"УТВЕРЖДАЮ"
Заместитель директора Федерального государственного
бюджетного учреждения науки
"Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук"
чл.-корр. РАН Д.В. Трещев
6 октября 2016 года

Отзыв ведущей организации–
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
"Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук"
на диссертацию Войнова Андрея Сергеевича
"Многомерные уравнения самоподобия и приложения",
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук
по специальности 01.01.01–
вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена исследованию функциональных уравнений самоподобия и возникающим при их изучении задачам выпуклой геометрии, теории Перрона–Фробениуса и смежным вопросам. Самоподобные функции нашли применение в различных задачах математики, в том числе в теории всплесков, масштабирующих уравнениях, уточняющих алгоритмах, комбинаторной теории чисел, теории вероятностей. Их изучали Добеши, Лагариас, Митчелли, Протасов, Лау, Вонг, Каварета, Дамен, Шейпак, Дин, Левин, Хейль и многие другие математики.

В основном ранее рассматривались уравнения самоподобия для функций одной переменной. В данной диссертации автор разрабатывает теорию уравнений самоподобия для функций многих переменных. При этом возникают специальные самоаффинные тела.

Самоаффинной парой называется пара $(K, \mathcal{A})$, состоящая из выпуклого тела K в пространстве $\mathbb{R}^d$ и семейства $\mathcal{A}$ невырожденных аффинных операторов $A_1, \ldots, A_k$, задающих его разбиение: тело K совпадает с объединением своих образов $\bigcup_{i=1}^{k} A_i K$ и эти образы, элементы разбиения, не имеют общих внутренних точек и могут пересекаться только по своим границам. При этом K называется самоаффинным телом.

Фиксируем семейство аффинных операторов $\{B_1, \ldots, B_k\}$, действующих в пространстве $\mathbb{R}^n$. Уравнение самоподобия для функции $f : K \to \mathbb{R}^n$ задается системой

$$f(t) = B_i f(A_i^{-1}t), \quad t \in A_i K, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{1}$$

В первой главе получен критерий существования решения уравнения (1) в классе функций $f \in L_p(K, \mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, а при $p = \infty$ указаны близкие друг другу необходимые и достаточные условия. Для формулировки критерия использовано понятие p- радиуса семейства операторов.

Вторая глава посвящена исследованию компактных полугрупп аффинных операторов. Пусть задано некоторое семейство $\mathcal{B}$ аффинных операторов $B_1, \ldots, B_k$, действующих в пространстве $\mathbb{R}^d$. Это семейство мы будем называть ограниченным, если под действием полугруппы, порожденной им, орбита любой точки пространства ограничена. Если в ограниченной полугруппе существует оператор с нормой строго меньшей 1, мы будем называть ее сжимающей. Основной результат второй главы– следующая теорема, использованная в последующих главах.

Теорема 1 *Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$– выпуклое тело, $\mathcal{B}$– ограниченное семейство аффинных операторов в $\mathbb{R}^d$ такое, что $BG \subset G$, $B \in \mathcal{B}$. Тогда либо семейство $\mathcal{B}$ сжимающее, либо операторы из $\mathcal{B}$ имеют общее инвариантное аффинное подпространство, пересекающее G, в ограничении на которое $\mathcal{B}$ является сжимающим.*

Глава 3 посвящена изучению самоаффинных выпуклых тел. До работ диссертанта имелась гипотеза Валетта о строении самоаффинных тел: такое тело является либо многогранником, либо образом прямой суммы самоаффинного многогранника на некоторое выпуклое тело. В третьей главе построены контрпримеры к этой гипотезе. В то же время показано, что самоаффинное тело является многогранником, если самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ является дробящейся, то есть, итерируя ее разбиение, можно получить элемент разбиения сколь угодно малого диаметра.

В четвертой главе приводится обобщение теоремы Перрона–Фробениуса на полугруппы неотрицательных матриц, а также приводится эффективный алгоритм разрешимости уравнения (1) в пространстве $L_p(K, \mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, для уравнений определенного вида, встречающихся в теории приближений. Напомним, что $n \times n$ матрица с неотрицательными коэффициентами называется стохастической, если сумма ее элементов во всяком столбце равна 1. Все стохастические матрицы обладают инвариантной гиперплоскостью $L = \{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$. Семейству $\mathcal{B}$ стохастических по столбцам матриц сопоставляется соответствующее семейство $\mathcal{B}|_{\mathcal{L}}$ аффинных операторов, действующих в L. Для проверки разрешимости уравнения (1) в пространстве $L_p(K, \mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, для такого семейства аффинных операторов построен полиномиальный алгоритм.

Некоторые задачи, рассмотренные диссертантом, не имели аналогов, и ему пришлось проявить изобретательность как при создании понятий, с использованием которых эти задачи могли быть решены, так и при разработке техники для решения задач. Таким образом, А.С. Войнов разработал теорию уравнений самоподобия для функций многих переменных. При этом предложенные им новые понятия выглядят естественно, и можно ожидать, что они будут востребованы при дальнейшем развитии теории.

Все результаты приводятся с четкими доказательствами. Работа ясно изложена.

Результаты диссертации представлены в 14 публикациях автора, из них шесть являются статьями в рецензируемых журналах.

Результаты и методы диссертации могут найти применение в теории функций и приближений, теории чисел, теории вероятностей, комбинаторике. Они могут быть использованы в Московском государственном университете, Московском физико–техническом институте, Санкт–Петербургском государственном университете, Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ.

К недостаткам диссертации следует отнести значительное количество неточностей и опечаток. Так, на странице 29 в строке 8 снизу имеется опечатка в слове "через". На странице 30 в строке 14 снизу вместо $A_{t,n}$ должно быть $A_{t,m}$. На странице 33 в (1.4.1) вместо B_0 и B_1 должно быть, соответственно, B_1 и B_2. В доказательстве предложения 1.4.2 имеется несостыковка: написано: "если решение существует, то... уравнение имеет ... решение". Фраза, начинающаяся в строке 13 на странице 38, неправильно построена. На той же странице во фразе, начинающейся в строке 10 снизу, указывается свойство, выполненное "после перехода к некоторому базису при том, что оно от выбора базиса не зависит. На странице 40 в строке 2 снизу вместо *cnmb* должно быть *cmnb*. На странице 45 в лемме III.1.1 речь идет об операторе, а в следующей за формулировкой фразой почему-то говорится о семействе.

Эти недостатки не влияют на оценку в целом представленной работы, которая удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор Андрей Сергеевич Войнов заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.01– вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв подготовлен заведующим отделом теории чисел членом–корреспондентом РАН С.В. Конягиным, обсужден и утвержден на заседании отдела теории функций ФГБУН "Математический институт имени В.А. Стеклова РАН"6 октября 2016 года, протокол № 1 . Результаты голосования:
"за": 6
"против": 0
"воздержались": 0

Заведующий отделом теории чисел
ФГБУН "Математический институт имени В.А. Стеклова РАН"
член-корреспондент РАН С.В. Конягин

Заведующий отделом теории функций
ФГБУН "Математический институт имени В.А. Стеклова РАН"
член-корреспондент РАН О.В. Бесов