ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию

Войнова Андрея Сергеевича

на тему "Многомерные уравнения самоподобия и приложения"

по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Актуальность избранной темы

Уравнения самоподобия встречаются в таких областях, как выпуклая геометрия, теория Перрона-Фробениуса, теория фрактальных кривых, теория всплесков, комбинаторная теория чисел, теория вероятностей и др. Исследованиям различных типов уравнений самоподобия посвящены работы многих авторов, в том числе Дахмена, Добеши, Каваретты, Лагариаса, Мичелли и В.Ю. Протасова (основные публикакации этих авторов об уравнениях самоподобия приведены в списке литературы диссертации).

Пусть $(K, \mathcal{A})$– самоаффинная пара, состоящая из выпуклого тела K в пространстве $\mathbb{R}^d$ и семейства невырожденных аффинных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$, задающих его разбиение: тело K совпадает с объединением $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i K$, причем элементы этого объединения (образы тела K при отображениях A_i) не имеют общих внутренних точек и могут пересекаться только по своим границам. Предположим, что кроме пары $(K, \mathcal{A})$ задано семейство операторов $B_1, \dots, B_k$, действующих в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда *уравнение самоподобия* задается системой:

$$f(t) = B_i f(A_i^{-1}(t)), \quad t \in A_i K, \quad i = 1, \dots, k. \tag{1}$$

Функция $f : K \to \mathbb{R}^n$ обладает свойством самоподобия, если она удовлетворяет уравнению (1) (для функций f из L^p равенство в (1) понимается почти всюду по мере Лебега). Диссертация посвящена уравнениям самоподобия вида (1) и некоторым их приложениям.

В одномерном случае в качестве тела K берется отрезок $[0,1]$, а функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ обладает свойством самоподобия, если существуют аффинные отображения $B_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, k$, такие, что для некоторого разбиения $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ отрезка $[0,1]$ выполнены равенства

$$f([t_{i-1}, t_i]) = B_i(f([0,1])), \quad i = 1, \dots, k. \tag{2}$$

Самоподобная функция f обладает фрактальным свойством: $f([0,1]) = \bigcup_{i=1}^{k} B_i(f([0,1]))$. Равенства (2) означают, что функция f является решением уравнения самоподобия

$$f(t) = B_i f(A_i^{-1}(t)), \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \dots, k, \tag{3}$$

где A_i– одномерный аффинный оператор, переводящий единичный отрезок в i-й частичный отрезок $[t_{i-1}, t_i]$.

Одним из объектов, обсуждаемых в диссертации, является кривая де Рама. Как известно, эта кривая имеет параметр $\omega \in (0, 1/2)$ и получается в пределе из ломаной с данными вершинами последовательным срезанием ее углов так, что на каждом шаге стороны ломаной делятся на три части в отношении $\omega : (1-2\omega) : \omega$. В этом случае $n = k = 2$, частичными отрезками являются отрезки $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$, и операторы B_0, B_1 в уравнении (3) имеют следующие линейные части

$$\widetilde{B}_0 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \omega & 1-2\omega \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 1-2\omega & \omega \\ 0 & \omega \end{pmatrix}.$$

При $\omega = 1/4$ кривая де Рама является параболой, а при остальных значений ω эта кривая не только не является гладкой, но даже не будет кусочно-дифференцируемой. В.Ю. Протасовым (2004) найдены точные показатели гладкости кривой де Рама для каждого значения параметра ω и охарактеризованы множества точек кривой с данной локальной гладкостью, в частности, множества точек максимальной и минимальной гладкости.

Многомерные уравнения самоподобия встречались в работах Ниры Дин, Мичелли, Молтера, Праутша, Хейла и др. в связи с уточняющими уравнениями функций многих переменных, при построении многомерных всплесков и в других областях. Например, в работе Мичелли-Праутша (1989) рассматривалось следующее уравнение на вектор-функцию, определенную на единичном кубе $[0, 1]^d$:

$$f(x) = B_i f(A_i^{-1}x), \quad i - \text{номер ближайшей к } x \text{ вершины куба,}$$

где $A_1, \ldots, A_{2^d}$– аффинные операторы, сжимающие единичный куб в два раза к одной из его вершин, а $B_1, \ldots, B_{2^d}$– некоторые операторы в $\mathbb{R}^n$.

В диссертационной работе А. С. Войнова изучается вопрос об обобщении уравнений самоподобия на максимально широкий класс множеств и решаются задачи о разрешимости и применениях таких уравнений в теории всплесков, выпуклой геометрии и в других областях. Актуальность избранной темы не вызывает сомнений.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Все утверждения и теоремы, научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, а также полученные автором формулы и неравенства, полностью обоснованы.

Достоверность и новизна, полученных результатов

Автором изучен вопрос о структуре самоаффинных пар $(K, \mathcal{A})$, порождающих самоаффинные уравнения вида (1), доказано обобщение на многомерный случай теоремы В.Ю. Протасова (2008) о существовании решений самоподобных уравнений, исследованы компактные полугруппы аффинных операторов, изучены соответствующие самоаффинные выпуклые тела и дано обобщение теории Перрона-Фробениуса на полугруппы неотрицательных матриц. Полученные в диссертации результаты достоверны, являются новыми и существенно дополняют исследования Мичелли (Micchelli), Праутша (Prautzch), В.Ю. Протасова и др. авторов.

Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов

Основные результаты диссертации имеют существенное значение для развития современной теории функций и функционального анализа и могут быть использованы специалистами, работающими в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, в Московском, Санкт-Петербургском, Воронежском, Новосибирском и других институтах и университетах.

Оценка содержания диссертации, её завершенность

Во введении приведены применяемые обозначения, формулируются общие постановки задач, обосновывается актуальность темы диссертации и излагаются основные полученные автором результаты.

Глава I начинается с анализа структуры самоаффинной пары $(K, \mathcal{A})$. На основе конструкций топологических марковских цепей построен изоморфизм между пространством $L_p([0,1], \mathbb{R}^n)$ и пространством $L_p(K, \mathbb{R}^d)$, $K \subset \mathbb{R}^d$, сохраняющий самоаффинную структуру. Для данного семейства операторов $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ через $\mathcal{B}_p$ обозначается множество, состоящее из линейных частей операторов $(k|\det A_1|^{1/p}B_1, \ldots, (k|\det A_k|^{1/p}B_k$, а через $\rho_p(\mathcal{B}_p)$ обозначается p-радиус семейства $\mathcal{B}_p$. В предположении, что семейство $\mathcal{B}$ неприводимо, теорема I.1 утверждает, что уравнение (1) имеет решение $f \in L_1(K, \mathbb{R}^d)$ тогда и только тогда, когда $\rho_1(\mathcal{B}_1) < 1$ и это решение единственно. Более того, если при некотором $p \in [1, +\infty]$ имеет место неравенство $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$, то $f \in L_p$. Для $p < \infty$ верно и обратное: если $f \in L_p$, то $\rho_p < 1$. Если же $f \in L_\infty$, то $\rho_\infty \leq 1$. Отмечается, что в этой теореме неприводимость не является существенным условием. Показано, что данное В.Ю. Протасовым доказательство для одномерного случая не может быть непосредственно перенесено на многомерный случай.

В главе II изучаются полугруппы аффинных операторов, на элементы которых накладываются ограничения сверху и снизу в некоторой норме. Пусть задано некоторое семейство $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ операторов, действующих в $\mathbb{R}^n$. Это семейство называется ограниченным, если под действием полугруппы, порожденной им, орбита любой точки пространства $\mathbb{R}^n$ ограничена. Семейство, задающее самоаффинное разбиение тела, является ограниченным. Доказано, что ограниченность равносильна существованию инвариантного тела (тело $G \subset \mathbb{R}^n$ инвариантно относительно $\mathcal{B}$, если для всякого оператора $B \in \mathcal{B}$ имеет место включение $BG \subset G$). Кроме того, в некоторой норме линейные части операторов ограниченной полугруппы по норме не превосходят 1. Если в ограниченной полугруппе существует оператор с нормой строго меньшей 1, то ее называют сжимающей. Автором доказано, что сжимаемость ограниченного семейства $\mathcal{B}$ равносильна условию $\rho_p(\mathcal{B}_p) < 1$ для всякого конечного $p > 1$. По определению, самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ не является дробящейся, если найдется такое положительное δ, что при любом натуральном m элементы разбиения самоаффинной пары $(K, \mathcal{A}^m)$ имеют диаметр, превосходящий δ. Оказывается, условие того, что самоаффинная пара $(K,\mathcal{A})$ является дробящейся равносильно тому, что семейство $\mathcal{A}$ является сжимающим. Основной результат второй главы заключается в том, что ограниченная несжимающая полугруппа обязана обладать общим инвариантным аффинным пространством всех операторов (см. теорему II.1). Найденное автором доказательство этого чисто геометрического утверждения является аналитическим. Результаты второй главы применяются для исследования геометрии самоаффинных пар и для изучения комбинаторного строения полугрупп неотрицательных матриц.

Первые две теоремы третьей главы (теоремы III.1 и III.2) устанавливают основные свойства дробящихся самоаффинных пар. Например, по теореме III.2, если $(K,\mathcal{A})$ и $(G,\mathcal{A})$– две самоаффинные дробящиеся пары с одним и тем же семейством операторов, то $K = G$. Доказана также следующая теорема об общем виде недробящихся самоаффинных пар:

Теорема III.3. *Для недробящейся самоаффинной пары $(K,\mathcal{A})$ в $\mathbb{R}^d$ операторы семейства $\mathcal{A}$ обладают общим инвариантным аффинным подпространством V, отличным от точки и пересекающим внутренность K, причем семейство $\mathcal{A}|_V$ сжимающее. Все такие подпространства имеют одинаковую размерность, параллельны, и каждое из них пересекает K по многограннику. Существует базис, в котором матрицы операторов $\widetilde{A}_i$ имеют вид*

$$\widetilde{A}_i = \begin{pmatrix} C_i & D_i \\ 0 & U_i \end{pmatrix}, \quad i = 1,\dots,k, \tag{4}$$

где C_i–матрица линейной части ограничения оператора A_i на V, а U_i– ортогональная матрица. Обратно, если в некотором базисе матрицы линейных частрей операторов A_i имеют вид (4) с ортогональными матрицами U_i, то самоаффинная пара $(K,\mathcal{A})$ не дробящаяся.

Таким образом, любое недробящееся самоаффинное тело обладает инвариантным относительно своих операторов разбиения сечением, которое является дробящимся самоаффинным многогранником. Кроме того, после факторизации по подпространству этого сечения, все операторы разбиения в некотором базисе оказываются ортогональными. Теорема III.3 используется автором в доказательстве критерия разрешимости уравнений самоподобия для недробящихся пар. Дана полная классификация самоаффинных пар в $\mathbb{R}^d$ для случаев $\dim V = 1$ и $\dim V = d-1$. Показано, что любая дробящаяся самоаффинная пара $(K,\mathcal{A})$ задает замощение пространства $\mathbb{R}^d$ аффинными образами тела K.

Семейство неотрицательных матриц $\mathcal{A}$ называется *примитивным*, если порожденная его элементами мультипликативная полугруппа $S_{\mathcal{A}}$ содержит положительную матрицу (в этом случае существует конечное произведение матриц семейства $\mathcal{A}$, возможно, с повторениями, являющееся положительной матрицей). Неотрицательная матрица называется *стохастической* (по столбцам), если сумма всех ее элементов в произвольном столбце равна единице. Понятие примитивности тесно связано со сжимаемостью и, например, для стохастических матриц при общих предположениях ей равносильна. С использованием теоремы II.1 в диссертации получено естественное и короткое доказательство теоремы IV.1, выражающей критерий примитивности матричной полугруппы. Теория Перрона-Фробениуса устанавливает основные факты, связывающие примитивность матриц с их собственными значениями и комбинаторной структурой. В диссертации дано обобщение теории Перрона-Фробениуса на случай полугрупп неотрицательных матриц.

Пусть $\mathcal{A}$– произвольное компактное семейство неотрицательных $d \times d$-матриц. Оно называется *положительно приводимым*, если найдется собственное непустое подмножество Ω' множества $\Omega = \{1, \dots, d\}$ для которого при любом $i \in \Omega'$ носитель i-го столбца каждой матрицы $A \in \mathcal{A}$ лежит в Ω'. В теореме IV.1 в предположении что семейство $\mathcal{A}$ a) положительно неприводимо и b) матрицы семейства $\mathcal{A}$ не имеют нулевых строк и нулевых столбцов, дано необходимое и достаточное условие для того, чтобы семейство $\mathcal{A}$ не являлось примитивным (требуется существование хотя бы одного разбиения множества Ω, на котором все матрицы семейства $\mathcal{A}$ действуют как перестановки). В заключительном параграфе диссертации приведены два полиномиальных алгоритма проверки, является ли семейство стохастических матриц сжимаемым в ограничении на их инвариантный симплекс и является ли примитивным семейство матриц, удовлетворяющее условиям теоремы IV.1.

Диссертация А.С. Войнова является самостоятельной, завершенной научной квалификационной работой.

Достоинства и недостатки в содержании и оформлении диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования

Достоинствами диссертации являются не только приведенные выше результаты автора о самоподобных функциях, но и ряд решенных задач выпуклой геометрии и теории матриц. Главным результатом диссертации является теорема I.1, для доказательства которой в главах II и III проведен детальный анализ структуры самоаффинных тел и геометрических свойств различных полугрупп аффинных операторов. Глубина проведенного автором исследования подтверждается, в частности, следующими замечаниями.

1. Наиболее сложная часть доказательства теоремы I.1 относится к случаю недробящихся самоаффинных пар. Для этого случая потребовалось получить нетривиальные результаты геометрического характера о дробящихся сечениях самоаффинных тел.

2. Дано описание структуры ограниченных полугрупп аффинных операторов, показано, что либо все операторы полугруппы обладают общим инвариантным подпространством, либо почти все произведения операторов, порождающих полугруппу, асимптотически стремятся по норме к нулю.

3. Показано, что вопрос о разрешимости уравнений самоподобия, который рассматривали Мичелли и Праутш (1989) для непрерывных функций, в классе суммируемых функций оказывается значительно более удобным для изучения и построен быстрый полиномиальный алгоритм проверки существования решения. С помощью теоремы I.1

показано, что уже в двумерном случае имеются уравнения самоподобия (пример 3 во введении), для которых не существует непрерывных решений, но существуют суммируемые решения.

4. Приведены контрпримеры к следующей гипотезе Валлета (1978): любое самоаффинное тело либо является многогранником, либо аффинным образом прямой суммы самоаффинного многогранника на некоторое выпуклое тело. А именно, в дополнение к результату Рихтера (2012), подтвердившему эту гипотезу для двумерного случая, показано, что начиная с трехмерного случая гипотеза Валлета неверна. Вместе с тем по теореме III.1, если самоаффинная пара $(K, \mathcal{A})$ дробящаяся, то $K-$ многогранник.

Автор диссертации владеет современными методами функционального анализа, выпуклой геометрии и методами теории матриц.

В целом автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо, однако в них имеется несколько пробелов и неточностей. Вот некоторые из них:

1. Во введении отмечается, что вопрос о структуре самоаффинных дробящихся многогранников, по-видимому, крайне сложен. Было бы полезно указать, какие конкретно трудности возникают при попытках ответа на этот вопрос.

2. На мой взгляд, в формулировке теоремы IV.1 лучше было бы оставить основное утверждение о существовании хотя бы одного разбиения, на котором все матрицы данного семейства действуют как перестановки, а менее существенную часть о каноническом разбиении (доказательство которой отсутствует) оформить в виде замечания к теореме.

3. Не проведено тестирование построенных в главе IV алгоритмов проверки примитивности семейства неотрицательных матриц.

4. Имеется незначительное количество грамматических и стилистических ошибок.

Отмеченные недостатки легко устранимы и не снижают общую высокую оценку работы.

Автореферат соответствует требованиям ВАК Министерства образования и науки РФ, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы. Оформление структурных элементов диссертации и автореферата соответствует требованиям ГОСТ.

Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным «Положением о присуждении ученых степеней» по пунктам 10, 11 и 14

Основные результаты получены автором лично и обладают внутренним единством. Результаты, выдвигаемые для публичной защиты, свидетельствуют о личном вкладе автора в развитие методов функционального анализа и могут быть использованы специалистами по теории функций и её применениям. Все утверждения и теоремы полностью обоснованы. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 научных статьях (6 в рецензируемых журналах, 8 в трудах конференций), докладывались на научных семинарах в МГУ по теории приближений и экстремальным задачам (2009), по теории функций (2010), по геометрической теории оптимального управления (2012), кафедры высшей алгебры (2012), а также на семинаре по дискретной математике в ВЦ РАН (2012), межкафедральном семинаре МФТИ по дискретной математике (2013), на семинаре по дискретной и вычислительной геометрии ИППИ РАН (2015) и на 13 международных научных конференциях. Ссылки на авторов и на использованные в диссертации источники имеются.

Диссертация Войнова Андрея Сергеевича на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории функций и ее применений, что соответствует требованиям п. 9 Положения о присуждении ученых степеней, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Фарков Юрий Анатольевич,
доктор физико-математических наук,
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.
117437, Российская Федерация, г. Москва,
ул. Академика Волгина, д. 14, корп. 2, кв. 114.
Тел.: +7 903 108 87 79
E-mail: farkov@list.ru
ФГБОУ ВО "Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ",
Профессор кафедры прикладных информационных технологий

Ю. А. Фарков

01.08.2016

З А В Е Р Я Ю
УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАРОДНОГО
ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ
СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РФ
К.Э.Н К.К. БОНДАРЕВ