Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.547.22

Мышаков Федор Сергеевич

Развитие теоремы Валирона—Гольдберга

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

Попов Антон Юрьевич

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник
кафедры математического анализа
механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова;

Официальные оппоненты:

Хабибуллин Булат Нурмиевич,

доктор физико-математических наук, профессор
заведующий кафедры высшей алгебры и геометрии
факультета математики и информационных технологий
Башкирского государственного университета;

Шерстюков Владимир Борисович,

кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры высшей математики математического факультета
Национального исследовательского ядерного университета МИФИ;

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится 21 октября 2016 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математического факультет, аудитория 16-24.
С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета: http://mech.math.msu.su

Автореферат разослан « » сентября 2016 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
Д 501.001.85 на базе МГУ им. М.В. Ломоносова
доктор физико-математических наук,
профессор **Власов Виктор Валентинович**

Общая характеристика работы

Актуальность

Одним из основных направлений теории целых функций является изучение связи между скоростью роста максимума модуля целой функции и считающей функции её корней. В диссертации рассмотрены целые функции конечного положительного порядка. Данный подкласс целых функций наиболее восстребован в приложениях, в него входят решения линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами. В частности, решениями таких уравнений являются целые гипергеометрические функции, функции Бесселя (домноженные на соответствующую степень z), функции Эйри, Вебера.

В конце $\overline{\text{XIX}}$ века появились знаменитые теоремы Адамара[1] и Бореля[2] о факторизации целой функции и порядке канонического произведения. Эти теоремы легли в основу данного направления.

Следующий крупный вклад в рассматриваемую тематику был внесён Валироном[3,4] в начале $\overline{\text{XX}}$ века. Во-первых, он ввёл понятие уточнённого порядка, которое позволило классифицировать все целые функции конечного порядка по скорости роста логарифма максимума их модуля в круге. Во-вторых, он вывел неулучшаемую двустороннюю оценку типа целой функции при произвольном уточнённом порядке через верхнюю плотность множества её корней относительно этого уточнённого порядка. Заметим, что в оценке сверху требуется, чтобы порядок функции не был целым числом. Неулучшаемость нижней оценки Валирона была доказана Левиным[5], а неулучшаемость верхней оценки — Гольдбергом[6]. Гольдберг[7] в случае, когда верхняя плотность множеста корней целой

[1]Hadamard J. Essai d'ŕetude des fonctions donnŕees par leur dŕevŕeloppement de Taylor // J. Math. Pure et Appl., 1892, v.8, p. 154—186.

[2]Borel E. Sur les zeros des fonctions entieres // Acta math., 1897, 20, c. 357—396.

[3]Valiron G. Sur les fonctions entieres d'or dr e nul et d'or dr e fini et en particulier des fonctions a correspondance reguliere //Annales de la fac. sci. de l'univ. Toulouse, 1913, V.5, ser. 3, p. 117—257.

[4]Valiron G. Lectures on the General Theory of Integral Functions // Privat Toulouse, 1923.

[5]Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956.

[6]Гольдберг А.А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. I // Матем. сборник, 1962, т. 58, № 3, с. 289—334.

[7]Гольдберг А.А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. III // Матем. сборник, 1964, т. 65, № 3, с. 414—-453.

функции целого порядка относительно некоторого уточнённого порядка конечна, построил новый уточнённый порядок и получил неулучшаемую оценку сверху типа целой функции при этом новом уточнённом порядке.

Очень много результатов в рассматриваемой тематике было связано с учётом распределения аргументов корней. Упомянем основополагающие работы Левина[8], Пфлюгера[9,10], Гольдберга[6,7,11]. Немало интересных задач было решено для функций, все корни которых лежат на одном луче. Эти вопросы освещены в обзоре Левина, Гольдберга и Островского[12], в нём имеется обширная библиография.

В то же время, недавняя статья Попова[13] показала, что и в классической задаче нахождения оптимальной асимптотической оценки сверху логарифма максимума модуля канонического произведения с заданной мажорантой радиальной считающей функции множества корней остаются ещё интересные проблемы. В диссертационной работе эти исследования продолжаются; изучаются как функции нецелого, так и целого порядка.

Цель работы

Цель настоящей диссертации состоит в решении следующих задач: получить асимптотическую оценку сверху логарифма максимума модуля целой функции нецелого порядка через мажоранту усреднённой считающей функции её корней;

найти неулучшаемое второе слагаемое в теореме Гольдберга об асимптотической оценке сверху логарифма максимума модуля целой функции целого порядка бесконечного типа.

---

[8] Левин Б.Я. О росте целой функции по лучу и о распределении ее нулей по аргументам // Матем. сборник, 1937, т. 2, № 6, с. 1097—1142.

[9] Pfluger A. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Functionen I // Comm. Math. Helv. No 11. 1938. P. 180–213.

[10] A. Pfluger. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Functionen II // Comm. Math. Helv. No 12. 1939. P. 25–69.

[11] Гольдберг А.А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. II // Матем. сборник, 1963, т. 61, № 3, с. 334—349.

[12] Гольдберг А.А., Левин Б.Я., Островский И.В. Целые и мероморфные функции // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1991, № 85, с. 5—185.

[13] Попов А.Ю. Наибольший возможный рост максимума модуля канонического произведения нецелого порядка с заданной мажорантой считающей функции корней // Матем. сборник, 2013, т. 204, №5, с. 67—108.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Перечислим основные из них:

Получен аналог неравенства Валирона—Гольдберга через усреднённую верхнюю плотность множества корней целой функции.

При некотором условии на усреднённую считающую функцию множества корней целой функции доказана в определённом смысле неулучшаемая асимптотическая оценка сверху логарифма максимума модуля.

Дополнен результат Гольдберга для случая целой функции целого порядка бесконечного типа.

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и получены автором самостоятельно. Точные формулировки установленных автором утверждений приведены ниже.

Методы исследования

В работе применяются методы теории целых функций и правильно меняющихся функций. Использованы, в частности, метод Гольдберга для построения последовательности корней канонического произведения, а также асимптотические методы.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях по теории целых функций .

Апробация работы

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах:

— Кафедральном семинаре кафедры математического анализа под рук. профессора Т.П.Лукашенко (мехмат МГУ, 2015 г.):

— Семинаре кафедры математического анализа под рук. профессора А.М.Седлецкого (мехмат МГУ, 2012 и 2013 гг.).

Результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях: «КРОМШ–2013» (Крым, 2013), «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2014), «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 2015).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора (в том числе 3 статьях в журналах из перечня ВАК), список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы, насчитывающего 22 наименования. Общий объем диссертации составляет 83 страницы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Приведём основные определения, связанные с уточннённым порядком.

Определение 1. *Уточнённым порядком называется произвольная функция $\rho(r)$, определённая и дифференцируемая на луче $R_0 < r < +\infty$ (число R_0 своё для каждой такой функции) и обладающая следующими свойствами:*

$$\exists \lim_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho, \quad 0 < \rho < +\infty, \quad \lim_{r\to+\infty} \rho'(r) r \ln r = 0. \tag{1}$$

Определение 2. *Типом функции $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ при уточнённом порядке $\rho(r)$ называется величина*

$$\sigma_{\rho(r)}(f) = \limsup_{r\to+\infty} r^{-\rho(r)} \ln M(f, r). \tag{2}$$

Определение 3. *Верхней плотностью множества корней функции $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ называется величина*

$$D_{\rho(r)}(f) = \limsup_{r\to+\infty} r^{-\rho(r)} n_f(r). \tag{3}$$

Определение 4. *Усреднённой верхней плотностью множества корней функции $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ называется величина*

$$D^*_{\rho(r)}(f) = \limsup_{r\to+\infty} r^{-\rho(r)} N_f(r). \tag{4}$$

Определение 5. *Функция Валирона:*

$$S(\rho) = \int\limits_0^{+\infty} r^{-\rho} d\mathcal{M}_p(r) = \rho \int\limits_0^{+\infty} r^{-\rho-1}\mathcal{M}_p(r)\, dr, \tag{5}$$

$$\rho \in (0,+\infty)\backslash\mathbb{N}, \quad p = [\rho], \quad \text{где}$$

$$\mathcal{M}_p(r) = \ln\left(\max_{|w|=r} |E_p(w)|\right), \qquad E_0(w) = 1 - w, \tag{6}$$

$$E_p(w) = (1-w)\exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{w^k}{k}\right), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Основной результат, который правомерно назвать теоремой Валирона-Гольдберга, и развитию которого посвящена работа, состоит в следующем:

Теорема А (Валирона-Гольдберга). *Пусть $\rho(r)$ — произвольный уточнённый порядок,*

$$\lim_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho \in (0,+\infty)\backslash\mathbb{N},$$

f — произвольная целая функция порядка ρ, множество корней которой имеет конечную верхнюю плотность относительно этого уточнённого порядка. Тогда f имеет конечный тип при порядке $\rho(r)$, и справедливо неравенство

$$\sigma_{\rho(r)}(f) \le S(\rho) D_{\rho(r)}(f). \tag{7}$$

С другой стороны, существует функция f, имеющая положительный тип при порядке $\rho(r)$, для которой неравенство (7) *обращается в равенство.*

В первой главе диссертации этот результат перенесён на случай, когда задана усреднённая верхняя плотность множества корней.

Теорема 1. *В условиях теоремы А справедливо неравенство*

$$\sigma_{\rho(r)}(f) \le \rho S(\rho) D^{*}_{\rho(r)}(f). \tag{8}$$

и существует функция f, для которой неравенство (8) *обращается в равенство.*

Неравенство (8) было известно ранее[14] при $0 < \rho < 1$ и лишь в случае $\rho(r) \equiv r$. При этих значениях ρ функция $S(\rho)$ допускает простое выражение: $S(\rho) = \pi \operatorname{cosec}(\pi\rho)$, но при $\rho > 1$ функция $S(\rho)$ не элементарна. В общем случае теорема 1, по-видимому, является новой.

В работе доказывается более детальный результат. Предполагается, что усреднённая считающая функция множества корней (7) допускает оценку сверху

$$N_f(r) \le r^{\rho(r)} + O(r^a), \quad 0 \le a < \rho. \tag{9}$$

и из неё выводится в определённом смысле неулучшаемая асимптотическая оценка сверху $\ln M(f, r)$.

Сперва рассмотрим уточнённые порядки $\rho(r)$, отличающиеся "правильностью" поведения при $r \to +\infty$. Из определения 1 следует, что если $\rho(r)$ — произвольный уточнённый порядок, $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho$, то функция

$$l(r) = r^{\rho(r)-\rho} \tag{10}$$

является медленно меняющейся[15] и справедливо предельное соотношение

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{r l'(r)}{l(r)} = 0. \tag{11}$$

[14] Хабибуллин Б.Н. Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции // Матем. сборник, 2009, т. 200, №2, с. 129—-158.

[15] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.

Потребуем, чтобы уточнённый порядок удовлетворял следующим условиям:

1) функция $l(r)$ монотонна,

2) функция
$$w_l(r) = \frac{rl'(r)}{l(r)} \tag{12}$$
также монотонна (она может быть либо положительной, либо отрицательной) и медленно меняется на бесконечности.

Теорема 2. *Дан уточнённый порядок $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r) = \rho \in (0,+\infty)\backslash\mathbb{N}$, удовлетворяющий сформулированным выше условиям 1), 2).*

Если для усреднённой считающей функции множества корней целой функции f порядка ρ выполняется асимптотическая оценка сверху (9), то
$$\ln M(f,R) \le R^{\rho(R)}\Big(\rho S(\rho)+(\rho S'(\rho)+S(\rho))w_l(R)+o(w_l(R))\Big), \quad R\to+\infty. \tag{13}$$

Если для усреднённой считающей функции $N(r)$ возрастающей последовательности положительных чисел $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$, выполняется двусторонняя асимптотическая оценка
$$r^{\rho(r)} + O(r^a) \le N(r) = O(r^\tau), \quad r\to+\infty,$$
в которой $\tau < [\rho]+1$, то найдутся числовые последовательности $\varphi_n \in [\pi,\pi)$ и $R_k \to +\infty$ такие, что для логарифма максимума модуля на окружностях $|z| = R_k$ любой целой функции F, множество всех корней которой есть $\{r_n e^{i\varphi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, справедлива асимптотическая оценка снизу
$$\ln M(F,R_k) \ge R_k^{\rho(R_k)}\Big(\rho S(\rho)+(\rho S'(\rho)+S(\rho))w_l(R_k)+o(w_l(R_k))\Big), \quad k\to+\infty. \tag{14}$$

Теперь рассмотрим произвольный уточнённый порядок $\rho(r)$. В этом общем случае от функции l ничего не требуется, кроме выполнения предельного соотношения (11). Возьмём произвольную положительную невозрастающую на некотором луче $(r_0,+\infty)$ функцию $w(r)$, $\lim\limits_{r\to+\infty} w(r) = 0$. Введём класс $\mathcal{L}(w)$, состоящий по определению из всех таких медленно меняющихся и дифференцируемых на $(r_0, +\infty)$ функций l, что верно неравенство

$$|w_l(r)| \le w(r).$$

Обозначим

$$S_1(\rho) = \int\limits_0^{+\infty} |\ln r| r^{-\rho} d\mathcal{M}_p(r),\ S_0(\rho) = \int\limits_0^{1} r^{-\rho} d\mathcal{M}_p(r) - \int\limits_1^{+\infty} r^{-\rho} d\mathcal{M}_p(r),\ p = [\rho]. \tag{15}$$

Теорема 3. *Пусть* $w : (r_0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *— произвольная невозрастающая медленно меняющаяся на бесконечности функция,* $\lim\limits_{r\to+\infty} w(r) = 0$, $\rho(r)$ *— произвольный уточнённый порядок такой, что* $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty)/\mathbb{N}, l(r) = r^{\rho(r)-\rho} \in \mathcal{L}(w)$. *Тогда для логарифма максимума модуля целой функции порядка* ρ, *усреднённая считающая функция корней которой удовлетворяет ограничению* (9), *справедлива асимптотическая оценка сверху*

$$\ln M(f,R) \le R^{\rho(R)} \Big(\rho S(\rho) + (\rho S_1(\rho) + S_0(\rho)) w(R) + o(w(R)) \Big), \quad R \to +\infty. \tag{16}$$

Вопрос о неулучшаемости второго члена в асимптотической оценке (16) пока в полном объёме не решён. Доказано только, что он неулучшаем по порядку при тех значениях ρ, расстояние от которых до ближайшего целого числа не больше $1/4$.

Обозначим $||\rho||$ расстояние от ρ до ближайшего целого числа. В главе I, §4 доказаны неравенства

$$0 < \rho S_1(\rho) + S_0(\rho) < \frac{4\rho}{||\rho||^2} \quad \forall \rho > 0, \tag{17}$$

а если $\rho > 1$, то

$$\rho S'(\rho) + S(\rho) < -\frac{0.55\rho}{||\rho||^2}, \quad \text{при } 0 < \{\rho\} \le \frac{1}{4},$$

$$\rho S'(\rho) + S(\rho) > \frac{0.55\rho}{||\rho||^2}, \quad \text{при } \frac{3}{4} \le \{\rho\} < 1. \tag{18}$$

Из (17), (18) получаем

Следствие. *В условиях теоремы 3 при всех достаточно больших R верна оценка*

$$\ln M(f,R) < R^{\rho(R)}\Big(\rho S(\rho) + \frac{4\rho}{||\rho||^2} w(R)\Big). \tag{19}$$

Убедимся в том, что если во втором слагаемом, стоящем в скобках в правой части (19), множитель 4 нельзя заменить на $1/2$, даже добавив остаточный член. Другими словами, если написать асимптотическую оценку

$$\ln M(f,R) \le R^{\rho(R)}\Big(\rho S(\rho) + \frac{\rho}{2||\rho||^2} w(R) + o(w(R))\Big), \qquad R \to +\infty,$$

то она, вообще говоря, будет неверна. А именно, в классе $\mathcal{L}(w)$, когда функция w медленно меняется на бесконечности, дифференцируема и $\lim\limits_{r\to+\infty} rw'(r) = 0$, найдётся такая медленно меняющаяся функция l, что для определяемого ей уточнённого порядка $\rho(r) = \rho + \frac{\ln l(r)}{\ln r}$ (это равенство равносильно (10)) при $\rho > 1$ и $0 < ||\rho|| \le 1/4$ будет справедливо следующее утверждение.

Существуют последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $|z_n| \uparrow +\infty$, усреднённая считающая функция которой имеет асимптотику $N(r) = r^{\rho(r)} + O(r^a)$, целая функция F порядка ρ, имеющая своим множеством корней последовательность $\{z_n\}$ и последовательность $R_k \to +\infty$ такие, что

$$\ln M(f,R_k) > R_k^{\rho(R_k)}\Big(\rho S(\rho) + \frac{0.55\rho}{||\rho||^2} w(R_k)\Big). \tag{20}$$

Во второй части диссертации рассматривается задача нахождения оценки сверху логарифма максимума модуля целых функций целого порядка и бесконечного типа.

Гольдберг[7] обнаружил, что если $\rho(r)$—уточнённый порядок, имеющий своим пределом на бесконечности целое число p, то всегда найдётся целая функция целого порядка p, не являющаяся функцией нормального типа при порядке p, верхняя плотность корней которой при уточнённом порядке $\rho(r)$ конечна, а $\sigma_{\rho(r)}(f) = +\infty$. Поэтому он поставил и решил задачу построения по уточнённому порядку $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r)=p\in\mathbb{N}$, в определённом смысле оптимального нового уточнённого порядка $\widetilde{\rho}(r)$, такого, что для любой целой функции порядка p, но не являющейся функцией нормального типа, справедлива импликация

$$D_{\rho(r)}(f)<+\infty\Rightarrow\sigma_{\widetilde{\rho}(r)}(f)<+\infty.$$

Уточнённый порядок $\widetilde{\rho}$ Гольдберг определил формулой

$$\widetilde{\rho}(r)=p+\frac{\ln V(r)}{\ln r},\quad \text{где} \tag{21}$$

$$V(r)=\int\limits_r^{+\infty}t^{\rho(t)-p-1}dt,\quad \text{если}\quad \int\limits_{r_0}^{+\infty}t^{\rho(t)-p-1}\,dt<+\infty, \tag{22}$$

$$V(r)=\int\limits_{r_0}^{r}t^{\rho(t)-p-1}dt,\quad \text{если}\quad \int\limits_{r_0}^{+\infty}t^{\rho(t)-p-1}\,dt=+\infty. \tag{23}$$

Теорема B. (А. А. Гольдберг) *Пусть $p\in\mathbb{N}$, $\rho(r)$—произвольный уточнённый порядок, $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r)=p$. Пусть далее f—произвольная целая функция порядка p (при условии (22) предполагается также, что она не является функцией нормального типа при порядке p), $D_{\rho(r)}(f)<+\infty$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sigma_{\widetilde{\rho}(r)}(f)\le D_{\rho(r)}(f), \tag{24}$$

и существует функция, имеющая конечную и положительную плотность множества корней относительно $\rho(r)$, для которой это неравенство обращается в равенство.

Гольдберг также доказал, что построенный уточнённый порядок обладает следующими асимптотическими свойствами:

$$\lim_{r\to+\infty}r^{\rho(r)-\widetilde{\rho}(r)}=0, \tag{25}$$

$$\lim_{r\to+\infty}r^{\widetilde{\rho}(r)-p}=0\quad \text{в случае}(22), \tag{26}$$

$$\lim_{r\to+\infty}r^{p-\widetilde{\rho}(r)}=0\quad \text{в случае}(23). \tag{27}$$

В диссертации теорема B дополняется в случае, когда уточнённый порядок $\rho(r)$ удовлетворяет условию (23), $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r)=p$.

Теорема 4. *Если выполняются условия* (23),

$$r^{\rho(r)} = O(r^p), \qquad r \to +\infty, \tag{28}$$

и сходится интеграл

$$\int\limits_{r_0}^{+\infty} \Delta^+(f,t)t^{-p-1}dt,$$

то верна асимптотическая оценка

$$\ln M(f,r) \le D_{\rho(r)}(f) r^{\widetilde{\rho}(r)} + O(r^p), \quad r \to +\infty. \tag{29}$$

С другой стороны, каковы бы ни были число $D \in (0, +\infty)$, *функция* H, *удовлетворяющая асимптотической оценке*

$$\Delta(r) \equiv H(r) - Dr^{\rho(r)} = o(r^{\rho(r)}), \quad r \to +\infty, \tag{30}$$

и стремящаяся к $+\infty$ *(вообще говоря, сколь угодно медленно) функция* B, *существуют целая функция* G *порядка* p *и возрастающая последовательность положительных чисел* R_k, $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = +\infty$, *такие, что верны соотношения*

$$n_G(r) = H(r) + O(1), \quad r \to +\infty, \tag{31}$$

и

$$\ln M(G, R_k) \ge D_{\rho(r)}(f) R_k^{\widetilde{\rho}(R_k)} - B(R_k)R_k^p \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{32}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Сделать остаточный член в (29) $o(R^p)$ вряд ли возможно. Пока неясно, можно ли в (32) вместо сколь угодно медленно стремящейся к бесконечности функции B взять константу.

Регуляризованным интегралом Валирона назовём следующую величину

$$S_p^\infty = \int\limits_0^1 r^{-p}\mathcal{M}_p'(r)dr + \int\limits_1^{+\infty} \left(r^{-p}\mathcal{M}_p'(r) - \frac{1}{r}\right) dr. \tag{33}$$

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$S_1^\infty = 2, \quad S_2^\infty = \frac{3}{2} + \ln 4, \tag{34}$$

двусторонние оценки

$$2\ln p < S_p^\infty < 2\ln p + 2 \quad \forall p \ge 3 \tag{35}$$

и асимптотика

$$S_p^\infty = 2\ln p + A + O\left(\frac{1}{p}\right), \quad p \to +\infty, \tag{36}$$

где $A = \ln(4/\pi) + \gamma - ci(\pi)$, γ*— постоянная Эйлера,* $ci(x) = -\int\limits_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$, $A = 0,7451...$

Теорема 5. *При условиях* (23),

$$\lim_{r\to+\infty} r^{\rho(r)-p} = +\infty, \tag{37}$$

и

$$\int\limits_{r_0}^{r} \Delta^+(f,t)t^{-p-1}dt = o(r^{\rho(r)-p}), \quad r \to +\infty, \tag{38}$$

верна асимптотическая оценка

$$\ln M(f,r) \le D_{\rho(r)}(f) r^{\widetilde{\rho}(r)} + D_{\rho(r)}(f) S_p^\infty r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}), \quad r \to +\infty. \tag{39}$$

С другой стороны, каковы бы ни были число $D \in (0,+\infty)$ *и возрастающая функция* H*, для которых справедлива асимптотическая оценка*

$$\Delta(r) \equiv H(r) - Dr^{\rho(r)} = o(r^{\rho(r)}), \quad r \to +\infty, \tag{40}$$

при условии

$$\int\limits_{r_0}^{r} |\Delta(t)| t^{-p-1}dt = o(r^{\rho(r)-p}), \quad r \to +\infty, \tag{41}$$

существуют целая функция G *бесконечного типа при порядке* p *и возрастающая последовательность положительных чисел* $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *такие, что верны соотношения* (31), $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = +\infty$,

$$\ln M(G,R_k) \ge DR_k^{\widetilde{\rho}(R_k)} + DS_p^\infty R_k^{\rho(R_k)} + o(R_k^{\rho(R_k)}), \quad k \to \infty. \tag{42}$$

Заключение

В первой главе диссертации рассмотрены целые функции, порядок которых конечен, положителен и не является целым числом. В предположении, что задана мажоранта усреднённой считающей функции множества корней такой целой функции f и эта мажоранта обладает на бесконечности "достаточно регулярным" поведением, автором получена асимптотическая оценка сверху $\ln M(f, R)$ с двумя неулучшаемыми слагаемыми. Неулучшаемость оценки понимается в следующем смысле. Доказывается, что для любого уточнённого порядка $\rho(r)$, предел на бесконечности которого не является целым числом, существует целая функция F, усреднённая считающая функция множества корней которой имеет заданную асимптотику $N_F(R) = R^{\rho(R)} + O(\ln R)$, $R \to +\infty$, и на некоторой последовательности окружностей радиусов $R_m \to +\infty$ оценка снизу $\ln M(F, R_m)$ асимптотически такая же, как и оценка сверху логарифма максимума модуля <u>любой</u> целой функции f при условии $N_f(R) \leq R^{\rho(R)} + O(R^a)$, $0 < a < \rho = \lim\limits_{R\to+\infty} \rho(R)$.

Подобная оценка сверху $\ln M(f, R)$ с двумя неулучшаемыми слагаемыми, когда известна "регулярная" мажоранта считающей функции множества корней f (обычной, а не усреднённой) была получена в 2013 году А.Ю. Поповым, а ранее в оценке сверху был известен только неулучшаемый главный член. Интересна аналогия между результатами А.Ю. Попова и автора. Оценка А.Ю. Попова имеет вид

$$\ln M(f, R) \leq R^{\rho(R)}(S(\rho) + S'(\rho)w_l(R) + o(w_l(R))), \quad R \to +\infty, \tag{43}$$

а в задаче, рассматриваемой в диссертации

$$\ln M(f, R) \leq R^{\rho(R)}(S(\rho) + (\rho S(\rho))' w_l(R) + o(w_l(R))), \quad R \to +\infty. \tag{44}$$

Структура правых частей неравенств (43) и (44) одинакова и (44) получается из (43) заменой функции Валирона $S(\rho)$ на $\rho S(\rho)$.

Во второй главе диссертации в русле идей первой главы получено уточнение теоремы А. А. Гольдберга о точной оценке сверху типа целой функции при уточнённом порядке с данной верхней плотностью множества её корней относительно другого уточнённого порядка, стремящегося к целому числу. И в этой ситуации в оценке сверху логарифма максимума модуля целой функции автором найдено неулучшаемое второе слагаемое, хотя сам вид оценки сверху принципиально отличается от (43) и (44).

Результаты диссертации показывают, что логарифм максимума модуля канонического произведения, считающая или усреднённая считающая функция множества корней которого имеет заданную мажоранту, может быть оценен сверху значительно точнее, чем это делалось в предыдущих исследованиях. В этом, по-видимому, и состоит основное достижение диссертационной работы.

Обрисуем перспективы дальнейших исследований по тематике диссертации. Большой интерес вызывают задачи о целых функциях с геометрическими ограничениями на расположение корней. Например, в приложениях весьма востребован класс целых функций, все корни которых расположены на одном луче (скажем, на $\mathbb{R}_+$) или, более общо, в области $\mathcal{D}$ вида $\{z \in \mathbb{C} \big| \ |arg\ z| \le h(|z|)\}$, где h—некоторая положительная функция, определённая на $(0, +\infty)$, $\lim\limits_{r\to+\infty} h(r) = 0$. Для этого класса функций А. А. Гольдбергом[16] в 1962 году получено неулучшаемое неравенство

$$\sigma_{\rho(r)}(f) \le S_0(\rho) D_{\rho(r)}(f) \tag{45}$$

в случае $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho \overline{\in} \mathbb{N}$. Если $\rho \in (0,1)$, то

$$S_0 \equiv S(\rho) = \pi cosec(\pi\rho).$$

Но при $\rho > 1$ функция $S_0(\rho)$ устроена намного сложнее функции Валирона $S(\rho)$ и её поведение пока не исследовано. В качестве ближайшей перспективы видится исследование поведения $S_0(\rho)$ и получения аналога неравенства (45), в котором вместо верхней плотности множества корней f при уточнённом порядке $\rho(r)$ стояла бы усреднённая верхняя плотность множества корней функции f.

[16] Гольдберг А.А. Экстремальный индикатор для целой функции с положительными нулями // Сибирский матем. журнал, 1962, т. 3, № 2, с. 170—177.

Благодарность

Автор глубоко признателен научному руководителю доктору физико-математических наук Антону Юрьевичу Попову за постановку задачи, ценные замечания и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] Мышаков Ф. С. Аналог теоремы Валирона–Гольдберга при ограничении на усредненную считающую функцию множества корней // Матем. заметки, 2014, т.96, №5, с. 794—798.

[2] Мышаков Ф. С., Попов А. Ю. Уточнение теоремы Гольдберга об оценке типа при уточнённом порядке целой функции целого порядка // Матем. сборник, 2015, т.206, №12, с. 119—144.
В работе [2] диссертанту принадлежат лемма 2, теорема 2, теорема 3; А. Ю. Попову принадлежат лемма 1, теорема 1.

[3] Мышаков Ф. С. Аналог теоремы Валирона–Гольдберга при ограничении на усредненную считающую функцию множества корней // Analysis Mathematica, 2015, т.41, №3, с. 175—198.

[4] Мышаков Ф. С. Аналог теоремы Валирона–Гольдберга при ограничении на усредненную считающую функцию множества корней // Современные проблемы теории функций и их приложения, 2014, с. 191,192.

[5] Попов А. Ю., Мышаков Ф. С. Уточнение теоремы Гольдберга об оценке типа при уточнённом порядке целой функции целого порядка // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского, 2015, т.51, с. 353—355.
В работе [5] диссертанту принадлежат теорема 2, теорема 3; А. Ю. Попову принадлежит теорема 1.