

Отзыв научного руководителя

на диссертацию Войнова Андрея Сергеевича “Многомерные уравнения самоподобия и приложения”

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01

– “вещественный, комплексный и функциональный анализ”.

Диссертация А.С.Войнова охватывает широкий класс задач из различных областей математики. Главным объектом исследования являются функциональные разностные уравнения с линейным сжатием аргумента. В диссертационной работе построена единая теория таких уравнений, и ее результаты применены к задачам теории приближений, выпуклой геометрии, теории матриц и комбинаторики. В диссертации улучшен ряд известных результатов и решены несколько открытых проблем.

Аффинные функциональные разностные уравнения со сжатием аргумента, или, в более короткой терминологии, уравнения самоподобия, начали активно изучаться в середине XX века с классических работ Г.деРама. Затем эти уравнения нашли применения в математической физике (работы Г.Дерфеля и Р.Шиллинга), в теории вероятностей (Я.Вонг, Р.Капица, Я.Моравец), при построении фрактальных кривых и поверхностей (М.Барнсли, Ч.Миччелли, А.Каваретта), теории приближений, алгоритмах аппроксимации и интерполяции функций (Н.Дин, А.Рон, К.Де Бур, Т.Сауер, А.Левин, К.Еттер, П.Освальд, и др.), при построении систем всплесков с компактным носителем (И.Добеша, Д.Лагариас, К.Хейль, Г.Стрэнг, и др.) Данного типа уравнения одной переменной известны своими замечательными свойствами. Например, их L_p -решение, если существует, всегда единственно, устойчиво в L_p , и может быть приближенно найдено сходящимся итерационным методом. Это решение либо полиномиально, либо обладает фрактальными свойствами (самоподобие, переменная локальная гладкость, и т.д.) Более того, показатель Липшица-Гёльдера решения может быть выражен с помощью L_p -спектрального радиуса матриц линейных операторов. Обобщение этих результатов на функции многих переменных является нетривиальной задачей. В диссертационной работе эта задача решается до конца, что позволило завершить построение общей теории уравнений самоподобия. Кроме того, рассматривается важный частный случай, когда все операторы уравнения даны стохастическими по столбцам матрицами (уравнения Миччелли-Праутша). В этом случае приводится простой критерий разрешимости уравнения в пространстве L_p .

Далее автор рассматривает приложения, первое из которых относится к выпуклой геометрии. Случай, когда решение уравнения самоподобия является индикаторной функцией некоторого выпуклого множества, приводит к понятию самоаффинного выпуклого тела, т.е., множества, которое может быть разбито на конечное число частей,

аффинно подобных исходному. В диссертации устанавливается ряд характеристических свойств таких тел и приводится их полная классификация в трехмерном пространстве. Для размерности больше трех, строится пример, опровергающий гипотезу Валлета о структуре таких тел. Далее изучаются сжимающие семейства линейных операторов и инвариантные тела таких семейств. Случай, когда инвариантное тело является симплексом, оказывается тесно связанным с теорией матриц. С его помощью в диссертационной работе обобщается ряд классических результатов теории Перрона-Фробениуса на полугруппы неотрицательных матриц. В частности, вводится и исследуется понятие примитивности полугруппы неотрицательных матриц, приводится критерий примитивности и разрабатывается алгоритм, позволяющий распознать примитивность за полиномиальное время.

Структура диссертационной работы достаточно хорошо продумана и организована.

Во **введении** даны необходимые определения, приведены и прокомментированы основные результаты, исследована история вопроса и приведены необходимые библиографические данные.

В **первой главе** исследуются уравнения самоподобия многих переменных. Доказываются основные теоремы о существовании, единственности и устойчивости решений, а также доказываются главные результаты об уравнениях Мичелли-Праутша.

Во **второй главе** изучаются ограниченные полугруппы аффинных операторов. Доказывается, что такая полугруппа либо является сжимающей, т.е., содержит элементы сколь угодно маленькой нормы, либо имеет общее инвариантное подпространство. Получены следствия для L_p -спектрального радиуса таких семейств.

В **третьей главе** изучаются самоаффинные выпуклые тела. Доказываются основные структурные теоремы о таких телах, приводится полная классификация в ряде случаев и результаты применяются для исследования уравнений самоподобия.

В **четвертой главе** результаты об ограниченных полугруппах операторов применяются к исследованию полугрупп неотрицательных матриц. Доказываются основные теоремы, обобщающие теорию Перрона-Фробениуса на полугруппы матриц. В частности, выводится критерий примитивности полугруппы и строится алгоритм для полиномиального распознавания таких полугрупп.

Результаты диссертации А.С.Войнова имеют высокий математический уровень. Они опубликованы в 14 работах автора, из которых шесть вышли в российских журналах, включенных в перечень ВАК, и в высокорейтинговых иностранных журналах (две – в соавторстве с научным руководителем). Результаты докладывались на международных конференциях в Москве, Санкт-Петербурге, Сколково, Германии, Израиле, и др., на семинарах в МГУ, МФТИ, МИАН им. В.А.Стеклова, ИПИМ им. А.А.Харкевича. Результаты и разработанные методы могут быть применены к задачам теории функций, теории всплесков, выпуклой геометрии, теории алгоритмов, теории матриц, комбинаторики. Они представляют интерес для специалистов из МГУ имени М.В.Ломоносова, МИАН им. Стеклова, СПбГУ, и т.д. Автореферат соответствует содержанию диссертации. Построенная теория и полученные результаты достаточны для защиты кандидатской дис-

сертации. Диссертационная работа отвечает всем критериям раздела II Положения о присуждении ученых степеней, установленным для кандидатских диссертаций, а её автор Войнов Андрей Сергеевич заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук,
профессор РАН,
профессор кафедры общих проблем управления
механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова



17.05.2016

В.Ю. Протасов

Личную подпись В.Ю.Протасова заверяю

И.о. декана механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук, профессор



В.Н. Чубариков