса обобщается на случай матричных полугрупп. Находится критерий, аналогичный приведенной теореме, выявляющий комбинаторную структуру непримитивных семейств матриц. В случае одной матрицы для наличия у непримитивной матрицы циклической структуры, нами естественно предполагалась положительная неприводимость. В случае матричных полугрупп мы также будем предполагать положительную неприводимость, то есть отсутствие общего инвариантного базисного подпространства у матриц полугруппы. Однако возникает еще одно условие. Мы будем предполагать, что все матрицы неотрицательного семейства $\mathcal{A}$ не содержат ни нулевых строк, ни нулевых столбцов. В случае одной матрицы такое условие следовало непосредственно из положительной неприводимости. Для полугрупп это уже не так, тем не менее, без этого условия критерий, который мы приведем, оказывается неверным.

Теорема IV.1 *Дано положительно неприводимое семейство неотрицательных матриц $\mathcal{A}$, чьи элементы не содержат ни нулевых строк, ни нулевых столбцов.*

Оно не является примитивным тогда и только тогда, когда существует разбиение множества базисных векторов на непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_r$, на котором все матрицы из $\mathcal{A}$ действуют как перестановки, причем:

- *Среди всех таких разбиений существует единственное разбиение с наибольшим числом множеств r, оно называется каноническим.*
- *Все блоки канонического разбиения заполняются, т.е., существует блочно-диагональная матрица $D \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, у которой все диагональные блоки (соответствующие множествам $\Omega_1, \dots, \Omega_r$) строго положительны.*
- *Число $r = r(\mathcal{A})$ называется индексом импримитивности семейства $\mathcal{A}$. Оно совпадает с минимальным числом n таким, что любая матрица полугруппы $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ имеет не менее n попарно ортогональных столбцов, а также не менее n максимальных собственных значений (с учетом кратности).*

Как мы видим, не все свойства переносятся со случая одной матрицы: так, матрицы семейства $\mathcal{A}$ уже не обязаны быть циклическими перестановками, кроме того, индекс импримитивности r не имеет прежней простой интерпретации в терминах длин циклов. Впервые теорема IV.1 была доказана в совместной статье автора и Протасова 2012 года. Изначальное доказательство имело геометрический характер несмотря на то, что формулировка является, по сути, комбинаторной: примитивность определяется лишь позициями ненулевых элементов матриц. В работе был поставлен вопрос о нахождении чисто комбинаторного доказательства. Независимо и практически одновременно двумя группами были найдены два различных комбинаторных доказательства: Альпиным и Альпиной, а также Блонделем, Юнгерсом и Ольшевским. Как и в оригинальной работе, оба комбинаторных доказательства имеют достаточно значительный объем. В диссертации мы приводим новое, по мнению автора, достаточно естественное и короткое доказательство. Идея состоит в следующем: не уменьшая общности, мы будем рассматривать только полугруппы стохастических неотрицательных матриц. Тогда можно показать, что наличие положительного произведения равносильно сжимаемости семейства $\mathcal{A}$, ограниченного на инвариантный симплекс – пересечение положительного октанта с инвариантным подпространством $\sum_{i=1}^{d} x_i = 1$. В предположении непримитивности, семейство будет несжимающим, а потому найдется инвариантное подпространство V в плоскости симплекса. Оно и будет задавать нужные нам классы $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$. Мы покажем, что базисные вектора e_i, e_j лежат в одном классе тогда, и только тогда, когда вектор $e_i - e_j$ параллелен V.

В заключительном параграфе IV.3 будет построен эффективный алгоритм проверки неравенства $\rho_p(\mathcal{A}) < 1$ для семейств стохастических матриц, ограниченных на их инвариантное подпространство. Алгоритм будет применен к некоторым уравнениям самоподобия для быстрой проверки наличия суммируемых решений.

Диссертация состоит из четырех глав. Список литературы разделен на две части, в конце идет список работ автора по теме диссертации.

Благодарности

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Юрьевичу Протасову за многолетнюю поддержку в работе, постоянное внимание и постановку задач. Автор благодарен коллективу кафедры общих проблем управления за поддержку и дружественную, творческую атмосферу. Автор благодарен своим преподавателям на мехмате МГУ и в Независимом Московском Университете. Автор тепло благодарен своей школе, лицею «Вторая школа».

Глава I. Функциональные уравнения самоподобия

Функциональные уравнения самоподобия, которым посвящена первая глава диссертации, представляют собой специальный класс уравнений в пространстве $L_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, где Ω – некоторое выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$, допускающее разбиение на свои аффинные копии. Примерами уравнений самоподобия служат масштабирующие уравнения, уравнения, возникающие в уточняющих алгоритмах, в качестве примеров решений уравнений самоподобия можно привести некоторые вейвлеты. Сначала мы введем одномерные уравнения самоподобия, сформулируем известный критерий существования их решений. Затем будут определены многомерные уравнения самоподобия, для которых будут доказаны утверждения аналогичные одномерному случаю, но, тем не менее, не переносящиеся с него напрямую.

§ I.1. Одномерные уравнения самоподобия

В данном параграфе мы определим одномерные уравнения самоподобия. Впервые уравнения самоподобия были рассмотрены, по-видимому, в работе Мичелли и Праутша [32] 1989 года, позднее они встречались, например, в работах Лау и Вонга [31], Добеши и Лагариаса [11] и многих других авторов. Несмотря на то, что частные примеры таких уравнений обширно встречались в литературе, общий вид был определен только в 2008 году в работе Протасова [39]. Предположим, задано конечное семейство аффинных операторов $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$, действующих в $\mathbb{R}^n$ и произвольное разбиение отрезка $[0,1]$ точками $0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < 1$. Следующее уравнение на функцию $f: [0,1] \to \mathbb{R}^n$:

$$f(t) = B_m f(g_m^{-1}(t)),\ t \in [t_{m-1}, t_m],\ m = 1, \ldots, k \tag{I.1.1}$$

называется *уравнением самоподобия*, соответствующим данному семейству и разбиению. Через g_m будем обозначать одномерный аффинный оператор, переводящий отрезок $[0,1]$ в отрезок $[t_{m-1}, t_m]$, также полагаем $t_0 = 0, t_k = 1$. Операторы B_m могут быть, вообще говоря, вырожденными. Так, если один из этих операторов переводит все пространство в некоторую точку $y \in \mathbb{R}^n$, решение уравнения I.1.1 будет постоянным отображением в y на некотором канторовском подмножестве отрезка. Вопрос о разрешимости уравнений такого вида в пространствах $C[0,1]$ и $L_p[0,1]$ (имеются в виду соответствующие пространства вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^n$) и о свойствах решений возникал в различных областях математики (см., например, [11, 38, 15, 25]). Большинство классических фрактальных кривых являются решениями уравнений вида (I.1.1).

Пример I.1.1. (*Кривая Коха* [30]). $k = 2, t_1 = 1/2$ (т.е. отрезок $[0,1]$ разбивается на две равные части), аффинные операторы B_1, B_2 определены следующим образом: пусть abc – равнобедренный треугольник, $\angle c = 120^o$, точки d, e выбраны на стороне ab так, что $\angle acd = \angle bce = 30^o$; тогда B_1 – оператор подобия, переводящий треугольник abc в треугольник acd; B_2 – оператор подобия, переводящий abc в cbe. Решение соответствующего уравнения (I.1.1) непрерывно и является кривой Коха («снежинкой»), построенной на отрезке ab. На рисунке 1 приведено разбиение исходного треугольника и изображена предельная кривая, заданная функцией $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$.

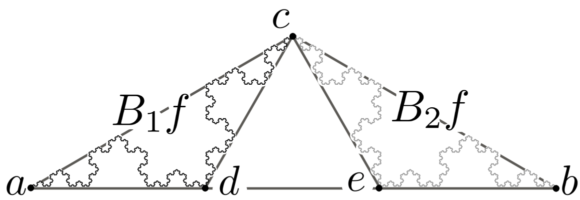


Рис.1. Кривая Коха.

Пример I.1.2. (*Кривая де Рама*). $k = 2, t_1 = 1/2$,

$$B_1x = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \omega & 1-2\omega \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega \end{pmatrix}, \qquad B_2x = \begin{pmatrix} 1-2\omega & \omega \\ 0 & \omega \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2\omega \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение соответствующего уравнения самоподобия является кривой де Рама, которая получается как предельная кривая следующей последовательности кривых. Дана произвольная незамкнутая ломаная на вершинах $z_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{Z}$. На первом шаге каждую сторону ломаной делим на три части в отношении $\omega : (1 - 2\omega) : \omega$, где $\omega \in (0, 1/2)$ – некоторый фиксированный коэффициент. Таким образом на каждой стороне исходной ломаной мы получаем по две точки деления. Соединив последовательно все точки деления, получаем новую ломаную. Опять применяем это преобразование для получившейся ломаной, и т.д. Предельная кривая и будет кривой де Рама [45]. На рисунке 2 изображена первая итерация построения кривой де Рама и предельная кривая при $\omega = 0.3$. Семейство операторов $\mathcal{B}$ в данном случае определяется исходной ломаной и коэффициентом ω. Гладкость таких кривых тесно связана со спектральными характеристиками семейства $\mathcal{B}$, подробно этот вопрос изучался в работах Протасова, Каваретта, Дахмена, Мичелли, Бена Слимана [42, 8, 52].

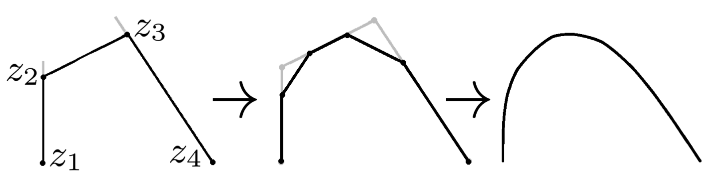


Рис.2. Кривая де Рама с $\omega = 0.3$.

Пример I.1.3. (*Масштабирующие уравнения*). Масштабирующим называется функциональное уравнение вида

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j \varphi(2x - j),$$

где $c_0, \ldots c_N$ – заданная последовательность коэффициентов. Вектор-функция $f(t) = \big(\varphi(t), \varphi(t+1), \ldots, \varphi(t+N-1)\big)^T \in \mathbb{R}^N$ является решением уравнения самоподобия (I.1.1) с параметрами $k = 2, t_1 = 1/2$, операторы B_1, B_2 задаются специальными матрицами, построенными по коэффициентам c_m. Такие уравнения были введены в совместной работе Добеши и Лагариаса в 1992 году [11], см. также обширную библиографию в [7, 55].

Уравнения самоподобия, соответствующие разбиению отрезка $[0, 1]$ на равные части, подробно изучались в работах Мичелли и Праутша [32] и Шейпака [60]. Другие примеры уравнений самоподобий рассматривались в [7, 20]. В работе Протасова [39] были определены уравнения самоподобия общего вида (I.1.1) и доказан критерий их разрешимости в $L_p[0, 1]$ (в этом случае уравнение выполнено почти всюду на отрезке). Для формулировки критерия нам потребуется ввести несколько понятий. Семейство аффинных операторов называется *неприводимым*, если не существует *аффинного* подпространства, не совпадающего со всем пространством, инвариантного относительно всех операторов семейства. Отметим, что допустим случай, когда общее инвариантное подпространство является точкой. Тогда семейство по определению приводимо и состоит, по сути, из линейных операторов.

Критерий существования и единственности решения самоподобия будет приведен в терминах совместных спектральных характеристик операторов семейства $\mathcal{B}$. Дадим необходимые определения.

Пусть сначала задано семейство линейных операторов $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$, действующих в $\mathbb{R}^d$. Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ и подстановки $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$ через Π_σ обозначим произведение $B_{\sigma(1)} \ldots B_{\sigma(n)}$. Определим $\mathcal{F}_n(p) = \mathcal{F}_n(p, \mathcal{B})$ как величину $[k^{-n} \sum_\sigma \|\Pi_\sigma\|^p]^{1/p}$, $p \geqslant 1$, при $p = \infty$ эта величина определяется как предел величины $\mathcal{F}_n(p)$ при $p \to \infty$.

Для фиксированного $p \in [1, +\infty]$ *p-радиусом линейных операторов* семейства $\mathcal{B}$ называется величина

$$\rho_p = \rho_p(\mathcal{B}) = \lim_{n\to\infty} \Big[\mathcal{F}_n(p, \mathcal{B})\Big]^{1/n} \tag{I.1.2}$$

Для аффинных операторов p-радиусом называется p-радиус их линейных частей.

Предел (I.1.2) существует для любого семейства операторов и не зависит от нормы в $\mathbb{R}^d$ [48]. Если $k = 1$, или все операторы B_i равны некоторому оператору B, то по известной формуле Гельфанда, $\rho_p(\mathcal{B})$ равно обычному спектральному радиусу $\rho(B)$, т.е. максимальному модулю собственных значений. При фиксированном семействе $\mathcal{B}$, p-радиус является неубывающей функцией по p. Число ρ_∞ называется совместным спектральным радиусом (ССР). В литературе широко изучался p-радиус. Впервые ССР был введен в работе Рота и Странга [48] в 1960 г. Активное изучение этого объекта началось в лишь в конце 1980-х годов, ССР нашел применения в теории вейвлетов, subdivision-алгоритмах, динамических системах, теории кодирования, теории чисел, теории вероятностей, и т.д. (см. библиографию в [39]). Свойствам ССР и проблеме его вычисления посвящена обширная литература (см. [3, 6, 41, 19] и библиографию в этих работах). Понятие ССР было расширено до p-радиуса в работе Вонга [56] (для случая $p = 1$), а затем для произвольного $p \geqslant 1$ в работе Джиа [25] и независимо в работе Вонга и Лау [31].

Вернемся к критерию существования и единственности решения одномерного уравнения самоподобия. Его мы сформулируем в несколько ином виде, чем в оригинальной работе [39], в котором он был фактически доказан.

Отметим, что решение уравнения самоподобия является неподвижной точкой оператора самоподобия

$$[\mathbf{B}f](t) = B_m f(g_m^{-1}(t)), t \in [t_{m-1}, t_m], m = 1, \ldots, k$$

Поясним, как действует оператор $\mathbf{B}$. Для каждого из отрезков $[t_{m-1}, t_m]$ функция f переопределяется с помощью образа всего отрезка $[0, 1]$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, к которому дополнительно применяется аффинный оператор B_m, соответствующий отрезку $[t_{m-1}, t_m]$. На рисунке 3 проиллюстрировано действие оператора $\mathbf{B}$ на функцию f с $k = 3$.

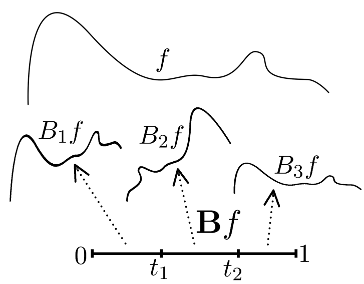


Рис.3

Пусть $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_k\}$ – семейство операторов, являющихся линейными частями аффинных операторов семейства $\widetilde{\mathcal{B}}$. Положим $r_i = t_i - t_{i-1}$, $r = (r_1, \ldots, r_k)$, $kr\widetilde{\mathcal{B}} = kr_1\widetilde{B}_1, \ldots, kr_k\widetilde{B}_k$.

Для произвольной функции $f \in L_p([0, 1], \mathbb{R}^n)$ обозначим через $\mathbf{aff}\,(f)$ аффинную оболочку ее образа, т.е., наименьшую по включению аффинную плоскость в $\mathbb{R}^n$, содержащую точки $f(t)$ для почти всех $t \in [0, 1]$. Если $f \in L_p$ – решение уравнения самоподобия, то $\mathbf{aff}\,(f)$ является общей инвариантной плоскостью операторов из $\mathcal{B}$, возможно, совпадающей с $\mathbb{R}^n$. Теперь мы можем сформулировать критерий существования решения одномерного уравнения самоподобия.

Теорема A [39; теорема 2]. *Для неприводимого семейства аффинных операторов уравнение (I.1.1) имеет решение $f \in L_1[0, 1]$ тогда, и только тогда, когда $\rho_1(kr\mathcal{B}) < 1$. Это решение единственно.*
Кроме того:

- *Если при некотором $p \in [1, +\infty]$ имеет место $\rho_p((kr)^{1/p}\mathcal{B}) < 1$, то $f \in L_p$. Для $p < \infty$ верно и обратное: если $f \in L_p$, то $\rho_p < 1$. В этом случае оператор $\mathbf{B}$ является сжимающим в пространстве L_p и решение уравнения самоподобия явлется его неподвижной точкой.*
- *Если $f \in L_\infty$, то $\rho_\infty \leqslant 1$.*
- *Без предположения неприводимости, если уравнение имеет L_p-решение, то $\rho_p(\mathcal{B}|_V) < 1$, где $V = \mathbf{aff}\,(f)$.*

Одна из основных задач этой главы – расширить определение уравнения самоподобия на функции многих переменных. Первой нетривиальной проблемой, возникающей при этом, является вопрос об области определения: в одномерном случае существенно используется, что отрезок может быть разбит на меньшие отрезки, подобные ему (так как все отрезки подобны).

§ I.2. Многомерные уравнения самоподобия и самоаффинные тела

Мы переходим к вопросу об обобщении уравнений самоподобия на случай функций многих переменных. Прежде всего, необходимо задать область определения. В случае функции одной переменной, неявно использовалось разбиение единичного отрезка I на его образы $g_i I$, чье объединение совпадало с I: уравнение самоподобия заключалось в согласованности сужения функции на $g_i I$ с действием оператора B_i в образе. Таким образом, в многомерном случае также необходимо предполагать самоаффинность области определения: она должна состоять из аффинно-подобных себе областей. Кроме того, естественным (хотя и не столь необходимым) условием является выпуклость области определения: в подавляющем большинстве частных случаев уравнений самоподобия, как мы увидим, выпуклость предполагается. Отчасти, это обусловленно тем, что без предположения выпуклости, области, допускающие разбиения на свои аффинные копии, устроены весьма сложно, в частности, могут являться фрактальными.

Теперь дадим формальное определение класса областей, на которых будут рассматриваться многомерные уравнения самоподобия. *Телом* в $\mathbb{R}^d$ мы называем выпуклый компакт, имеющий внутреннюю точку.

Определение I.2.1. *Самоаффинной парой* будем называть пару $(K, \mathcal{A})$, состоящую из тела $K \subset \mathbb{R}^d$ и конечного семейства невырожденных аффинных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$, действующих в $\mathbb{R}^d$ таких, что:

1. объединение образов тела совпадает с ним: $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i K = K$;
2. образы K не пересекаются по внутренностям: $\operatorname{int}(A_i K) \cap \operatorname{int}(A_j K) = \varnothing$ при $i \neq j$.

Тело K из самоаффинной пары мы называем *самоаффинным.* Таким образом, тело является самоаффинным, если допускает какое-нибудь разбиение на аффинно-подобные себе части. Таким образом, аналогом одномерных операторов $\{g_i\}$, переводящих единичный отрезок в себя, теперь служат аффинные операторы семейства $\mathcal{A}$.

Подробному изучению самоаффинных пар посвящена III глава диссертации, тем не менее, мы приводим здесь некоторые общие сведения о геометрии самоаффинных тел и самоаффинных пар, которые нам понадобятся раньше.

Тела $A_i K$, $i = 1, \dots, k$ мы будем называть *элементами разбиения* самоаффинной пары $(K, \mathcal{A})$. Самоаффинное разбиение можно итерировать: по самоаффинной паре $(K, \mathcal{A})$ строится самоаффинная пара $(K, \mathcal{A}^2)$, элементами разбиения которой служат множества $A_i A_j K$. Таким образом, $\mathcal{A}^2 = \{A_i A_j,\ i = 1, \dots, k,\ j = 1, \dots, k\}$. Самоаффинная пара $(K, \mathcal{A}^n)$ определяется аналогично.

Отметим еще два важных свойства самоаффинных пар. В главе III будет показано, что в некоторой норме линейные части всех операторов самоаффинного разбиения не превосходят единицы (лемма III.1.1). Также нетрудно убедиться, что в силу равенства суммы объемов тел разбиения с объемом исходного тела, имеем $\sum_{i=1}^{k} |\det A_i| = 1$.

Определение I.2.2. Самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ называется *дробящейся*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое произведение операторов разбиения $A_{i_1} \dots A_{i_k}$, что диаметр $A_{i_1} \dots A_{i_k} X$ меньше ε.

Как будет показано в главе III, в некотором смысле, дробящиеся самоаффинные пары классифицируют все самоаффинные пары. Кроме того, оказывается, что если самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ – дробящаяся, то K является многогранником (теорема III.1). Таким образом, справедливо, когда речь идет о дробящихся самоаффинных телах, называть их дробящимися многогранниками.

Через μ будем обозначать лебеговскую меру. Для фиксированных положительного ε и натурального n через $\mu_n(\varepsilon)$ обозначим суммарную меру тех элементов разбиения, полученных при n-ой итерации, чей диаметр превосходит ε. Таким образом, $\mu_n(\varepsilon) = \mu(\cup A_{i_1} \dots A_{i_n} K|\ \mathrm{diam}(A_{i_1} \dots A_{i_n} K) > \varepsilon)$. Очевидным образом, $\mu_n(\varepsilon)$ не возрастает по n. Следующая лемма показывает, что, итерируя дробящееся самоаффинное разбиение, мы можем добиться того, что большинство элементов разбиения имеют малый диаметр.

Лемма I.2.1. *Самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ является дробящейся тогда, и только тогда, когда выполнено следующее условие: $\mu_n(\varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого ε.*

Иначе говоря, при итерации разбиения, суммарная мера элементов разбиения с большим диаметром, должна стремится к нулю. Доказательство леммы приводится в главе III.

Вернемся к определению многомерного уравнения самоподобия. Дана самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ в $\mathbb{R}^d$ с семейством операторов разбиения $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$. Задан произвольный набор аффинных операторов $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$, действующих в $\mathbb{R}^n$.

Уравнением самоподобия, заданным семейством $\mathcal{B}$ и самоаффинной парой $(K, \mathcal{A})$ будем называть уравнение на функцию f из класса $L_p(K, \mathbb{R}^n)$ следующего вида:

$$f(t) = B_m f(A_m^{-1}(t)),\ t \in A_m K,\ m = 1, \dots, k \tag{I.2.1}$$

Другой простой переформулировкой уравнения самоподобия является условие коммутативности следующей диаграммы при всех $m = 1, \dots, k$:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow{\scriptstyle A_m} & & \downarrow{\scriptstyle B_m} \\ K & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Под коммутативностью здесь и далее предполагается коммутативность, выполненная почти всюду на K. Решение уравнения I.2.1 является неподвижной точкой аффинного *оператора самоподобия* $\mathbf{B}$, действующего в $L_p(K)$ по формуле

$$[\mathbf{B}f](t) = B_m f(A_m^{-1}(t)), t \in A_m K, m = 1, \dots, k$$

Простейшими примерами областей определения K могут быть кубы, симплексы. Например, в случае единичного куба в $\mathbb{R}^d$ с операторами двоичного сжатия относительно его вершин, уравнение (I.2.1) принимает вид: $f(t) = B_j f(2t - w_j)$, где w_j – ближайшая к t вершина куба.

Далее мы приведем критерий существования и единственности решения многомерного уравнения самоподобия, но прежде отметим, что сначала докажем его только в случае, когда самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ является дробящейся. Данное условие хорошо иллюстрирует нетривиальность обобщения теоремы A на случай функций многих переменных. Основная сложность перехода от одномерного случая к многомерному заключается в том, что любое разбиение отрезка является дробящимся: при его итерации, диаметры *всех* элементов разбиения стремятся к нулю. Учитывая это, в доказательстве теоремы A на основе разбиения отрезка строятся кусочно-постоянные функции, приближающие решение и, оперируя ими, проводится доказательство. В многомерном случае такое возможно не всегда: существуют недробящиеся самоаффинные пары. Более того, даже для дробящихся самоаффинных пар при итерации разбиения, нельзя гарантировать, что диаметры *всех* элементов разбиения будут стремиться к нулю. Тем не менее, эту трудность удается обойти и доказать аналог теоремы A для дробящихся самоаффинных пар. Для дробящегося самоаффинной пары $(K, \mathcal{A})$ будет построен естественный изоморфизм между пространствами $L_p(K)$ и $L_p([0,1])$, согласованный с самоаффинной структурой. С его помощью случай многомерной области определения будет сведен к одномерному случаю.

После подробного изучения геометрии самоаффинных пар в следующей главе, нам удастся завершить доказательство в полной общности, без предположения, что пара является дробящейся. Доказательство теоремы для недробящихся самоаффинных пар приводится в параграфе III.4

Вновь для краткости через $\mathcal{B}_p$ мы обозначаем линейные части семейства $\{(k|\det A_1|)^{1/p} B_1, \dots, (k|\det A_k|)^{1/p} B_k\}$. Отметим, что вместо длин отрезков, как в одномерном случае, для нормировки мы используем объемы элементов разбиения области определения. Как и в одномерном случае, критерий существования и единственности решения уравнения (I.2.1) будет дан в терминах p-радиуса семейства линейных операторов $\mathcal{B}_p$.

Теорема I.1. *Задана самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ в $\mathbb{R}^d$ и неприводимое семейство аффинных операторов $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$, действующих в $\mathbb{R}^n$.*

Уравнение (I.2.1) имеет решение $f \in L_1(K)$ тогда, и только тогда, когда $\rho_1(\mathcal{B}_1) < 1$. Это решение единственно.

Если при некотором $p \in [1, +\infty]$ имеет место $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$, то $f \in L_p$. Для $p < \infty$ верно и обратное: если $f \in L_p$, то $\rho_p < 1$. Если $f \in L_\infty$, то $\rho_\infty \leqslant 1$.

Без предположения неприводимости семейства $\mathcal{B}$, если уравнение (I.2.1) имеет L_p-решение, то $\rho_p((\mathcal{B}|_V)_p) < 1$, где $V = \mathbf{aff}\,(f)$.

Напомним, что самоаффинная дробящаяся пара $(K, \mathcal{A})$ фиксирована и включена в уравнение самоподобия. Отметим, что условие неприводимости не накладывает никаких ограничений: если операторы имеют общее собственное аффинное подпространство, то, ограничив их на него, мы вновь можем воспользоваться теоремой.

Приведем несколько примеров уравнений самоподобия и их решений.

Пример I.2.1. Рассмотрим треугольник abc и две точки m_1, m_2 на стороне bc, делящие сторону на три равные части. Пусть операторы A_1, A_2, A_3 переводят треугольник abc в abm_1, m_1m_2a и m_2ca. Легко видеть, что abc – дробящийся, $r_i = \det(A_i) = 1/3$. Полагаем:

$$B_1 = \frac{E}{2}\,x + e_1, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} x + e_1, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/5 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} x + e_2.$$

Тогда $\rho_1(\mathcal{B}_1) = \rho_1\left(\frac{3}{3}\widetilde{B}_1, \frac{3}{3}\widetilde{B}_2, \frac{3}{3}\widetilde{B}_3\right) = \lambda_{max}\left(\frac{\widetilde{B}_1+\widetilde{B}_2+\widetilde{B}_3}{3}\right) = 1/2 < 1$, предпоследнее равенство легко вытекает из диагональности первых двух операторов семейства $\mathcal{B}$ и преобладания диагонали в третьем. Таким образом, существует единственное решение (I.2.1) (рис. 4).

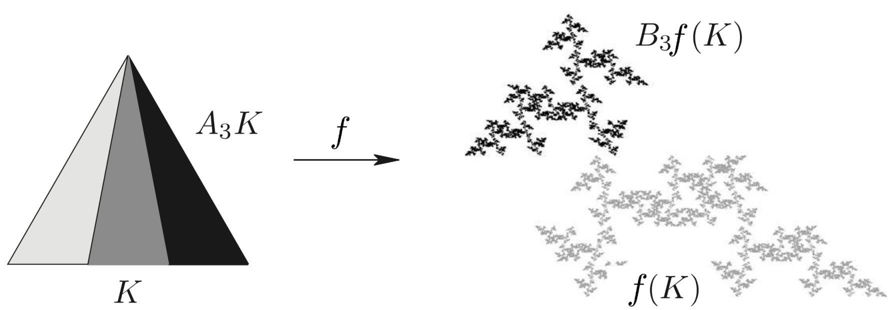


Рис.4

Если же в качестве B_1, B_2, B_3 взять операторы

$$B_1 = \frac{E}{2}\,x + e_1, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} x + e_1, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} x + e_2,$$

то $\rho_1(\mathcal{B}_1) = 1$, и суммируемого решения уравнения (I.2.1) не существует.

Пример I.2.2. Многогранник K и операторы самоподобия те же, что и выше. Рассмотрим $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,7 \\ 0,3 & 0,25 \end{pmatrix}$. Рассмотрим уравнение самоподобия (I.2.1) на функцию $f : K \to \mathbb{R}^2$ со следующим семейством $\mathcal{B}$: $B_1 = \widetilde{B}x$, $B_2 = \widetilde{B}x + e_1$, $B_3 = \widetilde{B}x + e_1 + e_2$. Легко видеть, что $\rho_p(rk\widetilde{\mathcal{B}}) = \rho_p(\widetilde{\mathcal{B}}) = \rho(\widetilde{B}) < 1$, тем самым, $f \in L_p(K)$ для любого $p > 0$, на рисунке 5 приведена приближенная область значения f.

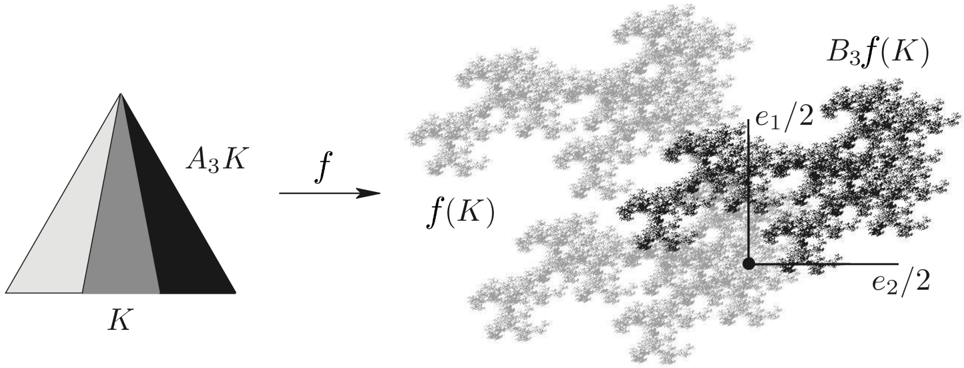


Рис.5

Замечание I.2.1. Численное нахождение решений уравнения самоподобия может быть осуществлено итерациями оператора $\mathbf{B}$, примененного к произвольной начальной функции $f_0 \in L_p$. В силу теоремы I.1, если L_p-решение существует, то $\rho_p = \rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$. Рассуждениями, аналогичными тем, которые приведены в работе [39; теорема 3] нетрудно показать, что для любого m имеет место оценка на норму степени линейной части оператора самоподобия:

$$\|\widetilde{\mathbf{B}}^k\|_p \leqslant c \cdot (\rho_p)^k k^s \tag{I.2.2}$$

где c и s – некоторые константы и $\rho_p = \rho_p(\mathcal{B}_p)$. Предположим, φ – решение (I.2.1), f – произвольная суммируемая функция из K в $\mathbb{R}^d$. Тогда

$$\|\mathbf{B}^k(f) - \varphi\|_p = \|\mathbf{B}^k(f - \varphi)\|_p \leqslant c \cdot (\rho_p)^k k^s$$

В силу $\rho_p < 1$, имеем $\mathbf{B}^k f \to \varphi$ при $k \to \infty$ с экспоненциальной скоростью.

§ I.3. Доказательство теоремы I.1 для дробящихся пар

Как было отмечено, в этом параграфе мы приведем доказательство только в случае, когда пара $(K, \mathcal{A})$ является дробящейся. Завершить доказательство для недробящихся пар мы сможем после более подробного изучения геометрии самоаффинных тел, в параграфе III.4. Идея доказательства состоит в следующем. Предположим, в $\mathbb{R}^d$ задана самоаффинная дробящаяся пара $(K, \mathcal{A})$, $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ и набор операторов $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$, действующих в $\mathbb{R}^n$, задающие многомерное уравнение самоподобия I.2.1. Рассмотрим теперь единичный отрезок I, разбитый на k последовательных отрезков длин $|\det A_m|$, $m = 1, \dots, k$. Как и раньше, чрез g_m мы обозначаем одномерный аффинный оператор, переводящий I в соответствующий отрезок длины $|\det A_m|$. Напомним, что в силу самоаффинности $\sum_{m=1}^k |\det A_i| = 1$ и значит, такое разбиение единичного отрезка определено корректно. Мы построим измеримое, взаимно-однозначное на подмножествах полной меры отображение ψ единичного отрезка I на самоаффинное тело K, коммутирующее с операторами самоаффинного разбиения: $\psi \circ g_m = A_m \circ \psi$. Затем мы покажем, что индуцированные отображения ψ^* и $(\psi^{-1})^*$ пространств $L_p(K, \mathbb{R}^n)$ и $L_p(I, \mathbb{R}^n)$ являются взаимно обратными, непрерывными и, кроме того, переводят решения уравнения самоподобия в решения уравнения самоподобия. Тогда для доказательства многомерного критерия существования и единственности решения (теоремы I.1) мы сможем воспользоваться известным одномерным случаем.

Доказательство теоремы I.1 для дробящихся пар $(K, \mathcal{A})$. Начнем с построения отображения ψ из отрезка в самоаффинное тело K. Прежде всего, отметим, что всякая точка t единичного отрезка кодируется последовательностью отображений $g_{t_1}, \dots g_{t_m}, \dots$ таких, что при предельном переходе, t является образом отрезка $\lim_{m\to\infty} g_{t_1}\cdots g_{t_m} I$. Кроме того, для почти всех точек такая кодировка однозначна. Напомним, что оператор g_1 переводит единичный отрезок I в отрезок $[0, |\det A_1|]$, оператор g_2 переводит I в отрезок $[|\det A_1|, |\det A_1| + |\det A_2|]$, и так далее. Если предположить, что определители всех операторов семейства $\mathcal{A}$ по модулю совпадают, то соответствующая точке t последовательность будет суть ее k-ичным разложением. Определим

$$\psi(t) = \lim_{m\to\infty} (A_{t_m} \dots A_{t_1} K) \tag{I.3.1}$$

Покажем, что такая функция $\psi(t)$ корректно определена почти всюду и является суммируемой. Через $\widetilde{I}$ обозначим те точки единичного отрезка, для которых предел I.3.1 корректно определен, то есть предельным множеством является точка. Покажем, что $\widetilde{I}$ имеет полную меру в единичном отрезке. По условию, найдется произведение $A_\varepsilon = A_{i_l}\cdots A_{i_1}$ операторов семейства $\mathcal{A}$ с нормой линейной части меньшей единицы. Рассмотрим подмножество J единичного отрезка, состоящее из таких точек t, что определенная выше соответствующая им k-ичная последовательность, содержит бесконечно много непересекающихся участков $\overline{i_1, \dots, i_l}$. Ясно, что лебеговская мера множества J равна 1 и $J \subset \widetilde{I}$. В этом легко убедиться, например, рассматривая «конечные» приближения множества J извне: через J_m обозначим те точки отрезка, в которых необходимая нам последовательность встречается хотя бы $m > 0$ раз. Тогда все J_m имеют полную меру, следовательно, и $J = \bigcap_{m=1}^{\infty} J_m$ имеет полную меру. Зафиксируем $t \in J$ и рассмотрим произведение операторов $A_{t,m} = A_{t_m}\cdots A_{t_1}$, где $t_1, \dots, t_m$ – первые m чисел последовательности, соответствующей $t \in [0, 1]$. Отметим, что $A_{t,m+1}K \subset A_{t,m}K$. По построению, при m, стремящемся к бесконечности, оператор $A_{t,n}$ представляется в виде произведения сколь угодно большого числа операторов A_ε и операторов с нормой, не превосходящей единицы. Таким образом, для точки $t \in J$ будет определен предел $\psi(t) = \lim_{m\to\infty} A_{t,m}K$.

Покажем, что функция ψ – измерима. Зафиксируем произвольную точку $s \in K$. Теперь заметим, что для почти всех точек t отрезка, $\psi(t)$ является пределом значений последовательности кусочно-постоянных функций $\psi_m(t) = A_{t_m}\cdots A_{t_1}s$, где $t_1, \dots, t_m$ – первые m чисел k-ичной последовательности, построенной по t. Другими словами, почти всюду $\psi(t) = \lim_{m\to\infty}\psi_m(t)$, где ψ_m – измеримые. Таким образом, ψ – измеримое отображение компактов. Интегрируемость ее модуля вытекает из ограниченности. Непосредственно по построению имеем $\psi \circ A_m = g_m \circ \psi$, данное равенство выполнено на подмножестве $\widetilde{I}$ единичного отрезка полной меры.

Далее, аналогично построим отображение $\phi : K \to I$, определенное тем же способом: точке $s \in K$ ставится в соответствие последовательность чисел

$s_1, \ldots, s_m, \ldots$ таких, что образ исходного тела $A_{s_1} \cdots A_{s_m} K$ содержит s при любом m. Образ $\phi(s)$ определяется как $\lim_{m\to\infty} g_{s_1} \cdots g_{s_m} I$. Измеримость и корректность данного отображения проверяются дословно так же, как для отображения ψ за тем исключением, что ϕ определено на всем K, так как предел $\lim_{m\to\infty} g_{s_1} \cdots g_{s_m} I$ существует для любой k-ичной последовательности. Вновь по построению имеем $\phi \circ g_m = A_m \circ \phi$ для любого $m = 1, \ldots, k$.

Отметим, что функция ϕ корректно определена и без предположения, что пара $(K, \mathcal{A})$ является дробящейся.

Итак, мы определили отображения ψ и ϕ при помощи которых дальше будем переносить решения уравнений самоподобия. Сначала покажем, что они задают изоморфизм пространств $L_p(K, \mathbb{R}^n)$ и $L_p(I, \mathbb{R}^n)$.

Через $K_{\varepsilon,m}$ обозначим множество тех элементов разбиения самоаффиной пары $(K, \mathcal{A}^m)$, полученных при m-ой итерации, чей диаметр превышает ε. Для фиксированной точки $s \in K$ через $K_m(s)$ обозначим тот элемент разбиения $(K, \mathcal{A}^m)$, полученный на m-ой итерации, который содержит s. Для почти всех точек такой элемент будет определен единственным способом и $K_m(s) = A_{s_1} \cdots A_{s_m} K$. По построению, отображение ϕ является обратным к ψ на тех точках s тела K, для которых $\lim_{m\to\infty} \operatorname{diam} K_m(s) = 0$. Таким образом, отображение ϕ является обратным к отображению ψ на множестве

$$\widetilde{K} = \bigcup_{s\in K} \{s | \lim_{m\to\infty} \mathrm{diam} K_m(s) = 0\}$$

Покажем, что дополнение к этому множеству имеет нулевую меру. Действительно,

$$\begin{aligned} K \setminus \widetilde{K} &= \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcup_{s\in K} \{s \mid \mathrm{diam} K_m(s) > \varepsilon \text{ для любого натурального } m\} \\ &= \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcup_{s\in K} \{s \mid s \in K_{\varepsilon,m} \text{ для любого натурального } m\} \\ &= \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} K_{\varepsilon,m} = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} K_{1/l,m} \end{aligned} \tag{I.3.2}$$

последний переход законен, учитывая включение $K_{\varepsilon,m} \subset K_{\varepsilon',m}$ при $\varepsilon > \varepsilon'$. Остается заметить, что по лемме I.2.1, множество $\bigcap\limits_{m>0} K_{1/l,m}$ имеет нулевую меру.

Подведем итог первой части доказательства. Нами построены подмножества полной меры $\widetilde{I}$ и $\widetilde{K}$ и взаимно-обратные измеримые отображения между ними ϕ и ψ, коммутирующие с операторами разбиений. Заметим, что отображения сохраняют меры с точностью до умножения на $\operatorname{Vol} K$: $\mu(\phi(U)) = \operatorname{Vol} K \cdot \mu(U)$, $U \subset \widetilde{I}$. В этом легко убедиться: для множеств вида $A\widetilde{K}$ и $g\widetilde{I}$, где A, g – некоторые конечные произведения операторов разбиений, это выполнено по построению. При этом такие множества образуют базы множеств соответствующих пространств.

Заключаем, что индуцированные отображения ϕ^* и ψ^* задают изоморфизм пространств $L_p(I, \mathbb{R}^n)$ и $L_p(K, \mathbb{R}^n)$

Рассмотрим два уравнения самоподобия: для единичного отрезка I с определенными выше операторами g_m, $m = 1, \dots k$, и для самоаффинной пары $(K, \mathcal{A})$:

$$f(t) = B_m f(g_m^{-1}(t)), \quad t \in g_m I, \quad m = 1, \dots, k \tag{I.3.3}$$

$$v(s) = B_m v(A_m^{-1}(s)), \quad s \in A_m K, \quad m = 1, \dots, k \tag{I.3.4}$$

покажем, что из существования L_p-решения уравнения I.3.4 следует существование решения уравнения I.3.3 и наоборот. Действительно, пусть существует решение $v(s)$ уравнения I.3.4. Тогда следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{I} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g_m"] & K \arrow[r, "v"] \arrow[d, "A_m"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "B_m"] \\ \widetilde{I} \arrow[r, "\psi"] & K \arrow[r, "v"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

из нее видно, что функция $\psi^* v = v \circ \psi$ делает коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} \widetilde{I} \arrow[r, "\psi^* v"] \arrow[d, "g_m"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "B_m"] \\ \widetilde{I} \arrow[r, "\psi^* v"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

учитывая, что $\widetilde{I}$ является подмножеством полной меры в I, из этого следует разрешимость уравнения I.3.3. Кроме того, оператор ψ^* является обратимым, поэтому из единственности решения уравнения I.3.4, следует единственность решения уравнения I.3.3.

Дословно теми же рассуждениями получаем, что из разрешимости уравнения I.3.3, следует единственность решения уравнения I.3.4. Для этого нам достаточно рассмотреть диаграмму:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "A_m"] & I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_m"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "B_m"] \\ K \arrow[r, "\phi"] & I \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Кроме того, заметим, что, как отмечалось выше, данная диаграмма может быть построена и без предположения, что самоаффинная пара является дробящейся.

Таким образом, вопрос разрешимости уравнения I.3.4, сводится к вопросу разрешимости одномерного уравнения самоподобия. Применяя теорему А, завершаем доказательство.

□

Отметим, что попутно мы доказали, что импликация $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1 \Rightarrow$ *существует L_p-решение уравнения самоподобия* верна и для недробящихся самоаффинных пар. Тем самым, для полного доказательства теоремы остается показать, что для недробящихся самоаффинных пар из существования решения уравнения самоподобия следует его единственность и неравенство $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$.

§ I.4. Уравнения самоподобия Мичелли-Праутша и уточняющие алгоритмы

В этом параграфе мы обсудим специальный тип уравнений самоподобия: семейство $\mathcal{B}$ будет состоять из неотрицательных, стохастических по столбцам матриц. Напомним, что матрица называется стохастической, если сумма всех ее элементов в любом столбце равна 1, и все ее элементы неотрицательны. Мичелли и Праутшом в работе [32] 1989 года было впервые рассмотрено уравнение самоподобия такого типа. Ими исследовалось следующее функциональное уравнение

$$f(t) = \begin{cases} B_0 f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ B_1 f(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{I.4.1}$$

где B_1, B_2 – произвольные стохастические $n \times n$ матрицы.

В их работе обсуждались вопросы разрешимости таких уравнений в пространстве *непрерывных* функций на отрезке $C[0, 1]$. Аналогичные уравнения возникают в уточняющих алгоритмах с неотрицательными коэффициентами. И в том, и в другом случае вопрос о разрешимости соответствующих уравнений в пространстве непрерывных функций оказывается достаточно трудным с точки зрения алгоритмического распознавания. Мы покажем, что при постановке вопроса о разрешимости таких уравнений в пространствах L_p, задача значительно упрощается: приводится алгоритм полиномиальной сложности распознающий, существует ли суммируемое решение соответствующих уравнений самоподобия. Мы будем использовать утверждение, которое докажем ниже, в главе IV независимо от результатов данного параграфа. Тем не менее, удобно его сформулировать здесь.

Напомним, что любое семейство стохастических по столбцам матриц $\mathcal{B}$, обладает инвариантным аффинным подпространством $L = \{x \mid \sum_{i=1}^{d} x_i = 1\}$, состоящем из векторов с единичной суммой координат. Через $\mathcal{B}|_L$ будем обозначать соответствующее семейство аффинных операторов, действующих в L. Оказывается, что проверка, меньше ли единицы p-радиус семейства $\mathcal{B}|_L$, может быть осуществлена достаточно быстро.

Предложение I.4.1. *Задано семейство стохастических по столбцам $n \times n$-матриц $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$. Существует алгоритм, проверяющий неравенство $\rho_p(\mathcal{B}|_L) < 1$ при $p \in [1, +\infty)$, за полиномиальное по k и n время. Более того, сложность алгоритма не превосходит $kn^4 + 2kn^2$.*

Доказательство будет приведено в параграфе IV.3. Далее, комбинируя критерий существования и единственности решения уравнения самоподобия (теорема I.1) и алгоритм из приведенного предложения, мы получим алгоритмы проверки существования решений некоторых уравнений самоподобия.

Уравнение I.4.1 было одним из первых уравнений самоподобия, рассматриваемых в литературе. Оно действительно является частным случаем уравнения (I.2.1) на аффинной плоскости L при $k = 2,\ K = [0, 1]$. В той же работе ими был получен критерий существования непрерывного решения. Было показано, что существует непрерывное решение $v(t)$ тогда и только тогда, когда $B_1 v_2 = B_2 v_1$, где $v_i \in L$ – неподвижная точка оператора B_i, и пара матриц B_1, B_2 обладает свойством правой сходимости: любой предел $\lim_{m\to\infty} B_{i_1} \cdots B_{i_m}$ должен существовать и являться одноранговой матрицей.

Проверка этого условия для фиксированной пары стохастических матриц сложна и по-видимому, полиномиально не разрешима. Наличие правой сходимости тесно связано с понятием перемешивающих (scrambling) матриц. Стохастическая матрица называется *перемешивающей*, если скалярное произведение любой пары ее столбцов ненулевое. Известно, что семейство матриц обладает свойством правой сходимости тогда, и только тогда, когда существует m такое, что в семействе $\mathcal{B}^m$ все матрицы – перемешивающие [32]. Однако, проверка существования такого числа m достаточно сложна. Показатель m даже в случае одной матрицы оценивается сверху как $n^2 - 2n + 2$ и эта оценка не улучшается [24; гл. 8.5]. Для произвольного семейства матриц константа m оценивается сверху константой 2^{n^2}, растущей с экспоненциальной скоростью. В настоящее время, насколько известно автору, неясно, существует ли полиномиальный алгоритм проверки семейства матриц на правую сходимость (скорее всего, ответ отрицательный, данная задача исследовалась в [32]). Правая сходимость семейства матриц равносильна тому, что совместный спектральный радиус ρ_∞ семейства стохастических матриц $\mathcal{B}$, ограниченных на инвариантное подпространство L, меньше 1. Таким образом, вопрос об определении, будет ли решение уравнения (I.4.1) непрерывным, является весьма нетривиальной задачей, которая, вероятно, не имеет полиномиального алгоритма распознавания. С другой стороны, теорема I.1 и алгоритм из предложения I.4.1 дают возможность легко проверять существование L_p-решения уравнения (I.4.1) для произвольных $p \in [1, +\infty)$. В самом деле, при дополнительном предположении, что матрицы B_i не имеют общих аффинных подпространств, лежащих в L, принадлежность решения $f(t)$ пространству L_p равносильна тому, что p-радиус матриц на пространстве L меньше единицы (теорема I.1). В силу предложения I.4.1, для любого p это условие проверяется за полиномиальное время. Мы сформулируем этот результат сразу в общем случае для уравнений самоподобия функций многих переменных.

Предложение I.4.2. *Пусть $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ – семейство стохастических $n\times n$ матриц, не имеющих общих собственных аффинных подпространств на гиперплоскости L, K – самоаффинный дробящийся многогранник, разбивающийся на k частей одинакового объема, аффинными операторами $\{A_1, \ldots, A_k\}$. Тогда проверка существования решения соответствующего уравнения самоподобия*

$$f(t) = B_m f(A_m^{-1}(t)),\ t \in A_m K,\ m = 1, \ldots, k \tag{I.4.2}$$

может быть осуществлена не более, чем за $kn^4 + 2kn^2$ элементарных операций.

Доказательство. Заметим, что если объемы всех частей разбиения $A_i K$, $i = 1, \ldots, k$ одинаковые, то семейство $rk\mathcal{B} = \mathcal{B}$ состоит из стохастических матриц, следовательно, если решение существует, то $\rho_p(\mathcal{B}|_L) < 1$ и в силу теоремы I.1, уравнение имеет L_p-решение. □

Например, если $K = [0,1]^d$ – единичный куб в $\mathbb{R}^d$ с операторами A_j двоичного сжатия относительно его вершин, то уравнение (I.4.2) примет вид: $f(t) = \widetilde{B}_j f(2t - w_j)$, где w_j – ближайшая к t вершина куба.

Таким образом, существование решения в пространстве L_p для уравнения самоподобия со стохастическими матрицами и областью определения, разбитой на равновеликие части, в частности, для уравнения Мичелли-Праутша, может быть проверено за полиномиальное время.

Рассмотрим еще один частный случай уравнений самоподобия, возникающий в так называемых уточняющих алгоритмах (subdivision algorithms).

Уточняющие алгоритмы применяются для восстановления функций по их значениям на целочисленной решетке. Эти алгоритмы были разработаны в статьях Дюбука, Деларье, Дин, Левина и т.д. [14, 15, 13] в 90-х годах и активно изучаются в настоящее время. Идея алгоритма состоит в следующем: дана целочисленная $d \times d$ матрица M, все собственные значения которой по модулю больше единицы; для любой ограниченной функции $x : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ положим $(Sx)_\alpha = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} c_{\,Mj-\alpha} x_j$, где $\{c_i\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ – данная числовая последовательность. Таким образом, S – линейный оператор в пространстве $l_\infty(\mathbb{Z}^d)$, называемый уточняющим оператором. Суть алгоритма заключается в том, что при помощи оператора S мы распространяем значение некоторой дискретной функции f на все меньшие решетки и в пределе приходим к некоторой непрерывной функции. Уточняющий алгоритм сходится в $C(\mathbb{R}^d)$, если для любой финитной функции $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$, найдется непрерывная функция $\phi \in C(\mathbb{R}^d)$ такая, что

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} |\phi(M^{-r}\alpha) - S^r f(\alpha)| \to 0,\ r \to \infty$$

Сходимость уточняющих алгоритмов в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$ была определена и изучалась в [25, 31]. Вопрос о сходимости уточняющего алгоритма для данной последовательности c_i достаточно сложен и сводится к оценке совместного спектрального радиуса (p-радиуса для сходимости в L_p) семейства линейных операторов, являющихся ограничениями специальных $N \times N$ матриц $T_1, \ldots, T_k$ на пространство $L := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum x_i = 1\}$ (способ получения этих матриц см. например, в [9, 7]). Если все коэффициенты алгоритма c_i – неотрицательные, то все матрицы T_i являются стохастическими. Алгоритм сходится в пространстве L_p тогда, и только тогда, когда $\rho_p(T_1|_L, \ldots, T_k|_L) < 1$ [25, 7]. Таким образом, предложение I.4.1 дает возможность быстрой проверки уточняющего алгоритма на L_p-сходимость. Отметим, что задача о L_p-сходимости уточняющего алгоритма с неотрицательными коэффициентами изучалась в работах

[26, 37], где были разработаны алгоритмы проверки L_p-сходимости, основанные на других идеях.

Итак, во многих известных уравнениях самоподобия по ряду причин естественно рассматривать вопрос о существовании именно L_p-решений. В то время, когда вопрос о существовании непрерывных решений является весьма нетривиальной задачей и неизвестна его полиномиальная разрешимость, существует полиномиальный алгоритм проверки существования суммируемого решения уравнения самоподобия. Кроме того, итерируя оператор самоподобия $\mathbf{B}$, мы можем экспоненциально быстро находить приближение решения и одно лишь существование решения будет гарантировать его единственность.

Глава II. Ограниченные полугруппы аффинных операторов

Как мы увидели в предыдущей главе, одними из важнейших объектов в теории уравнений самоподобия являются самоаффинные тела и существенная часть диссертации посвящена изучению их геометрии. Тем не менее, мы приступаем к их изучению с более общего объекта: выпуклого тела и семейства операторов, переводящих это тело в себя. Итак, мы будем предполагать, что задано выпуклое тело $G \subset \mathbb{R}^d$ и семейство аффинных операторов $\mathcal{A}$, сохраняющих это тело: $AG \subset G$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Таким условиям удовлетворяет любая самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$, однако на время мы отходим от самоаффинной структуры и допускаем вырожденные операторы. Оказывается, что наличие инвариантного тела семейства аффинных операторов $\mathcal{A}$ равносильно ограниченности орбит всех точек пространства (лемма II.1.1).

Нашей основной задачей данной главы будет выявление различных свойств семейства операторов $\mathcal{A}$ в зависимости от того, как устроена полугруппа, порожденная ими. Будет установлено, что если операторы семейства порождают полугруппу, в которой все операторы ограничены снизу по норме, то есть произведения операторов из $\mathcal{A}$ «не сжимают» все пространство, то все они обладают общим инвариантным аффинным подпространством (теорема II.1). Более того, это пространство всегда будет иметь непустое пересечение с инвариантным телом G. Данный результат, будучи интересным самостоятельно, играет существенную роль в двух следующих главах диссертации, где активно используется в доказательствах.

Отметим еще один интересный, по мнению автора, эффект: доказательство чисто геометрической теоремы II.1 проводится при помощи привлечения критерия существования и единственности решения уравнения самоподобия, теоремы I.1. По семейству операторов $\mathcal{A}$ строится специальное одномерное уравнение самоподобия, доказывается, что оно всегда имеет решение из чего делается заключение либо о приводимости семейства $\mathcal{A}$, либо о выполнении условия $\rho_1(\mathcal{A}) < 1$. Тем самым, хотя ограниченные полугруппы аффинных операторов вводятся независимо от уравнений самоподобия, тем не менее, уравнения самоподобия возникают при исследовании их геометрии.

§ II.1. Определение и простейшие свойства

Рассмотрим произвольную замкнутую мультипликативную полугруппу $\mathcal{S}$ аффинных операторов, действующих в $\mathbb{R}^d$. Всегда будем предполагать, что единичный оператор входит в полугруппу. Полугруппа является ограниченной, если орбита любой точки $\{Ax \mid A \in \mathcal{S}\}$ ограничена. Это равносильно существованию выпуклого тела $G \subset \mathbb{R}^d$ (выпуклого компакта с непустой внутренностью), для которого $AG \subset G$, $A \in \mathcal{S}$ (лемма II.1.1).

Полугруппа называется *сжимающей*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует оператор $B \in \mathcal{S}$ такой, что $\|B\| < \varepsilon$.

Отметим вначале, что если полугруппа аффинных операторов $\mathcal{S}$ такова, что орбита $\{Ax|A \in \mathcal{S}\}$ ограничена для каждой точки x, то существует выпуклое тело G, для которого $AG \subset G,\ A \in \mathcal{S}$.

Лемма II.1.1. *Полугруппа аффинных операторов $\mathcal{S}$ ограниченна тогда, и только тогда, когда найдется выпуклое тело G такое, что $AG \subset G$ для всех операторов $A \in \mathcal{S}$.*

Доказательство. Сначала покажем, что из существования такого инвариантного тела следует ограниченность. От противного, предположим, такое тело G существует и найдется точка $a \in \mathbb{R}^d$ с неограниченной орбитой. Точка a заведомо не содержится в G. Зафиксируем евклидову метрику ρ в $\mathbb{R}^d$ такую, что G содержит единичный шар в этой метрике с центром в точке $g \in G$. Рассмотрим элемент A полугруппы $\mathcal{S}$ такой, что $\operatorname{dist}(Aa, G) > \operatorname{diam} G \cdot \max\limits_{t \in G} \rho(a,t)$. Учитывая неограниченность орбиты точки a и включение $AG \subset G$, такой элемент полугруппы существует. Рассмотрим точку $x \in G$ на единичной сфере с центром в g такую, что вектор $x - g$ параллелен вектору $a - g$. Тогда $\rho(Ax, Ag) = \frac{\rho(Aa,Ag)}{\rho(a,g)} \geqslant \frac{\operatorname{dist}(Aa,G)}{\rho(a,g)} > \frac{\operatorname{diam} G \cdot \max_{t\in G} \rho(a,t)}{\rho(a,g)} \geqslant \operatorname{diam} G$. Учитывая, что Ax и Ag содержатся в G, приходим к противоречию.

В обратную сторону: рассмотрим концы единичных векторов – точки $e_1, \ldots, e_d$, тогда в качестве инвариантного тела можно взять замкнутую выпуклую оболочку орбит этих точек и нуля $\overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{Orb}_{\mathcal{S}} 0, \operatorname{Orb}_{\mathcal{S}} e_1, \ldots \operatorname{Orb}_{\mathcal{S}} e_d)$. Поскольку $\mathcal{S}$ замкнута, ее ограниченность равносильна компактности.

$\square$

Отметим, что из ограниченности полугруппы аффинных операторов $\mathcal{S}$, следует ограниченность полугруппы, порожденной их линейными частями. Действительно, рассмотрим орбиту нуля $\mathcal{S}(0)$, по условию она ограничена. Предположим, полугруппа, порожденная линейными частями исходных операторов неограничена, то есть существует точка a с неограниченной орбитой. Заметим, что для произвольного аффинного оператора $A \in \mathcal{S}$ имеем $Aa = A(0) + \tilde{A}a$. Учитывая ограниченность орбиты нуля, получаем неограниченность орбиты a, противоречие.

Упомянем здесь, не вдаваясь в подробности, задачу классификации ограниченных *линейных* полугрупп с нормой, ограниченной не только сверху, как предполагалось раньше, но и снизу. Впервые такие полугруппы подробно изучались в работе Раджави и Омладича 1997 года [34]. Также изучению таких полугрупп посвящена недавняя совместная статья автора с Протасовым [44]. Оказывается, что такие полугруппы линейных операторов всегда подобны, после перехода к некоторому базису, полугруппам с единичным спектральным радиусом, то есть полугруппам, спектральный радиус каждого элемента которых, равен по модулю единице. Полугруппы с постоянным спектральным радиусом встречаются, например, в задаче определения гладкости кривых, являющихся решениями уточняющих алгоритмов.

Для произвольного непустого компактного семейства $\mathcal{B}$ аффинных операторов, действующих в $\mathbb{R}^d$ мы обозначаем через $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$, полугруппу, порожденную операторами из $\mathcal{B}$ с помощью умножений и взятия замыкания. Таким образом, $\mathcal{S}_{\mathcal{B}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}^i}$. Будем говорить, что $\mathcal{B}$ имеет ограниченные произведения, если полугруппа $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ компактна, и что семейство $\mathcal{B}$ сжимающее/несжимающее, если такова полугруппа $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$. Таким образом, семейство $\mathcal{B}$ имеет ограниченные произведения тогда и только тогда, когда у него есть инвариантное выпуклое тело $G \subset \mathbb{R}^d$, т.е., $BG \subset G$, $B \in \mathcal{B}$. Для семейств с ограниченными произведениями следующие свойства эквивалентны:

1. семейство $\mathcal{B}$ несжимающее;
2. в любой операторной норме имеем $\|\Pi\| \geqslant 1$, для каждого $\Pi \in \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$;
3. $\rho(\Pi) = 1$ для каждого $\Pi \in \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$;

Доказательства можно найти в работе Раджави и Омладича [34].

§ II.2. Сжимающие семейства операторов и p-радиус

Данный параграф посвящен нетрудному, однако весьма полезному свойству несжимающих ограниченных семейств аффинных операторов. Оказывается, что для ограниченной полугруппы операторов $\mathcal{A}$, сжимаемость равносильна неравенству $\rho_p(\mathcal{A}) < 1$ для всякого $p \in [1, +\infty)$. Данный факт будет использоваться нами в главе IV при построении алгоритма проверки существования решений некоторых уравнений самоподобия: зачастую удобнее проверять именно свойство сжимаемости полугруппы.

Предложение II.2.1. *Предположим, задано ограниченное семейство аффинных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathcal{A}$ – сжимающее;

2) $\rho_p(\mathcal{A}) < 1$ для любого $p \in [1, +\infty)$;

Доказательство. $\underline{1 \Rightarrow 2}$. Существует произведение Π_1 исходных операторов некоторой длины m с нормой, меньшей единицы. Через $\Pi_1, \dots, \Pi_{k^m}$ обозначим всевозможные произведения длины m исходных операторов. Тогда имеем:

$$\rho_p(A_1, \dots, A_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum \|A_{i_1} \dots A_{i_{mn}}\|^p}{k^{mn}} \right)^{\frac{1}{mnp}} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum \|\Pi_{j_1} \dots \Pi_{j_n}\|^p}{k^{m^n}} \right)^{\frac{1}{np}} \right)^{\frac{1}{m}} = \rho_p(\Pi_1, \dots, \Pi_{k^m})^{\frac{1}{m}}$$

Достаточно показать, что $\rho_p(\Pi_1, \dots, \Pi_{k^m}) < 1$. В подходящей норме для всякого $i = 1, \dots, k^m$ имеем $\|\Pi_i\| \leqslant 1$. Пусть $\|\Pi_1\| = \varepsilon < 1$. Через E мы обозначаем тождественный линейный оператор. Легко видеть, что:

$$\rho_p(\Pi_1, \dots, \Pi_{k^m}) \leqslant \rho_p(\Pi_1, \underbrace{E, \dots E}_{k^m - 1}) \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{i=0}^n C_n^i \varepsilon^{ip} (k^m - 1)^{n-i}}{k^{mn}} \right)^{\frac{1}{np}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left((k^m)^{-n} (k^m - 1 + \varepsilon^p)^n \right)^{\frac{1}{np}} = \left(\frac{k^m - 1 + \varepsilon^p}{k^m} \right)^{\frac{1}{p}} < 1$$

Первое неравенство выполнено из очевидного $\|\Pi_{j_1}\dots\Pi_{j_n}\| \leqslant \|E_{j_1}\dots E_{j_n}\|$, где $E_{j_k} = \Pi_1$ если $j_k = 1$ и E в противном случае.

<u>$2 \Rightarrow 1$</u>. От противного: пусть норма любого произведения не меньше 1. Тогда

$$1 > \rho_1(A_1,\dots,A_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum\|A_{i_1}\dots A_{i_n}\|}{k^n}\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \lim_{n\to\infty}\left(\frac{k^n}{k^n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

противоречие.

□

Отметим, что при доказательстве <u>$2 \Rightarrow 1$</u>, в силу монотонности функции ρ_p по p, мы пользовались более слабым предположением, чем в условии предложения, а именно $\rho_1(A_1,\dots,A_k) < 1$.

§ II.3. Теорема об инвариантном подпространстве несжимающих полугрупп

Перейдем к теореме, характеризующей несжимающие полугруппы аффинных операторов. Данное утверждение будет играть ключевую роль при изучении структуры самоаффинных пар и позволит свести вопрос классификации их только к вопросу классификации дробящихся самоаффинных тел, которые, напомним, являются многогранниками (теорема III.1).

Теорема II.1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклое тело, $\mathcal{B}$ – компактное семейство аффинных операторов в $\mathbb{R}^d$ такое, что $BG \subset G$, $B \in \mathcal{B}$. Тогда либо семейство $\mathcal{B}$ сжимающее, либо операторы из $\mathcal{B}$ имеют общее инвариантное аффинное подпространство, пересекающую G. В ограничении на это подпространство семейство $\mathcal{B}$ является сжимающим.*

Если V – инвариантное аффинное подпространство семейства $\mathcal{B}$, то корректно определено действие $\mathcal{B}$ на фактор-пространстве $\mathbb{R}^d/V$. Таким образом, ограниченная несжимающая полугруппа аффинных операторов всегда факторизуется по инвариантному подпространству, на котором она является сжимающей. Отметим, что в случае, когда V – точка, семейство $\mathcal{B}$ является фактически семейством линейных операторов.

Отметим одно простейшее следствие теоремы II.1:

Следствие II.3.1. *Ограниченная неприводимая полугруппа аффинных операторов является сжимающей.*

Рассмотрим несколько примеров несжимающих семейств.

Пример II.3.1. Рассмотрим плоский прямоугольник $abcd$, обозначим через m и n середины сторон ab и cd соответственно. Оператор B_1 является сжатием с коэффициентом 2 к прямой ad. Он переводит прямоугольник $abcd$ в прямоугольник $amnd$ (с учетом порядка вершин); оператор B_2 является композицией сжатия с коэффициентом 2 к прямой bc и поворота на 180^o, как показано на рисунке 6 слева. Он переводит прямоугольник $abcd$ в прямоугольник $cnmb$. Семейство $\mathcal{B} = \{B_1, B_2\}$ несжимающее. Единственным общим инвариантным аффинным подпространством является прямая, проходящая через середины ad и bc. На ней, как несложно убедиться, семейство $\mathcal{B}|_V$ сжимающее. Это, впрочем, следует из теоремы II.1 и единственности инвариантного подпространства.

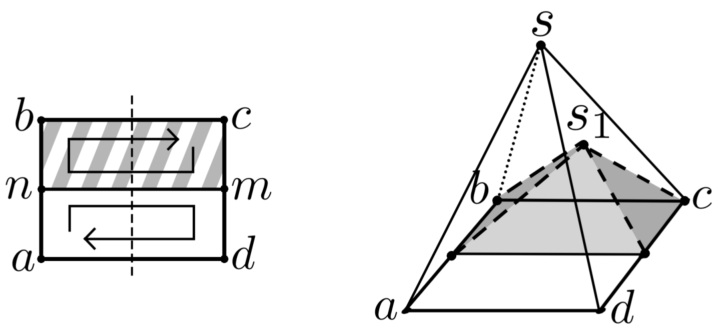


Рис.6.

Следующий пример показывает, что в условиях теоремы II.1 может не существовать инвариантного подпространства, пересекающего $\operatorname{int} G$.

Пример II.3.2. В качестве G возьмем пирамиду $sabcd$ с вершиной s и прямоугольным основанием, s_1, s_2 – некоторые точки внутри G. Оператор B_1' сохраняет плоскость основания и действует на ней как оператор B_1 из примера II.3.1, а вершину s переводит в точку s_1 (рисунок 6, справа); оператор B_2' действует на плоскости основания как оператор B_2 из примера II.3.1, а вершину s переводит в s_2. Семейство $\mathcal{B}' = \{B_1', B_2'\}$ несжимающее, поскольку таково его ограничение на плоскость основания. Если точки s_1 и s_2 имеют «общее положение», то семейство $\mathcal{B}'$ имеет только два инвариантных подпространства: плоскость основания и прямую l, проходящую через середины ad и bc. Оба инвариантных подпространства пересекают только границу G. На плоскости основания семейство $\mathcal{A}$ несжимающее. Поэтому в качестве инвариантного подпространства из теоремы II.1 подходит только прямая l.

Перейдем к доказательству теоремы II.1

Доказательство теоремы II.1. Если семейство $\mathcal{B}$ несжимающее, то таково и любое его конечное подсемейство. С другой стороны, если каждое конечное подсемейство $\mathcal{B}$ имеет инвариантное аффинное подпространство, то и все операторы из $\mathcal{B}$ имеют общее инвариантное подпространство. Поэтому достаточно доказать теорему для конечного семейства $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$. Покажем сначала, что при условиях теоремы, уравнение (I.2.1) с одномерной областью определения, разбитой на равные части, имеет решение $f \in L_1$. Для этого фиксируем произвольную точку $a \in G$, число ε, и определим аффинный оператор $B_{1,\varepsilon}\, x = \varepsilon\, a + (1-\varepsilon) B_1 x\,,\ x \in \mathbb{R}^d$. Ясно, что $B_{1,\varepsilon} \to B_1$ при $\varepsilon \to 0$. Для любого $\varepsilon \in (0,1)$ семейство $\mathcal{B}_\varepsilon = \{B_{1,\varepsilon}, B_2, \ldots, B_k\}$ сохраняет G (поскольку G выпукло, и $a \in G$) и является сжимающим, т.к. $\rho(A_{1,\varepsilon}) \leqslant 1 - \varepsilon$. Следовательно, $\rho_2(\mathcal{B}_\varepsilon) < 1$, а значит, уравнение самоподобия $\mathbf{B}_\varepsilon f = f$ для семейства $\mathcal{B}_\varepsilon$ имеет решение $f_\varepsilon \in L_2$. Оператор $\mathbf{B}_\varepsilon$ является сжимающим и орбита любой точки под действием его итераций сходится к f_ε. Если образ некоторой функции $g \in L_2([0,1],\mathbb{R}^d)$ содержится в G, то образ $\mathbf{B}_\varepsilon g$ также содержится в G. Следовательно, для почти всех точек t отрезка $[0,1]$ имеем $f_\varepsilon(t) \in G$. Таким образом, множество функций $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ограниченно в $L_2([0,1],\mathbb{R}^d)$. По теореме Банаха-Алаоглу, из него можно выделить последовательность $f_{\varepsilon_1}, f_{\varepsilon_2}, \ldots$ слабо сходящуюся к некоторой функции $f \in L_2([0,1],\mathbb{R}^d)$. Ясно, что $f(t) \in G$ для почти всех точек отрезка. В противном случае слабая сходимость нарушалась бы, например, на функции $\tilde{f}$, совпадающей на множестве $A = \{t \in [0,1] \mid f(t) \notin G\}$ с f и равной нулю вне A.

Покажем, что $\mathbf{B}f = f$, то есть f является решением интересующего нас уравнения самоподобия. Заметим, что непосредственно из определения, $\mathbf{B}_{\varepsilon_m}$ стремится к $\mathbf{B}$ в операторной норме. Покажем, что имеет место слабая сходимость $\mathbf{B}_{\varepsilon_m} f_{\varepsilon_m} \xrightarrow{w} \mathbf{B}f$. Рассмотрим произвольную функцию $u \in L_2([0,1],\mathbb{R}^d)$. Необходимо показать, что $\lim\limits_{m\to\infty}(\mathbf{B}f - \mathbf{B}_{\varepsilon_m} f_{\varepsilon_m}, u) = 0$. Распишем $\mathbf{B}f - \mathbf{B}_{\varepsilon_m} f_{\varepsilon_m} = \mathbf{B}f - \mathbf{B}f_{\varepsilon_m} + \mathbf{B}f_{\varepsilon_m} - \mathbf{B}_{\varepsilon_m} f_{\varepsilon_m}$. Тогда $(\mathbf{B}f - \mathbf{B}_{\varepsilon_m} f_{\varepsilon_m}, u) = (f - f_{\varepsilon_m}, \mathbf{B}^* u) + \big((\mathbf{B} - \mathbf{B}_{\varepsilon_m}) f_{\varepsilon_m}, u\big)$. Первый член стремится к 0 при $m \to \infty$ в силу слабой сходимости f_{ε_m} к f. Оценим второй член: $\big((\mathbf{B} - \mathbf{B}_{\varepsilon_m}) f_{\varepsilon_m}, u\big) \leqslant \|\mathbf{B} - \mathbf{B}_{\varepsilon_m}\|_{\mathcal{L}(L_2,L_2)} \cdot \|f_{\varepsilon_m}\|_2 \cdot \|u\|_2$, нормы $\|f_{\varepsilon_m}\|_2$ ограничены сверху, поэтому, учитывая сходимость $\mathbf{B}_{\varepsilon_m}$ к $\mathbf{B}$, второй член также сходится к 0. Таким образом, установлена слабая сходимость $\mathbf{B}_{\varepsilon_m} f_{\varepsilon_m} \xrightarrow{w} \mathbf{B}f$.

Предположим теперь, что $\mathbf{B}f \neq f$ в пространстве L_2. Тогда найдется элемент $v \in L_2([0,1],\mathbb{R}^d)$ такой, что $(\mathbf{B}f - f, v) > 0$. Но $(\mathbf{B}f - f, v) = \lim\limits_{m\to\infty}(\mathbf{B}_{\varepsilon_m} f_{\varepsilon_m} - f_{\varepsilon_m}, v) = 0$, противоречие. Таким образом $\mathbf{B}f = f$ в L_2. Более того, учитывая, что f – измеримая ограниченная функция на пространстве с конечной мерой, $f \in L_p$ при $p \geqslant 1$. Итак, мы показали, что f – решение уравнения самоподобия. По теореме I.1, $\rho_1(\mathcal{B}|_V) < 1$, где $V = \mathbf{aff}\,(f)$. Значит, семейство $\mathcal{B}$ – сжимающее на V, поэтому, если оно не является сжимающим в $\mathbb{R}^d$, то $\dim V \leqslant d-1$. Таким образом, V – искомое подпространство.

$\square$

§ II.4. Несколько вспомогательных результатов

Результаты данного параграфа дают дополнительную информацию о компактных несжимающих полугруппах и будут использованы в дальнейшем.

Лемма II.4.1. *Пусть $\mathcal{B}$ – компактное множество линейных операторов с ограниченными произведениями. Тогда, если выполнено хотя бы одно из двух условий:*

а) определители всех операторов из $\mathcal{B}$ по модулю равны 1;

б) $\mathcal{B}$ – неприводимое, несжимающее, и состоит из невырожденных операторов,

то существует базис, в котором все операторы $\mathcal{B}$ ортогональны.

Доказательство. Для любого семейства операторов с ограниченными произведениями существует выпуклое тело $G \subset \mathbb{R}^d$, для которого $B\,G \subset G$, $B \in \mathcal{B}$. Если выполнено условие а), то все операторы семейства $\mathcal{B}$ сохраняют объем, а значит $B\,G = G$ для любого $B \in \mathcal{B}$. Пусть E – эллипсоид Джона выпуклого тела G, т.е, эллипсоид максимального объема, содержащийся в G. Из единственности эллипсоида Джона [27, 28] следует, что $B\,E = E$, $B \in \mathcal{B}$. Выбрав базис, в котором E является евклидовым шаром, получаем, что все операторы семейства $\mathcal{B}$ ортогональны.

Если $\mathcal{B}$ – несжимающее, то любой оператор из полугруппы $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ имеет спектральный радиус 1. А так как эта полугруппа неприводима, то все ее операторы не имеют собственных значений, отличных по модулю от нуля и от единицы [34; Theorem 2.5]. Поскольку все операторы семейства $\mathcal{B}$ невырожденные, все их собственные значения равны по модулю 1, а значит выполнено условие а).

$\square$

Лемма II.4.2. *Пусть $\mathcal{U}$ – неприводимое компактное семейство ортогональных линейных операторов в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$. Тогда для любой точки $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$, выпуклая оболочка ее орбиты $\{Ux \mid U \in \mathcal{S}_{\mathcal{U}} \cup \{I\}\}$ содержит ноль в качестве внутренней точки.*

Доказательство. Пусть $\|x\|_2 = 1$. Обозначим через M выпуклую оболочку точки $\{0\}$ и орбиты точки x. Поскольку семейство $\mathcal{U}$ неприводимо, M является выпуклым телом, лежащим в единичном шаре. Так как $UM \subset M$, $U \in \mathcal{U}$, и оператор U ортогонален, то $UM = M$. Следовательно, центр тяжести g тела M является неподвижной точкой каждого оператора из $\mathcal{U}$. Если $0 \notin \operatorname{int} M$, то по теореме отделимости, M целиком лежит в некотором полушаре единичного шара. Значит, $g \neq 0$ и $Ug = g$, $U \in \mathcal{U}$, что противоречит неприводимости $\mathcal{U}$.

$\square$

Замечание II.4.1. *Если хотя бы один оператор семейства $\mathcal{U}$ неортогонален, лемма II.4.2 может не выполняться. Если, например, все $U \in \mathcal{U}$, кроме некоторого $U_0 \in \mathcal{U}$, задаются матрицами перестановок, а U_0 – положительной матрицей такой, что семейство $\mathcal{U}$ неприводимо, то орбита любой точки $x \in \mathbb{R}^d_+$ лежит в $\mathbb{R}^d_+$, поэтому ее выпуклая оболочка не содержит начала координат в качестве внутренней точки.*

Глава III. Самоаффинные тела

Самоаффинные тела уже встречались нам при построении многомерных уравнений самоподобия в главе I. Для удобства, повторим здесь определения. *Самоаффинной парой* в пространстве $\mathbb{R}^d$ называется пара $(K, \mathcal{A})$, состоящая из выпуклого компакта с непустой внутренностью $K \subset \mathbb{R}^d$ и конечного семейства невырожденных аффинных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$, удовлетворяющих двум условиям:

- объединение образов совпадает с исходным множеством: $\bigcup\limits_{m=1}^{k} A_m K = K$;
- образы задают разбиение, то есть не имеют общих внутренних точек: $\operatorname{int} A_i K \cap \operatorname{int} A_j K = \varnothing,\ i \neq j$

Самоаффинным телом называется тело, допускающее самоаффинное разбиение, то есть входящее в какую-либо самоаффинную пару. Одной из основных мотивировок рассмотрения таких множеств, помимо чисто геометрического интереса, служат многомерные уравнения самоподобия, генераторами которых они являются. В частности, самоаффинные множества позволяют строить новые базисы вейвлетов.

Данная глава посвящена чисто геометрическому аспекту изучению самоаффинных пар: будут доказаны различные структурные результаты и свойства. Забегая вперед, отметим, что основной характеристикой самоаффинных пар служат именно операторы разбиения $\mathcal{A}$, изучение которых во многом проясняет геометрию тела K.

Простейшим примером самоаффинного тела служит симплекс, разбитый некоторой триангуляцией на меньшие симплексы. В работе Рихтера [46] доказывается, что в $\mathbb{R}^2$ любое самоаффинное выпуклое плоское компактное множество является многоугольником. В [22] изучаются самоаффинные многоугольники. Доказано, в частности, что любой самоаффинный многоугольник имеет не более 5 вершин. Ясно, что любой треугольник – самоаффинный. Более того, любой четырехугольник также является самоаффинным [22]. К настоящему времени известны примеры самоаффинных пятиугольников [22], но задача о полной классификации таких многоугольников не решена до сих пор. В больших размерностях самоаффинное тело не обязано быть многогранником: простейшим примером служит круговой цилиндр с двумя операторами сжатия в два раза вдоль его образующих к основаниям. Однако, как мы уже убедились, если наложить на самоаффинную тело ограничение, что при итерации разбиения, минимальный диаметр элемента разбиения стремится к нулю, то и в пространстве произвольной размерности такое тело обязано быть многогранником.

Вопрос о структуре самоаффинных пар неоднократно поднимался в литературе. В 1991 г. Валлетом была выдвинута следующая гипотеза о структуре самоаффинных тел [53, 10]: *Любое самоаффинное тело либо является многогранником, либо аффинно эквивалентно прямому произведению самоаффинного многогранника и некоторого выпуклого тела меньшей размерности.* Данное предположение оказывается неверным уже начиная с размерности 3, мы приводим соответствующие примеры в параграфе III.2.

§ III.1. Основные свойства

Общие определения и свойства самоаффинных пар были даны в главе I. Сейчас мы обсудим некоторые свойства дробящихся самоаффинных многогранников: доказываются теорема о том, что дробящееся самоаффинное тело является многогранником и теорема единственности. Затем доказывается теорема об инвариантном дробящемся сечении недробящейся самоаффинной пары. Мы увидим, что наибольший интерес представляют именно дробящиеся самоаффинные пары, а остальные, в некотором смысле, сводятся к ним. Далее с помощью полученных результатов удается получить полную классификацию самоаффинных пар в некоторых случаях.

Напомним, что самоаффинная пара называется *дробящейся*, если итерируя разбиение, можно получить элемент сколь угодно малого диаметра. В дальнейшем нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма III.1.1. *Предположим, дано тело X и аффинный оператор A, $\widetilde{A}$ – его линейная часть. Если существует вектор $a \in \mathbb{R}^d$ такой, что $AX + a \subset X$, то существует норма $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^d$ такая, что $\|\widetilde{A}\| \leqslant 1$. Если при этом $AX + a \subset \operatorname{int} X$, то $\|\widetilde{A}\| < 1$.*

Таким образом, лемма утверждает, что семейство является сжимающим.

Доказательство. Через $(-X)$ обозначим образ X при центральной симметрии относительно 0. Рассмотрим тело $\widetilde{X} = X + (-X)$, являющееся суммой Минковского тел X и $(-X)$. Очевидным образом $\widetilde{X}$ центрально-симметрично. Центр симметрии будет совпадать с началом координат. Если $AX + a \subset X$, то $-AX - a \subset -X$. Непосредственно из определения суммы Минковского, $\widetilde{A}(\widetilde{X}) = (AX) + (-AX) = (AX + a) + (-AX - a) \subset X + (-X) = \widetilde{X}$. Рассмотрим норму Минковского, порожденную телом $\widetilde{X}$. Тогда $\|\widetilde{A}\| \leqslant 1$. Очевидным образом, $\|\widetilde{A}\| < 1$ при $AX + a \subset \operatorname{int} X$.

□

Замечание III.1.1. В силу леммы III.1.1, самоаффинная пара – дробящаяся тогда и только тогда, когла для любого ε существует композиция исходных операторов $\hat{A}_\varepsilon$ такая, что $\|\hat{A}_\varepsilon\| < \varepsilon$. Действительно, если диаметр образа $\hat{A}K$ достаточно мал ($\hat{A}$ – композиция исходных операторов), то существует вектор a такой, что $\hat{A}K + a \subset \operatorname{int} K$. Тем самым $\|\hat{A}\| < 1$ и взяв достаточную степень этого оператора, получим оператор с нормой, меньшей ε. В другую сторону – очевидно.

Таким образом, то, что самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ – дробящаяся, является, по сути, свойством семейства аффинных операторов $\mathcal{A}$.

Теперь приведем доказательство того, что самоаффинная пара является дробящейся только в случае, когда при итерации разбиения, суммарная мера элементов разбиения диаметра большего некоторого ε, стремится к нулю.

Доказательство леммы I.2.1. Достаточность очевидна. Необходимость. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Из замечания III.1.1, существует композиция исходных операторов $\hat{A}$ с нормой, меньшей ε, значит, $\operatorname{diam}(\hat{A}K) < \varepsilon$. Предположим, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(\varepsilon) = E > 0$. Из условия, $E < 1$. Рассмотрим произвольное $\delta \in (0; 1-E)$.

Тогда существует итерация разбиения N, такая, что $\mu_N(\varepsilon) < E+\delta$. Рассмотрим $2N$-итерацию разбиения. Тогда каждый элемент K_i из N-итерации разбиения разбивается на N частей. Так как $\|A_i\| \leqslant 1$, $i = 1, \dots, k$, то суммарная мера элементов разбиения тела K_i (полученных на $2N$-итерации исходного разбиения) с диаметром большим ε не превышает $\mu_N(\varepsilon)\mu(K_i)$. Таким образом $\mu_{2N}(\varepsilon) \leqslant \mu_N(\varepsilon)^2$. Следовательно,

$$E \leqslant \mu_{2N}(\varepsilon) \leqslant \mu_N(\varepsilon)^2 < (E+\delta)^2$$

Получаем, что $E < (E+\delta)^2$ для любого $\delta \in (0; 1-E)$, значит, $E = 0$, что и требовалось.

□

Теперь покажем, что дробящимися могут быть только многогранники.

Теорема III.1. *Если самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ – дробящаяся, то K – многогранник.*

Доказательство. Пусть p – произвольная внутренняя точка K, пусть $r = \operatorname{dist}(p, \partial K)$. При некоторой итерации N разбиения, мера объединения элементов разбиения с диаметром большим $r/3$ будет меньше объема шара радиуса $r/3$, следовательно, в шаре с центром в p и радиуса $r/3$ будет содержаться точка, принадлежащая элементу разбиения $\hat{A}K$, с диаметром меньшим $r/3$, $\hat{A}$ – некоторая композиция исходных операторов. Значит, $\hat{A}K \cap \partial K$ – пусто. Тогда каждая точка $x \in \partial(\hat{A}K)$ лежит в пересечении $\hat{A}K$ с некоторым $A_{i_1} \dots A_{i_N}K$, значит

$$\partial(\hat{A}K) = \bigcup_{i_1,\dots i_N} (\hat{A}K \cap A_{i_1} \dots A_{i_N}K)$$

(в объединение не входит $\hat{A}K \cap \hat{A}K$). Если два выпуклых тела пересекаются только по границам, то пересечение должно содержаться в некоторой гиперплоскости. Следовательно, граница $\hat{A}K$ состоит из конечного числа плоских участков, являющихся пересечениями $\partial\hat{A}K$ с другими элементами разбиения. Значит, $\hat{A}K$ – многогранник.

□

Теперь, используя результаты главы I, мы можем доказать теорему единственности для самоаффинных дробящихся пар.

Теорема III.2. *Если $(K, \mathcal{A})$ и $(G, \mathcal{A})$ – две самоаффинных дробящихся пары с одним и тем же семейством операторов, то $K = G$.*

Отметим, что в силу замечания III.1.1, достаточно требовать, чтобы дробящимся было только тело $(K, \mathcal{A})$. Доказательство леммы частично пересекается с доказательством теоремы I.1, тем не менее, для удобства читателя, мы его воспроизводим.

Доказательство. От противного. Рассмотрим уравнение самоподобия (I.1.1) для вектор-функции из $[0, 1]$ в $\mathbb{R}^d$ с семейством операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$.

Такое уравнение будет иметь единственное решение в классе $L_1([0,1],\mathbb{R}^d)$. Рассмотрим две функции $x(t), y(t) : [0,1] \to \mathbb{R}^d$. Аналогично кодированию марковских разбиений разложим $t \in [0,1]$ в k-ичную запись $t = 0,\overline{t_1 t_2 \dots}$ и определим $x(t) = \lim_{n\to\infty}(A_{t_n} \dots A_{t_1} K)$.

Покажем, что такая функция $x(t)$ корректно определена почти всюду и является суммируемой. По условию, найдется произведение $A_\varepsilon = A_{i_l} \cdots A_{i_1}$ операторов семейства $\mathcal{A}$ с нормой линейной части меньшей единицы. Рассмотрим подмножество J единичного отрезка, состоящее из таких точек t, что их k-ичная запись содержит бесконечно много непересекающихся участков $\overline{i_1,\dots,i_l}$. Ясно, что лебеговская мера множества J равна 1. Зафиксируем $t \in J$ и рассмотрим произведение операторов $A_{t,m} = A_{t_m} \dots A_{t_1}$, где $t_1,\dots,t_m$ – первые m чисел разложения $t \in [0,1]$ в k-ичную запись. Отметим, что $A_{t,m+1}K \subset A_{t,m}K$. По построению, при m, стремящемся к бесконечности, оператор $A_{t,m}$ представляется в виде произведения сколь угодно большого числа операторов A_ε и операторов с нормой, не превосходящей единицы. Таким образом, для точки $t \in J$ будет определен предел $x(t) = \lim_{m\to\infty} A_{t,m}K$. Покажем, что функция x – суммируема. Зафиксируем произвольную точку $s \in K$. Теперь заметим, что почти для всех точек t единичного отрезка, $x(t)$ является пределом последовательности значений локально-постоянных функций $x_m(t) = A_{t_m} \dots A_{t_1} s$, где $t_1,\dots,t_m$ – первые m чисел k-ичного разложения t. Таким образом, x – измерима и лежит в классе L_1.

Аналогично определяем $y(t)$, заменяя K на G. По построению, обе эти функции являются решениями уравнения самоподобия, следовательно, $x(t) = y(t)$ почти всюду и тела G и K совпадают.

$\square$

§ III.2. Контрпримеры к гипотезе Валлета.

Здесь мы приведем семейство контрпримеров к гипотезе Валлета о структуре самоаффинных тел [53, 10]:

Любое самоаффинное тело либо является многогранником, либо аффинно эквивалентно прямому произведению самоаффинного многогранника и некоторого выпуклого тела меньшей размерности.

Перейдем к построению контрпримеров. Предположим, задано самоаффинное тело X в $\mathbb{R}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ с операторами $A_1,\dots,A_m$, действующими в $\mathbb{R}^{d-1}$. Считаем, что X лежит в базисной гиперплоскости в $\mathbb{R}^d$ на векторах $e_1,\dots,e_{d-1}$. Рассмотрим тело $X' = \mathrm{conv}\,(X,(0,\dots,0,1)^T)$. Оно будет самоаффинным с операторами $A'_1,\dots,A'_m$ такими, что $A'_i|_{\mathbb{R}^{d-1}} = A_i$ и каждый из этих операторов сохраняет точку $(0,\dots,0,1)^T$. Для построения тела, реализующего контрпример к гипотезе Валлета, рассмотрим круговой цилиндр K в $\mathbb{R}^{d-1}$ с двумя операторам, являющимися сжатиями в два раза вдоль его образующих к основаниям. Построим, как описано выше, над K самоаффинный конус K'. Тогда K', очевидно, не является многогранником. Кроме того, K' не эквивалентен аффинно прямому произведению многогранника на выпуклое тело, так как имеет лишь одну изолированную крайнюю точку. Напомним, что точка тела называется крайней, если она не является серединой никакого отрезка, принадлежащего телу.

Легко убедиться, что усеченный цилиндр, образованный круговым цилиндром и двумя не параллельным плоскостями реализует контрпример к гипотезе уже в размерности 3. Таким образом, верно следующее утверждение.

Предложение III.2.1. *Для любого $d \geqslant 3$ существует самоаффинное тело в $\mathbb{R}^d$, не являющееся многогранником и аффинно не эквивалентное прямому произведению самоаффинного многогранника и некоторого выпуклого тела меньшей размерности.*

Отметим, что существуют и другие примеры самоаффинных тел, не являющиеся аффинными образами прямых произведений самоаффинных многогранников на выпуклые тела.

§ III.3. Недробящиеся самоаффинные пары

Данный параграф посвящен доказательству теоремы об общем виде недробящихся самоаффинных пар. Сперва сделаем замечание, что для семейств операторов $\mathcal{A}$ самоаффинной пары $(K, \mathcal{A})$, наличие общего инвариантного подпространства не только необходимо (как в теореме II.1) но и достаточно для несжимаемости:

Предложение III.3.1. *Семейство операторов разбиения $\mathcal{A}$ самоаффинной пары $(K, \mathcal{A})$ не является сжимающим тогда и только тогда, когда оно имеет общее инвариантное аффинное подпространство, пересекающее K.*

Доказательство. Пусть V – общее инвариантное подпространство операторов из $\mathcal{A}$. Возьмем произвольный шар B, лежащий внутри K и не пересекающий V. Если самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ является дробящейся, то по лемме I.2.1, для всякого $\varepsilon > 0$ суммарный объем частей разбиения $\mathcal{A}^m K$, диаметр которых превосходит ε, стремится к нулю при $m \to \infty$. Следовательно, для достаточно больших m найдется элемент разбиения $\mathcal{A}^m K$, который имеет маленький диаметр и пересекает шар B. Тогда он не пересекает V, что невозможно.

Часть «только тогда» будет непосредственно следовать из теоремы III.3, которую мы доказываем ниже.

□

Пример III.3.1. В примере II.3.1 семейство $\mathcal{A}$ задает самоаффинное разбиение прямоугольника $abcd$. Поскольку $\mathcal{A}$ имеет инвариантную прямую, из предложения III.3.1 следует что это разбиение не дробящееся.

Перейдем к формулировке основной теоремы параграфа.

Теорема III.3. *Для недробящейся самоаффинной пары $(K, \mathcal{A})$ в $\mathbb{R}^d$, операторы семейства $\mathcal{A}$ обладают общим инвариантным аффинным подпространством V, отличным от точки и пересекающим внутренность K, причем семейство $\mathcal{A}|_V$ сжимающее. Все такие подпространства имеют одинаковую* *размерность, параллельны, и каждое из них пересекает K по многограннику. Существует базис, в котором матрицы операторов $\tilde{A}_i$ имеют вид:*

$$\tilde{A}_i \;=\; \begin{pmatrix} C_i & D_i \\ 0 & U_i \end{pmatrix}\,, \quad i = 1, \ldots, k\,, \tag{III.3.1}$$

где C_i – матрица линейной части ограничения оператора A_i на V, а U_i – ортогональная матрица

Обратно, если в некотором базисе матрицы линейных частей операторов A_i имеют вид (III.3.1) с ортогональными матрицами U_i, то самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ не дробящаяся.

Инвариантное аффинное подпространство V зависит, вообще говоря, от семейства операторов $\mathcal{A}$ и для семейства $\mathcal{A}'$ другой недробящейся самоаффинной пары $(K, \mathcal{A}')$ может не быть инвариантным. Отметим, что в силу того, что тело K – недробящееся, имеем $\mathrm{dim}V < d$. Кроме того, $\mathrm{dim}U_i = d - \mathrm{dim}C_i = d - \mathrm{dim}V$. В частности, из этого следует, что блок U_i непуст.

Предположим, некоторое семейство аффинных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$, действующих в $\mathbb{R}^d$, обладает инвариантным аффинным подпространством L. Через $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ будем обозначать соответствующее семейство линейных операторов, действующих на фактор-пространстве $\mathbb{R}^d/L$. При доказательстве теоремы будут использованы две следующие леммы.

Лемма III.3.1. *Дано самоаффинное тело $G \subset \mathbb{R}^d$ с семейством операторов разбиения $\mathcal{A}$. Предположим, семейство операторов $\mathcal{A}$ обладает инвариантным аффинным подпространством L. Тогда семейство линейных операторов $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ не может быть сжимающим.*

Доказательство. Семейство $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ ограничено, поэтому в некоторой норме все операторы по норме не превосходят 1. Зафиксируем эту норму.

Предположим, семейство $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ является сжимающим. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$, и покажем, что в этом случае тело G обязано содержаться в ε-окрестности инвариантного подпространства L (окрестность понимается в смысле зафиксированной нормы). Обозначим эту окрестность через L_ε.

В предположении сжимаемости, для некоторого натурального m, существует оператор $B \in \mathcal{A}^m$ такой, что для произвольной точки $x \in G$, имеем $\rho(Bx, L) < \varepsilon$. Следовательно, BG содержится в L_ε. Обозначим через E_n объединение тех элементов разбиения $AG, A \in \mathcal{A}^n$, полученных при n-ой итерации разбиения, которые не содержатся целиком в L_ε. Таким образом, $E_n = \bigcup_{A \in \mathcal{A}^n} AG | AG \not\subset L_\varepsilon$ и дополнение $G \setminus E_n$ содержится в L_ε. В силу того, что операторы семейства $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ по норме не превосходят 1, для произвольных операторов $A', A'' \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ из включения $A'G \subset L_\varepsilon$, следует включение $A''A'G \subset L_\varepsilon$. Таким образом, $E_{n+1} \subset E_n$. Заметим, что $BE_n \subset L_\varepsilon$. Таким образом, $\mathrm{Vol}(E_{n+m}) \leqslant (\mathrm{Vol}(E_n) - \mathrm{det}B \cdot \mathrm{Vol}(E_n)) = (1 - \mathrm{det}B)\mathrm{Vol}(E_n)$. Учитывая, что $1 - \mathrm{det}B < 1$ и неотрицательно, имеем $\mathrm{Vol}(E_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, G содержится в L_ε.

В силу произвольности ε, получаем $G \subset L$, что невозможно, поскольку G является телом и имеет полную размерность.

□

Лемма III.3.2. *Задано самоаффинное тело G с семейством операторов разбиения $\mathcal{A}$. Предположим, операторы из $\mathcal{A}$ обладают общим инвариантным аффинным подпространством L. Тогда существует общее инвариантное подпространство L' такое, что*

- *L' содержит L и не совпадает со всем пространством;*
- *в подходящем базисе все операторы семейства $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L'}$ являются ортогональными и это семейство либо неприводимо, либо одномерно.*

Доказательство. Если семейство $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ обладает инвариантным линейным подпространством l, то вместо L будем рассматривать инвариантное аффинное подпространство $L + l$. Если $\dim\, L = d - 1$, то фактор-пространство одномерно. Итак, не уменьшая общности можем считать, что семейство $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ неприводимо и не одномерно. Воспользовавшись предыдущей леммой III.3.1, получаем, что семейство $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ не является сжимаемым. Тогда по лемме II.4.1, пункту б), в подходящем базисе все элементы $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ будут ортогональными операторами.

□

Доказательство теоремы III.3. Согласно теореме II.1, операторы семейства $\mathcal{A}$ имеют хотя бы одно общее инвариантное аффинное подпространство W, пересекающее G. Если W – точка, то переместив в нее начало координат, учитывая инвариантность W, можно считать, что все операторы A_i линейные. Если они имеют общее инвариантное линейное подпространство, то получаем, что $\mathcal{A}$ имеет общее инвариантное аффинное подпространство, отличное от точки. Если такого подпространства не существует, то семейство $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям пункта б) леммы II.4.1, поэтому все операторы A_i ортогональны в некотором базисе, а значит $A_iG = G$, $i = 1, \dots, k$, что невозможно. Итак, можно считать, что $\dim W \geqslant 1$.

Для краткости обозначим через $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_k\}$ семейство линейных операторов $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/W}$. Учитывая лемму III.3.2, можем считать, что семейство $\mathcal{U}$ неприводимо или одномерно и состоит из ортогональных операторов. В противном случае перейдем к большему инвариантному подпространству W', содержащему W.

Покажем, что существует инвариантное подпространство семейства $\mathcal{A}$, параллельное W, пересекающее G по внутренности. Если $\dim W \leqslant d - 2$, то, учитывая лемму II.4.2, выпуклая оболочка орбиты произвольной точки под действием полугруппы $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ содержит ноль в качестве внутренней точки. Значит, для любой точки $z \in G \setminus W$, проекция ее орбиты под действием полугруппы $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ на линейное подпространство $W^{\perp}$ ортогональное W, содержит в качестве внутренней точки проекцию W. Следовательно, проекция G на $W^{\perp}$ содержит в качестве внутренней точки проекцию W, поэтому W пересекает внутренность G.

Наконец, если $\dim W = d-1$, то все матрицы $\mathcal{U}$ имеют размерность 1. В этом случае $U_i = \pm 1$ для каждого i. Если $U_j = -1$ для некоторого j, то применяем то же рассуждение, что и для неприводимого случая. Если же $U_i = 1$ для всех i, то при каждом c гиперплоскость $W_c = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d = c\}$, параллельная W, инвариантна относительно всех операторов из $\mathcal{A}$. Тогда возьмем такое c, что подпространство W_c пересекает внутренность G.

Тем самым, мы можем считать, что W имеет непустое пересечение со внутренностью G.

Покажем, что $G \cap W$ является самоаффинным телом с семейством операторов $A|_W$. Инвариантное подпространство W пересекает G по внутренности, следовательно $G \cap W$ имеет полную размерность в W. Учитывая самоаффинность G, имеем $G \cap W = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A(G \cap W)$. Заметим, что, в силу ортогональности $A|_{\mathbb{R}^d/W}$, все собственные значения операторов из $\mathcal{A}$, соответствующие собственным подпространствам, не лежащим в W, по модулю равны 1. Таким образом, $\sum_{A \in \mathcal{A}} |\mathrm{det} A|_W| = \sum_{A \in \mathcal{A}} |\mathrm{det} A| = 1$. Следовательно, в подпространстве W имеем $\mathrm{Vol}(G \cap W) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{Vol}\, A(G \cap W)$. Значит, множества $A_i|_W G \cap W$ и $A_j|_W G \cap W$ при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек. Следовательно, $G \cap W$ – самоаффинное тело в W с семейством операторов $\mathcal{A}|_W$

Если построенное самоаффинное тело $G \cap W$ в W не является дробящимся, повторяя предыдущие рассуждения, перейдем к меньшему инвариантному подпространству, содержащемуся в W, фактор $\mathcal{A}|_{W/V}$ по которому будет семейством ортогональных операторов. В итоге мы придем к инвариантному аффинному подпространству V, пересекающему G по множеству полной размерности. Кроме того, $G \cap V$ является дробящимся самоаффинным телом с семейством операторов $\mathcal{A}|_V$. Само это сечение $G \cap V$ является многогранником (теорема III.1).

По построению, семейство операторов $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/V}$ имеет блочно-верхнетреугольный вид, причем все блоки на диагонали ортогональные. Из леммы II.4.1 заключаем, что в некотором базисе все эти операторы ортогональны. Таким образом, нами построено разложение (III.3.1): матрицы $\{U_i\}$ этого разложение соответствуют ортогональным операторам семейства $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/V}$, матрицы $\{C_i\}$ соответствуют операторам $\mathcal{A}|_V$.

Предположим, существует другое инвариантное аффинное подпространство V' семейства $\mathcal{A}$, пересекающее внутренность G, на котором $\mathcal{A}$ сжимающее. Как показано выше, $\dim V' \geqslant 1$. Если $\tilde{V}' \neq \tilde{V}$, то, не ограничивая общности, считаем, что $\tilde{V}'$ не содержится в $\tilde{V}$. Возьмем любое произведение Π матриц из $\tilde{A}$. Поскольку все собственные значения Π, отличные от собственных значений $\Pi|_{\tilde{V}}$, равны по модулю 1, получаем, что матрица $\Pi_{\tilde{V}'}$ имеет хотя бы одно собственное значение, по модулю равное 1. Итак, любое произведение операторов семейства $\mathcal{A}_{V'}$ имеет собственное значение, по модулю равное 1. Следовательно, семейство $\mathcal{A}_{V'}$ несжимающее.

Наконец, если в некотором базисе все матрицы семейства $\mathcal{A}$ имеют вид (III.3.1), то $\mathcal{A}$, очевидно, несжимающее.

□

Итак, каждому самоаффинному разбиению однозначно ставится в соответствие параметр $r = d - \mathrm{dim} V$, где V – общее инвариантное подпространство, пересекающее внутренность K, на котором семейство $\mathcal{A}$ задает дробящееся разбиение. Число r – это размерность ортогонального блока U_i в разложении (III.3.1), или, что то же, минимум суммарной кратности всех собственных значений, по модулю равных 1, среди операторов $A \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$.

Согласно теореме III.3, каждое недробящееся разбиение в $\mathbb{R}^d$ факторизуется на две части: дробящееся разбиение в $(d-r)$-мерном пространстве и семейство ортогональных операторов в его r-мерном дополнении. Именно ортогональная часть является причиной несжимаемости семейства $\mathcal{A}$. Таким образом, r является «степенью несжимаемости».

§ III.4. Доказательство критерия разрешимости уравнений самоподобия для недробящихся пар

В этом параграфе мы завершим доказательство теоремы I.1 для случая, когда самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$, задающая область определения уравнения самоподобия, является недробящейся. Напомним, мы рассматриваем уравнение самоподобия на функции из пространств $L_p(K, \mathbb{R}^n)$, заданное самоаффинной парой $(K, \mathcal{A})$ и некоторым семейством аффинных операторов $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$, действующих в $\mathbb{R}^n$. Самоподобие функции $f : K \to \mathbb{R}^n$ определяется k коммутативными диаграммами:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow{\scriptstyle A_i} & & \downarrow{\scriptstyle B_i} \\ K & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \end{array} \qquad i = 1, \ldots, k \tag{III.4.1}$$

где коммутативность предполагается выполненной почти во всех точках тела K.

Для каждого $p \geqslant 1$ рассматривалось семейство линейных операторов $\mathcal{B}_p = \{(k|\det A_1|)^{1/p} B_1, \ldots, (k|\det A_k|)^{1/p} B_k\}$ спектральные свойства которого определяли разрешимость уравнения самоподобия в пространстве $L_p(K, \mathbb{R}^n)$.

Сначала приведем идею доказательства теоремы I.1 для недробящихся пар. Как было отмечено при доказательстве теоремы для дробящихся самоаффинных пар, уже доказано, что из неравенства $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$ следует разрешимость уравнения самоподобия в том числе и для недробящихся пар. Таким образом, нам необходимо доказать, что из разрешимости системы уравнений III.4.1 следует единственность этого решения и оценка $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$. Единственность решения, как мы покажем, будет легко следовать из неравенства $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$: при таком неравенстве аффинный оператор самоподобия $\mathbf{B}$, определенный в пространстве $L_p(K, \mathbb{R}^n)$, оказывается сжимающим и, тем самым, обладает единственной неподвижной точкой.

Следуя обозначениям из теоремы III.3, для недробящейся самоаффинной пары $(K, \mathcal{A})$ обозначим через V инвариантное аффинное подпространство операторов разбиения, в ограничении на которое семейство $\mathcal{A}$ является сжимающим. Через G обозначаем инвариантное сечение тела K плоскостью V.

По решению системы III.4.1 мы будем строить решение уравнения самоподобия с областью определения, заданной дробящейся парой $(G, \mathcal{A}|_V)$. Тогда, учитывая, что теорема I.1 уже доказана для дробящихся пар, мы получим нужное неравенство $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$. Перед доказательством для удобства вновь приведем здесь формулировку теоремы

Теорема I.1 *Задана самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ в $\mathbb{R}^d$ и неприводимое семейство аффинных операторов $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$, действующих в $\mathbb{R}^n$.*

Уравнение (III.4.1) *имеет решение* $f \in L_1(K)$ *тогда, и только тогда, когда* $\rho_1(\mathcal{B}_1) < 1$. *Это решение единственно.*
Если при некотором $p \in [1, +\infty]$ *имеет место* $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$, *то* $f \in L_p$. *Для* $p < \infty$ *верно и обратное: если* $f \in L_p$, *то* $\rho_p < 1$. *Если* $f \in L_\infty$, *то* $\rho_\infty \leqslant 1$.
Без предположения неприводимости семейства $\mathcal{B}$, *если уравнение* (III.4.1) *имеет* L_p*-решение, то* $\rho_p((\mathcal{B}|_V)_p) < 1$, *где* $V = \mathbf{aff}\,(f)$.

Доказательство теоремы I.1 для недробящихся пар $(K, \mathcal{A})$. Сначала покажем, что при условии $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$ решение единственно. Вычислим норму линейной части оператора самоподобия $\mathbf{B}$. Аналогично рассуждениям из работы [39], распишем явно для произвольных L_p-функций f_1, f_2 действие оператора самоподобия на их разность:

$$\|\mathbf{B}(f_1 - f_2)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{A_i K} |B_i(f_1(A_i^{-1}x) - f_2(A_i^{-1}x))|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{K} |\mathrm{det} A_i| \cdot |B_i(f_1(y) - f_2(y))|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int\limits_{K} \sum_{i=1}^{k} |(|\mathrm{det} A_i|^{\frac{1}{p}}) \cdot B_i(f_1(y) - f_2(y))|^p dy\right)^{\frac{1}{P}}$$

Покажем, что последний интеграл не превосходит $\|f_1 - f_2\|_p$. Согласно [39; Proposition 2], для произвольного конечного семейства линейных операторов $\mathcal{C}$, оценка $\rho_p(\mathcal{C}) < 1$ равносильна существованию нормы $|\cdot|_{\mathcal{C}}$ такой, что $\sum\limits_{C \in \mathcal{C}} \frac{1}{k}|Cv|_{\mathcal{C}}^p < |v|_{\mathcal{C}}$ для любого вектора v. Воспользуемся этим наблюдением. Оценим подынтегральное выражение, обозначив $f_1(y) - f_2(y)$ через $v(y)$. В подходящей норме $|\cdot|$ имеем $\sum\limits_{i=1}^{k} |(|\mathrm{det} A_i|^{\frac{1}{p}}) \cdot B_i v|^p = \sum\limits_{B \in \mathcal{B}_p} \frac{1}{k} \cdot |Bv|^p < |v|$. Тем самым, $\|\mathbf{B}(f_1 - f_2)\|_p < \|f_1 - f_2\|_p$. Таким образом, оператор $\mathbf{B}$ – сжимающий. Учитывая, что решение уравнения самоподобия является неподвижной точкой оператора $\mathbf{B}$, оно единственно.

Перейдем к доказательству того, что из разрешимости уравнения самоподобия III.4.1 в L_p, следует оценка $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$. Через V мы обозначаем инвариантное аффинное подпространство семейства $\mathcal{A}$, в ограничении на которое семейство является сжимающим. Через G обозначаем дробящееся сечение тела K подпространством V. Вместе с семейством аффинных операторов $\mathcal{A}|_V = \{A_1|_V, \ldots, A_k|_V\}$, состоящим из ограничений операторов исходного семейства на инвариантное подпространство, сечение G образует дробящуюся самоаффинную пару. Рассмотрим уравнение самоподобия с областью определения, заданной самоаффинной парой $(G, \mathcal{A}|_V)$:

$$
\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^n \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (A_i)|_V} & & \Big\downarrow{\scriptstyle B_i} \\
G & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^n
\end{array}
\qquad i = 1, \ldots, k \tag{III.4.2}
$$

Необходимо доказать, что из разрешимости системы III.4.1 в $L_p(K, \mathbb{R}^n)$ следует разрешимость уравнения самоподобия III.4.2 в пространстве $L_p(G, \mathbb{R}^n)$. По решению f первой системы мы будем строить решение F второй системы уравнений.

По теореме III.3, в подходящем базисе линейные части всех операторов разбиения $A_1, \ldots, A_k$ имеют блочно-верхнетреугольный вид $\begin{pmatrix} C_i & D_i \\ 0 & U_i \end{pmatrix}$ с ортогональным нижним блоком и верхним блоком, соответствующим инвариантному подпространству V. Обозначим через M фактор-множество K/V. Это выпуклое тело в пространстве $\mathbb{R}^d/V \cong \mathbb{R}^{d-\dim V}$. Через $\pi : K \to M$ обозначим проекцию тела K на M. Отметим, что действие операторов семейства $\mathcal{A}$ в ограничении на $\mathbb{R}^d/V$ задается ортогональными матрицами $U_1, \ldots, U_k$. Кроме того $\pi \circ A_i K = U_i \circ \pi(K)$. Таким образом, учитывая, что $U_i M \subset M$ и U_i – ортогональный оператор, для всякого $i = 1, \ldots, k$ выполнено $U_i M = M$.

Рассмотрим тело $G \oplus M \subset V \oplus \mathbb{R}^{d-\dim V} = \mathbb{R}^d$. Такое тело является самоаффинным с операторами разбиения $A_i^* = A_i|_V \oplus U_i$, $i = 1, \ldots, k$. Построим непрерывное отображение из $G \oplus M$ в K, определенное почти всюду и коммутирующее с операторами самоаффинного разбиения.

С каждой точкой $g \in G$ инвариантного сечения свяжем последовательность индексов операторов разбиения $\{i_1(g), i_2(g), \ldots\}$, где $i_l(g) \in \{1, \ldots, k\}$ такую, что $g \in A_{i_1(g)} \cdots A_{i_l(g)} G$ для всякого $l > 0$. Также через $\Pi_l(g)$ обозначим произведение операторов $A_{i_1(g)} \cdots A_{i_l(g)}$. Таким образом, для всякого $g \in G$ определена цепочка вложенных множеств $\Pi_1(g)K \supset \Pi_2(g)K \supset \ldots$. Рассмотрим множество $M_g = \bigcap_{l=1}^{\infty} \Pi_l(g)K$. Неформально, над каждой точкой g построен слой M_g тела K. Однако, вообще говоря, это может не быть расслоением. По построению, M_g является выпуклым множеством в K, содержащим g. Кроме, того, учитывая, что $\pi(\Pi_l(g)) = M$ для всяких g и l, имеем $\pi(M_g) = M$ (рис. 7). Почти для всех точек $g \in G$, учитывая, что $\rho_p(\mathcal{A}|_V) < 1$, $\Pi_l(g)|_V$ стремится к одноранговому оператору. Таким образом, почти для всех $g \in G$, множество M_g имеет размерность $\dim V = \dim M$. Тем самым, проекция $\pi : M_g \to M$ обратима. Обозначим обратное отображение через $\pi_g^{-1} : M \to M_g$. Обозначим через $\widetilde{G} \subset G$ множество тех точек, в которых определено π_g^{-1}. Непосредственно по построению имеем $M_{A_i g} = A_i M_g$. Кроме того, учитывая, что для $m_g \in M_g$ имеем $\pi(A_i m_g) = (A_i|_{\mathbb{R}^d/V}) \circ \pi(m_g)$, причем $A_i m_g \in M_{A_i g}$, получаем $\pi_{A_i g}^{-1}(m) = A_i \pi_g^{-1}((A_i|_{\mathbb{R}^d/V})^{-1} m) = A_i \pi_g^{-1}(U_i^{-1} m)$.

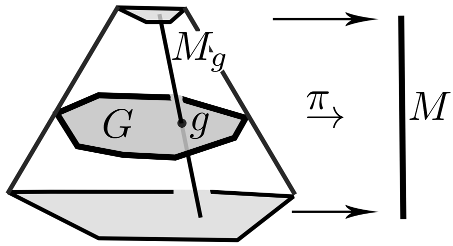


Рис.7. Слой M_g над регулярной точкой g инвариантного сечения.

Зафиксируем теперь некоторую точку $m \in M$. Покажем, что $\pi_g^{-1}(m) \in M_g \subset K$ непрерывно зависит от $g \in \widetilde{G}$. Зафиксируем $g_0 \in \widetilde{G}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем окрестность $U(\varepsilon)$ точки g_0 такую, что для всякого $g \in U(\varepsilon)$ имеем $\mathrm{dist}(\pi_{g_0}^{-1}(m), \pi_g^{-1}(m)) < \varepsilon$. Не уменьшая общности, будем считать, что $\mathrm{diam} K = 1$. Как и прежде, через $\|\cdot\|$ мы обозначаем некоторую норму в вещественном конечномерном пространстве, в которой все операторы разбиения не превосходят 1. Учитывая, что $g_0 \in \widetilde{G}$, найдется l такое, что $\|\Pi_l(g_0)\| < \varepsilon$. Для краткости, через Π_l обозначим $\Pi_l(g_0)$. Рассмотрим $U(\varepsilon) = \Pi_l G \cap \widetilde{G}$ и точку g из этого множества. Заметим, что вектор $w = \pi_{g_0}^{-1}(m) - \pi_g^{-1}(m)$ по построению параллелен G. Тем самым, он лежит в инвариантном подпространстве линейных частей операторов из $\mathcal{A}$. Учитывая, что обе точки $\pi_{g_0}^{-1}(m)$ и $\pi_g^{-1}(m)$ лежат в $\Pi_l K$, точки $\Pi_l^{-1} \cdot \pi_{g_0}^{-1}(m)$ и $\Pi_l^{-1} \cdot \pi_g^{-1}(m)$ содержатся в K. Тем самым, $\|w\| \leqslant \mathrm{diam} K \cdot \|\Pi_l\| < \varepsilon$. При фиксированном g, отображение $\pi_g^{-1}(m)$ является линейным и, тем самым, липшицево. Таким образом, непрерывность $\pi_g^{-1}(m)$ по обоим аргументам доказана.

Вернемся к построению отображения $\phi : G \oplus M \to K$ коммутирующего с операторами разбиения: $\phi \circ A_i^* = A_i \circ \phi$. Положим $\phi((g, m)) = \pi_g^{-1}(m)$. То есть в соответствие (g, m) ставится точка в слое M_g, попадающая при проекции π в m. Это отображение определено на множестве полной меры $\widetilde{G} \oplus M \subset G \oplus M$ и непрерывно на нем. Проверим коммутативность: $\phi \circ A_i^*((g, m)) = \phi \circ (A_i g, U_i m) = \pi_{A_i g}^{-1}(U_i m) = A_i \pi_g^{-1}(m)$. Теперь предположим, что некоторая функция $f \in L_p(K, \mathbb{R}^n)$ является решением уравнения самоподобия III.4.1. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{G} \oplus M & \xrightarrow{\phi} & K & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\
\big\downarrow{\scriptstyle A_i^*} & & \big\downarrow{\scriptstyle A_i} & & \big\downarrow{\scriptstyle B_i} \\
\widetilde{G} \oplus M & \xrightarrow{\phi} & K & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n
\end{array}$$

Мы видим, что функция $\psi = f \circ \phi$ является L_p-решением уравнения самоподобия с областью определения, заданной самоаффинной парой $(G \oplus M, \mathcal{A}^*)$, где $\mathcal{A}^* = \{A_1^*, \ldots, A_k^*\}$.

Теперь мы приступаем непосредственно к построению решения уравнения самоподобия III.4.2. Нами уже построено решение уравнения самоподобия, заданного диаграммами

$$
\begin{array}{ccc}
G \oplus M & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^n \\
\Big\downarrow{\scriptstyle A_i^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle B_i} \\
G \oplus M & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^n
\end{array}
\qquad i = 1, \ldots, k \tag{III.4.3}
$$

По теореме Фуббини, почти во всех точках множества $(G, m_0) \subset G \oplus M$, где m_0 – некоторая фиксированная точка M, корректно определена и суммируема функция $F(g) = \int\limits_M \psi(g, m)dm$. Проверим, что она является решением уравнения самоподобия III.4.2. Явно распишем $F \circ A_i|_V(g) = \int\limits_M \psi(A_i|_V(g), m)dm$. Далее, учитывая ортогональность линейных операторов $U_1, \ldots, U_k$, имеем $\int\limits_M \psi(A_i|_V(g), m)dm = \int\limits_M B_i\psi(g, m)dm = B_i \int\limits_M \psi(g, m)dm = B_i \circ F(g)$. Остается доказать, что $F \in L_p(G, \mathbb{R}^n)$. Через $|\cdot|$ будем обозначать обычную евклидову норму в $\mathbb{R}^n$. Прежде всего, $\|F\|_1 = \int\limits_G |F(g)| = \int\limits_G |\int\limits_M \psi(g, m)dm|dg \leqslant \int\limits_G \int\limits_M |\psi(g, m)|dm\ dg < \infty$. Последнее неравенство выполняется в силу того, что ψ – определенная на множестве конечной меры L_p-функция. Нами построено суммируемое решение F уравнения самоподобия III.4.2 с дробящейся парой $(G, \mathcal{A}|_V)$. Следовательно, $\rho_1(\mathcal{B}_1) < 1$. Значит, решение уравнения III.4.3 – единственно. Заметим, что функция $\widetilde{\psi}(g, m) = F(g)$ является решением уравнения III.4.3. В силу единственности получаем $\widetilde{\psi} = \psi$, то есть почти на всех слоях функция ψ – тождественна и $F(g, m) = \mathrm{Vol}\ M \cdot \psi(g, m_0)$, где m_0 – некоторая фиксированная точка M. Теперь распишем $(\|F\|_p)^p = \int\limits_G |\int\limits_M \psi(g, m)|^p = \int\limits_G |\mathrm{Vol}\ M \cdot \psi(g, m_0)|^p = \int\limits_G (\mathrm{Vol}\ M)^p \cdot |\psi(g, m_0)|^p = (\mathrm{Vol}\ M)^{p-1} \int\limits_G \int\limits_M |\psi(g, m)|^p = (\mathrm{Vol}\ M)^{p-1} \cdot (\|\psi\|_p)^p < \infty$. Таким образом, F лежит в $L_p(G, \mathbb{R}^n)$. Значит, учитывая, что пара $(G, \mathcal{A}|_V)$ – дробящаяся, имеем $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$, что и требовалось. Для $p = \infty$ доказательство производится аналогично.

$\square$

§ III.5. Вид самоаффинных недробящихся пар в двух специальных случаях

В этом параграфе мы полностью классифицируем самоаффиные пары в $\mathbb{R}^d$ в случаях $r = 1$ и $r = d - 1$.

Определение III.5.1. Косым цилиндром называется тело, образованное пересечением выпуклого цилиндра $C = B \times \mathbb{R}$, где B – выпуклое тело размерности $d - 1$, с двумя полупространствами, граничные гиперплоскости которых не параллельны образующим цилиндра. Пересечения граничных гиперплоскостей с C называются основаниями косого цилиндра.

Ясно, что основания косого цилиндра компактны, т.е., являются выпуклыми телами. Не уменьшая общности, будем предполагать, что плоскости оснований не имеют общих точек внутри C, в противном случае уменьшаем C. Установим следующий простой факт.

Предложение III.5.1. *Косой цилиндр является самоаффиным.*

Доказательство. Косой цилиндр будем обозначать через K. Через B_1, B_2 обозначим основания косого цилиндра, а через l обозначим образующую прямую исходного цилиндра. В качестве семейства операторов разбиения, рассмотрим два аффинных оператора A_1, A_2, тождественные на основаниях B_1 и B_2 соответственно, а в ограничении на прямую l действующие как сжатия в два раза. Непосредственно из построения видно, что точки цилиндра разбиваются на два непересекающихся по внутренностям множества A_1K и A_2K, дающие в объединении K.

□

Везде ниже, пользуясь обозначениями предыдущего параграфа, будем предполагать, что $(K, \mathcal{A})$ – недробящаяся самоаффинная пара. По теореме III.3, семейство $\mathcal{A}$ обладает максимальным по включению инвариантным подпространством V, в ограничении на которое семейство $\mathcal{A}$ является сжимающим.

Теорема III.4. *Самоаффинное тело, у которого* $\dim V = 1$*, является косым цилиндром с образующими, параллельными* V*.*

Доказательство. Обозначим через Y отрезок $V \cap K$, а через a и b – его концы. Семейство $\mathcal{A}$ задает дробящееся разбиение отрезка Y. Не уменьшая общности, $a \in A_1Y$, $b = A_kY$. Возможны два случая: $A_1a = a$ и $A_1b = a$. Второй случай легко сводится к первому. Действительно, если $A_kb = b$, то заменяем a на b, а если $A_ka = b$, то вместо семейства операторов $\mathcal{A}$ рассматриваем семейство $\mathcal{A}^2$, для которого $A_1A_ka = a$. Итак, считаем, что $A_1a = a$. Согласно теореме III.3, собственное значение одномерного оператора $A_1|_V$ по модулю меньше 1, а остальные $d-1$ собственных значений A_1 по модулю равны 1. Пусть L – инвариантная гиперплоскость оператора A_1, проходящая через a, на которой все собственные значения A_1 по модулю равны 1.

Покажем, что для каждого $i \geqslant 2$ множество $A_iK \cap L$ имеет нулевой $(d-1)$-мерный объем. Для этого покажем, что множества $A_iK \cap L$ и $A_1K \cap L$ не имеют общих внутренних точек в L. Иначе, если их пересечение содержит некоторый $(d-1)$-мерный шар $B \subset L$, то конусы $\operatorname{conv}\{A_1b, B\} \subset A_1K$ и $\operatorname{conv}\{A_ib, B\} \subset A_iK$ имеют общую внутреннюю точку, что невозможно. С другой стороны, поскольку $|\det A_1|_L| = 1$, оператор $A_1|_L$ сохраняет $(d-1)$-мерный объем, значит множество $A_1K \cap L$ заполняет весь объем множества $K \cap L$, а остальные множества A_iK пересекают L по множествам нулевого объема. Из этого следует, что все множества A_iK, $i \geqslant 2$, лежат в том же полупространстве относительно гиперплоскости L, что и отрезок Y. В противном случае, объем пересечения $A_iK \cap L$ будет ненулевым.

Покажем теперь, что L – опорная гиперплоскость множества K. Обозначим через L_+ то из открытых полупространств $\mathbb{R}^d$ относительно гиперплоскости L, в котором не лежит отрезок Y. Если $K' = K \cap L_+ \neq \emptyset$, то $A_1K' = K'$, поскольку множества A_iK, $i \geqslant 2$, не пересекают L_+. Но тогда $|\det A_1| = 1$, что невозможно.

Обозначим через π оператор проекции $\mathbb{R}^d$ на гиперплоскость L параллельно прямой V. Так как оператор $A_1|_L$ подобен ортогональному, существует последовательность $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, для которой оператор $A_1^{m_j}|_L$ стремится к тождественному на L при $j \to \infty$. А так как $A_1|_V$ – оператор умножения на число, по модулю меньшее 1, получаем $A_1^{m_j} \to \pi$ при $j \to \infty$. Следовательно, $\pi(K) \subset K$. Рассуждая так же с точкой b и оператором A_m получаем, что проекция K параллельно V на опорную плоскость, проведенную в точке b, лежит в K. Следовательно, K – косой цилиндр с образующей V и с основаниями, лежащими в опорных плоскостях к K, проведенных в концах отрезка Y.

$\square$

Аффинные подпространства $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^d$ назовем *скрещивающимися*, если они не пересекаются, а их аффинная оболочка совпадает с $\mathbb{R}^d$. Для скрещивающихся подпространств всегда выполнено:

$$\dim \tilde{V}_1 \ + \ \dim \tilde{V}_2 \ = \ d \ - \ 1 \ + \ \dim (\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2)\,.$$

В частности, если линейные части подпространств V_1 и V_2 имеют нулевое пересечение, то сумма их размерностей равна $d-1$. Так, например, происходит в случае двух скрещивающихся прямых в $\mathbb{R}^3$. Две параллельные гиперплоскости в $\mathbb{R}^d$ являются скрещивающимися. Другой пример: гиперплоскость и точка, не лежащая в ней. Две грани многогранника назовем скрещивающимися, если их аффинные оболочки скрещивающиеся.

Теорема III.5. *Самоаффинное тело K, у которого $\dim V = d-1$, является многогранником, имеющим вид $K = \mathrm{conv}\,\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$, где Γ_1, Γ_2 – две его скрещивающиеся грани, параллельные V. При этом в качестве V можно взять аффинную оболочку множества $\frac{1}{2}\big(\Gamma_1 + \Gamma_2\big)$.*

Доказательство. Рассмотрим опорные гиперплоскости L_1, L_2 тела K, параллельные V. Обозначим $\Gamma_m = K \cap L_m$, $m = 1, 2$. Учитывая, что для любого оператора $A_i \in \mathcal{A}$ его единственное собственное значение, соответствующее собственному вектору, лежащему вне V, равно ± 1, этот оператор либо переводит каждую плоскость L_1, L_2 в себя, либо меняет их местами. Следовательно, $A_i \Gamma_m \subset (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, для $m = 1, 2$. Поэтому, A_i переводит множество $Y = \mathrm{conv}\,\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ в себя. Отметим, что Y обязано иметь полную размерность. В противном случае, его аффинная оболочка является общим инвариантным аффинным подпространством семейства $\mathcal{A}$, а аффинная оболочка множества $Y' = V \cap Y$ является общим инвариантным аффинным подпространством размерности меньше $d-1$. Но это, в силу предложения III.3.1, противоречит тому, что семейство $\mathcal{A}|_V$ является сжимающим (теорема III.3). Таким образом, $\dim Y = d$, и следовательно $\dim Y' = d - 1$, а значит, аффинные оболочки множеств Γ_1 и Γ_2 – скрещивающиеся подпространства. Далее, $A_i Y' \subset Y'$ для всех $i = 1, \ldots, k$. С другой стороны, $\sum_{i=1}^{k} |\det{(A_i|_V)}\,| = 1$, поскольку множество $K \cap V$ самоаффинно. Следовательно, Y' также самоаффинно с тем же семейством $\mathcal{A}|_V$. Оба множества Y' и $K \cap V$ дробящиеся (семейство $\mathcal{A}|_V$ – сжимающее), значит, по теореме III.2 они совпадают. Итак, $K \cap V = Y \cap V$, следовательно, $K = Y = \mathrm{conv}\,\{K_1, K_2\}$. В этом случае $Y' = t\Gamma_1 + (1-t)\Gamma_2$ для некоторого $t \in (0, 1)$. Заметим, что если сумма Минковского двух выпуклых тел является многогранником, то и каждое из них является многогранником. В этом нетрудно убедиться, рассмотрев крайние точки каждого из множеств, учитывая, что крайняя точка суммы представляется в виде суммы крайних точек исходных множеств единственным образом. Так как Y' – многогранник (его самоаффинное разбиение $Y' = \cup_{i=1}^{k} A_i Y'$ – дробящееся) то и Γ_1, Γ_2 – многогранники, а значит и тело $K = Y = \mathrm{conv}\,\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ – многогранник.

$\square$

Непосредственным следствием двух приведенных теорем служит классификация самоаффинных недробящихся тел в $\mathbb{R}^3$.

Следствие III.5.1. *Любое недробящееся самоаффинное тело в $\mathbb{R}^3$ либо является многогранником $(r = 2)$, либо усеченным цилиндром $(r = 1)$.*

Пример III.5.1. В качестве тела K возьмем симплекс с вершинами $v_1, \ldots, v_{d+1}$. Для произвольного $m = 1, \ldots, d$, положим $\Gamma_1 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ и $\Gamma_2 = \{v_{m+1}, \ldots, v_{d+1}\}$. Тогда Γ_1 и Γ_2 – скрещивающиеся грани, и $K = \mathrm{conv}\,\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$. Рассмотрим произвольное дробящееся разбиение Γ_1 на $m_1 \geqslant 2$ симплексов $\Gamma_1^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m_1$ и произвольное дробящееся разбиение Γ_2 на $m_2 \geqslant 2$ симплексов $\Gamma_2^{(j)}$, $j = 1, \ldots, m_2$. Тогда $k = m_1 m_2$ симплексов $K_{ij} = \mathrm{conv}\{\Gamma_1^{(i)}, \Gamma_2^{(j)}\}$ задают разбиение симплекса K. Соответствующий аффинный оператор A_{ij} переводит симплекс K в K_{ij}. Получаем семейство $\mathcal{A}$ из $k = m_1 m_2$ операторов. В качестве V можно взять любую гиперплоскость, параллельную граням Γ_1 и Γ_2 и разделяющую их. Наличие общего инвариантного подпространства влечет, в силу предложения III.3.1, что $\{K_{ij}\}$ недробящееся, и семейство $\mathcal{A}$ несжимающее.

Приведем пример самоаффинного многогранника K в условиях теоремы III.5, в котором размерности граней Γ_1 и Γ_2 равны $d-1$ (т.е., они лежат в параллельных гиперплоскостях), но K не является ни цилиндром ни усеченным конусом. Мы рассмотрим случай $d = 3$, с произвольным d ситуация аналогична.

Пример III.5.2. Рассмотрим два произвольных прямоугольника $\Gamma_1 = abcd$ и $\Gamma_2 = a'b'c'd'$, лежащих в параллельных плоскостях (выбор первой вершины и направление обхода согласованы) и пусть $K = \mathrm{conv}\,\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$. Ясно, что плоскости граней Γ_1 и Γ_2 – скрещивающиеся. Оператор A_1 является сжатием в два раза к прямой aa' параллельно плоскостям прямоугольников. Таким образом, на прямой aa' этот оператор является тождественным, а на плоскости $abcd$ – гомотетией с коэффициентом $\frac{1}{2}$ и центром в точке a. Аналогично определяем операторы A_2, A_3 и A_4 как сжатия к прямым bb', cc' и dd' соответственно. Получили самоаффинное разбиение K. Оно, очевидно, не дробящееся, поскольку сохраняется расстояние между плоскостями прямоугольников. В качестве V можно взять любую гиперплоскость, параллельную граням Γ_1 и Γ_2 и разделяющую их. По теореме III.3, других общих подпространств, на которых семейство операторов сжимающее, нет.

§ III.6. Замощения пространства при помощи самоаффинных пар

Как отмечалось выше, любая дробящаяся самоаффинная пара определяет замощение пространства, причем не единственным образом. Будем говорить, что выпуклое тело K замощает пространство, если для некоторого счетного семейства аффинных операторов имеем $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i K = \mathbb{R}^d$. Как и в случае самоаффинных разбиений, предполагается, что $B_i K$ и $B_j K$ не имеют общих внутренних точек при $i \neq j$.

Покажем, что любая дробящаяся самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ задает замощение пространства аффинными образами тела K

Предложение III.6.1. *Дана самоаффинная дробящаяся пара $(K, \mathcal{A})$ в пространстве $\mathbb{R}^d$. Тогда существует замощение $\mathbb{R}^d$ аффинными образами тела K.*

Доказательство. Построим замощение явно. Считаем, что $\mathcal{A}$ состоит из k невырожденных операторов $A_1, \ldots, A_k$. Зафиксируем некоторую последовательность $t_1, t_2, \ldots$ индексов из множества $\{1, \ldots, k\}$. Через $K_{t_1 \ldots t_m}$ обозначим тело $A_{t_1}^{-1} A_{t_2}^{-1} \ldots A_{t_m}^{-1} K$. Оно является аффинным образом K и является самоаффинным, причем $K_{t_1 \ldots t_m} = \bigcup_{i=1}^{k} (A_{t_1}^{-1} \ldots A_{t_m}^{-1}) A_i K$. Заметим, что в построенное таким образом самоаффинное разбиение тела $K_{t_1 \ldots t_m}$ входит тело $K_{t_1 \ldots t_{m-1}}$ при $i = t_m$. Таким образом, мы можем рассмотреть вложенную цепочку выпуклых самоаффинных тел $K \subset K_{t_1} \subset K_{t_1 t_2} \subset \cdots$, причем $K_{t_1 \ldots t_{m-1}}$ входит в самоаффинное разбиение $K_{t_1 \ldots t_m}$ для всякого m.

В качестве искомых тел, реализующих замощение пространства, возьмем при каждом m все элементы разбиения самоаффинного тела $K_{t_1 \ldots t_m}$ кроме $K_{t_1 \ldots t_{m-1}}$. Дополнительно в качестве «нулевого» элемента разбиения возьмем исходное тело K.

Остается доказать, что описанная система аффинных образов тела K действительно покроет все пространство. Достаточно выбрать последовательность $t_1, t_2, \ldots$ таким образом, что

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} K_{t_1 \ldots t_i} = \mathbb{R}^d.$$

Как было показано в лемме III.1.1, существует произведение $A = A_{i_1} \ldots A_{i_n}$ исходных операторов из дробящейся самоаффинной пары с линейной частью по норме меньшей 1. Следовательно, образ единичного шара под действием линейной части оператора $A_{i_n}^{-1} \ldots A_{i_1}^{-1}$ будет содержать шар радиуса больше 1. В качестве искомой последовательности мы можем взять теперь периодическую последовательность $i_1, \ldots, i_n, i_1, \ldots, i_n, i_1, \ldots$. Сразу отметим, что

$$K_{\underbrace{i_1 \ldots i_n \ldots i_1 \ldots i_n}_{t \text{ блоков по } n \text{ индексов}}} = A^{-t} K.$$

Оператор A^{-t} имеет неподвижную точку в K, поэтому $A^{-t} K$ при $t \to \infty$ содержит шар сколь угодно большого радиуса с центром в точке из K. Тем самым, утверждение доказано.

$\square$

Отметим, что построенное таким образом по дробящейся самоаффинной паре $(K, \mathcal{A})$ замощение – не единственное. Для недробящихся самоаффинных пар утверждение предложения уже может не выполняться. Так, например, аффинными копиями кругового цилиндра нельзя замостить все пространство $\mathbb{R}^3$.

Глава IV. Примитивные матричные полугруппы

Одно из наиболее эффективных приложений ограниченных аффинных полугрупп возникает при изучении полугрупп неотрицательных матриц. *Неотрицательными* мы называем вещественные матрицы, все элементы которых неотрицательны. Как и раньше, для семейства матриц $\mathcal{A}$, через $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ мы обозначаем мультипликативную полугруппу, порожденную ими. Легко видеть, что элементы полугруппы $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ также являются неотрицательными матрицами. Центральным вопросом исследования этой главы будет наличие положительного произведения матриц некоторого фиксированного семейства.

Определение IV.0.1. Семейство неотрицательных матриц $\mathcal{A}$ называется *примитивным*, если порожденная его элементами полугруппа $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ содержит положительную матрицу, то есть матрицу, все элементы которой положительные.

Другими словами, должно существовать конечное произведение матриц семейства $\mathcal{A}$, возможно, с повторениями, являющееся положительной матрицей. Оказывается, что понятие примитивности тесно связано со сжимаемостью и, например, для стохастических матриц при общих предположениях ей равносильна. Учитывая этот факт, мы докажем ряд результатов о примитивных матричных полугруппах, используя результаты предыдущих глав.

Многие вопросы о комбинаторных и асимптотических свойствах полугрупп неотрицательных матриц могут решаться в терминах ограниченных аффинных полугрупп, см. [58, 49, 21]. Используя теорему II.1, мы получим естественное и короткое доказательство критерия примитивности матричной полугруппы, впервые доказанного в совместной работе автора с Протасовым [65] в 2012 году.

Напомним, что неотрицательная матрица называется *стохастической* (по столбцам), если сумма всех ее элементов в произвольном столбце равна единице. Произвольная стохастическая матрица обладает инвариантным аффинным подпространством $L = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_i x_i = 1\}$ и переводит в себя симплекс $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_i x_i = 1, x_i \geqslant 0\}$, построенный на концах базисных векторов. Таким образом, в ограничении на инвариантное подпространство L, стохастические матрицы образуют ограниченную аффинную полугруппу, а в качестве их общего инвариантного выпуклого тела G можно взять симплекс Δ. Здесь и далее, под стохастической матрицей A мы понимаем стохастическую по столбцам и обозначаем тем же символом A соответствующий аффинный оператор на инвариантном подпространстве L.

§ IV.1. Примитивные матрицы

Начнем со случая, когда матричная полугруппа задается всего одной неотрицательной матрицей A, то есть состоит из степеней $A, A^2, A^3, \ldots$. Матрица A называется *примитивной*, если какая-то ее степень положительна.

Известно, что любая примитивная $d \times d$ матрица A в степени $N = (d-1)^2 - 1$ является положительной, причем эта оценка точна. Примитивность неотрицательной матрицы определяется только позициями ее ненулевых элементов и не зависит от их значений. Примитивные матрицы наследуют большинство свойств положительных матриц и потому важны для приложений. Например, наибольшее по модулю собственное значение примитивной матрицы единственно и положительно, нормированные степени примитивной матрицы сходятся к одноранговой матрице, цепь Маркова с примитивной матрицей перехода сходится, и т.д.

Нам необходимо ввести еще несколько определений. *Носителем* неотрицательного вектора называется множество индексов его положительных элементов. Носитель неотрицательной матрицы – множество пар индексов ее положительных элементов. Неотрицательная $d \times d$ матрица A называется *положительно приводимой*, если найдется собственное непустое подмножество Ω' множества $\Omega = \{1, \ldots, d\}$ такое что для любого $i \in \Omega'$ носитель i-го столбца матрицы A лежит в Ω'. Это означает, что координатное подпространство $L_{\Omega'} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_j = 0, \forall\, j \notin \Omega'\}$ является инвариантным для A. Если такого координатного подпространства не существует, то A *положительно неприводима*. Напомним, что с каждой неотрицательной матрицей естественным образом связан ориентированный граф, для которого она является матрицей инцидентности. Граф состоит из d пронумерованных вершин $v_1, \ldots, v_d$. Из вершины v_i идет ребро в v_j, если соответствующий элемент матрицы $(A)_{ji}$ ненулевой. Положительная неприводимость означает, что для любых индексов $i, j \in \Omega$ в графе матрицы A существует путь из вершины i в j.

Известно несколько критериев примитивности матрицы. Если матрица A положительно приводима, она, конечно, не может быть примитивной (для любой степени A^N имеем $(A^N)_{ij} = 0$, если $i \notin \Omega'$, $j \in \Omega'$). Если же она положительно неприводима, то либо она примитивна, либо имеет $r \geqslant 2$ максимальных по модулю собственных значений $\lambda_m = \rho\, e^{2\pi i m/r}$, $m = 1, \ldots, r$. В этом случае существует разбиение множества Ω на r непустых подмножеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$, на которых A действует как циклическая перестановка. Это означает, что для любого $i \in \Omega_m$ носитель i-того столбца матрицы A лежит в Ω_{m+1} (для $m = r$ полагаем $\Omega_{m+1} = \Omega_1$). Если обозначить через $e_1, \ldots, e_d$ векторы канонического базиса $\mathbb{R}^d$, то носитель вектора Ae_i является линейной комбинацией векторов $e_s\,,\ s \in \Omega_{m+1}$. Существует перестановка базисных векторов, после которой A приобретает следующий блочный вид:

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & B_r \\ B_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & B_{r-1} & 0 \end{pmatrix}\,. \qquad \text{(IV.1.1)}$$

Размеры блоков: $|\Omega_i| \times |\Omega_j|\,,\ i, j = 1, \ldots, r$, (как обычно $|M|$ обозначает мощность множества M), все диагональные блоки – квадратные. Число r называется *индексом импримитивности* матрицы A. Для примитивной матрицы $r = 1$, для непримитивной $r \geqslant 2$.

Эти факты о непримитивной неотрицательной матрице обычно называют теоремой Перрона-Фробениуса. Впервые в изложенной нами форме это было доказано Фробениусом в 1912 году [16]. Позднее в работе [47] 1933 года Романовским была добавлена комбинаторная интерпретация индекса импримитивности, играющего важную роль в теории графов. Им было доказано, что r является наибольшим общим делителем длин всевозможных циклов в графе матрицы A. Детальный обзор теории Перрона-Фробениуса может быть найден в [51, 49]. Мы придерживаемся терминологии, в которой теорией Перрона-Фробениуса-Романовского называется весь ряд фактов, связывающих примитивность матриц с их собственными значениями и комбинаторной структурой.

§ IV.2. Обобщение на матричные полугруппы

Основная цель этого параграфа – обобщить теорию Перрона-Фробениуса-Романовского на случай полугрупп неотрицательных матриц. Большинство упомянутых в предыдущем параграфе свойств одной неотрицательной матрицы обобщаются на семейства матриц. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное компактное семейство неотрицательных $d \times d$-матриц. Оно называется *положительно приводимым*, если найдется собственное непустое подмножество $\Omega' \subset \Omega$, для которого при любом $i \in \Omega'$ носитель i-того столбца каждой матрицы $A \in \mathcal{A}$ лежит в Ω'. Это означает, что координатное подпространство $L_{\Omega'}$ является общим инвариантным подпространством для всех $A \in \mathcal{A}$. Иначе, $\mathcal{A}$ *положительно неприводимо*. Напомним, что семейство $\mathcal{A}$ называется *примитивным*, если существует положительное произведение матриц из $\mathcal{A}$. Отметим, что мы, вообще говоря, не предполагаем конечность $\mathcal{A}$. Тем не менее, если для некоторых двух матриц $A, A' \in \mathcal{A}$ совпадают индексы всех их ненулевых элементов, то примитивность семейства $\mathcal{A}$ равносильна примитивности семейства $\mathcal{A}\{A'\}$. Таким образом, в большинстве случаев нас будут интересовать лишь конечные семейства. Для конечного семейства матриц $\{A_1, \ldots, A_k\}$ примитивность означает, что найдутся индексы (возможно, повторяющиеся) $d_1, \ldots, d_N$ из множества $\{1, \ldots, k\}$, для которых $A_{d_N} \cdots A_{d_1} > 0$. Примитивность семейств матриц изучалась в литературе в связи с приложениями к неоднородным цепям Маркова, показателям Ляпунова, динамическим системам, задачам популяционной динамики, и т.д. [21, 29, 51, 57]. Важность данного свойства объясняется во многом асимптотическими свойствами примитивных полугрупп. Имеет место следующее простое утверждение, доказательство которого есть, например, в работе [64].

Предложение IV.2.1. *Если матрицы конечного семейства $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ не имеют нулевых столбцов (например, если они стохастические), то из примитивности следует, что доля положительных произведений среди всех k^N произведений длины N стремится к 1 при $N \to \infty$.*

Будем предполагать два условия:

a) *$\mathcal{A}$ положительно неприводимо;*

b) *матрицы семейства $\mathcal{A}$ не имеют нулевых строк и нулевых столбцов.*

Критерий примитивности семейства матриц был доказан впервые в совместной статье автора с Протасовым в [65; теорема 1]. Оказывается, что при выполнении условий (a) и (b), либо семейство $\mathcal{A}$ примитивно, либо существует разбиение множества Ω на r непустых подмножеств $\{\Omega_k\}_{k=1}^{r}$, на которых все матрицы из $\mathcal{A}$ действуют как перестановки, уже не обязательно циклические. Это означает, что каждой матрице $A \in \mathcal{A}$ соответствует перестановка σ множества $\{1, \ldots, r\}$ такая, что любого $k \in \{1, \ldots, r\}$ и любого $i \in \Omega_k$ носитель i-того столбца A лежит в $\Omega_{\sigma(k)}$. Существует перестановка базисных векторов, после которой каждая матрица $A \in \mathcal{A}$ приобретает блочную форму (IV.1.1), в которой в i-том блочном столбце есть единственный ненулевой блок, он находится в блочной строке с номером $\sigma(i)$, где σ – перестановка, соответствующая A. Теперь дадим строгую формулировку:

Теорема IV.1. *Семейство неотрицательных матриц $\mathcal{A}$, удовлетворяющее условиям (a) и (b), не является примитивным тогда и только тогда, когда существует разбиение $\Omega = \sqcup_{j=1}^{r} \Omega_j$, $r \geqslant 2$, на котором все матрицы из $\mathcal{A}$ действуют как перестановки.*

Среди всех разбиений $\Omega = \sqcup_{j=1}^{r} \Omega_j$, $r \geqslant 2$, существует единственное разбиение с наибольшим числом множеств r, оно называется каноническим. Число $r = r(\mathcal{A})$ называется индексом импримитивности семейства $\mathcal{A}$. Оно совпадает с минимальным числом n таким, что любая матрица полугруппы $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ имеет не менее n столбцов с непересекающимися носителями, а также не менее n максимальных собственных значений (с учетом кратности). Все блоки канонического разбиения заполняются, т.е., существует блочно-диагональная матрица $D \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, у которой все диагональные блоки (соответствующие множествам $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$) строго положительны.

Мы не будем приводить здесь доказательство второй части теоремы о каноническом разбиении. Все эти факты, устанавливаются относительно несложно, по сравнению с доказательством главного утверждения – существования хотя бы одного разбиения, на котором все матрицы семейства $\mathcal{A}$ действуют как перестановки и могут быть найдены в работе [65].

Замечание IV.2.1. *Условия (a) и (b) существенны. Условие (a), конечно же, необходимо для примитивности. Условие (b) не является необходимым, однако, без него теорема IV.1 не верна, что иллюстрирует следующий пример.*

Пример 5. Рассмотрим положительно неприводимое семейство из четырех стохастических матриц, действующих в $\mathbb{R}^4$:

$$\{\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\}$$

Такие матрицы не обладают положительным произведением: носитель образа любого базисного вектора состоит лишь из одного элемента. С другой стороны, матрицы не удовлетворяют условию (b) и не существует разбиения базисных векторов, на котором матрицы действовали бы как перестановки. Действительно, предположим такое разбиение существует. Каждую пару базисных векторов e_i, e_j одна из матриц семейства переводит в один и тот же базисный вектор. Следовательно, индексы i, j лежат в одном классе разбиения и оно тривиально.

Несмотря на простую формулировку, доказательство теоремы IV.1 достаточно длинное и сложное. Доказательство, приведенное в [65] содержит 3,5 страницы, оно основано на геометрии выпуклых многогранников. В той же работе авторы поставили вопрос о существовании чисто комбинаторного доказательства, возможно, более простого. Вопрос естественный, учитывая комбинаторный характер теоремы. На него успешно откликнулись Альпин и Альпина [1] а также Блондель, Юнгерс и Ольшевский [5], представив (различные!) комбинаторные доказательства, хотя и по-прежнему длинные. Теорема II.1 о компактных несжимающих полугруппах позволяет дать короткое доказательство теоремы IV.1. Его можно назвать аналитическим, учитывая, что сама теорема II.1 доказывается аналитическими методами, с помощью функциональных уравнений. Оно занимает около 1 стр., при этом большая часть посвящена доказательству известного факта о том, что сжимаемость семейства $\mathcal{A}$ на гиперплоскости L равносильна примитивности $\mathcal{A}$. За вычетом этого, аналитическое доказательство теоремы IV.1 занимает менее трети страницы. Идея проста: если семейство $\mathcal{A}$ непримитивно, а значит, несжимающее, то, согласно теореме II.1, оно имеет общее инвариантное аффинное подпространство $V \subset L$, пересекающее симплекс Δ. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на множестве Ω: $i \sim j \Leftrightarrow$ вектор $e_i - e_j$ параллелен V. Это отношение определяет искомое разбиение на классы $\Omega = \sqcup_{j=1}^{r} \Omega_j$.

Доказательство теоремы IV.1. Для данной матрицы $A \in \mathcal{A}$ обозначим через $\mathcal{T}(A)$ множество всех стохастических матриц, носители которых содержатся в носителе A. Условие (b) гарантирует, что $\mathcal{T}(A) \neq \emptyset$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Положим $\mathcal{A}' = \cup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{T}(A)$. Каждая матрица $A \in \mathcal{A}'$ определяет аффинный оператор на гиперплоскости L. Если семейство $\mathcal{A}'$ сжимающее на L, то найдется матрица $B \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}'}$, для которой $\|B^k|_L\| \to 0$, $k \to \infty$. Следовательно (см. например, [49]) некоторая степень матрицы B имеет положительную строку. Пусть матрица $A \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}'}$ имеет максимальное число $k \geqslant 1$ положительных строк, считаем, что это – первые k строк. Пусть $k < d$; $(k+1)$-я строка содержит положительный элемент $(A)_{k+1,i}$. Хорошо известно, что в силу условия (a), существует матрица $C \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}'}$, у которой $(C)_{i,1} > 0$. Для удобства читателя приведем доказательство: предположим, найдется пара индексов i, j таких, что $A_{ij} = 0$ для любой матрицы полугруппы. Обозначим через $I = \{i_1, \dots i_k\}$ минимальное по включению множество индексов таких, что $Ae_j \in L = \text{ span } (e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ для всякой матрицы полугруппы $A \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}'}$. Ясно, что $AL \subset L$ для любой матрицы $A \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}'}$. Если существует индекс i такой, что для всех матриц полугруппы $A_{ij} = 0$, то $Ae_j \perp e_i$, следовательно, $L \subset e_i^{\perp}$ и $L \neq \mathbb{R}^d$. Тогда множество индексов I не совпадает с полным набором $\{1, \dots, d\}$ и семейство $\mathcal{A}'$ по определению приводимо, противоречие. Тогда i-я строка матрицы CA положительна. По условию (b), для любого $F \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}'}$, матрица AF также имеет первые k положительных строк. Следовательно, первые $k+1$ строк матрицы ACA положительны. Таким образом, $k = d$.

Итак, если $\mathcal{A}'$ – сжимающее на L, то оно примитивно. Если оно не сжимающее, то согласно теореме II.1, операторы из $\mathcal{A}'$ имеют общее инвариантное аффинное подпространство $V \subset L$, $\dim V \leqslant d-2$, которое пересекает Δ.

Предположим, V не пересекает внутренность Δ. Пусть $\delta = \mathrm{conv}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})$ — минимальная по включению грань симплекса, содержащая $V \cap \Delta$. Покажем, что грань δ инвариантна относительно $\mathcal{A}'$. Отметим, что в силу минимальности, внутренность δ содержит точку v подпространства V. Тогда $v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_{i_j}$, где все коэффициенты положительны. Предположим, найдется оператор $A \in \mathcal{A}'$ такой, что $Ae_{i_j} \notin \delta$ для некоторого j. Не уменьшая общности, $j = 1$. Тогда $Av = \lambda_1 A e_{i_1} + A \cdot \sum_{j=2}^{m} \lambda_j e_{i_j} \notin \delta$. В то же время, $Av \in V$. Приходим к противоречию с $V \cap \Delta \subset \delta$. Таким образом, если V не пересекает внутренность Δ, то найдется инвариантная грань симплекса и матрицы набора $\mathcal{A}$ будут иметь инвариантное базисное подпространство. Таким образом, V содержит положительную точку $a \in \Delta$. Рассмотрим следующее соотношение на множестве Ω: $i \sim j$, если вектор $e_i - e_j$ принадлежит $\tilde{V}$ (линейной части V). Это отношение эквивалентности разбивает Ω на классы $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$. Так как $\dim V \leqslant d-2$, то $r \geqslant 2$. Покажем, что для любых $i \in \Omega$ и $A \in \mathcal{A}$ носители всех векторов множества $M_i(A) = \{A'e_i,\ A' \in \mathcal{T}(A)\}$ лежат в одном и том же множестве Ω_k. Для этого достаточно доказать, что разность любых двух векторов из $M_i(A)$ лежит в $\tilde{V}$. Возьмем произвольные $A', B' \in \mathcal{T}(A)$ и матрицу $C' \in \mathcal{T}(A)$, у которой i-тый столбец такой же как у A', а остальные столбцы – такие же как у B'. Для положительного вектора $a = \sum_i a_i e_i \in V$, имеем

$$a_i(A'e_i - B'e_i) \;=\; a_i(C'e_i - B'e_i) \;=\; C'(a_i e_i) - B'(a_i e_i) \;=\; C'a - B'a \;\in\; \tilde{V}\,.$$

Поскольку $C'a \in V$ и $B'a \in V$, имеем $C'a - B'a \in \tilde{V}$, значит и $A'e_i - B'e_i \in \tilde{V}$. Итак, носители i-х столбцов всех матриц из $\mathcal{T}(A)$ лежат в одном множестве Ω_k. Тогда носители всех столбцов с индексами из одного класса с индексом i (скажем, Ω_j) лежат в том же Ω_k. Следовательно, матрица A определяет отображение $\sigma(i) = k$. Поскольку A не имеет нулевых строк, у каждого k есть прообраз, т.е., σ – перестановка.

$\square$

Отдельно отметим, что попутно был доказан важный факт: при выполнении условий (a) и (b), примитивность и сжимаемость равносильны.

Предложение IV.2.2. *Задано семейство стохастических матриц $\mathcal{A}$, удовлетворяющее условиям (a) и (b). Тогда семейство $\mathcal{A}$ является примитивным тогда, и только тогда, когда полугруппа аффинных операторов $\mathcal{A}|_L$ является сжимающей.*

§ IV.3. Алгоритм проверки сжимаемости семейства стохастических матриц

В заключительном параграфе приведем два полиномиальных алгоритма проверки, является ли семейство стохастических матриц сжимаемым в ограничении на их инвариантный симплекс и является ли примитивным некоторое семейство матриц, удовлетворяющее условиям (a) и (b). Напомним, что первый алгоритм был использован нами в параграфе I.4 (предложение I.4.1).

Начнем со второго алгоритма проверки примитивности.

Предложение IV.3.1. *Задано положительно неприводимое семейство неотрицательных $d \times d$-матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$, удовлетворяющее условиям (a) и (b). Тогда не более чем за $2kd^3$ операций может быть проверено, примитивно ли это семейство.*

Сначала приведем алгоритм, а затем покажем, что его сложность не превосходит упомянутой константы. Идея алгоритма заключается в следующем. Мы будем строить каноническое разбиение множества $\Omega = \{1, \ldots, d\}$ на множества $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$. Если после применения некоторого оператора семейства $\mathcal{A}$ некоторая пара базисных векторов имеет пересекающиеся носители, значит, они обязаны лежать в одном и том же множестве канонического разбиения. Семейство $\mathcal{A}$ является примитивным, если в каноническом разбиении $r = 1$.

Алгоритм проверки примитивности. *Нулевой шаг.* Фиксируем разбиение множества индексов Ω на одноэлементные подмножества $\Omega_i = \{i\},\ i = 1, \ldots, d$. С таким разбиением мы ассоциируем множества пар индексов $\{(i, i),\ i = 1, \ldots, d\}$.

Основной цикл на m-ом шаге. Имеется разбиение множества Ω на $d - m$ непересекающихся подмножеств $\Omega_{j_1}, \ldots, \Omega_{j_{d-m}}$. Кроме того, задано множество пар $\{(i, j) \mid i \in \Omega_j, \quad i = 1, \ldots, d\}$, хранящее информацию о том, в каком из множеств разбиения лежит каждый из индексов. Рассмотрим все столбцы матрицы A_1 с индексами из первого множества Ω_{j_1} и рассмотрим множество индексов $\{i_1, i_2, \ldots\}$ всех неотрицательных элементов этих столбцов (необходимо, чтобы элемент с индексом i_s был положительным хотя бы в одном из столбцов). Рассмотрим второй элемент j из пары (i_1, j) и сравним его со всеми вторыми элементами оставшихся пар $(i_s, \cdot),\ s > 1$. В случае, если все они совпадают, перейдем к следующей матрице A_2 и повторим проделанное. Если же найдется пара (i_s, q) с $q \neq j$, тогда заключаем, что множества Ω_j и Ω_q обязаны принадлежать одному множеству канонического разбиения. Тогда осуществим их *слияние*: во всех парах $\{(i, q)|\ i \in \Omega_q\}$ заменим второй индекс q на j. Тогда мы получим разбиение Ω на $d - m - 1$ множеств и множество Ω_q поглотится множеством Ω_j и мы завершаем m-й шаг, переходя к $m + 1$-му.

Если в описанной процедуре вторые элементы пар совпадают для всех матриц $A_1, \ldots, A_k$, мы переходим ко второму множеству Ω_{j_2} и делаем то же для него, и так далее. Если после m-го шага никакие из множеств $\Omega_{j_1}, \ldots, \Omega_{j_{d-m}}$ не объединятся, то $r = d - m$ и алгоритм завершается. На каждом шаге алгоритма какие-то два множества объединяются, поэтому алгоритм сделает не более $d - 1$ шагов. Приведем соответствующий псевдокод.

$\texttt{partitionSets} = [\{1\}, \{2\}, \ldots, \{d\}]$
$\texttt{pairs} = [(1, 1), (2, 2), \ldots, (d, d)]$

Step m:
  for Ω in $\texttt{partitionSets}$:
    for A in $\mathcal{A}$:

```
columns = столбцы A с индексами из Ω
indices = {i | существует столбец c ∈ columns такой, что c_i > 0}

firstIndex = indices[0]
FOR i IN indices, i ≠ firstIndex:
    j = pairs[firstIndex].second
    j' = pairs[i].second
    IF j ≠ j':
        Join(j, j')
        go to Step m + 1

return size of partitionSets
```

Оценим сложность приведенного алгоритма.

Доказательство предложения IV.3.1. Составление множества индексов ненулевых элементов матрицы A_1 с индексами столбцов из множества Ω_{j_1} занимает не более $d|\Omega_{j_1}|$ операций и столько же занимает сравнение вторых индексов в полученных парах. В сумме для всех матриц мы получаем не более $2kd|\Omega_{j_1}|$ операций, а для всех множеств Ω_{j_s} получаем не более $2kd|\Omega| = 2kd^2$ операций. Сложность каждого шага таким образом не превосходит $2kd^2$ плюс не более чем d операций на слияние множеств. Учитывая, что число шагов не превосходит $d-1$, общая сложность не превосходит $2kd^3$.

□

Замечание IV.3.1. Наилучший алгоритм перемножения двух $d \times d$-матриц занимает $O(d^{2.376})$ операций, столько же, сколько для вычисления определителя, или приближенного значения спектрального радиуса. В то же время, из-за большой константы, на практике в не слишком больших размерностях используется классический алгоритм Штрасена, занимающий $O(d^{2.807})$ операций. Таким образом, надежда существенно уменьшить константу $2kd^3$ в предложении IV.3.1 крайне мала. Это касается даже случая проверки примитивности одной матрицы.

Учитывая предложение IV.2.2, при условиях (a) и (b), предложенный алгоритм является алгоритмом проверки, является ли семейство сжимающим. Теперь мы переходим к алгоритму проверки сжимаемости семейства стохастических матриц, ограниченных на подпространство L без предположения условий (a) и (b). Напомним, что в предложении I.4.1 нами был анонсирован алгоритм проверки, равен ли спектральный радиус некоторого семейства операторов единице. Убедимся, что нам достаточно проверять сжимаемость соответствующего семейства. Применяя предложение II.2.1, получаем:

Следствие IV.3.1. *Для семейства $\mathcal{A}$ стохастических матриц следующие условия равносильны:*

1) $\mathcal{A}|_L$ – сжимающее семейство операторов с инвариантным телом Δ.

2) $\rho_p(\mathcal{A}|_L) < 1$ для любого $p \in [1, +\infty)$;

Следующее утверждение дает простой критерий проверки свойств 1)-2) для произвольного семейства стохастических матриц.

Предложение IV.3.2. *Для семейства стохастических матриц $\mathcal{A}$ свойства 1)-2) выполнены тогда, и только тогда, когда для любых двух индексов $i, j \leqslant d$, $i \neq j$, существует произведение Π матриц семейства, у которого носители столбцов i и j пересекаются.*

Доказательство. Достаточность. Предположим, для любых двух индексов $i, j \leqslant d$, $t_1 \neq t_2$, существует произведение этих матриц Π_{ij}, у которого носители столбцов i и j пересекаются. Тогда $\|\Pi_{ij}e_i - \Pi_{ij}e_j\|_1 < \|e_i - e_j\| = 2$. Докажем, что существует произведение матриц P со свойством $\|Pe_{ij}\|_1 < 1$ для всех пар (i, j), где $e_{ij} = \frac{1}{2}(e_i - e_j)$. Положим $P_1 = \Pi_{12}$, $I_1 = (1, 2)$, применяем индукцию: если существует произведение исходных матриц P_m, для которого $\|P_m e_{ij}\|_1 < 1$ при всех $(i, j) \in I_m$, где I_m – некоторое множество пар индексов, то рассмотрим произвольную пару $(a, b) \notin I_m$. Пусть в матрице P_m элементы $(P_m)_{aq} > 0, (P_m)_{br} > 0$ и $q \neq r$. Если такой пары несовпадающих индексов q, r не существует, то, очевидно, $P_m e_{ab} < 1$, делаем шаг индукции, рассматривая $P_{m+1} = P_m, I_{m+1} = I_m \cup \{(a, b)\}$. Предположим, такая пара индексов нашлась. Так как $\|P_m\|_1 = \|\Pi_{qr}\| = 1$, то для матрицы $P_{m+1} = \Pi_{qr}P_m$ имеем $\|P_{m+1}\|_1 < 1$ при всех $(i, j) \in I_{m+1} = I_m \cup \{(a, b)\}$. Мы построили матрицу P. Пересечение единичного шара $\{x \in \mathbb{R}^d \mid |x|_1 \leqslant 1\}$ с пространством L является выпуклой оболочкой точек e_{ij}, следовательно, $\|P|_L\|_1 < 1$ и семейство матриц $A_1, \ldots, A_k$ в ограничении на L является сжимающим.

Необходимость. Если нашлась пара индексов t_1, t_2, для которых не существует искомого матричного произведения, то для любого матричного произведения A имеем $\left\|Ae_{t_1} - Ae_{t_2}\right\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{d} |(e_i, Ae_{t_1}) - (e_i, Ae_{t_2})| = 2$ в силу того, что матрица A – стохастическая. Таким образом, семейство не является сжимающим.

□

Предложение IV.3.2 позволяет построить эффективный полиномиальный алгоритм проверки неравенства $\rho_p(\mathcal{A}|_L) < 1$: достаточно проверить условие, что для любых двух столбцов найдется произведение матриц, у которого эти столбцы имеют пересекающиеся носители.

Рассмотрим ориентированный граф G размера d^2 с вершинами в виде пар индексов $(i_1, i_2), i_l = 1, \ldots, k$. Из (i_1, i_2) идет ребро в (j_1, j_2), если существует матрица $A_{(i_1,i_2)\to(j_1,j_2)}$ из набора $\{A_1, \ldots, A_k\}$, для которой одновременно выполнено: $(A_{(i_1,i_2)\to(j_1,j_2)})_{j_1 i_1} > 0, (A_{(i_1,i_2)\to(j_1,j_2)})_{j_2 i_2} > 0$. Докажем нетрудную лемму, которая понадобится при построении алгоритма.

Лемма IV.3.1. *Если для некоторого матричного произведения $A = A_{k_1} \ldots A_{k_T}$, одновременно выполнено: $(A)_{i_1 j_1} > 0, (A)_{i_2 j_2} > 0$, то в графе G существует путь из (i_1, i_2) в (j_1, j_2).*

Доказательство. Индукция по длине произведения T. Для $T = 1$ – очевидно из определения. Переход. Рассмотрим произведение $A_{k_1}(A_{k_2} \ldots A_{k_T}) = A_{k_1}\hat{A}$. В силу $(A_{i_1}\hat{A})_{i_1 j_1} > 0, (A_{k_1}\hat{A})_{i_2 j_2} > 0$, существует пара индексов h_1, h_2, такая, что $(\hat{A})_{i_1 h_1} > 0, (\hat{A})_{i_2 h_2} > 0, (A_{k_1})_{h_1 j_1} > 0, (A_{k_1})_{h_1 j_1} > 0$. Таким образом, существует ребро из (h_1, h_2) в (j_1, j_2) и по предположению индукции, существует путь из (i_1, i_2) в (h_1, h_2).

□

Предложение IV.3.3. *Следующие условия равносильны:*

- *для любых двух индексов* $i, j \leqslant d$ *существует произведение* Π *исходных матриц, такое, что при некотором* t, $(\Pi)_{ti} > 0$ *и* $(\Pi)_{tj} > 0$;
- *для любой вершины* (i, j) *в графе* G *существует ориентированный путь на диагональ, т.е. в вершину вида* (t, t).

Доказательство. Из второго первое. Непосредственно проверяется, что если существуют ребра из (i_1, i_2) в (j_1, j_2) и из (j_1, j_2) в (h_1, h_2) то для матрицы $A = A_{(j_1,j_2)\to(h_1,h_2)}A_{(i_1,i_2)\to(j_1,j_2)}$ выполнено: $(A)_{i_1h_1} > 0, (A)_{i_2h_2} > 0$. Рассмотрим произвольную пару индексов t_0, s_0, существует путь из (t_0, s_0) в некоторую вершину (t, t). Пусть $(t_l, s_l), l = 1, \dots, T$ – вершины в этом пути. В силу замечания, $A_{(t_T,s_T)\to(t,t)} \dots A_{(t_l,s_l)\to(t_{l+1},s_{l+1})} \dots A_{(t_0,s_0)\to(t_1,s_1)}$ – искомое произведение для пары индексов t_0, s_0. Второе из первого немедленно следует из леммы IV.3.1.

□

Алгоритм проверки свойств 1)-2). Рассмотрим подграф $G' \subset G$. На первом шаге G' – множество всех диагональных вершин. Достаточно проверить, что из любой вершины G существует путь в G'. Обратим все ребра (т.е. рассматриваем матрицы $A_1^T, \dots, A_k^T$ и граф G построенный, как описано раньше, но с помощью этих матриц). Рассмотрим k нулевых матриц $M_1, \dots, M_k$ размера $d \times (d+1)$. В элемент $(M_j)_{i1}$ запишем количество единиц в i-ом столбце матрицы A_j^T, а все последующие $(M_j)_{i1}$ элементов будут номерами строк, в которых стоят не нулевые элементы. Будем добавлять вершины к G' и производить поиск в глубину. Над каждой вершиной g из G' проведем следующую операцию: рассматриваем все ребра, выходящие из нее, они ведут в вершины $f_1 \dots, f_l$. Если $f_i \in G'$, ничего не делаем, если $f_i \notin G'$, то отмечаем f_i как помеченную, добавляем в G', повторяем эту процедуру для вершины f_i и т.д. Сложность вышеописанной операции, примененной к одной вершине, линейна по количеству ребер, выходящих из нее (за счет матриц $M_1, \dots, M_k$, нахождение ребер, ведущих из g линейно по их количеству и числу k). Если после завершения алгоритма $G' = G$, то имеет место сильная левая сходимость. Алгоритм затрачивает не более $2kd^2$ (составление матриц $M_1, \dots, M_k$) + kd^4 (поиск в глубину в графе G) операций. Алгоритм имеет сложность $kd^4(1 + \bar{o}(kd^4))$. Приведем соответствующий псевдокод.

$\mathcal{A}^T = \{A_1^T, \dots, A_k^T\}$
G' = диагональный подграф в $G(\mathcal{A}^T)$
$M_1, \dots, M_k \sim d \times (d+1)$

FOR $j = 1,\ j \leqslant k$:
    FOR $i = 1,\ i \leqslant d$:
        `column` $= (A_j^T)_{*i}$
        writeColumnNonzeroIndicesToRow$((M_j)_{i*}$, `column`$)$

ProcessVertex(g):

```
    FOR vertex f SUCH THAT g → f:
        if f ∉ G':
            insert f to G'
            ProcessVertex(f)

FOR g IN G':
    ProcessVertex(g)

return |G'| == |G|
```

Заключение

В работе получены следующие основные результаты:

- Доказан критерий разрешимости многомерных уравнений самоподобия в пространствах L_p и исследованы свойства решений;
- Получена теорема о структуре полугрупп ограниченных аффинных операторов в терминах их инвариантных норм и подпространств;
- Получена классификация самоаффинных тел в терминах их инвариантных сечений;
- Получено обобщение теории Перрона-Фробениуса на случай матричных полугрупп;
- Получен критерий разрешимости уравнений Митчелли-Праутша в пространстве L_p и полиномиальный алгоритм его проверки.

Дальнейшие исследования

Интерес представляют новые применения разработанного в работе аппарата изучения полугрупп аффинных и линейных операторов при помощи функциональных уравнений. Ведется исследование полугрупп линейных операторов с постоянным спектральным радиусом и их инвариантных множеств.

Развивая результаты о примитивных матричных полугруппах, предполагается найти новые связи с конечными автоматами. Также идет исследование мультивременных марковских цепей и k-примитивных семейств матриц.

В круге вопросов о самоаффинных телах особый интерес представляет задача о строении самоаффинных дробящихся многогранников. Интересно получить оценки на число их вершин и описать геометрическую структуру.

Список литературы

[1] Ю. А. Альпин, В. С. Альпина, “Комбинаторные свойства неприводимых полугрупп неотрицательных матриц”, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **405** (2012), 13–23.

[2] M. Barnsley, “Fractals everywhere”, *Boston Academic Press*, 1988.

[3] M. A. Berger and Y. Wang, “Bounded semigroups of matrices”, *Linear Algebra Appl.*, **166** (1992), 21–27.

[4] A. Berman, R. Plemmons, “Nonnegative matrices in the mathematical sciences”, *Classics Appl. Math.*, **9** (1994), 123–134.

[5] V. D. Blondel, R. M. Jungers, and A. Olshevsky, “On primitivity of sets of matrices”, *arXiv:1306.0729.*

[6] V. Blondel and J. Tsitsiklis, “Approximating the spectral radius of sets of matrices in the max-algebra is NP-hard”, *IEEE Trans. Autom. Control*, **45**:9 (2000), 1762–1765.

[7] C. A. Cabrelli C. Heil and U. M. Molter, “Self-similarity and multiwavelets in higher dimensions”, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **170**:807 (2004).

[8] Cavaretta D., Dahmen W., Micchelli C., “Stationary subdivision”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **93** (1991), 1–186.

[9] D. Collela and C. Heil, “Characterization of scaling functions: continuous solutions”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl*, **15**:2 (1994), 496–518.

[10] H.T. Croft K.J. Falconer R.K. Guy, “Unsolved problems in geometry”, *Problem Books in Mathematics. Unsolved Problems in Intuitive Mathematics, II. Springer-Verlag, New York*, 1991.

[11] I. Daubechies and J. Lagarias, “Two-scale difference equations. II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals”, *SIAM. J. Math. Anal*, **23**:4 (1992), 1031–1079.

[12] I. Daubechies J.C. Lagarias, “Corrigendum/addendeum: Sets of matrices all infinite products of which converge”, *Linear Algebra and its Applications*, **327** (2001), 69–83.

[13] G. A. Derfel N.Dyn and D.Levin, “Generalized refinement equations and subdivision processes”, *Journal of Approx.Theory*, **80** (1995), 272–297.

[14] G. Deslauriers and S. Dubuc, “Symmetric iterative interpolation processes”, *Constr. Approx.*, **5**:1 (1989), 49–68.

[15] N. Dyn and D. Levin, “Interpolatory subdivision schemes for the generation of curves and surfaces”, *Multivariate approximation and interpolation (Duisburg 1989) Birkhauser, Basel*, 1990, 91–106.

[16] G. Frobenius, “Über Matrizen aus nicht negativen Elementen”, *I. Sitzungsber, Kgl. Preuss Akad. Wiss*, 1912, 456–477.

[17] Furstenberg H., Kesten H., “Products of random matrices”, *Ann. Math. Stat.*, **31** (1960), 457–469.

[18] Furstenberg H., “Noncommuting random products”, *Transactions of American Mathematical Society*, **108** (1963), 377–428.

[19] G. Gripenberg, “Computing the joint spectral radius”, *Lin. Alg. Appl.*, **234** (1996), 43–60.

[20] B. M. Hambly J. Kigami and T. Kumagai, “Multifractal formalisms for the local spectral and walk dimensions”, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **132**:3 (2002), 555–571.

[21] D. J. Hartfiel, “Nonhomogeneous matrix products”, *World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge*, 2002.

[22] E. Hertel and C. Richter, “Self-afine convex polygons”, *J. Geom*, **98**:1—2 (2010), 79—89.

[23] J.E.Hutchinson, “Fractals and self similarity”, *Indiana Univ. Math. J.*, **30** (1981), 713–747.

[24] Р. Хорн Ч. Джонсон, “Матричный анализ”, *М.Наука*, 1989.

[25] R.Q. Jia, “Subdivision schemes in L_p spaces”, *Adv. Comput. Math.*, **3** (1995), 309–341.

[26] R.Q. Jia D.-X. Zhou, “Convergence of subdivision schemes associated with nonnegative masks”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **21**:2 (1999), 418-430.

[27] F. John, “Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions”, *Studies and Essays presented to R. Courant on his 60th Birthday*, 1948, 187–204.

[28] W.B. Johnson and J. Lindenstrauss, “Basic concepts in the geometry of Banach spaces”, *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, **1** (2001), 1–84.

[29] E. S. Key, “Lower bounds for the maximal Lyapunov exponent”, *J. Theoret. Probab.*, **3**:3 (1990), 477–488.

[30] H. Koch, “Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire”, *Archiv för Matemat., Astron. och Fys.*, **1** (1904), 681–702.

[31] K.-S. Lau and J. Wang, “Characterization of L_p-solutions for two-scale dilation equations”, *SIAM. J. Math. Anal.*, **26**:4 (1995), 1018–1046.

[32] C.A.Micchelli H.Prautzsch, “Uniform refinement of curves”, *Linear Algebra and its Applications*, **114/115** (1989), 841–870.

[33] И.Я.Новиков В.Ю.Протасов М.А.Скопина, “Теория всплесков”, *М.:Физматлит*, 2006.

[34] M. Omladič and H. Radjavi, “Irreducible semigroups with multiplicative spectral radius”, *Linear Alg. Appl.*, **251** (1997), 59–72.

[35] И.Г.Петровский, “Лекции об уравнениях с частными производными”, *М.: Наука*, 1961.

[36] V. Yu. Protasov, “The generalized spectral radius. A geometric approach”, *Izvestiya Math.*, **61**:5 (1997), 995–1030.

[37] V.Yu.Protasov, “Refinement equations with nonnegative coefficients”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **6**:6 (2000), 55–77.

[38] V. Yu. Protasov, “Fractal curves and wavelets”, *Izvestiya Math.*, **70**:5 (2006), 123–162.

[39] V.Yu. Protasov, “Extremal L_p-norms of linear operators and self-similar functions”, *Linear Algebra and its Applications*, **428** (2008), 2339–2356.

[40] V.Yu.Protasov, “Invariant functions for random matrices”, *Funct. Anal. Appl.*, **44**:3 (2010), 230–233.

[41] В. Ю. Протасов, “Совместный спектральный радиус и инвариантные множества линейных операторов”, *Фундамент. и прикл. матем*, **2**:1 (1996), 205–231.

[42] В.Ю. Протасов, “О гладкости кривых де Рама”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:3 (2004), 139–180.

[43] В.Ю.Протасов, “Полуруппы неотрицательных матриц”, *УМН*, **65**:6 (2010).

[44] V.Protasov, A.Voynov, “Matrix semigroups with constant spectral radius”, *arXiv:1407.6568.*

[45] G. De Rham, “Sur une courbe plane”, *J. Math. Pures Appl*, **35**:9 (1956), 25—42.

[46] C. Richter, "Self-affine convex disc are polygons", *Contributions to Algebra and Geometry*, **53**:1 (2012), 219–224.

[47] V. Romanovsky, "Un théorème sur les zéros des matrices non négatives", *Bull. Soc. Math. France*, **61** (1933), 213–219.

[48] G.C.Rota and G.Strang, "A note on the joint spectral radius", *Kon. Nederl. Acad. Wet. Proc.*, **63** (1960), 379–381.

[49] E. Seneta, *Non-negative matrices and Markov chains*, Wiley, New York, 1973.

[50] M. Solomyak and E. Verbitsky, "On a spectral problem related to self-similar measures", *Bull. London Math. Society*, **27** (1995), 242–248.

[51] H. Schneider, "The concepts of irreducibility and full indecomposability of a matrix in the works of Frobenius, König and Markov", *Linear Alg. Appl.*, **18** (1977), 139–162.

[52] М. Бен Слиман, "Термодинамический формализм для функции де Рама: метод приращений", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:3 (2012), 3–18.

[53] J. Tolke J.M. Wills (eds.), "Contributions to geometry. Proceedings of the Geometry Symposium held in Siegen, June 28 to July 1, 1978", *Birkhauser Verlag Basel*, 1979.

[54] A.N.Trahtman, "Modifying the upper bound on the length of minimal synchronizing word", *Fundam.Comput.Theory*, **6914** (2011), 173–180.

[55] L.Villemoes, "Wavelet analysis of refinement equations", *SIAM J. Math. Anal.*, **25**:5 (1994), 1433–1460.

[56] Y. Wang, "Two-scale dilation equations and the mean spectral radius", *Random Comput. Dynam.*, **4**:1 (1996), 49–72.

[57] J. C. Watkins, "Limit theorems for products of random matrices: a comparison of two points of view", *Contemp. Math., Amer. Math. Soc.*, **50**:Random matrices and their applications, Brunswick, Maine, 1984 (1986), 5–29.

[58] J. Wolfowitz, "Products of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 733–737.

[59] D.-X. Zhou, "Self-Similar Lattice Tilings and Subdivision Schemes", *SIAM J. Math. Anal.*, **33**:1 (2001), 1–15.

[60] И.А. Шейпак, "О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах $L_p[01]$", *Матем. заметки*, **81**:6 (2007), 924–938.

Статьи автора по теме диссертации

В рецензируемых журналах:

[61] А.С. Войнов, "Самоаффинные многогранники. Приложения к функциональным уравнениям и теории матриц", *Мат. Сборник*, **202**:10 (2011), 3–30.

[62] А.С. Войнов, "К вопросу о структуре самоаффинных выпуклых тел", *Мат. Сборник*, **204**:8 (2013), 41–50.

[63] A. Voynov, "A counterexample to Valette's conjecture", *Tr. Mat. Inst. Steklova*, **275** (2011), 301—303.

[64] A. S. Voynov, "Shortest positive products of nonnegative matrices", *Linear Alg. Appl.*, **439**:6 (2013), 1627–1634.

[65] V. Yu. Protasov and A. S. Voynov, "Sets of nonnegative matrices without positive products", *Linear Alg. Appl.*, **437**:3 (2012), 749–765.

[66] А.С.Войнов, В.Ю.Протасов, "Компактные несжимающие полугруппы аффинных операторов", *Мат. Сборник*, **206**:7 (2015), 33–54.

В тезисах конференций:

[67] A. Voynov, "Self-affine polyhedra and p-radius of linear operators", *Delone 120 Conference: Geometry, Topology, Algebra and Number Theory, Applications*, 2010, 78–79.

[68] А. Войнов, "Уравнения самоподобия и самоаффинные фракталы", *Международная конференция "Теория приближения" посв. 90-летию С.Б.Стечкина*, 2010, 17–18.

[69] A.Voynov, "Strictly positive products of nonnegative matrices", *17th Conference of the International Linear Algebra society*, 2011, 139.

[70] A. Voynov, "Multivariate self-similarity equations", *International Conference "Wavelets and Applications"*, 2012, 99–101.

[71] A. Voynov, "Scrambling sets of column-stochastic matrices", *The 2012 Haifa Matrix Theory Conference*, 2012, 36.

[72] A. Voynov, "Multivariate refinement equations and subdivisions in L_p-spaces", *International Conference "Wavelets and Applications"*, 2015, 102.

[73] A. Voynov, "Invariant polyhedra of linear operators and the Černy conjecture", *4th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications*, 2015, 22.

[74] A. Voynov, "Self-affine convex bodies and bounded semigroups of affine operators", *The Fifth German-Russian Week of the Young Researcher on Discrete Geometry*, 2015, 55–56.