Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

*на правах рукописи*

УДК 517.547.22

**Мышаков Фёдор Сергеевич**

# Развитие теоремы Валирона-Гольдберга

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук,

в.н.с. А.Ю.Попов

Москва — 2016

# Оглавление

## Основные определения, обозначения и предварительные сведения

В диссертации изучаются целые (т.е. аналитические по всей комплексной плоскости) функции. Пространство целых функций обозначим $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. Каждой функции $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ поставим в соответствие следующие функции действительной переменной $R \in [0, +\infty)$ :

$M(f, R) = \max\limits_{|z|\leq R} |f(z)|$; $n_f(R)$ — количество корней $f$ в круге $|z| \leq R$;

$$N_f(R) = \int\limits_0^R \frac{n_f^0(x)}{x}\ dx, \quad \text{где} \quad n_f^0(x) = n_f(x) - m, \tag{0.0.1}$$

а $m$ - кратность корня $f(z)$ в точке $z = 0$.

Функцию $n_f(R)$ обычно называют считающей функцией множества корней $f$, а $N_f(R)$ — усреднённой считающей функцией множества ненулевых корней $f$.

**Определение 1.** *Порядком целой функции $f$ называется величина*

$$\rho_f = \overline{\lim_{R\to+\infty}} \frac{\ln\ln M(f, R)}{\ln R}. \tag{0.0.2}$$

Эквивалентное определение порядка целой функции таково. Если

$$\limsup_{R\to+\infty} R^{-a} \ln M(f, R) = +\infty \quad \forall a > 0,$$

то $f$— целая функция бесконечного порядка; если при некотором $a > 0$ верна асимптотическая оценка

$$\ln M(f, R) = O(R^a), \quad R \to +\infty, \tag{0.0.3}$$

то $f$— функция конечного порядка (для функции $f(z) \equiv 0$ логарифм максимума модуля не определён, но считается, что эта функция имеет нулевой порядок). Точная нижняя грань таких чисел $a$, что соотношение

(0.0.3) выполняется, называется порядком целой функции $f$. Более тонкой характеристикой скорости роста $\ln M(f,R)$ при $R \to +\infty$ является тип при уточнённом порядке.

**Определение 2.** *Уточнённым порядком называется произвольная функция $\rho(r)$, определённая и дифференцируемая на луче $R_0 < r < +\infty$ (число $R_0$ своё для каждой такой функции) и обладающая следующими свойствами:*

$$\exists \lim_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho, \quad 0 < \rho < +\infty, \quad \lim_{r\to+\infty} \rho'(r) r \ln r = 0. \tag{0.0.4}$$

Уточнённые порядки были введены Ж. Валироном в [22] для создания системы эталонов роста, с которыми сравниваются логарифмы максимумов модулей целых функций конечного порядка. Фактически же Валирон использовал их в более ранних работах, в частности, в статье [21], в которой было положено начало исследованиям, продолжаемым в данной диссертации.

**Определение 3.** *Типом функции $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ при уточнённом порядке $\rho(r)$ называется величина*

$$\sigma_{\rho(r)}(f) = \limsup_{r\to+\infty} r^{-\rho(r)} \ln M(f,r). \tag{0.0.5}$$

Известно, что для каждой целой функции $f$ конечного порядка существует такой уточнённый порядок $\rho(r)$, что

$$\sigma_{\rho(r)}(f) = 1.$$

Когда мы будем писать "целая функция $f$ порядка $\rho$ типа $\sigma$", не говоря при каком уточнённом порядке рассматривается тип, это будет означать, что тип рассматривается относительно $\rho(r) \equiv \rho$, то есть

$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{\ln M(f,R)}{R^\rho} = \sigma.$$

**Определение 4.** *Верхней плотностью множества корней функции* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ *относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$ *называется величина*

$$D_{\rho(r)}(f) = \limsup_{r\to+\infty} r^{-\rho(r)} n_f(r). \tag{0.0.6}$$

**Определение 5.** *Усреднённой верхней плотностью множества корней функции* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ *относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$ *называется величина*

$$D^*_{\rho(r)}(f) = \limsup_{r\to+\infty} r^{-\rho(r)} N_f(r). \tag{0.0.7}$$

Известно неулучшаемое с обеих сторон двойное неравенство [7]

$$\rho D^*_{\rho(r)} \le D_{\rho(r)} \le e\rho D^*_{\rho(r)}, \quad \text{где} \quad \rho = \lim_{r\to+\infty} \rho(r). \tag{0.0.8}$$

Напомним [1], что медленно меняющейся на бесконечности функцией называется произвольная знакопостоянная измеримая функция $\varphi : (x_0, +\infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, для которой верно предельное соотношение

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(ax)}{\varphi(x)} = 1 \quad \forall a \in (0, +\infty), \tag{0.0.9}$$

причём стремление к 1 в (0.0.9) равномерно на множестве $[\varepsilon, 1/\varepsilon]$ $(\forall\varepsilon \in (0, 1))$. Давно известно (см. например [13], (гл.1,§2), что если функция $\varphi$ дифференцируема на луче $(x_0, +\infty)$ и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 0,$$

то она является медленно меняющейся.

Отсюда следует, что если $\rho(r)$ — уточнённый порядок, $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty)$, то функция

$$l(r) = r^{\rho(r)-\rho} \tag{0.0.10}$$

является медленно меняющейся. Действительно, из (0.0.4) следует, что $l$ дифференцируема на луче $(R_0, +\infty)$ и

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{rl'(r)}{l(r)} = \lim_{r\to+\infty} r(\ln l(r))' = \lim_{r\to+\infty} r((\rho(r) - \rho)\ln r)' = 0.$$

Поскольку отношение $rl'(r)/l(r)$ будет играть в дальнейшем значительную роль, то обозначим его специальным символом $w_l(r)$.

Пусть $w(r)$ — произвольная положительная невозрастающая на некотором луче $(r_0, +\infty)$ функция, $\lim\limits_{r\to+\infty} w(r) = 0$. Введём класс $\mathcal{L}(w)$, состоящий из всех медленно меняющихся и дифференцируемых на $(r_0, +\infty)$ функций $l$, для которых верно неравенство $|w_l(r)| \le w(r),\ r > r_0$.

# Введение

**Актуальность темы.** Одним из основных направлений теории целых функций является изучение связи между скоростью роста максимума модуля целой функции и считающей функции её корней.

В диссертации рассматриваются целые функции конечного положительного порядка. Понятие "порядок целой функции" ввёл Жак Адамар в [18] (см. выше (0.0.2)). Это понятие сыграло фундаментальную роль в создании теории целых функций. Прежде всего, с его помощью $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ разбивается на три класса, весьма различных по своим свойствам. Один из этих классов, наименее исследованный - целые функции бесконечного порядка. Работ, посвящённых распределению корней таких функций, немного потому, что во-первых исследование наталкивается на значительные трудности, а во-вторых, подавляющее большинство целых функций, востребованных в приложениях, в этот класс не входит. Особое место в теории целых функции занимают целые функции нулевого порядка. Их специфика состоит в быстром росте последовательности модулей корней и "слабой" зависимости скорости роста $\ln M(f,R)$ от изменения аргументов корней. Этот класс целых функций достаточно хорошо исследован, см. например, [6].

Мы ограничим рассмотрение целыми функциями конечного положительного порядка. Этот подкласс $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ наиболее восстребован в приложениях. В него входят решения линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами

$$y^{(n)}(z)+\sum_{k=0}^{n-1}p_k(z)y^{(k)}(z)=0.$$

В частности, решениями таких уравнений являются целые гипергеометрические функции, функции Бесселя (домноженные на соответствующую степень $z$), функции Эйри, Вебера. Порядок $\rho$ имеют функции Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)}$$

при любом $\mu\in\mathbb{C}$. Порядок 1 имеют такие знаменитые специальные функции, как $1/\Gamma(z),(z-1)\zeta(z)$.

Первой основной теоремой о корнях целых функций конечного порядка стала теорема Адамара-Бореля [16],§§2.6, 2.7. Перед тем, как её сформулировать определим первичный множитель Вейерштрасса $E_p$ [16],§2.6:

$$E_0(w)=1-w,\quad E_p(w)=(1-w)\exp\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{w^k}{k}\right),\quad p\in\mathbb{N}.$$

**Теорема Адамара-Бореля**

*1. Если $p$ — целое неотрицательное число, $\lambda_n$ — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям*

$$\lambda_n\neq 0(\forall n\in\mathbb{N}),\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^{-p-1}<+\infty,$$

*то бесконечное произведение*

$$\prod_{n=1}^{\infty}E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)$$

*является целой функцией, порядок которой равен*

$$\inf\left\{\tau \in [p, p+1] \Big| \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-\tau} < +\infty\right\}.$$

*2. Если $f$ — целая функция порядка $\rho \in [0, +\infty)$, $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — множество её ненулевых корней (каждый корень стоит в последовательности столько раз, какова его кратность), то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-\rho-\varepsilon} < +\infty (\forall \varepsilon > 0),$$

*а сама функция $f$ допускает представление*

$$f(z) = Az^m \exp(\mathcal{P}(z)) \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right) \equiv Az^m \exp(\mathcal{P}(z)) f_\Lambda(z), \qquad (0.0.11)$$

*где $p = [\rho]$, если $\rho \overline{\in} \mathbb{N}$, а если $\rho \in \mathbb{N}$, то $p = \rho - 1$ в случае сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-\rho}$ и $p = \rho$ в случае его расходимости; $\mathcal{P}$ — многочлен степени не выше $\rho$, $m = 0$, если $f(0) = A \neq 0$, а если $f(0) = 0$, то*

$$m = min\{\nu \in \mathbb{N}, f^{(\nu)}(0) \neq 0\},\ A = f^{(m)}(0)/m!.$$

Из этой теоремы видно, что функция $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ конечного порядка либо имеет вид $f(z) = q(z)e^{\mathcal{P}(z)}$, $\mathcal{P}, q$ — многочлены, порядок $f$ равен степени многочлена $\mathcal{P}$, и тогда у неё конечное число корней; либо количество корней функции $f$ бесконечно. В частности, любая целая функция $f$ нецелого порядка или целого порядка, но нулевого или бесконечного типа имеет бесконечное количество корней. В диссертации изучаются именно такие целые функции.

Из теоремы Адамара-Бореля следует, что если имеется целая функция $f$ нецелого порядка $\rho$, то её порядок определяется считающей функцией корней по формуле

$$\rho = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln n_f(r)}{\ln r}.$$

Может ли быть по асимптотическому поведению $n_f(r)$ определён тип $f$ при порядке $\rho$ или при каком-либо уточнённом порядке $\rho(r)$, предел которого на бесконечности равен $\rho$? Многочисленные примеры показывают, что этого нельзя сделать, поскольку тип функции $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ при уточнённом порядке является более тонкой характеристикой роста $\ln M(f,r)$, чем порядок, и уже зависит от распределения аргументов корней. Тем не менее, если множество корней функции $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ нецелого порядка имеет конечную верхнюю плотность относительно некоторого уточнённого порядка $\rho(r)$, то для типа $\sigma_{\rho(r)}(f)$ можно дать (вообще говоря, неулучшаемую) двустороннюю оценку. Такую оценку нашёл около ста лет назаж Ж. Валирон [21], а точность оценки была доказана намного позднее: для оценки снизу — Б.Я. Левиным [7], а для оценки сверху — А.А. Гольдбергом [1].

Валирон [21] ввёл функцию

$$S(\rho) = \int\limits_0^{+\infty} r^{-\rho} d\mathcal{M}_p(r) = \rho \int\limits_0^{+\infty} r^{-\rho-1}\mathcal{M}_p(r)\, dr, \tag{0.0.12}$$

$$\rho \in (0,+\infty)\backslash\mathbb{N}, \quad p=[\rho], \quad \text{где}$$

$$\mathcal{M}_p(r) = \ln\left(\max_{|w|=r}|E_p(w)|\right). \tag{0.0.13}$$

Функция $\mathcal{M}_p(r)$ была исследована А. Данжуа [17].

Имеем:

$$\mathcal{M}_0(r) = \ln(1+r),$$

$$\mathcal{M}_p(r) = \max_{\theta\in[0,2\pi]} \mathcal{F}_p(r,\theta), \quad \text{где}$$

$$\mathcal{F}_p(r,\theta) = \frac{1}{2}\ln(1-2r\cos\theta + r^2) + \sum_{k=1}^{p}\frac{r^k}{k}\cos k\theta,$$

Заметим, что

$$\ln|E_q(Re^{i\varphi})| = \frac{1}{2}\ln(1-2R\cos\varphi + R^2) + \sum_{k=1}^{q}\frac{R^k}{k}\cos k\varphi \equiv$$

$$\equiv \mathcal{F}_q(R,\varphi) \leq \mathcal{M}_q(R). \tag{0.0.14}$$

С помощью результатов Данжуа [17] о поведении $\mathcal{M}'_p$ Валирон доказал сходимость интеграла $S(\rho)$ при любом $\rho \in (0,+\infty)\setminus\mathbb{N}$.

**Теорема Валирона-Гольдберга.** *Пусть $\rho(r)$ — произвольный уточнённый порядок,*

$$\lim_{r\to+\infty}\rho(r) = \rho \in (0,+\infty)\backslash\mathbb{N},$$

*$f$ — произвольная целая функция порядка $\rho$, множество корней которой имеет конечную верхнюю плотность относительно этого уточнённого порядка. Тогда $f$ имеет конечный тип при порядке $\rho(r)$, и справедливо неравенство*

$$\sigma_{\rho(r)}(f) \leq S(\rho)D_{\rho(r)}(f). \tag{0.0.15}$$

*С другой стороны, существует функция $f$, имеющая положительный тип при порядке $\rho(r)$, для которой неравенство (0.0.15) обращается в равенство.*

Отметим следующее обстоятельство. При $\rho \in (0,1)$ равенство в (0.0.15) достигается для любой функции $f$, корни которой расположены на одном луче и в (0.0.6) существует не верхний, а обычный предел. Зато при $\rho \in (1,+\infty)\setminus\mathbb{N}$ равенство в (0.0.15) не может достигаться для функций вполне регулярного роста. У функции $F$, построенной Гольдбергом, для которой верно равенство

$$\sigma_{\rho(r)}(F) = S(\rho) D_{\rho(r)}(F),$$

множество корней имеет радиальную плотность (т. е. существует предел $\lim\limits_{r\to+\infty} r^{-\rho(r)} n_F(r)$), но не имеет угловой плотности.

Заслуживает упоминания то, что в той же работе [21] Валирон вывел оценку снизу типа целой функции через верхнюю плотность её корней

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{D_\rho(f)}{e\rho}, \tag{0.0.16}$$

но ограничился рассмотрением случая $\rho(r) \equiv \rho$. Неулучшаемость этой оценки была доказана Левиным [7], (гл.4) в середине 50-х годов 20 века.

Интересно, что для достижимости равенства в (0.0.16) необходимо, чтобы нижняя плотность множества корней $f$ при уточнённом порядке $\rho(r)$ и была равна нулю: $\underline{\lim\limits_{r\to+\infty}} r^{-\rho(r)} n_f(r) = 0$. Это следует из результатов, приведённых в [16] (гл.1, §5).

Таким образом, Валирон в 1913 году дал неулучшаемую двустороннюю оценку типа целой функции через верхнюю плотность множества корней.

В диссертации будет исследована возможность уточнения оценок сверху логарифма максимума модуля целой функции через мажоранту считающей или усреднённой считающей функции множества корней. Продвижение в этой тематике было недавно получено А.Ю. Поповым [11]. Он вернулся к исследованию этого вопроса в трактовке Валирона. Из оценки сверху

$$n_f(r) \leq r^{\rho(r)} + O(1), \quad (\forall r > 0), \quad \lim_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}, \tag{0.0.17}$$

Валирон вывел следующую оценку логарифма максимума модуля целой функции $f$ порядка $\rho$:

$$\ln M(f, r) \leq r^{\rho(r)} (S(\rho) + \varepsilon(r)), \tag{0.0.18}$$

где $\varepsilon(r)$ — некоторая положительная функция, стремящаяся к нулю при $r \to +\infty$. Нетрудно убедиться, что из оценки (0.0.18) в силу её общности (справедливости для произвольного уточнённого порядка) выводится неравенство (0.0.15). Для этого достаточно лишь стремления к нулю функции $\varepsilon(r)$. А. Ю. Попов поставил задачу не только указать $\varepsilon(r)$ явно, но и найти в определённом смысле оптимальную такую функцию. Приведём два результата [11], полученных в этом направлении.

**Теорема А.** *Пусть уточнённый порядок $\rho(r)$ таков, что медленно меняющаяся функция $l(r) = r^{\rho(r)-\rho}$ при $r > r_0$ монотонна и функция $w_l(r) = \frac{rl'(r)}{l(r)}$ также монотонна и медленно меняется на бесконечности, а для считающей функции последовательности комплексных чисел $\Lambda$ выполняется оценка (0.0.17), то неравенство (0.0.18) справедливо, если взять*

$$\varepsilon(r) = S'(\rho)w_l(r) + o(w_l(r)), \quad r \to +\infty, \tag{0.0.19}$$

*причём данная оценка является неулучшаемой в том смысле, что множитель $S'(\rho)$ в правой части (0.0.19), вообще говоря, нельзя заменить меньшим.*

В случае произвольного уточнённого порядка нахождение оптимальной функции $\varepsilon(r)$ в (0.0.18) является сложной задачей, но на классе $\mathcal{L}(w)$ неулучшаемая оценка второго члена в (0.0.18) найдена.

**Теорема В.** *Пусть функция $w$ медленно меняется на бесконечности, а уточнённый порядок $\rho(r)$ такой, что $l(r) = r^{\rho(r)-\rho} \in \mathcal{L}(w)$. При выполнении условия (0.0.17) неравенство (0.0.18) справедливо, если взять*

$$\varepsilon(r) = S_1(\rho)w(r) + o(w(r)), \quad r \to +\infty. \tag{0.0.20}$$

В теоремах А и В фигурируют сходящиеся при любом $\rho \in (0, +\infty)\backslash\mathbb{N}$

интегралы

$$S'(\rho) = \frac{dS}{d\rho} = \int\limits_0^{+\infty} r^{-\rho} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\mathcal{M}_p(r);$$

$$S_1(\rho) = \int\limits_0^{+\infty} r^{-\rho} |\ln r| \, d\mathcal{M}_p(r).$$

Первая часть диссертации посвящена решению аналогичной задачи, в которой задано ограничение на мажоранту усреднённой считающей функции $N_f(R)$ множества корней $f(z)$, отличных от точки $z = 0$. В случае когда, уточнённый порядок отличается регулярным поведением, в оценке, аналогичной (0.0.18):

$$N_f(r) \leq r^{\rho(r)} + O(r^a), \quad 0 \leq a < \rho, \quad (\forall r > r_0),$$

$$\lim_{r \to +\infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}, \tag{0.0.21}$$

найден неулучшаемый остаточный член $\varepsilon(r)$. В случае, когда уточнённый порядок произвольный, получена асимптотически неулучшаемая оценка сверху остаточного члена.

Скажем несколько слов о функции Валирона $S(\rho)$, заданной формулой (0.0.12). При $0 < \rho < 1$ эта функция элементарна. Поскольку
$\mathcal{M}_0(r) = \ln(1+r)$, то

$$S(\rho) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{r^{-\rho}}{1+r} dr = \frac{\pi}{\sin \pi\rho}, \quad 0 < \rho < 1. \tag{0.0.22}$$

Функция $\mathcal{M}_1(r)$ устроена сложнее:

$$\mathcal{M}_1(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{2}, \text{ при } 0 < r < 2, \\ r + \ln(r-1), \text{ при } r \geq 2, \end{cases}$$

и функция $S(\rho)$ на интервале $1 < \rho < 2$, по-видимому, не элементарна. Она допускает разложение в ряд

$$S(\rho) = \rho 2^{1-\rho}\left(\frac{1}{2-\rho} + \frac{1}{\rho-1}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k-\rho}}{k+\rho}.$$

При $p \geq 2$ функция $\mathcal{M}_p(r)$ на луче $1 + 1/p \leq r < +\infty$ равна сумме $\ln(r-1) + \sum\limits_{k=1}^{p} r^k/k$, а на интервале $0 < r < 1 + 1/p$ устроена довольно сложно (в §2.2 результат Данжуа о её производной будет приведён). Что же касается функции $S(\rho)$, то она на каждом интервале $p < \rho < p+1,\ p \in \mathbb{N}$, выпукла,

$$\lim_{\rho \to p+0} S(\rho) = \lim_{\rho \to p+1-0} S(\rho) = +\infty,$$

$$\lim_{p \to +\infty} \min\{S(\rho) \mid p < \rho < p+1\} = +\infty.$$

Более точно, для $S(\rho)$ верны следующие двусторонние оценки и асимптотика, доказанные в [11]:

$$\frac{1}{\{\rho\}} + \frac{1}{1-\{\rho\}} + \ln 4 - 1 < S(\rho) < \frac{1}{\{\rho\}} + \frac{1}{1-\{\rho\}} + 1, \quad 1 < \rho < 2; \tag{0.0.23}$$

$$\frac{1}{\{\rho\}} + \frac{1}{1-\{\rho\}} + 2\ln(p+1) - 2.1 < S(\rho) < \frac{1}{\{\rho\}} + \frac{1}{1-\{\rho\}} + 2\ln p + 2,$$

$$\rho > 2; \tag{0.0.24}$$

$$S(\rho) = -\psi(\{\rho\}) - \psi(1-\{\rho\}) + 2\ln(2\rho) -$$

$$- \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos \pi x}{x(x+1)}\, dx + O\left(\frac{\ln \rho}{\rho}\right), \quad \rho > 2, \tag{0.0.25}$$

где $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции.

Во второй части диссертации рассматривается задача нахождения оценки сверху логарифма максимума модуля целых функций целого порядка и бесконечного типа.

А. А. Гольдберг [2] обнаружил, что если $\rho(r)$—уточнённый порядок, имеющий своим пределом на бесконечности целое число $p$, то всегда найдётся целая функция целого порядка $p$, не являющаяся функцией нормального типа при порядке $p$, верхняя плотность корней которой при уточнённом порядке $\rho(r)$ конечна, а $\sigma_{\rho(r)}(f) = +\infty$. Поэтому он поставил и решил задачу построения по уточнённому порядку $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r) = p \in \mathbb{N}$, в определённом смысле оптимального нового уточнённого порядка $\widetilde{\rho}(r)$, такого, что для любой целой функции порядка $p$, но не являющейся функцией нормального типа, справедлива импликация

$$D_{\rho(r)}(f) < +\infty \Rightarrow \sigma_{\widetilde{\rho}(r)}(f) < +\infty.$$

Уточнённый порядок $\widetilde{\rho}$ Гольдберг определил формулой

$$\widetilde{\rho}(r) = p + \frac{\ln V(r)}{\ln r}, \quad \text{где} \tag{0.0.26}$$

$$V(r) = \int\limits_{r}^{+\infty} t^{\rho(t)-p-1}dt, \quad \text{если} \quad \int\limits_{r_0}^{+\infty} t^{\rho(t)-p-1}\,dt < +\infty, \tag{0.0.27}$$

$$V(r) = \int\limits_{r_0}^{r} t^{\rho(t)-p-1}dt, \quad \text{если} \quad \int\limits_{r_0}^{+\infty} t^{\rho(t)-p-1}\,dt = +\infty. \tag{0.0.28}$$

**Теорема C. (А.А. Гольдберг [2])** *Пусть $p \in \mathbb{N}$, $\rho(r)$—произвольный уточнённый порядок, $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r) = p$. Пусть далее $f$—произвольная целая функция порядка $p$ (при условии (0.0.27) предполагается также, что она не является функцией нормального типа при порядке $p$), $D_{\rho(r)}(f) < +\infty$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sigma_{\widetilde{\rho}(r)}(f) \le D_{\rho(r)}(f), \tag{0.0.29}$$

*и существует функция, имеющая конечную и положительную плотность множества корней относительно $\rho(r)$, для которой это неравенство обращается в равенство.*

Гольдберг также доказал, что построенный уточнённый порядок обладает следующими асимптотическими свойствами:

$$\lim_{r\to+\infty} r^{\rho(r)-\widetilde{\rho}(r)} = 0, \tag{0.0.30}$$

$$\lim_{r\to+\infty} r^{\widetilde{\rho}(r)-p} = 0 \quad \text{в случае}(0.0.27), \tag{0.0.31}$$

$$\lim_{r\to+\infty} r^{p-\widetilde{\rho}(r)} = 0 \quad \text{в случае}(0.0.28). \tag{0.0.32}$$

В диссертации теорема C дополняется в случае, когда уточнённый порядок $\rho(r)$ удовлетворяет условию (0.0.28), $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r) = p$.

Сформулируем результат в наиболее простом случае:

$$r^{\rho(r)-p} \nearrow \infty. \tag{0.0.33}$$

Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, имеет порядок $p$ и множество корней $f$ имеет конечную положительную верхнюю плотность относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Обозначим

$$\Delta(f,r) = n_f(r) - D_{\rho(r)}(f) r^{\rho(r)}, \qquad r \to +\infty. \tag{0.0.34}$$

Согласно определению 4 имеем:

$$\Delta^+(f,r) = o\left(r^{\rho(r)}\right), \qquad r \to +\infty \tag{0.0.35}$$

где, как обычно, $\Delta^+ = \max(\Delta, 0)$. В главе 2 доказано, что при условии

$$\int\limits_{r_0}^{r} \Delta^+(f,t) t^{-p-1} dt = o\left(r^{\rho(r)-p}\right), \qquad r \to +\infty \tag{0.0.36}$$

для логарифма максимума модуля целой функции верна асимптотическая оценка с двумя неулучшаемыми слагаемыми:

$$\ln M(f,R) \leq D_{\rho(r)}(f)R^{\widetilde{\rho}(R)} + D_{\rho(r)}(f)S_p^{\infty}R^{\rho(R)} + o(R^{\rho(R)}), \quad R \to +\infty, \quad (0.0.37)$$

положительные числа $S_p^{\infty}$ будут определены в §2.1.

В предположении (0.0.33) условие (0.0.36) выполняется, например, при наличии более сильной, чем (0.0.35) оценки:

$$\Delta^{+}(f,r) \leq \varepsilon(r)r^{\rho(r)}, \quad r \geq r_0, \quad \text{где} \quad \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{\varepsilon(r)}{r}dr < +\infty.$$

В §3.5 также доказана неулучшаемость асимптотического неравенства (0.0.37).

Аналогичный результат в случае, когда $r^{\widetilde{\rho}(r)} = o(r^p)$ (т. е. для целых функций нулевого типа при порядке $p$) принадлежит А.Ю. Попову и опубликован в совместной работе [10].

**Цель работы** Цель настоящей диссертации состоит в решении следующих задач: получить асимптотическую оценку сверху логарифма максимума модуля целой функции нецелого порядка через мажоранту усреднённой считающей функции её корней;

найти неулучшаемое второе слагаемое в теореме Гольдберга об асимптотической оценке сверху логарифма максимума модуля целой функции целого порядка бесконечного типа.

**Научная новизна** Все результаты диссертации являются новыми. Перечислим основные из них:

Получен аналог неравенства Валирона—Гольдберга через усреднённую верхнюю плотность множества корней целой функции.

При некотором условии на усреднённую считающую функцию множества корней целой функции доказана в определённом смысле неулучшаемая асимптотическая оценка сверху логарифма максимума модуля.

Дополнен результат Гольдберга для случая целой функции целого порядка бесконечного типа.

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и получены автором самостоятельно. Точные формулировки установленных автором утверждений приведены ниже.

**Методы исследования** В работе применяются методы теории целых функций и правильно меняющихся функций. Использованы, в частности, метод Гольдберга для построения последовательности корней канонического произведения, а также асимптотические методы.

**Теоретическая и практическая ценность** Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях по теории целых функций .

**Апробация работы** По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах:

— Кафедральном семинаре кафедры математического анализа под рук. профессора Т.П.Лукашенко (мехмат МГУ, 2015 г.):

— Семинаре кафедры математического анализа под рук. профессора А.М.Седлецкого (мехмат МГУ, 2012 и 2013 гг.).

Результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях: «КРОМШ–2013» (Крым, 2013), «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2014), «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 2015).

**Публикации** Результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора, в том числе 3 статьях ( [8], [9], [10]) в журналах из перечня ВАК.

**Структура диссертации** Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы, насчитывающего 22 наименование. Общий объем диссертации составляет 83 страницы.

**Благодарность** Автор глубоко признателен научному руководителю доктору физико-математических наук Антону Юрьевичу Попову за постановку задачи, ценные замечания и постоянное внимание к работе.

# Глава 1

# Аналог теоремы Валирона-Гольдберга при ограничении на усреднённую считающую функцию множества корней

## 1.1 Основные результаты

Данная часть диссертации посвящена задаче нахождения асимптотической оценки сверху логарифма максимума модуля целой функции $f$ нецелого порядка при заданной мажоранте усреднённой считающей функции множества корней $N_f(R)$.

Величина $N_f(R)$ более тесно, чем $n_f(R)$, связана с асимптотическим поведением логарифма модуля функции $f$. Справедлива формула Йенсена

$$N_f(R) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\varphi})| d\varphi - m \ln R - \ln \left| \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \right|.$$

Согласно этой формуле при больших $R$ с точностью $O(\ln R)$ функция $N_f(R)$ совпадает со средним логарифма модуля $f(z)$ на окружности $|z| = R$. В случае $f(0) = 1$ указанное среднее есть в точности $N_f(R)$. Поэтому задача оценки сверху $\ln M(f, R)$ через $N_f(R)$ фактически является задачей оценки сверху максимума функции $\ln|f(Re^{i\varphi})|$ на отрезке $0 \le \varphi \le 2\pi$ через её среднее на этом отрезке и выглядит нереальной. Но специфика асимптотического поведения логарифма модуля целой функции нецелого порядка такова, что оценка сверху $\ln M(f,R)$ (с некоторым не зависящим от $R$ множителем) через достаточно регулярную мажоранту функции $N_f(R)$ при всех достаточно больших $R$ уже оказывается возможной.

Как известно, любая целая функция $f$ нецелого порядка имеет бесконечно много корней.

Сформулируем результат, аналогичный теореме Валирона-Гольдберга, но в котором задана усреднённая верхняя плотность множества корней.

ТЕОРЕМА 1.1.1. *Пусть $\rho(r)$ — произвольный уточнённый порядок, $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r) = \rho \in (0,+\infty)\backslash\mathbb{N}$, $f$ — произвольная целая функция порядка $\rho$, множество корней которой имеет конечную верхнюю плотность относительно этого уточнённого порядка. Тогда $f$ имеет конечный тип при порядке $\rho(r)$, и справедливо неравенство*

$$\sigma_{\rho(r)}(f) \le \rho S(\rho) D^*_{\rho(r)}(f). \tag{1.1.1}$$

*При этом существует функция $f$, для которой неравенство (1.1.1) обращается в равенство.*

Оценка сверху (1.1.1) не следует из (0.0.15), поскольку согласно (0.0.8) $D$ оценивается через $\rho D^*$ не сверху, а снизу. Но зато из (0.0.8), (0.0.15), (1.1.1) видно, что если для некоторой функции $f$ неравенство (0.0.15) обращается в равенство, то для этой же функции обращается в равенство и неравенство (1.1.1).

Неравенство (1.1.1) было известно ранее только при $0 < \rho < 1$ и лишь в случае $\rho(r) \equiv \rho$ (см. [5], (гл. 5, §3), [14] (§2). При этих значениях $\rho$ функция

$S(\rho)$ допускает простое выражение: $S(\rho) = \pi \operatorname{cosec}(\pi\rho)$, но при $\rho > 1$ функция $S(\rho)$ не элементарна. В общем случае теорема 1.1.1, по-видимому, является новой.

В диссертации доказывается более детальный результат. Предполагается, что усреднённая считающая функция множества корней $N_f(r)$ допускает оценку сверху

$$N_f(r) \leq r^{\rho(r)} + O(r^a), \qquad r \to +\infty, \tag{1.1.2}$$

где $0 \leq a < \rho$. В предположении справедливости этого ограничения на $N_f(r)$ выводится в определённом смысле неулучшаемая асимптотическая оценка сверху $\ln M(f, r)$.

Сперва рассмотрим уточнённые порядки $\rho(r)$, отличающиеся "правильностью" поведения при $r \to +\infty$. Из определения (0.0.4) следует, что если $\rho(r)$ — произвольный уточнённый порядок, $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho$, то функция

$$l(r) = r^{\rho(r)-\rho} \tag{1.1.3}$$

является медленно меняющейся [13] и справедливо предельное соотношение

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{rl'(r)}{l(r)} = 0. \tag{1.1.4}$$

Потребуем, чтобы уточнённый порядок удовлетворял следующим дополнительным условиям:

1) функция $l(r)$ монотонна,

2) функция

$$w_l(r) = \frac{rl'(r)}{l(r)} \tag{1.1.5}$$

также монотонна (она может быть либо положительной, либо отрицательной) и медленно меняется на бесконечности.

Эти условия выполняются, в частности, для функций

$$l(r) = \exp\left(a(\ln r)^b\right),\ a, b \in \mathbb{R},\ b < 1,$$

$$l(r) = (\ln r)^a (\ln\ln r)^b,\ a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.1.6}$$

ТЕОРЕМА 1.1.2. *Дан уточнённый порядок* $\rho(r)$,

$$\lim_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty)\backslash\mathbb{N},$$

*удовлетворяющий сформулированным выше условиям 1), 2).*

*Если для усреднённой считающей функции* $N_f(r)$ *множества корней целой функции* $f$ *порядка* $\rho$ *выполняется асимптотическая оценка сверху* (1.1.2), *то*

$$\ln M(f, R) \leq R^{\rho(R)}\Big(\rho S(\rho) + (\rho S'(\rho) + S(\rho))w_l(R) + o(w_l(R))\Big),$$

$$R \to +\infty. \tag{1.1.7}$$

*Если для усреднённой считающей функции* $N(r)$ *возрастающей последовательности положительных чисел* $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = +\infty$, *выполняется двусторонняя асимптотическая оценка*

$$r^{\rho(r)} + O(r^a) \leq N(r) = O(r^\tau), \quad r \to +\infty,$$

*в которой* $\tau < [\rho]+1$, *то найдутся числовые последовательности* $\varphi_n \in [\pi, \pi)$ *и* $R_k \to +\infty$ *такие, что для логарифма максимума модуля на окружностях* $|z| = R_k$ *любой целой функции* $F$, *множество всех корней которой есть* $\{r_n e^{i\varphi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, *справедлива асимптотическая оценка снизу*

$$\ln M(F, R_k) \geq R_k^{\rho(R_k)}\Big(\rho S(\rho) + (\rho S'(\rho) + S(\rho))w_l(R_k) + o(w_l(R_k))\Big),$$

$$k \to \infty. \tag{1.1.8}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если существует последовательность $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, для усреднённой считающей функции которой верна асимптотика

$$N(r) = r^{\rho(r)} + O(r^a), \qquad r \to +\infty, \tag{1.1.9}$$

то можно сделать вывод, что оценка снизу (1.1.8) демонстрирует неулучшаемость оценки сверху (1.1.7). Для существования такой последовательности достаточно возрастания на некотором луче $(x_0, +\infty)$ функции $r^{\rho(r)}(\rho + w_l(r))$. Она возрастает, если выполнено хотя бы одно из двух условий:

1) функция $w_l(r)$ абсолютно непрерывна на некотором луче $(x_1, +\infty)$ и $\lim\limits_{r\to+\infty} rw_l'(r) = 0$ (предел берётся по некоторому множеству полной меры),

2) функция $w_l(r)$ возрастает на некотором луче $(x_1, +\infty)$ (в этом случае она, разумеется, отрицательна).

Нетрудно убедиться в том, что условие 1) замечания 1.1 выполнено для всех функций (1.1.6).

Теперь рассмотрим произвольный уточнённый порядок $\rho(r)$. В этом общем случае от функции $l$ ничего не требуется, кроме выполнения предельного соотношения (1.1.4). Возьмём произвольную положительную невозрастающую на некотором луче $(r_0, +\infty)$ функцию $w(r)$, $\lim\limits_{r\to+\infty} w(r) = 0$, и введём класс $\mathcal{L}(w)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из (1.1.5) следует, что, каков бы ни был уточнённый порядок, порождаемая им по формуле (1.1.3) медленно меняющаяся функция принадлежит одному из классов $\mathcal{L}(w)$, причём функцию $w$ можно взять медленно меняющейся.

Обозначим

$$S_1(\rho) = \int\limits_0^{+\infty} |\ln r| r^{-\rho} d\mathcal{M}_p(r),$$

$$S_0(\rho) = \int\limits_0^1 r^{-\rho} d\mathcal{M}_p(r) - \int\limits_1^{+\infty} r^{-\rho} d\mathcal{M}_p(r), \quad p = [\rho]. \tag{1.1.10}$$

ТЕОРЕМА 1.1.3. *Пусть* $w : (r_0, +\infty) \to (0, +\infty)$ — *произвольная невозрастающая медленно меняющаяся на бесконечности функция,* $\lim\limits_{r\to+\infty} w(r) = 0$, $\rho(r)$ — *произвольный уточнённый порядок такой, что* $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty)/\mathbb{N}$, $l(r) = r^{\rho(r)-\rho} \in \mathcal{L}(w)$. *Тогда для логарифма максимума модуля целой функции порядка* $\rho$, *усреднённая считающая функция корней которой удовлетворяет ограничению* (1.1.2), *справедлива асимптотическая оценка сверху*

$$\ln M(f,R) \le R^{\rho(R)}\Big(\rho S(\rho) + (\rho S_1(\rho) + S_0(\rho))w(R) + o(w(R))\Big),$$

$$R \to +\infty. \tag{1.1.11}$$

Выведем из теоремы 1.1.3 теорему 1.1.1. Возьмём произвольное число $b > D^*_{\rho(r)}(f)$. Из (0.0.7) следует, что $N_f(r)$ при $r \to +\infty$ допускает асимптотическую оценку

$$N_f(r) \le br^{\rho(r)} + O(1) \equiv r^{\rho_1(r)} + O(1), \quad \text{где} \quad \rho_1(r) = \rho(r) + \frac{\ln b}{\ln r}.$$

Согласно замечанию 1.1 существует бесконечно малая и медленно меняющаяся на бесконечности невозрастающая положительная функция $w$ такая, что $r^{\rho_1(r)-\rho} \in \mathcal{L}(w)$. По теореме 1.1.3

$$\ln M(f,R) \le R^{\rho_1(R)} \left(\rho S(\rho) + O(w(R))\right) = bR^{\rho(R)} \left(\rho S(\rho) + o(1)\right),$$

$$R \to +\infty. \tag{1.1.12}$$

Из (1.1.12) находим

$$\sigma_{\rho(r)}(f) \le b\rho S(\rho) \quad \forall b > D^*_{\rho(r)}(f) \Rightarrow \sigma_{\rho(r)}(f) \le D^*_{\rho(r)}(f)\rho S(\rho),$$

что и требовалось доказать. Вопрос о неулучшаемости второго члена в асимптотической оценке (1.1.11) пока в полном объёме не решён. Доказано только, что он неулучшаем по порядку при тех значениях $\rho$, расстояние от которых до ближайшего целого числа не больше $1/4$.

Обозначим через $||\rho||$ расстояние от $\rho$ до ближайшего целого числа. В §2.4 будут доказаны неравенства

$$0 < \rho S_1(\rho) + S_0(\rho) < \frac{4\rho}{||\rho||^2} \quad \forall \rho > 0, \tag{1.1.13}$$

а если $\rho > 1$, то

$$\rho S'(\rho) + S(\rho) < -\frac{0.55\rho}{||\rho||^2} \quad \text{при } 0 < \{\rho\} \le \frac{1}{4},$$

$$\rho S'(\rho) + S(\rho) > \frac{0.55\rho}{||\rho||^2} \quad \text{при } \frac{3}{4} \le \{\rho\} < 1. \tag{1.1.14}$$

Из (1.1.13), (1.1.14) получаем

**Следствие.** *В условиях теоремы 1.1.3 при всех достаточно больших $R$ верна оценка*

$$\ln M(f,R) < R^{\rho(R)}\Big(\rho S(\rho) + \frac{4\rho}{||\rho||^2} w(R)\Big). \tag{1.1.15}$$

Убедимся в том, что во втором слагаемом, стоящем в скобках в правой части (1.1.15), множитель 4 нельзя заменить на $1/2$, даже добавив остаточный член. Другими словами, если написать асимптотическую оценку

$$\ln M(f,R) \le R^{\rho(R)}\Big(\rho S(\rho) + \frac{\rho}{2||\rho||^2} w(R) + o(w(R))\Big), \qquad R \to +\infty,$$

то она, вообще говоря, будет неверна. А именно, в классе $\mathcal{L}(w)$, когда функция $w$ медленно меняется на бесконечности, дифференцируема и

$\lim\limits_{r\to+\infty} rw'(r)/w(r) = 0$, найдётся такая медленно меняющаяся функция $l$, что будет справедливо следующее утверждение.

Определим уточнённый порядок $\rho(r)$ равенством

$$\rho(r) = \rho + \ln l(r)/\ln r$$

(это равенство равносильно (1.1.3)). Тогда при $\rho > 1$ и $0 < ||\rho|| \le 1/4$ существуют последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $|z_n| \uparrow +\infty$, усреднённая считающая функция которой имеет асимптотику (1.1.9), целая функция $F$ порядка $\rho$, имеющая своим множеством корней последовательность $\{z_n\}$, и последовательность $R_k \to +\infty$ такие, что

$$\ln M(f, R_k) > R_k^{\rho(R_k)}\Big(\rho S(\rho) + \frac{0.55\rho}{||\rho||^2} w(R_k)\Big). \tag{1.1.16}$$

Существование последовательности $\{r_n\}$, усреднённая считающая функция которой имеет асимптотику (1.1.9), доказано в §2.4. Далее мы полагаем

$$l(r) = \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{r} \frac{w(t)}{t}\,dt\right), \quad \text{если} \quad 0 < \{\rho\} \le \frac{1}{4};$$

$$l(r) = \exp\left(\int\limits_{x_0}^{r} \frac{w(t)}{t}\,dt\right), \quad \text{если} \quad \frac{3}{4} \le \{\rho\} < 1.$$

Эти формулы дают тождества

$$w_l(r) = -w(r),\ 0 < \{\rho\} \le \frac{1}{4}; \quad w_l(r) = w(r),\ \frac{3}{4} \le \{\rho\} < 1,$$

и гарантируют включение $l \in \mathcal{L}(w)$. Применив вторую часть теоремы 1.1.2 и воспользовавшись неравенствами (1.1.14), получаем (1.1.16).

Результаты, изложенные в данном параграфе, опубликованы в работах [8], [9].

## 1.2 Сведение оценки логарифма максимума модуля канонического произведения к оценкам специальных интегралов

Из разложения (0.0.11) следует асимптотика

$$\ln|f(z)| = \ln|f_\Lambda(z)| + O\left(|z|^p + \ln|z|\right), \quad |z| \to +\infty. \tag{1.2.1}$$

Анализ остаточных членов в асимптотических оценках теорем 1.1.2,1.1.3 показывает, что ввиду медленного изменения функции $w$, функция $R^p + \ln R$ является бесконечно малой в сравнении с $w(R)R^{\rho(R)}$ при $R \to +\infty$. Отсюда и из соотношения (1.2.1) видно, что асимптотические оценки теорем 1.1.2,1.1.3 достаточно вывести не для самой функции $f$, а для компоненты $f_\Lambda$ разложения (0.0.11).

В [11] доказано, что исследование асимптотического поведения логарифма максимума модуля канонического произведения сводится к задаче получения двусторонних оценок суммы

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}(R) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{R}{r_n}\right), \tag{1.2.2}$$

где $p \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{R} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — неубывающая последовательность положительных чисел, считающая функция которой удовлетворяет условиям доказываемых теорем. Также в [11] было выведено неравенство

$$\ln M(f_\Lambda, R) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{R}{|\lambda_n|}\right). \tag{1.2.3}$$

Утверждение об оценке снизу логарифма максимума модуля канонического произведения носит более сложный характер. Сформулируем его в виде леммы.

ЛЕММА 1.2.1. *[11] Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{R} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная неубывающая и стремящаяся к $+\infty$ последовательность положительных чисел, считающая функция которой допускает оценку сверху*

$$n_{\mathcal{R}}(r) = O(r^{\tau}), \quad p < \tau < p+1. \tag{1.2.4}$$

*Тогда существуют такие последовательности действительных чисел $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, что верна асимптотика*

$$\ln M(F_\Lambda, r_{n_{2k}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right) + O\left(r_{n_{2k}}^{p+\varepsilon}\right), \quad k \to \infty, \tag{1.2.5}$$

*($\varepsilon$— любое сколь угодно малое положительное число), где*

$$F_\Lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{ze^{-i\varphi_n}}{r_n}\right).$$

*Если $p = 0$, то можно взять $\varphi_n = \pi$ и опустить остаточный член в (1.2.5). При $p \in \mathbb{N}$ аргументы $\varphi_n$ выбираются из полуинтервала $0 \le \varphi_n < \frac{\pi}{p+1}$.*

Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p(R/r_n)$ в [11] оценивалась через специальные интегралы, в которые входила считающая функция последовательности $\{r_n\}$. Выведем подобные оценки для интегралов с усреднённой считающей функцией. Для этого нам понадобятся соотношения, доказанные Данжуа [17]:

$$\mathcal{M}_p'(r) = r^p U_p(r), \quad 0 < r < 1 + \frac{1}{p}, \quad \mathcal{M}_p'(r) = \frac{r^p}{r-1}, \quad r \ge 1 + \frac{1}{p},$$

$$\lim_{r\to 0+} \alpha_p(r) = \frac{\pi}{p+1}, \quad \alpha_p(1) = \frac{\pi}{2p+1}, \quad \lim_{r\to\left(1+\frac{1}{p}\right)^-} \alpha_p(r) = 0. \tag{1.2.6}$$

В равенствах (1.2.6) $\alpha_p(r)$ — единственный корень уравнения

$$\frac{\sin(p+1)\alpha}{\sin p\alpha} = r, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{p+1}, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{1.2.7}$$

при $r \in (0, 1+1/p)$, а функция $U_p(r)$ определяется следующим равенством:

$$U_p(r) = \frac{\sin p\alpha_p(r)}{\sin \alpha_p(r)}, \quad 0 < r < 1 + \frac{1}{p}. \tag{1.2.8}$$

В [11] на основании (1.2.6), (1.2.7) были доказаны неравенства ($\forall p \geq 2$)

$$U_p(r) < p, \ 0 < r < 1 + \frac{1}{p}, \quad 1 < U_p(r) < \frac{1}{1-r} \quad \forall r \in (0,1),$$

$$U_p(r) > \left(1 + \frac{2}{p} - r\right)^{-1}, \quad \frac{2}{p} < r < 1 + \frac{1}{p}. \tag{1.2.9}$$

В частности, имеем

$$\alpha_p(1) = \frac{\pi}{2p+1}, \quad U_p(1) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4p+2}\right)} > \frac{2p+1}{\pi} \quad \forall p \in \mathbb{N}. \tag{1.2.10}$$

Из (1.2.6), (1.2.7) непосредственно следуют тождества

$$U_1(r) = 1, \quad 0 < r < 2, \quad U_2(r) = \frac{r + \sqrt{r^2+4}}{2}, \quad 0 < r < \frac{3}{2}. \tag{1.2.11}$$

В [11] было доказано, что при условии (1.2.4) выполняется соотношение

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}(R) = \int\limits_0^{+\infty} n\left(\frac{R}{t}\right) \mathcal{M}_p'(t)\, dt. \tag{1.2.12}$$

Выведем подобное соотношение для интеграла с усреднённой считающей функцией.

ЛЕММА 1.2.2. *При условии* (1.2.4) *сумма* $\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}(R) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p(R/r_n)$ *выражается интегралом Стильтьеса*

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}(R) = \int\limits_0^{+\infty} N_{\mathcal{R}}\left(\frac{R}{t}\right) d\left(t\mathcal{M}_p'(t)\right), \tag{1.2.13}$$

*в котором* $N_{\mathcal{R}}$ *— усреднённая считающая функция последовательности* $\mathcal{R}$*, а функция* $t\mathcal{M}_p'(t)$ *возрастает на* $[0, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как условие (1.2.4) равносильно условию

$$N_{\mathcal{R}}(r) = O(r^{\tau}), \quad p < \tau < p+1, \tag{1.2.14}$$

и при (1.2.4) выполняется (1.2.12), то при условии (1.2.14) имеем следующую цепочку равенств:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}(R) = \int\limits_0^{+\infty} n\left(\frac{R}{t}\right)\mathcal{M}_p'(t)\,dt = \int\limits_0^{+\infty} n(x)\mathcal{M}_p'\left(\frac{R}{x}\right)d\left(\frac{R}{x}\right) =$$

$$= -R\int\limits_0^{+\infty}\frac{n(x)}{x}\cdot\frac{\mathcal{M}_p'(R/x)}{x}\,dx = -R\left[\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathcal{M}_p'(R/x)}{x}dN(x)\right] =$$

$$= -R\left[N(x)\frac{\mathcal{M}_p'(R/x)}{x}\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty}N(x)d\left(\frac{\mathcal{M}_p'(R/x)}{x}\right)\right] =$$

$$= R\int\limits_0^{+\infty}N(x)d\left[\frac{\mathcal{M}_p'(R/x)}{x}\right] = R\int\limits_0^{+\infty}N\left(\frac{R}{t}\right)d\frac{\mathcal{M}_p'(t)}{R/t} =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}N\left(\frac{R}{t}\right)d\left(t\mathcal{M}_p'(t)\right).$$

Теперь докажем, что функция $t\mathcal{M}_p'(t)$ возрастает на $\mathbb{R}_+$. Действительно, при всех $0 < t < 1+1/p$ ввиду (1.2.6) имеем $t\mathcal{M}_p'(t) = t^{p+1}U_p(t)$, т.е. функция $t\mathcal{M}_p'(t)$ является произведением возрастающих положительных функций. При $t \geq 1+1/p$ из (1.2.6) получаем, что функция $t\mathcal{M}_p'(t) = \frac{t^{p+1}}{t-1}$ возрастает на луче $t \geq 1+1/p$. Лемма доказана.

Дадим оценку сверху интеграла

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}(R) = \int\limits_0^{R/r_1} N\left(\frac{R}{t}\right)d\left(t\mathcal{M}_p'(t)\right), \quad \text{где} \quad r_1 = |\lambda_1|, \tag{1.2.15}$$

если

$$N(r) \leq r^{\rho(r)} + r^a \quad \forall r \geq r_1, \tag{1.2.16}$$

и оценку снизу, если

$$N(r) \geq r^{\rho(r)} - r^{a} \quad \forall r > r_1, \tag{1.2.17}$$

где $0 \leq a < \rho$. Поскольку функция $t\mathcal{M}_p'(t)$ при любом $p \in \mathbb{N}_0$ возрастает на луче $0 < t < +\infty$, то, оценивая интеграл (1.2.15) сверху (снизу), мы вправе заменить функцию $N(R/t)$ её мажорантой (минорантой). В соответствии со сказанным, из (1.2.16), (1.1.3), обозначив

$$\triangle(l; R, t) = \frac{l(R/t)}{l(R)} - 1, \tag{1.2.18}$$

находим

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}(R) \leq \int\limits_0^{R/r_1} \left( \left(\frac{R}{t}\right)^{\rho(R/t)} + \left(\frac{R}{t}\right)^{a} \right) d(t\mathcal{M}_p'(t)) =$$

$$= \int\limits_0^{R/r_1} \left(\frac{R}{t}\right)^{\rho} l\left(\frac{R}{t}\right) d(t\mathcal{M}_p'(t)) + R^a \int\limits_0^{R/r_1} t^{-a} d(t\mathcal{M}_p'(t)) =$$

$$= R^{\rho} l(R) \int\limits_0^{R/r_1} t^{-\rho} \frac{l(R/t)}{l(R)}\, d(t\mathcal{M}_p'(t)) + R^a \int\limits_0^{R/r_1} t^{-a} d(t\mathcal{M}_p'(t)) =$$

$$= R^{\rho(R)} \left( \int\limits_0^{R/r_1} t^{-\rho} d(t\mathcal{M}_p'(t)) + \int\limits_0^{R/r_1} t^{-\rho} \triangle(l; R, t)\, d\mathcal{M}_p(t) \right) +$$

$$+ R^a \int\limits_0^{R/r_1} t^{-a} d(t\mathcal{M}_p'(t)). \tag{1.2.19}$$

Преобразуем интеграл, дающий главный член в (1.2.18):

$$\int\limits_0^{R/r_1} t^{-\rho} d(t\mathcal{M}_p'(t)) = t^{1-\rho} \mathcal{M}_p'(t)\Big|_0^{R/r_1} + \rho \int\limits_0^{R/r_1} t\mathcal{M}_p'(t) t^{-1-\rho} dt =$$

$$= \mathcal{M}_p'\left(\frac{R}{r_1}\right) \cdot \left(\frac{R}{r_1}\right)^{1-\rho} + \rho \int\limits_0^{R/r_1} t^{-\rho} d\mathcal{M}_p(t) =$$

$$= \mathcal{M}_p'\left(\frac{R}{r_1}\right)\left(\frac{R}{r_1}\right)^{1-\rho} + \rho S(\rho) - \rho\int\limits_{R/r_1}^{+\infty} t^{-\rho} d\mathcal{M}_p(t). \tag{1.2.20}$$

Из оценок

$$\mathcal{M}_p'(r) = O(r^{p-1}),\ r \to +\infty;$$

$$\int\limits_{R/r_1}^{+\infty} t^{-\rho} d\mathcal{M}_p(t) = O\left(\int\limits_{R/r_1}^{+\infty} t^{-\rho+p-1}dt\right) = O\left(R^{-\{\rho\}}\right),\ R \to +\infty \tag{1.2.21}$$

и (1.2.20) находим

$$\int\limits_0^{R/r_1} t^{-\rho} d(t\mathcal{M}_p'(t)) = \rho S(\rho) + O(R^{-\{\rho\}}). \tag{1.2.22}$$

Из первой оценки (1.2.21) следует, что

$$R^a\int\limits_0^{R/r_1} t^{-a} d(t\mathcal{M}_p'(t)) = O(R^a), \qquad R \to +\infty. \tag{1.2.23}$$

Асимптотика (1.2.22) вместе с (1.2.19), (1.2.21) и (1.2.23) даёт оценку

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}(R) \leq R^{\rho(R)}\left(\rho S(\rho) + \int\limits_0^{R/r_1} t^{-\rho}\triangle(l; R, t)\ d(t\mathcal{M}_p'(t))\right) +$$

$$+R^{\rho(R)}\left(\frac{\left(\frac{R}{r_1}\right)^{p+1-\rho}}{\frac{R}{r_1}-1}\right) + O(R^{max(p,a)}). \tag{1.2.24}$$

Аналогичным способом, учитывая оценку

$$\int\limits_{R/r_1}^{+\infty} t^{-\rho} d(t\mathcal{M}_p'(t)) = \int\limits_{R/r_1}^{+\infty} t^{-\rho} d\left(\frac{t^{p+1}}{t-1}\right) =$$

$$= \int\limits_{R/r_1}^{+\infty} t^{-\rho}\frac{(p+1)t^p(t-1)-t^{p+1}}{(t-1)^2}\ dt < \int\limits_{R/r_1}^{+\infty} \frac{p\ t^{p+1-\rho}}{(t-1)^2}\ dt <$$

$$< 2p\int\limits_{R/r_1}^{+\infty} t^{-1-\{\rho\}}\ dt = \frac{2pr_1^{\{\rho\}}}{\{\rho\}R^{\{\rho\}}},$$

получаем, что ограничение (1.2.17) влечёт за собой неравенство

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}(R) \geq R^{\rho(R)}\left(\rho S(\rho) + \int\limits_0^{R/r_1} t^{-\rho}\triangle(l;R,t)\ d(t\mathcal{M}'_p(t))\right) +$$

$$+R^{\rho(R)}\left(\frac{\left(\frac{R}{r_1}\right)^{1-\{\rho\}}}{\frac{R}{r_1}-1} - \frac{2pr_1^{\{\rho\}}}{\{\rho\}R^{\{\rho\}}}\right) - O(R^{max(p,a)}). \qquad (1.2.25)$$

Из соотношений (1.2.3) и (1.2.24) вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2.1. *Пусть усреднённая считающая функция последовательности $\Lambda$ удовлетворяет неравенству (1.2.16), а функция $\triangle$ определена в (1.2.18). Тогда при любом $R \geq 4|\lambda_1|$ логарифм максимума модуля канонического произведения $f_\Lambda$ допускает оценку сверху*

$$\ln M(f_\Lambda, R) \leq R^{\rho(R)}\left(\rho S(\rho) + \int\limits_0^{R/r_1} t^{-\rho}\triangle(l;R,t)d(t\mathcal{M}'_p(t))\right) +$$

$$+O(R^{max(p,a)}), \quad R \to +\infty. \qquad (1.2.26)$$

Возьмём такую возрастающую последовательность положительных чисел $r_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = +\infty$, что для её считающей функции $n(x)$ выполняется условие

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{n(r)}{r^{p+2}}\ dr\ < +\infty.$$

Выберем последовательность номеров $n_k$ так, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln r_{n_{k+1}}}{\ln r_{n_k}} = +\infty, \tag{1.2.27}$$

а в остальном последовательность $\{n_k\}$ может быть произвольной. Последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ будет устроена следующим образом: $\lambda_n = r_n e^{i\theta_n}$, $-\pi \le \theta_n < \pi$. Аргументы $\lambda_{n_{2k}}$ берутся произвольными, а числа $\theta_n \in \mathbb{R}$ при $n \in [n_{2k-1}, n_{2k+1})$ определяются равенствами

$$\theta_n = \theta_{n_{2k}}, \quad n_{2k-1} \le n;\ r_n \le \frac{pr_{n_{2k}}}{p+1};$$

$$\theta_n = \theta_{n_{2k}} - \alpha_p\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right), \quad r_n > \frac{pr_{n_{2k}}}{p+1};\ n_{2k-1} < n < n_{2k+1}. \tag{1.2.28}$$

Вследствие (1.2.28) и (1.2.6) имеем

$$\mathcal{F}_p\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}, \theta_{n_{2k}} - \theta_n\right) = \mathcal{M}_p\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right), \quad n_{2k-1} \le n < n_{2k+1}. \tag{1.2.29}$$

Последовательность комплексных чисел, удовлетворяющую условиям (1.2.27) — (1.2.29) назовём последовательностью Гольдберга, поскольку такая конструкция впервые встретилась в [1]. Из леммы 1.2.1 и асимптотического неравенства (1.2.25) вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2.2. *Пусть усреднённая считающая функция последовательности Гольдберга $\Lambda$ подчинена оценке снизу (1.2.17) и оценке сверху (1.2.14). Тогда для любого $\varepsilon > 0$, логарифм максимума модуля канонического произведения $f_\Lambda$ на окружностях $|z| = R_k = r_{n_{2k}}$ при $k \to \infty$ допускает асимптотическую оценку снизу*

$$\ln M(f_\Lambda, R_k) \ge R_k^{\rho(R_k)}\left(\rho S(\rho) + \int\limits_0^{R_k/|\lambda_1|} t^{-\rho}\triangle(l; R_k, t)d(t\mathcal{M}_p'(t))\right) +$$

$$+ O(R_k^{max(p,a)+\varepsilon}). \tag{1.2.30}$$

*Если $p = 0$, то в качестве $\Lambda$ берётся последовательность, лежащая на одном луче, а оценка снизу выполняется при всех достаточно больших $R$, а не только при $R \in \{R_k\}$.*

Выскажем одно соображение, важное для дальнейшего.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если даны $p \in \mathbb{N}$ и последовательность комплексных чисел, усреднённая считающая функция которой удовлетворяет условиям (1.2.16) и (1.2.17), то у элементов этой последовательности можно так изменить аргументы, что она станет последовательностью Гольдберга.

Справедливость данного замечания сразу же следует из изложенной выше конструкции последовательностей Гольдберга.

Получается, что для доказательства теорем 1.1.2, 1.1.3 нам остаётся исследовать асимптотическое поведение при $R \to +\infty$ интеграла

$$J(l, \rho, R) = \int\limits_0^{R/|\lambda_1|} t^{-\rho} \triangle(l; R, t)\, d(t\mathcal{M}_p'(t)) =$$

$$= \int\limits_0^{R/|\lambda_1|} t^{-\rho} \triangle(l; R, t)(\mathcal{M}_p'(t) + t\mathcal{M}_p''(t))\, dt, \quad p = [\rho], \tag{1.2.31}$$

где $l$ — положительная медленно меняющаяся функция, удовлетворяющая условию (1.1.4).

## 1.3 Доказательства теорем

Изложим идею доказательства теорем 1.1.2 и 1.1.3. Из предложений 1.2.1, 1.2.2 и замечания 1.2 видно, что для доказательства теоремы 1.1.2 достаточно вывести асимптотику

$$\int\limits_0^{R/|\lambda_1|} t^{-\rho}\triangle(l;R,t)\ d(t\mathcal{M}_p'(t)) = (S(\rho)+\rho S'(\rho))w_l(R) + o(w_l(R)),$$

$$R\to+\infty. \tag{1.3.1}$$

Для доказательства же теоремы 1.1.3 достаточно при условии $l \in \mathcal{L}(w)$ вывести асимптотическую оценку

$$\int\limits_0^{R/|\lambda_1|} t^{-\rho}\triangle(l;R,t)\ d(t\mathcal{M}_p'(t)) \le (S_0(\rho)+\rho S_1(\rho))w(R) + o(w(R)),$$

$$R\to+\infty. \tag{1.3.2}$$

При исследовании поведения интегралов, стоящих в левых частях соотношений (1.3.1), (1.3.2), будет доказано, что интегрирование по некоторому отрезку $E_R$, содержащему точку $t = 1$, даст главный член, а интеграл по множеству $[0, R/|\lambda_1|]\backslash E_R$ пойдёт в остаток. Этот же метод для исследования поведения интегралов от $t^{-\rho}\triangle(l;R,t)$ по более просто устроенной мере $d\mathcal{M}_p(t)$ применялся в [11]. Для того, чтобы пользоваться некоторыми оценками из [11], необходимо доказать лемму, в которой мера $d(t\mathcal{M}_p'(t))$ оценивается сверху через $d\mathcal{M}_p(t)$.

ЛЕММА 1.3.1. *При любом $p \in \mathbb{N}_0$ верно неравенство*

$$\big(t\mathcal{M}_p'(t)\big)' \le 3(p+1)\mathcal{M}_p'(t), \qquad t\ge 0. \tag{1.3.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p = 0$. Тогда

$$(t\mathcal{M}_0'(t))' = \left(\frac{t}{t+1}\right)' = \frac{1}{(t+1)^2} \le \frac{1}{t+1} = \mathcal{M}_0'(t), \qquad t\ge 0.$$

Следовательно, при $p = 0$ неравенство (1.3.3) выполняется.

Пусть $p = 1$. Тогда

$$\mathcal{M}_1'(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2, \\ \frac{t}{t-1}, & 2 \le t, \end{cases} \qquad \text{откуда} \ \left(t\mathcal{M}_p'(t)\right)' = \begin{cases} 2t, & 0 \le t < 2, \\ \frac{t^2-2t}{t-1}, & 2 \le t. \end{cases} \tag{1.3.4}$$

Из (1.3.4) видно, что $(t\mathcal{M}_1'(t))' \le 2\mathcal{M}_1'(t)$, т. е. при $p = 1$ (1.3.3) выполняется.

Теперь рассмотрим случай $p \ge 2$. Если $t \ge 1 + \frac{1}{p}$, то

$$\mathcal{M}_p'(t) = \frac{t^p}{t-1},$$

$$\left(t\mathcal{M}_p'(t)\right)' = \left(\frac{t^{p+1}}{t-1}\right)' = \frac{pt^p\left(t-1-\frac{1}{p}\right)}{t-1^2} < \frac{pt^p}{t-1} = p\mathcal{M}_p'(t).$$

При $t \ge 1 + \frac{1}{p}$ неравенство (1.3.3) доказано.

Если же $0 \le t \le 1 + \frac{1}{p}$, то по теореме Данжуа имеем

$$\frac{\left(t\mathcal{M}_p'(t)\right)'}{\mathcal{M}_p'(t)} = \frac{\left(t^{p+1}U_p(t)\right)'}{t^pU_p(t)} = p + 1 + t\,\frac{U_p'(t)}{U_p(t)}.$$

Тем самым, осталось доказать неравенство

$$\frac{|U_p'(t)|}{U_p(t)} \le 2p, \qquad 0 \le t < 1 + \frac{1}{p}, \quad p \ge 2. \tag{1.3.5}$$

Из (1.2.8) находим

$$U_p'(t) = \alpha_p'(t)\,\frac{p\cos(p\alpha_p(t))\sin(\alpha_p(t)) - \cos(\alpha_p(t))\sin(p\alpha_p(t))}{\sin^2(\alpha_p(t))}. \tag{1.3.6}$$

Используя равенство (1.2.7) и теорему о производной неявной функции, получаем

$$\alpha_p'(t) = \frac{\sin(p\alpha_p(t))}{(p+1)\cos((p+1)\alpha_p(t)) - tp\cos(p\alpha_p(t))} =$$

$$= \frac{\sin^2(p\alpha_p(t))}{(p+1)\cos((p+1)\alpha_p(t))\sin(p\alpha_p(t)) - p\sin((p+1)\alpha_p(t))\cos(p\alpha_p(t))}. \tag{1.3.7}$$

Обозначив для краткости $\alpha_p(t) = \alpha$, из (1.3.6), (1.3.7) получаем следующее представление модуля отношения $U_p'(t)/U_p(t)$:

$$\left|\frac{U_p'(t)}{U_p(t)}\right| =$$

$$= \left|\frac{p\cos(p\alpha)\sin(p\alpha)\sin\alpha - \cos\alpha\sin^2(p\alpha)}{(p+1)\cos((p+1)\alpha)\sin(p\alpha)\sin\alpha - p\cos(p\alpha)\sin\alpha\sin((p+1)\alpha)}\right| =$$

$$= \left|\frac{\sin(p\alpha)}{\sin\alpha}\right| \cdot \left|\frac{p\cos(p\alpha)\sin\alpha - \cos\alpha\sin(p\alpha)}{\cos((p+1)\alpha)\sin(p\alpha) - p\sin\alpha}\right|. \qquad (1.3.8)$$

Первый множитель в (1.3.8) допускает оценку сверху

$$\left|\frac{\sin(p\alpha)}{\sin\alpha}\right| = \frac{\sin(p\alpha)}{\sin\alpha} \le p.$$

Для оценки второго множителя в 1.3.8 заметим, что при $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{p+1}$ справедливы неравенства

$$p\sin\alpha \ge \sin(p\alpha) \ge \cos((p+1)\alpha)\sin(p\alpha).$$

Поэтому

$$|\cos((p+1)\alpha)\sin(p\alpha) - p\sin\alpha| = p\sin\alpha - \cos((p+1)\alpha)\sin(p\alpha) \ge$$

$$\ge p\sin\alpha - \cos(p\alpha)\sin(p\alpha).$$

Заметим также, что при $\alpha = \frac{\pi}{2p}$ выполнено

$$\cos\alpha\sin(p\alpha) - p\cos(p\alpha)\sin\alpha = \cos\frac{\pi}{2p} > 0,$$

а при $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2p}$ выполнено

$$\cos\alpha\sin(p\alpha) - p\cos(p\alpha)\sin\alpha = \cos\alpha\cos(p\alpha)\,(\operatorname{tg}(p\alpha) - p\operatorname{tg}\alpha) \ge 0.$$

Следовательно, при $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2p}$ имеем

$$\left|\frac{U_p'(t)}{U_p(t)}\right| \le p \cdot \frac{\cos\alpha\sin(p\alpha) - p\cos(p\alpha)\sin\alpha}{p\sin\alpha - \cos(p\alpha)\sin(p\alpha)} \le$$

$$\leq p \cdot \frac{p \sin\alpha - \cos(p\alpha)\sin(p\alpha)}{p \sin\alpha - \cos(p\alpha)\sin(p\alpha)} = p. \tag{1.3.9}$$

При $\frac{\pi}{2p} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{p+1}$ и числитель, и знаменатель дроби внутри второго модуля в (1.3.8) отрицательны в силу неравенств

$$\cos(p\alpha) \leq 0, \qquad \cos((p+1)\alpha) < 0,$$

следовательно,

$$\left|\frac{U_p'(t)}{U_p(t)}\right| \leq p \cdot \frac{\cos\alpha \sin(p\alpha) - p\cos(p\alpha)\sin\alpha}{p\sin\alpha - \cos((p+1)\alpha)\sin(p\alpha)} \leq$$

$$\leq p \cdot \frac{\cos\alpha\sin(p\alpha) + p\sin\alpha}{p\sin\alpha} \leq 2p. \tag{1.3.10}$$

Неравенство (1.3.5) получено, и этим доказательство леммы завершено.

*Доказательство теоремы 1.1.2.* Из предложений 1.2.1 и 1.2.2 и сделанного после них замечания 1.2 вытекает, что для доказательства теоремы 1.1.2 достаточно вывести следующую асимптотику интеграла (1.2.31):

$$J(l,\rho,R) = (\rho S'(\rho) + S(\rho))w_l(R) + o(w_l(R)), \quad R \to +\infty. \tag{1.3.11}$$

Воспользуемся интегральным представлением

$$l(r) = l(y)\exp\left(\int\limits_y^r \frac{w_l(u)}{u}du\right), \quad y, r \in (r_0, +\infty), \tag{1.3.12}$$

которое непосредственно следует из (1.1.5). Поскольку функция $w_l$ медленно меняется на бесконечности и стремится к нулю, то согласно лемме 4 из работы [11] существует функция $\delta(R)$, такая что $\lim\limits_{R\to+\infty} \delta(R) = 0$, и справедлива равномерная по $x \in [R\delta(R), R/\delta(R)]$ асимптотика

$$w_l(x) = w_l(R) + o(w_l(R)), \quad R \to +\infty. \tag{1.3.13}$$

При этом функцию $\delta(R)$ можно взять столь медленно стремящейся к нулю, что

$$\lim_{R\to+\infty} w_l(R)\ln\left(\frac{1}{\delta(R)}\right)=0. \tag{1.3.14}$$

Ввиду (1.3.13), (1.3.14) аргумент экспоненты в интеграле из представления (1.3.12) является бесконечно малой функцией при $R\to+\infty$ равномерно по $t\in[\delta(R),1/\delta(R)]$. Следовательно, равномерно по $t\in[\delta(R),1/\delta(R)]$ верно асимптотическое равенство:

$$\Delta(l,R,t)=\int\limits_R^{R/t}\frac{w_l(u)}{u}du+o\left(\int\limits_R^{R/t}\frac{w_l(u)}{u}du\right)=$$

$$=w_l(R)\ln\frac{1}{t}+o\left(w_l(R)\ln\frac{1}{t}\right),\qquad R\to+\infty. \tag{1.3.15}$$

Разобьём отрезок $[0,R/|\lambda_1|]$, по которому ведётся интегрирование в (1.2.31), на 2 множества:

$$E_0=[0,\delta(R)]\cup(1/\delta(R),R/|\lambda_1|),\qquad E_1=(\delta(R),1/\delta(R)).$$

Обозначим через $J_k(l,\rho,R)$ интеграл по $E_k$ от функции из (1.2.31), $k=0,1$.

В [11],§6 было доказано, что при условии (1.1.4) верна оценка

$$\int\limits_{E_0} t^{-\rho}|\triangle(l;R,t)|d(\mathcal{M}_p(t))=o(w_l(R)),\quad R\to+\infty. \tag{1.3.16}$$

Из (1.3.16) и (1.3.3) находим

$$J_0(l,\rho,R)=o(w_l(R)),\qquad R\to+\infty.$$

Отсюда следует асимптотика

$$J(l,\rho,R)=J_1(l,\rho,R)+o(w_l(R)),\quad R\to+\infty, \tag{1.3.17}$$

главным членом которой является интеграл

$$J_1(l,\rho,R)=\int\limits_{\delta(R)}^{1/\delta(R)} t^{-\rho}\triangle(l,R,t)\ d(t\mathcal{M}_p'(t)). \tag{1.3.18}$$

На основании (1.3.15), (1.3.18) запишем при $R \to +\infty$ асимптотическую формулу

$$J_1(l,\rho,R) = w_l(R) \int\limits_{\delta(R)}^{1/\delta(R)} t^{-\rho} \ln\left(\frac{1}{t}\right) d(t\mathcal{M}_p'(t)) +$$

$$+o\left(w_l(R) \int\limits_{\delta(R)}^{1/\delta(R)} t^{-\rho} \ln\left(\frac{1}{t}\right) d(t\mathcal{M}_p'(t))\right).$$

Вследствие (1.3.3) интеграл

$$I(\rho) = \int\limits_0^{+\infty} t^{-\rho} \ln(\frac{1}{t}) d(t\mathcal{M}_p'(t))$$

абсолютно сходится, поскольку этим же свойством обладает интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{-\rho} \ln\left(\frac{1}{t}\right)\, d\mathcal{M}_p(t).$$

А коль скоро

$$\delta(R) \to +\infty,$$

то

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\delta(R)}^{1/\delta(R)} t^{-\rho} \ln\left(\frac{1}{t}\right) d(t\mathcal{M}_p'(t)) = I(\rho).$$

Следовательно

$$J_1(l,\rho,R) = w_l(R) I(\rho) + o(w_l(R)), \quad R \to +\infty. \tag{1.3.19}$$

Выразим $I(\rho)$ через интегралы $S(\rho)$ и $S'(\rho)$. Имеем

$$I(\rho) = \int\limits_0^{+\infty} t^{-\rho} \ln\left(\frac{1}{t}\right) d(t\mathcal{M}_p'(t)) =$$

$$= t^{-\rho} \ln\left(\frac{1}{t}\right) t\mathcal{M}_p'(t)\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} t\mathcal{M}_p'(t) d\left(t^{-\rho} \ln\left(\frac{1}{t}\right)\right) =$$

$$= t^{-\rho}\ln\left(\frac{1}{t}\right) t\mathcal{M}_p'(t)\Big|_0^{+\infty} + \rho\int\limits_0^{+\infty} t^{-\rho}\ln\left(\frac{1}{t}\right)\mathcal{M}_p'(t)\,dt + \int\limits_0^{+\infty} t^{-\rho}\mathcal{M}_p'(t)dt. \quad (1.3.20)$$

Подстановка $t^{-\rho}\ln\left(\frac{1}{t}\right) t\mathcal{M}_p'(t)\Big|_0^{+\infty}$ обращается в нуль благодаря (1.2.6). Поэтому

$$I(\rho) = \rho S'(\rho) + S(\rho).$$

Соотношение (1.3.20) вместе с (1.3.19) и сходимостью интегралов $S(\rho)$ и $S'(\rho)$ приводит к асимптотике

$$J_1(l,\rho,R) = (\rho S'(\rho) + S(\rho))w_l(R) + o(w_l(R)), \quad R\to+\infty. \quad (1.3.21)$$

Из (1.3.17) и (1.3.21) следует искомая асимптотика (1.3.11)

$$J(l,\rho,R) = (\rho S'(\rho) + S(\rho))w_l(R) + o(w_l(R)), \quad R\to+\infty.$$

$\square$

*Доказательство теоремы 1.1.3.* Из предложения 1.2.1 следует, что для доказательства теоремы 1.1.3 достаточно вывести следующую асимптотическую оценку сверху интеграла $J(l,\rho,R)$ в случае, когда медленно меняющаяся функция $l$ лежит в классе $\mathcal{L}(w)$:

$$J(l,\rho,R) \le (\rho S_1(\rho) + S_0(\rho))\,w(R) + o(w(R)), \quad R\to+\infty. \quad (1.3.22)$$

Подчеркнём, что в теореме 1.1.3 не предполагается ни знакопостоянства функции $w_l$, ни её монотонности. Но $w$ — монотонная мажоранта её модуля. Это обстоятельство позволяет вывести следующую оценку ($t \in (\delta(R), 1/\delta(R))$, $\delta(R)$ выбираем так же, как и в доказательстве теоремы 1.1.2):

$$\frac{l(R/t)}{l(R)} \le \exp\left(w(R)|\ln t|\right),$$

следовательно,

$$\triangle(l,R,t)=\frac{l(R/t)}{l(R)}-1\le w(R)|\ln t|+o(w(R)). \qquad (1.3.23)$$

Далее, как и в доказательстве теоремы 1.1.2 выделим главную часть у интеграла (1.3.22):

$$J(l,\rho,R)=\int\limits_{\delta(R)}^{1/\delta(R)} t^{-\rho}\triangle(l,R,t)\ d(t\mathcal{M}_p'(t))+o(w(R)),\quad R\to+\infty. \qquad (1.3.24)$$

Оценим интеграл (1.3.24), используя (1.3.23), а также сходимость интегралов (1.1.10):

$$\int\limits_{\delta(R)}^{1/\delta(R)} t^{-\rho}\triangle(l,R,t)\ d(t\mathcal{M}_p'(t))\le w(R)\left(\int\limits_{0}^{+\infty}|\ln t|t^{-\rho}\ d(t\mathcal{M}_p'(t))\right)=$$

$$=w(R)\left(\int\limits_{0}^{+\infty}\rho t\mathcal{M}_p'(t)|\ln t|t^{-\rho-1}\ dt+\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{t}t^{-\rho}t\mathcal{M}_p'(t)\ dt\right)-$$

$$-w(R)\left(\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{t}t^{-\rho}t\mathcal{M}_p'(t)\ dt\right)=(\rho S_1(\rho)+S_0(\rho))w(R),\quad R\to+\infty.$$

Из полученной асимптотической оценки, а также из (1.3.24) следует (1.3.22). Теорема доказана. □

## 1.4 Доказательства вспомогательных утверждений

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4.1. *1) При любом нецелом $\rho$ выполняется неравенство* (1.1.13).

*2) При любом нецелом $\rho > 1$, если $||\rho|| \le \frac{1}{4}$, справедливо неравенство*

$$|\rho S'(\rho) + S(\rho)| > \frac{0.55\rho}{||\rho||^2}, \tag{1.4.1}$$

*где* $||\rho|| = \min(\{\rho\}, 1 - \{\rho\})$*—расстояние от* $\rho$ *до ближайшего целого числа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся оценками функций $S(\rho), S'(\rho)$, $S_1(\rho)$ из [11]:

$$\frac{1}{\{\rho\}} + \frac{1}{1-\{\rho\}} + \ln 4 - 1 < S(\rho) < \frac{1}{\{\rho\}} + \frac{1}{1-\{\rho\}} + 1, \quad 1 < \rho < 2,$$

$$\frac{1}{\{\rho\}} + \frac{1}{1-\{\rho\}} + 2\ln(p+1) - 2.1 < S(\rho) < \frac{1}{\{\rho\}} + \frac{1}{1-\{\rho\}} + 2\ln p + 2,$$
$$\rho > 2,$$

$$\frac{1}{(1-\{\rho\})^2} - \frac{1}{\{\rho\}^2} - \frac{5}{4} < S'(\rho) < \frac{1}{(1-\{\rho\})^2} - \frac{1}{\{\rho\}^2} - \frac{1}{4}, \quad 1 < \rho < 2, \tag{1.4.2}$$

$$\frac{1}{(1-\{\rho\})^2} - \frac{1}{\{\rho\}^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+\{\rho\})^2} < S'(\rho) <$$
$$< \frac{1}{(1-\{\rho\})^2} - \frac{1}{\{\rho\}^2} + 1 + \frac{1}{\rho}, \quad \rho > 2,$$
$$\frac{1}{(1-\{\rho\})^2} + \frac{1}{\{\rho\}^2} < S_1(\rho) < \frac{1}{(1-\{\rho\})^2} + \frac{1}{\{\rho\}^2} + \frac{\pi^2}{3} - 1, \quad \rho > 1.$$

Учитывая первую, вторую и последнюю из оценок (1.4.2), при $\rho > 1$ получаем

$$\rho S_1(\rho) + S(\rho) <$$
$$< \rho\left(\frac{1}{(1-\{\rho\})^2} + \frac{1}{\{\rho\}^2}\right) + \frac{1}{\{\rho\}} + \frac{1}{1-\{\rho\}} + 2(\ln p + 1) + \rho\left(\frac{\pi^2}{3} - 1\right). \tag{1.4.3}$$

Поскольку

$$(1-\{\rho\})^{-2} + \{\rho\}^{-2} \le 2||\rho||^{-2}, \; (1-\{\rho\})^{-1} + \{\rho\}^{-1} \le 2||\rho||^{-1},$$

то из (1.4.3) находим, что

$$\rho S_1(\rho) + S(\rho) < 2\rho||\rho||^{-2}A(\rho), \tag{1.4.4}$$

где

$$A(\rho) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3} - 1\right)||\rho||^2 + \frac{||\rho||}{\rho} + \frac{1+\ln p}{\rho}||\rho||^2. \tag{1.4.5}$$

Имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3} - 1\right) < 1.15, \quad ||\rho \le \frac{1}{2}||, \quad \max_{\rho\ge1}\frac{1+\ln[\rho]}{\rho} = 1, \quad \max_{\rho\ge1}\frac{||\rho||}{\rho} = \frac{1}{3}. \tag{1.4.6}$$

Из (1.4.5) и (1.4.6) следует неравенство

$$A(\rho) < 1 + 2.15||\rho||^2 + \frac{1}{3} \le \frac{4}{3} + \frac{2.15}{4} < 2,$$

которое вместе с (1.4.4) и очевидной оценкой $S_0(\rho) < S(\rho)$ даёт (1.1.13). Первая часть предложения 1.4.1 доказана.

Докажем вторую часть предложения. Неравенство $||\rho|| \le \frac{1}{4}$ означает, что либо $\{\rho\} \le \frac{1}{4}$, либо $\{\rho\} \ge \frac{3}{4}$. Начнём с рассмотрения случая $\{\rho\} \le \frac{1}{4}$. Из (1.4.2) получаем неравенства

$$\rho S'(\rho) + S(\rho) < \frac{\rho}{(1-\{\rho\})^2} - \frac{\rho}{\{\rho\}^2} - \frac{\rho}{4} + \frac{1}{\{\rho\}(1-\{\rho\})} + 1,$$

$$1 < \rho < 2, \tag{1.4.7}$$

$$\rho S'(\rho) + S(\rho) < \frac{\rho}{(1-\{\rho\})^2} - \frac{\rho}{\{\rho\}^2} + \frac{1}{\{\rho\}(1-\{\rho\})} + \rho + 3 + 2\ln p,$$

$$\rho > 2. \tag{1.4.8}$$

Из (1.4.7), обозначив $t = \{\rho\} = \rho - 1$, при $1 < \rho \le 5/4$ находим

$$\rho S'(\rho) + S(\rho) < \rho\{\rho\}^{-2}(-1 + u(t)),$$

где

$$u(t) = \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{1-t^2} + \frac{t^2}{1+t} =$$

$$= \frac{7}{4}t^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+1+(-1)^k)t^{k+2} + \sum_{k=1}^{\infty} t^{2k-1}.$$

Из положительности всех коэффициентов разложения $u(t)$ по степеням $t$ следует возрастание этой функции. Поэтому

$$u(t) \le u\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1187}{2880} < 0.42, \quad 0 \le t \le \frac{1}{4},$$

откуда

$$\rho S'(\rho) + S(\rho) < -0.58\rho\{\rho\}^{-2}, \quad 1 < \rho \le \frac{5}{4}. \tag{1.4.9}$$

Из (1.4.8), обозначив $t = \{\rho\} = \rho - p$, при $p < \rho \le p + 1/4$ находим

$$\rho S'(\rho) + S(\rho) < \rho\{\rho\}^{-2}(-1 + u_p(t)),$$

где

$$u_p(t) = \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 + \frac{t}{(1-t)(p+t)} + t^2 + \frac{3 + 2\ln p}{p+t}t^2. \tag{1.4.10}$$

Поскольку функция $t/(t+p)$ возрастает на $[0, +\infty)$, а $(1-t)^{-1}$ возрастает на $[0, 1)$, то каждое слагаемое в (1.4.10) является возрастающей функцией на $[0, 1)$. Следовательно, при $0 \le t \le 1/4$ имеем

$$u_p(t) \le u_p\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{3\left(p + \frac{1}{4}\right)} + \frac{3 + 2\ln p}{4(4p+1)}.$$

Так как последовательности $(p + 1/4)^{-1}$, $(3 + 2\ln p)/(4p + 1)$ убывают, то приходим к оценке

$$u_p(t) \le \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{4}{27} + \frac{3 + 2\ln 2}{36} < 0.45,$$

следовательно,

$$\rho S'(\rho) + S(\rho) < \frac{-0.55\rho}{\{\rho\}^2}, \quad \rho > 2, \ \{\rho\} \le \frac{1}{4}. \tag{1.4.11}$$

Теперь рассмотрим случай $\{\rho\} \geq 3/4$. Из (1.4.2) получаем неравенства

$$\rho S'(\rho) + S(\rho) > \frac{\rho}{(1-\{\rho\})^2} - \frac{\rho}{\{\rho\}^2} - \frac{5\rho}{4} + \frac{1}{\{\rho\}(1-\{\rho\})}, \quad 1 < \rho < 2, \tag{1.4.12}$$

$$\rho S'(\rho) + S(\rho) > \rho S'(\rho) >$$
$$> \rho\left(\frac{1}{(1-\{\rho\})^2} - \frac{1}{\{\rho\}^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+\{\rho\})^2}\right) =$$

$$= \frac{\rho}{(1-\{\rho\})^2}\left(1 - \left(\frac{1-\{\rho\}}{\{\rho\}}\right)^2 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\{\rho\})^2}{(k+\{\rho\})^2}\right), \quad \rho > 2. \tag{1.4.13}$$

При $\rho \in [7/4, 2)$ имеем

$$\frac{1}{\{\rho\}(1-\{\rho\})} \geq \frac{4}{\{\rho\}} > 4 > \frac{5\rho}{4}.$$

Кроме того, в рассматриваемом случае

$$1 - \{\rho\} = ||\rho|| \leq \frac{1}{4}, \qquad \{\rho\} = 1 - ||\rho|| \geq \frac{3}{4}.$$

Отсюда и из (1.4.12) при $\rho \in [7/4, 2)$ находим

$$\rho S'(\rho) + S(\rho) > \frac{\rho}{(1-\{\rho\})^2} - \frac{\rho}{\{\rho\}^2} =$$

$$= \frac{\rho}{||\rho||^2}\left(1 - \left(\frac{||\rho||}{1-||\rho||}\right)^2\right) \geq \frac{8\rho}{9||\rho||^2} > \frac{0.8\rho}{||\rho||^2}. \tag{1.4.14}$$

Из (1.4.13) аналогичным образом получаем

$$\rho S'(\rho) + S(\rho) > \frac{\rho}{||\rho||^2}\left(1 - \left(\frac{||\rho||}{1-||\rho||}\right)^2 - ||\rho||^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(k+\frac{3}{4}\right)^2}\right) \geq$$

$$\geq \frac{\rho}{||\rho||^2}\left(1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) > \frac{0.8\rho}{||\rho||^2}. \tag{1.4.15}$$

Здесь были использованы неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(k+\frac{3}{4}\right)^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2} < \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1,$$

вытекающие из оценки

$$\frac{1}{a^2} < \int\limits_{a-1/2}^{a+1/2} \frac{dx}{x^2}, \qquad a > \frac{1}{2}.$$

Сочетая (1.4.9), (1.4.11), (1.4.14), (1.4.15), получаем (1.4.1) при всех $\rho > 1,\ 0 < ||\rho|| \leq 1/4$. Предложение 1.4.1 полностью доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4.2. *Оценка* (1.1.13) *верна при* $0 < \rho < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, при $\rho \in (0,1)$ справедливы равенства:

$$S(\rho) = \frac{\pi}{\sin(\pi\rho)}, \quad S'(\rho) = -\frac{\pi^2\cos(\pi\rho)}{\sin^2(\pi\rho)},$$

и двусторонняя оценка, установленная в [11]:

$$\frac{1}{(1-\rho)^2} + \frac{1}{\rho^2} - 1 < S_1(\rho) < \frac{1}{(1-\rho)^2} + \frac{1}{\rho^2}.$$

Поэтому

$$S(\rho) + \rho S_1(\rho) < \frac{2\rho}{||\rho||^2} + \frac{\pi}{\sin(\pi\rho)}.$$

Для вывода оценки (1.1.13) осталось проверить, что

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\rho)} < \frac{2\rho}{||\rho||^2},\ 0 < \rho < 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{\pi||\rho||}{2\rho} < \frac{\sin(\pi\rho)}{||\rho||},\ 0 < \rho < 1. \qquad (1.4.16)$$

Так как при $\rho \in [0;1/2]$ верна оценка $\sin(\pi\rho) > 2\rho$, а функции $||\rho||,\ \sin(\pi\rho)$ симметричны относительно точки $\rho = 1/2$, то $\sin(\pi\rho) \geq 2||\rho||$ при $\rho \in (0,1)$. Следовательно, неравенство (1.4.16) выполняется, так как $\pi||\rho||/(2\rho) \leq \pi/2 < 2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4.3. *Если уточнённый порядок $\rho(r)$ дважды дифференцируем и*

$$\lim_{r\to+\infty}\rho''(r)r^2\ln r=0, \tag{1.4.17}$$

*то существует возрастающая последовательность положительных чисел $\{r_n\}$, усреднённая считающая функция $N(r)$ которой имеет асимптотику (1.1.9).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$H(r)=r\frac{dr^{\rho(r)}}{dr}=r^{\rho(r)}\left(\rho(r)+\rho'(r)r\ln r\right) \tag{1.4.18}$$

и убедимся в том, что на некотором луче $(r_1,+\infty)$ она возрастает. Действительно, правая часть (1.4.18) дифференцируема в силу существования $\rho''(r)$. Следовательно,

$$H'(r)=r^{\rho(r)-1}\left((\rho(r)+\rho'(r)r\ln r)^2+\rho''(r)r^2\ln r+\rho'(r)r(2+\ln r)\right). \tag{1.4.19}$$

Из (1.4.19), (1.4.17) и (0.0.4) получаем равенство

$$\lim_{r\to+\infty}r^{1-\rho(r)}H'(r)=\rho^2,\quad \text{где}\quad \rho=\lim_{r\to+\infty}\rho(r).$$

Отсюда вытекает положительность $H'(r)$, а значит и возрастание $H(r)$ при всех $r>a$. Поскольку $\lim\limits_{r\to+\infty}H(r)=+\infty$, то число $a$ можно взять таким, что $H(a)=n_0\in\mathbb{N}$. Из возрастания $H$ следует существование возрастающей последовательности положительных чисел $r_n$ (решений уравнений $H(r_n)=r_n$ при $n\geq n_0+1$; первые $n_0$ элементов этой последовательности берём произвольными на интервале $(a,b)$, $b=r_{n_0+1}$) такой, что её считающая функция $n(t)$ удовлетворяет двойному неравенству

$$H(t)-1\leq n(t)\leq H(t),\quad t\geq b. \tag{1.4.20}$$

Из (1.4.20) и определения функции $H$ находим

$$\left(t^{\rho(t)}\right)'-\frac{1}{t}\leq\frac{n(t)}{t}\leq\left(t^{\rho(t)}\right)'. \tag{1.4.21}$$

Проинтегрировав двойное неравенство (1.4.21) по отрезку $[b, r]$, придём к двусторонней оценке

$$r^{\rho(r)} - b^{\rho(b)} - \ln\left(\frac{r}{b}\right) \leq \int\limits_b^r \frac{n(t)}{t}\, dt \leq r^{\rho(r)} - b^{\rho(b)}. \tag{1.4.22}$$

Прибавив ко всем частям (1.4.22) ограниченную величину

$$\int\limits_0^b (n(t)/t) dt,$$

приходим к асимптотике (1.1.9). Предложение доказано.

# Глава 2

# Уточнение теоремы Гольдберга об оценке типа при уточнённом порядке целой функции целого порядка бесконечного типа

## 2.1 Регуляризованный интеграл Валирона

Регуляризованным интегралом Валирона назовём следующую величину

$$S_p^\infty = \int\limits_0^1 r^{-p}\mathcal{M}_p'(r)dr + \int\limits_1^{+\infty} \left(r^{-p}\mathcal{M}_p'(r) - \frac{1}{r}\right) dr. \tag{2.1.1}$$

Из соотношений (1.2.6), (1.2.9) следует сходимость интегралов в 2.1.1. Последовательность $S_p^\infty$ встретится в теоремах 2.2.1, 2.2.2. В этом параграфе мы дадим двустороннюю оценку этой последовательности, найдём её асимптотику при $p \to +\infty$ и вычислим значения при небольших $p$.

ЛЕММА 2.1.1. *Справедливы равенства*

$$S_1^\infty = 2, \quad S_2^\infty = \frac{3}{2} + \ln 4, \tag{2.1.2}$$

*двусторонние оценки*

$$2\ln p < S_p^\infty < 2\ln p + 2 \quad \forall p \geq 3 \tag{2.1.3}$$

*и асимптотика*

$$S_p^\infty = 2\ln p + A + O\left(\frac{1}{p}\right), \quad p \to +\infty, \tag{2.1.4}$$

*где* $A = \ln(4/\pi) + \gamma - ci(\pi)$, $\gamma$ *— постоянная Эйлера,* $ci(x) = -\int\limits_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$, $A = 0,7451\ldots$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.2.6) и (2.1.1) находим

$$S_p^\infty = \int\limits_0^{1+\frac{1}{p}} U_p(r)dr - \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) + \int\limits_{1+\frac{1}{p}}^{\infty} \left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\right) dr =$$

$$= \int\limits_0^{1+\frac{1}{p}} U_p(r)dr + \ln p. \tag{2.1.5}$$

Из (2.1.5), (1.2.11) находим

$$S_1^\infty = 2, \quad S_2^\infty = \int\limits_0^{\frac{3}{2}} \frac{r + \sqrt{r^2+4}}{2} dr + \ln 2 = \frac{3}{2} + \ln 4.$$

Равенства (2.1.2) доказаны.

Для вывода двусторонних оценок (2.1.3) применим к интегралу (2.1.5) неравенства (1.2.9). Имеем

$$S_p^\infty < \int\limits_0^{1-\frac{1}{p}} \frac{1}{1-r} dr + \ln p + 2 = 2\ln p + 2.$$

Аналогичным методом получается оценка снизу

$$S_p^\infty > \int\limits_{\frac{2}{p}}^{1} \frac{1}{1 + \frac{2}{p} - r} dr + \ln p = 2\ln p.$$

Чтобы вывести асимптотику (2.1.4) воспользуемся равенствами (1.2.6) и (1.2.7) и подставим их в (2.1.5). Имеем

$$\int\limits_0^{1+\frac{1}{p}} U_p(r)dr =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{p+1}}^{0} \frac{\sin p\alpha}{\sin\alpha} \frac{(p+1)\cos(p+1)\alpha\sin p\alpha - p\cos p\alpha\sin(p+1)\alpha}{\sin^2 p\alpha} d\alpha =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{p+1}} \left( \frac{p}{\sin p\alpha} - \frac{\cos(p+1)\alpha}{\sin\alpha} \right) d\alpha =$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{p+1}} \left( \frac{p}{\sin p\alpha} - \frac{\cos(p+1)\alpha}{\alpha} \right) d\alpha + O\left(\frac{1}{p^2}\right), \quad p \to +\infty. \tag{2.1.6}$$

Далее,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{p+1}} \left( \frac{p}{\sin p\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) d\alpha =$$

$$= \ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(p+1)}\right) - \ln\pi + \ln(p+1) - \ln p + \ln 2 =$$

$$= \ln p + 2\ln 2 - 2\ln\pi + O\left(\frac{1}{p}\right), \quad p \to +\infty. \tag{2.1.7}$$

Из (2.1.5), (2.1.6), (2.1.7) получаем асимптотику

$$S_p^\infty = 2\ln p + \int\limits_0^\pi \frac{1-\cos x}{x} dx - 2\ln\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{p}\right), \quad p \to +\infty.$$

Используя выражение интеграла $\int\limits_0^\pi \frac{1-\cos t}{t} dt$ через постоянную Эйлера и интегральный косинус ( [12], гл.2, §4), приходим к асимптотике (2.1.4). Лемма доказана.

## 2.2 Основные результаты

В теоремах 2.2.1, 2.2.2 предполагается, что $p \in \mathbb{N}$, $\rho(r)$ — произвольный уточнённый порядок, $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho(r) = p$, множество корней функции $f$ имеет конечную положительную верхнюю плотность (0.0.6) при уточнённом порядке, $\Delta(f,r)$—функция, заданная формулой (0.0.34). Через $\widetilde{\rho}(r)$ обозначен уточнённый порядок Гольдберга, построенный по $\rho(r)$ согласно (0.0.26)—(0.0.28).

ТЕОРЕМА 2.2.1. *Если выполняются условия* (0.0.28),

$$r^{\rho(r)} = O(r^p), \qquad r \to +\infty, \tag{2.2.1}$$

*и сходится интеграл*

$$\int\limits_{r_0}^{+\infty} \Delta^+(f,t)t^{-p-1}dt,$$

*то верна асимптотическая оценка*

$$\ln M(f,r) \leq D_{\rho(r)}(f)r^{\widetilde{\rho}(r)} + O(r^p), \quad r \to +\infty. \tag{2.2.2}$$

*С другой стороны, каковы бы ни были число $D \in (0,+\infty)$, функция $H$, удовлетворяющая асимптотической оценке*

$$\Delta(r) \equiv H(r) - Dr^{\rho(r)} = o(r^{\rho(r)}), \quad r \to +\infty, \tag{2.2.3}$$

*и стремящаяся к $+\infty$ (вообще говоря, сколь угодно медленно) функция $B$, существуют целая функция $G$ порядка $p$ и возрастающая последовательность положительных чисел $R_k$, $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = +\infty$, такие, что верны соотношения*

$$n_G(r) = H(r) + O(1), \quad r \to +\infty, \tag{2.2.4}$$

*и*

$$\ln M(G,R_k) \geq D_{\rho(r)}(f) R_k^{\widetilde{\rho}(R_k)} - B(R_k) R_k^p \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.2.5}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Сделать остаточный член в (2.2.2) $o(R^p)$ вряд ли возможно. Пока неясно, можно ли в (2.2.5) вместо сколь угодно медленно стремящейся к бесконечности функции $B$ взять константу.

ТЕОРЕМА 2.2.2. *При условиях* (0.0.28),

$$\lim_{r\to+\infty} r^{\rho(r)-p} = +\infty, \tag{2.2.6}$$

*и*

$$\int\limits_{r_0}^{r} \Delta^+(f,t) t^{-p-1} dt = o(r^{\rho(r)-p}), \quad r \to +\infty, \tag{2.2.7}$$

*верна асимптотическая оценка*

$$\ln M(f,r) \leq D_{\rho(r)}(f) r^{\widetilde{\rho}(r)} + D_{\rho(r)}(f) S_p^{\infty} r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}), \quad r \to +\infty. \tag{2.2.8}$$

*С другой стороны, каковы бы ни были число* $D \in (0,+\infty)$ *и возрастающая функция* $H$, *для которых справедлива асимптотическая оценка*

$$\Delta(r) \equiv H(r) - Dr^{\rho(r)} = o(r^{\rho(r)}), \quad r \to +\infty, \tag{2.2.9}$$

*при условии*

$$\int\limits_{r_0}^{r} |\Delta(t)| t^{-p-1} dt = o(r^{\rho(r)-p}), \quad r \to +\infty, \tag{2.2.10}$$

*существуют целая функция* $G$ *бесконечного типа при порядке* $p$ *и возрастающая последовательность положительных чисел* $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *такие, что верны соотношения* (2.2.4), $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = +\infty$,

$$\ln M(G,R_k) \geq DR_k^{\widetilde{\rho}(R_k)} + DS_p^{\infty} R_k^{\rho(R_k)} + o(R_k^{\rho(R_k)}), \quad k \to \infty. \tag{2.2.11}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В связи с требованиями (2.2.7) и (2.2.9) теоремы 2.2.2 возникает вопрос о том, каким условиям должны удовлетворять уточнённый порядок $\rho(r)$ (в предположении (0.0.28)) и измеримая локально ограниченная функция $u : [r_0, +\infty) \to [0, +\infty)$,

$$u(r) = o(r^{\rho(r)}), \qquad r \to +\infty,$$

достаточным для того, чтобы выполнялась асимптотическая оценка

$$\int_{r_0}^{r} u(t)t^{-p-1}dt = o(r^{\rho(r)-p}), \quad r \to +\infty.$$

Если, например, $r^{\rho(r)-p} \nearrow \infty$, то достаточно того, чтобы

$$u(t) \le \varepsilon(t) r^{\rho(r)}, \quad r \ge r_0, \quad \text{где} \int_{r_0}^{+\infty} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt < +\infty.$$

Если никаких условий на регулярность поведения $\rho(r)$ не накладывать, то достаточным является условие $u(r) = O(r^{p_1})$, $r \to +\infty$, где $p_1$ - произвольное число, меньшее $p$.

## 2.3 Лемма о медленно меняющихся функциях

ЛЕММА 2.3.1. *Пусть $l : (r_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ произвольная положительная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{rl'(r)}{l(r)} = 0. \tag{2.3.1}$$

*Тогда, каково бы ни было произвольное число $a \in (0, 1)$, при всех достаточно больших $r$ выполняются двойные неравенства*

$$\left(\frac{t}{r}\right)^a \le \frac{l(t)}{l(r)} \le \left(\frac{r}{t}\right)^a, \quad r_0 \le t \le r, \tag{2.3.2}$$

$$\left(\frac{r}{t}\right)^a \le \frac{l(t)}{l(r)} \le \left(\frac{t}{r}\right)^a, \quad t > r. \tag{2.3.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $w_l(r) = rl'(r)/l(r)$. При любом $t > r_0$ верно равенство

$$\frac{l(t)}{l(r)} = \exp\left(-\int\limits_t^r \frac{w_l(x)}{x}dx\right). \tag{2.3.4}$$

В силу (2.3.1) для любого $a > 0$ существует такое число $x_a$, что при любом $x > x_a$ верно неравенство

$$|w_l(x)| < \frac{a}{2}. \tag{2.3.5}$$

Из (2.3.4), (2.3.5) при

$$x_a \le t \le r \tag{2.3.6}$$

находим

$$\left(\frac{t}{r}\right)^{a/2} = \exp\left(-\int\limits_t^r \frac{a}{2x}dx\right) \le \frac{l(t)}{l(r)} \le \exp\left(\int\limits_t^r \frac{a}{2x}dx\right) = \left(\frac{r}{t}\right)^{a/2}. \tag{2.3.7}$$

Тем самым, двойное неравенство (2.3.2) доказано при всех $t, r$, удовлетворяющих ограничению (2.3.6); и его осталось доказать ещё для значений $t \in [r_0, x_a)$, но зато лишь при достаточно больших $r$. Положим

$$M = M_l(a) = \max_{r_0 \le t \le x_a}\left(\max\left(\frac{l(t)}{l(x_a)}, \frac{l(x_a)}{l(t)}\right)\right).$$

Тогда при любом $t \in [r_0, x_a)$, воспользовавшись уже доказанным неравенством (2.3.7) для значения $t = x_a$, получим оценку сверху

$$\frac{l(t)}{l(r)} = \frac{l(t)}{l(x_a)}\frac{l(x_a)}{l(r)} \le M\left(\frac{r}{x_a}\right)^{a/2} = M\left(\frac{x_a}{r}\right)^{a/2}\left(\frac{r}{x_a}\right)^a \le$$

$$\le M\left(\frac{x_a}{r}\right)^{a/2}\left(\frac{r}{t}\right)^a. \tag{2.3.8}$$

И тем же способом выводится оценка снизу

$$\frac{l(t)}{l(r)} \geq \frac{1}{M}\left(\frac{r}{x_a}\right)^{a/2}\left(\frac{t}{r}\right)^a. \tag{2.3.9}$$

Ясно, что при $r \geq x_a M^{2/a}$ в (2.3.8) получится оценка

$$l(t)/l(r) \leq (r/t)^a,$$

а в (2.3.9) $l(t)/l(r) \geq (t/r)^a$.

Неравенство (2.3.3) доказывается совершенно аналогично. Лемма доказана.

## 2.4 Сведение оценок логарифма максимума модуля канонического произведения к оценкам специального ряда и интеграла

ЛЕММА 2.4.1. *Даны число $q \in \mathbb{N}_0$ и последовательность положительных чисел $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющая условиям*

$$r_n \leq r_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-q-1} < +\infty. \tag{2.4.1}$$

*Справедливы два следующих утверждения.*

*1. Если $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, такая, что $|\lambda_n| = r_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), то каноническое произведение*

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_q\left(\frac{z}{\lambda_n}\right) \tag{2.4.2}$$

*сходится равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$, является целой функцией и логарифм максимума её модуля допускает оценку сверху*

$$\ln M(F,r) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_q\left(\frac{r}{r_n}\right) \quad \forall r > 0. \tag{2.4.3}$$

*2. Пусть на луче $(r_1, +\infty)$ задана положительная, возрастающая и стремящаяся к бесконечности (вообще говоря, сколь угодно медленно) при $r \to +\infty$ функция $A(r)$. Тогда существуют такие последовательности действительных чисел $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и натуральных чисел $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, что для логарифма максимума модуля канонического произведения*

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_q\left(\frac{ze^{i\varphi_n}}{r_n}\right) \tag{2.4.4}$$

*верна асимптотика*

$$\ln M(G, r_{n_{2k}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_q\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right) + O\left(A\left(r_{n_{2k}}\right) r_{n_{2k}}^q\right). \tag{2.4.5}$$

*Если в случае $q = 0$ взять $\varphi_n \equiv \pi$ (тогда*

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + z/r_n)),$$

*то будет выполнятся тождество*

$$\ln M(G, r) \equiv \ln G(r) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_0\left(\frac{r}{r_n}\right), \quad r > 0. \tag{2.4.6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (0.0.14) и разложения в ряд

$$\mathcal{F}_q(R, \varphi) = -\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{R^k}{k} \cos k\varphi, \quad 0 < R < 1, \ \varphi \in \mathbb{R},$$

выводим неравенство

$$\left|\ln\left|E_q\left(Re^{i\varphi}\right)\right|\right| \le \frac{2}{q+1} R^{q+1}, \quad 0 \le R \le \frac{1}{2}.$$

Отсюда и из (2.4.1) следует равномерная сходимость произведения (2.4.2) на любом компакте в $\mathbb{C}$, а значит и включение $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$. Из (2.4.2), (0.0.14), (0.0.12) находим

$$\ln|F(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)\right| \le$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \ln M\left(E_p, \left|\frac{z}{\lambda_n}\right|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\left|\frac{z}{r_n}\right|\right).$$

Отсюда следует неравенство (2.4.3).

Второе утверждение будем доказывать в случае $q \in \mathbb{N}$, поскольку при $q = 0$ оно тривиально.

Определим рекуррентно последовательность номеров $\{n_k\}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$n_k < A(r_{n_{k+1}}), \quad \sum_{n=n_{k+1}}^{\infty} r_n^{-q-1} < \frac{1}{r_{n_k}}, \quad r_{n_{k+1}} > 2r_{n_k}, \tag{2.4.7}$$

а в остальном последовательность $\{n_k\}$ может быть произвольной. Последовательность $\{\varphi_n\}$ построим следующим образом. Числа $\varphi_{n_{2k}}$ берутся произвольными, а числа $\{\varphi_n\}$ при

$$n \in [n_{2k-1}, n_{2k+1})$$

определяются равенствами

$$\varphi_n = \begin{cases} \varphi_{n_{2k}} \quad \text{при } n_{2k-1} \leq n, \ r_n \leq \frac{q r_{n_{2k}}}{q+1}, \\ \varphi_{n_{2k}} - \alpha_p\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right) \quad \text{при } n < n_{2k+1}, \ r_n > \frac{q r_{n_{2k}}}{q+1}, \end{cases} \tag{2.4.8}$$

где $\alpha_q(r)$ — единственный корень уравнения

$$\frac{\sin(q+1)\alpha}{\sin q\alpha} = r, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{q+1}, \quad q \in \mathbb{N},$$

при $r \in (0; 1 + 1/q)$.

Данжуа [17] доказал, что

$$\ln|E_q(re^{i\alpha_q(r)})| = \max_{|w|\leq r} \ln|E_q(w)| = \mathcal{M}_q(r), \quad 0 < r < \frac{q+1}{q},$$

$$\ln|E_q(r)| = \max_{|w|\leq r} \ln|E_q(w)| = \mathcal{M}_q(r), \quad r \geq \frac{q+1}{q}. \tag{2.4.9}$$

Из (2.4.8), (2.4.9) находим

$$\ln\left|E_q\left(\frac{r_{n_{2k}}\exp(i\varphi_{n_{2k}}-i\varphi_n)}{r_n}\right)\right| = \mathcal{M}_q\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right), \ n_{2k-1}\le n< n_{2k+1}.$$

Следовательно,

$$\ln M(F,r_{n_{2k}}) \ge \ln|F(r_{n_{2k}}\exp(i\varphi_{n_{2k}}))| =$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|E_q\left(\frac{r_{n_{2k}}\exp(i\varphi_{n_{2k}}-i\varphi_n)}{r_n}\right)\right| =$$
$$=\sum_{n\in[1,n_{2k-1})\cup[n_{2k+1},+\infty)}\ln\left|E_q\left(\frac{r_{n_{2k}}\exp(i\varphi_{n_{2k}}-i\varphi_n)}{r_n}\right)\right|+$$
$$+\sum_{n=n_{2k-1}}^{n_{2k+1}-1}\mathcal{M}_q\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right).$$

Отсюда, обозначив $m_q(r)=\min\limits_{|w|=r}\ln|E_q(w)|$, выводим оценку снизу

$$\ln M(F,r_{n_{2k}}) \ge \sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{M}_q\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right)+$$
$$+b\sum_{n\in[1,n_{2k-1})\cup[n_{2k+1},+\infty)}\left(m_q\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right)-\mathcal{M}_q\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right)\right). \tag{2.4.10}$$

Из (2.4.10) и неравенства (2.4.3) заключаем, что для доказательства асимптотики (2.4.5) осталось установить справедливость соотношения

$$S_{1,k}+S_{2,k}=O\left(A(r_{n_{2k}})r_{n_{2k}}^q\right), \quad k\to\infty, \tag{2.4.11}$$

в котором

$$S_{1,k}=\sum_{n=1}^{n_{2k-1}-1}\left(m_q\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right)-\mathcal{M}_q\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right)\right),$$
$$S_{2,k}=\sum_{n=n_{2k+1}}^{\infty}\left(m_q\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right)-\mathcal{M}_q\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right)\right), \tag{2.4.12}$$

Из (1.2.7) и разложения в ряд $\mathcal{F}_q(r,\varphi) = -\sum\limits_{m=q+1}^{\infty}(r^m/m)\cos m\varphi$, $0 < r < 1$, следуют неравенства

$$-\frac{4}{q+1}r^{q+1} < m_q(r) - \mathcal{M}_q(r) < 0, \quad 0 < r \le \frac{1}{2},$$

$$-\frac{4}{q}r^q < m_q(r) - \mathcal{M}_q(r) < 0, \quad r > 4. \tag{2.4.13}$$

Применив (2.4.13) к оценке сумм (2.4.12), получим

$$S_{1,k} < 0, \quad S_{2,k} < 0, \tag{2.4.14}$$

$$-S_{1,k} < \frac{4}{q}\sum_{n=1}^{n_{2k-1}}\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right)^q < \frac{4n_{2k-1}}{q}\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_1}\right)^q,$$

$$-S_{2,k} < \frac{4}{q+1}\sum_{n=n_{2k+1}}^{\infty}\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right)^{q+1} = \frac{4r_{n_{2k}}^{q+1}}{q+1}\sum_{n=n_{2k+1}}^{\infty} r_n^{-q-1}. \tag{2.4.15}$$

Из (2.4.7), (2.4.15) находим

$$-S_{1,k} < 4q^{-1}r_1^{-q}A(r_{n_{2k}})r_{n_{2k}}^q,$$

$$-S_{2,k} < 4(q+1)^{-1}r_{n_{2k}}^q. \tag{2.4.16}$$

Соотношения (2.4.14), (2.4.16) влекут за собой (2.4.11), а это, как отмечалось выше, полностью доказывает лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ. Метод построения последовательности корней произведения (2.4.4), как и в первой части диссертации, заимствован из работы Гольдберга [1].

Лемма 2.4.1 позволяет свести оценку логарифма максимума модуля канонического произведения (2.4.2) к оценке суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{M}_q(r/r_n)$ в случае, когда при заданных модулях корней максимум модуля функции

(2.4.2) имеет наибольший возможный рост. Следующяя лемма сводит оценку суммы этого ряда к оценке специального интеграла, если считающая функция последовательности $\{r_n\}$ имеет "достаточно регулярную" мажоранту (или миноранту).

ЛЕММА 2.4.2. *Если выполнено условие* (2.4.1), $n(t)$ — *количество элементов последовательности* $\{r_n\}$, *не превосходящих* $t$, *то верно тождество*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_q\left(\frac{r}{r_n}\right) = \int\limits_{r_1}^{+\infty} \frac{rn(t)}{t^2} \mathcal{M}'_q\left(\frac{r}{t}\right) dt, \quad r > 0. \tag{2.4.17}$$

*Если* $\varphi \in C[r_1, +\infty)$, $n(t) \le \varphi(t)$ $(\forall t \ge r_1)$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_q\left(\frac{r}{r_n}\right) \le \int\limits_{r_1}^{+\infty} \frac{r\varphi(t)}{t^2} \mathcal{M}'_q\left(\frac{r}{t}\right) dt, \quad r > 0, \tag{2.4.18}$$

*а если* $\varphi(t) \le n(t)$ $(\forall t \ge r_1)$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_q\left(\frac{r}{r_n}\right) \ge \int\limits_{r_1}^{+\infty} \frac{r\varphi(t)}{t^2} \mathcal{M}'_q\left(\frac{r}{t}\right) dt, \quad r > 0. \tag{2.4.19}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сперва, что из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-q-1}$$

и монотонности $r_n$ следует предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n r_n^{-q-1} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} n(t) t^{-q-1} = 0$$

и сходимость этого ряда равносильна сходимости интеграла

$$\int\limits_{r_1}^{+\infty} n(t) t^{-q-2} dt.$$

Отсюда и из эквивалентностей [17]

$$\mathcal{M}_q(x) \sim \frac{x^{q+1}}{q+1}, \quad \mathcal{M}'_q(x) \sim x^q, \quad x \to 0+,$$

вытекают соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} n(t)\mathcal{M}_q\left(\frac{r}{t}\right) = 0, \quad \int\limits_{r_1}^{+\infty} \frac{n(t)}{t^2}\mathcal{M}'_q\left(\frac{r}{t}\right) dt < +\infty \quad \forall r > 0. \tag{2.4.20}$$

Согласно определению интеграла Стильтьеса и функции $n(t)$ верно тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_q\left(\frac{r}{r_n}\right) = \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{M}_q\left(\frac{r}{t}\right) dn(t), \quad r > 0. \tag{2.4.21}$$

Интегрируя по частям в правой части (2.4.21) (напомним, что $\mathcal{M}_q \in C^1(0,+\infty)$) и учитывая (2.4.20), приходим к тождеству (2.4.17). Неравенства (2.4.18) и (2.4.19) следуют из (2.4.17) и положительности $\mathcal{M}'_q(x)$ на луче $0 < x < +\infty$. Лемма доказана.

Неравенства леммы 2.4.2 убеждают нас в необходимости изучения асимптотического поведения при $r \to +\infty$ интеграла

$$J_q(r;h) = \int\limits_{r_1}^{+\infty} \frac{rh(t)}{t^2}\mathcal{M}'_q\left(\frac{r}{t}\right) dt, \tag{2.4.22}$$

где $h : [r_1,+\infty) \to (0,+\infty)$ — некоторая правильно меняющаяся на бесконечности функция [13]. Обычно именно такими функциями оценивают сверху или снизу считающие функции последовательностей. Нас будут интересовать функции вида

$$h(t) = t^{\rho(t)} \equiv t^{\rho} l(t), \tag{2.4.23}$$

где $\rho(t)$ — уточнённый порядок, $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(t) = \rho$.

Обозначим

$$\widetilde{\mathcal{M}}_q^{\infty}(x) = \begin{cases} x^{-q}\mathcal{M}_q'(x), & 0 < x < 1, \\ x^{-q}\mathcal{M}_q'(x) - \frac{1}{x}, & x > 1. \end{cases} \tag{2.4.24}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $x \in (0,1)$ верны соотношения

$$\widetilde{\mathcal{M}}_1^{\infty}(x) \equiv 1, \qquad 1 \le \widetilde{\mathcal{M}}_q^{\infty}(x) \le \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4q+2}\right), \quad q \ge 2, \tag{2.4.25}$$

а на луче $1 + 1/q \le x < +\infty$ выполняется тождество

$$\widetilde{\mathcal{M}}_q^{\infty}(x) \equiv \frac{1}{x(x-1)} \quad \forall q \in \mathbb{N}. \tag{2.4.26}$$

Таким образом, каждая функция $\widetilde{\mathcal{M}}_q^{\infty}(x)$ непрерывна и ограничена на интервале $(0,1)$, непрерывна на луче $[1,+\infty)$ и монотонно стремится к нулю на луче $[1+1/q,+\infty)$. Из сказанного и (2.4.26) следует включение $\widetilde{\mathcal{M}}_q^{\infty}(x) \in L(0,+\infty)$ $(\forall q \in \mathbb{N})$.

## 2.5 Доказательства теорем.

*Доказательство теоремы 2.2.1.* Если количество корней функции $f$ конечно, то $f(z) = \mathcal{P}(z)e^{g(z)}$, где $\mathcal{P}, g$—многочлены, $\deg g \le p$. Следовательно,

$$\ln M(f,R) = O(R^p), \qquad R \to +\infty,$$

а так как в силу (0.0.32) $R^p = o\left(R^{\widetilde{\rho}(r)}\right)$, то асимптотическое неравенство (2.2.2) заведомо выполняется.

Если функция $f$ имеет бесконечно много корней, то, расположив все её ненулевые корни в последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (каждый корень встречается в этой последовательности столько раз, какова его кратность), получим следующее разложение функции $f$ в произведение:

$$f(z) = f_1(z) f_\Lambda(z), \quad \text{где} \quad f_1(z) = z^m e^{g(z)}, \quad f_\Lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right),$$

$g$—многочлен степени $\le p$, $m$—кратность корня $f$ в точке $z=0$ (если $f(0)\ne 0$, то множитель $z^m$ отсутствует). Поскольку $\ln M(f_1,R)=O(R^p)$, $R\to+\infty$, то оценку (2.2.2) достаточно вывести для $\ln M(f_\Lambda,R)$, а согласно лемме 2.4.1—даже для мажоранты логарифма максимума модуля—суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{M}_p(R/|\lambda_n|)$.

Согласно обозначению (0.0.34) верно неравенство

$$n_f(r)\le D_{\rho(r)}(f)r^{\rho(r)}+\Delta^+(f,r). \tag{2.5.1}$$

Лемма 2.4.2 вместе с оценкой (2.5.1) считающей функции последовательности $\Lambda$ показывают, что для этой суммы верна оценка сверху

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{M}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}\right)\le D_{\rho(r)}(f)J_p(r;h_1)+J_p(r;h_2),, \tag{2.5.2}$$

где $h_1(t)=t^{\rho(t)}$, $h_2(t)=t^{\rho(t)}\varepsilon(t)$. Следовательно, для доказательства асимптотической оценки (2.2.2) достаточно установить справедливость соотношений

$$J_p(r;h_1)=r^{\widetilde{\rho}(r)}+O(r^p),\quad J_p(r;h_2)=O(r^p),\quad r\to+\infty. \tag{2.5.3}$$

Приступим к доказательству асимптотических равенств (2.5.3). Преобразуем интеграл $J_p(r;h_1)$. Имеем

$$J_p(r;h_1)=\int\limits_{r_1}^{+\infty}\frac{rh_1(t)}{t^2}\mathcal{M}_p'\left(\frac{r}{t}\right)dt=r\int\limits_{r_1}^{+\infty}t^{p-2}l(t)\mathcal{M}_p'\left(\frac{r}{t}\right)dt=$$

$$=r\int\limits_{0}^{r/r_1}\left(\frac{r}{x}\right)^{p-2}l\left(\frac{r}{x}\right)\mathcal{M}_p'(x)\,d\left(-\frac{r}{x}\right)=r^p\int\limits_{0}^{r/r_1}(x)^{-p}\,l\left(\frac{r}{x}\right)\mathcal{M}_p'(x)\,dx=$$

$$=r^p\left(\int\limits_{0}^{1}(x)^{-p}\,l\left(\frac{r}{x}\right)\mathcal{M}_p'(x)\,dx+\int\limits_{1}^{r/r_1}\left(x^{-p}\mathcal{M}_p'(x)-\frac{1}{x}\right)l\left(\frac{r}{x}\right)dx\right)+$$

$$+r^p\left(\int\limits_1^{r/r_1} l\left(\frac{r}{x}\right)\frac{dx}{x}\right)=r^p\int\limits_0^{r/r_1} l\left(\frac{r}{x}\right)\widetilde{\mathcal{M}}_p^\infty(x)\,dx+r^p\int\limits_{r_1}^{r}\frac{l(t)}{t}dt. \tag{2.5.4}$$

В последнем переходе мы использовали определение (2.4.24) функции $\widetilde{\mathcal{M}}_p^\infty$. Из (2.5.4), определения уточнённого порядка $\widetilde{\rho}(r)$ и функции $l$ получаем равенство

$$J_p(r;h_1)=r^{\widetilde{\rho}(r)}+r^{\rho(r)}\int\limits_0^{r/r_1}\frac{l(r/x)}{l(r)}\widetilde{\mathcal{M}}_p^\infty(x)\,dx. \tag{2.5.5}$$

Далее, выведем предельное соотношение

$$\lim_{r\to+\infty}\int\limits_0^{r/r_1}\frac{l(r/x)}{l(r)}\widetilde{\mathcal{M}}_p^\infty(x)dx=\int\limits_0^{+\infty}\widetilde{\mathcal{M}}_p^\infty(x)dx=S_p^\infty. \tag{2.5.6}$$

Это соотношение несложно выводится из свойств медленно меняющейся функции и теоремы о предельном переходе под знаком интеграла, состоящей в следующем.

Пусть $(X,\mu)$ — пространство с положительной мерой,

$$\varphi:(b,+\infty)\times X\to\mathbb{C},\ \ \varphi(r,\bullet)\in L(X,\mu)\ \forall r>b.$$

Если мажоранта семейства функций $\{\varphi(r,x)|r\in(b,+\infty)\}$, равная $\Phi(x)=\sup\limits_{r>b}|\varphi(r,x)|$ лежит в пространстве $L(X,\mu)$ и при почти всех $x\in X$ существует предел $\lim\limits_{r\to+\infty}\varphi(r,x)=\varphi(x)$, являющийся измеримой функцией, то

$$\varphi\in L(X,\mu),\quad \lim_{r\to+\infty}\int\limits_X\varphi(r,x)d\mu(x)=\int\limits_X\varphi(x)d\mu(x). \tag{2.5.7}$$

Эта теорема является прямым следствием классической теоремы Лебега о предельном переходе [20] (гл. 1, §12). Действительно, какова бы ни была последовательность $r_n\to+\infty$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(r_n,x)=\varphi(x)\text{ при п. в. }x\in X,\quad \sup_n|\varphi(r_n,x)|\le\Phi(x)\in L(X).$$

Следовательно, $\varphi \in L(X)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X \varphi(r_n, x) d\mu(x) = \int\limits_X \varphi(x) d\mu(x) \quad \forall \{r_n\} : \lim_{n\to\infty} r_n = +\infty.$$

Последнее соотношение влечёт за собой справедливость (2.5.7).

В качестве $(X, \mu)$ возьмём луч $(0, +\infty)$ с обычной мерой Лебега. Положим

$$\varphi(r, x) = \frac{l(r/x)}{l(r)} \widetilde{\mathcal{M}}_p^\infty(x), \quad 0 < x \le \frac{r}{|\lambda_1|}, \quad \varphi(r, x) = 0, \quad x > \frac{r}{|\lambda_1|}. \tag{2.5.8}$$

Согласно лемме 2.3.1 существует такое число $b$ (своё для каждой функции $l$), что при любом $r > b$ верны неравенства

$$\frac{l(r/x)}{l(r)} \le x^{-1/2}, \quad 0 < x < 1, \quad \frac{l(r/x)}{l(r)} \le x^{1/2} \quad 1 < x < \frac{r}{|\lambda_1|}. \tag{2.5.9}$$

В силу медленного изменения функции $l$ имеем

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{l(r/x)}{l(r)} = 1 \quad \forall x \in (0, +\infty). \tag{2.5.10}$$

Из (2.5.8), (2.5.10) находим

$$\lim_{r\to+\infty} \varphi(r, x) = \widetilde{\mathcal{M}}_p^\infty(x) \quad \forall x \in (0, +\infty), \tag{2.5.11}$$

а из (2.5.8), (2.5.9) следует оценка

$$\sup_{r>b} |\varphi(r, x)| \le (x^{-1/2} + x^{1/2}) \widetilde{\mathcal{M}}_p^\infty(x) \in L(0, +\infty) \tag{2.5.12}$$

(последнее включение легко выводится из (2.4.25),(2.4.26)).

Соотношения (2.5.11), (2.5.12) показывают, что все условия цитированной теоремы о предельном переходе под знаком интеграла выполнены. Применив её, получим (2.5.6). Из (2.5.5), (2.5.6) находим

$$J_p(r; h_1) = r^{\widetilde{\rho}(r)} + S_p^\infty r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}), \quad r \to +\infty. \tag{2.5.13}$$

Из (2.5.13) и (2.2.1) получаем первое соотношение (2.5.3).

Оценим сверху интеграл $J_p(r; h_2)$ (он, очевидно, положителен). Для этого воспользуемся оценками (1.2.6). Имеем:

$$\mathcal{M}'_p < px^p, \quad 0 < x \le 1, \quad \mathcal{M}'_p < epx^{p-1}, \quad x > 1.$$

Далее,

$$J_p(r; h_2) = r \int\limits_{r_1}^{+\infty} t^{p-2} l(t)\varepsilon(t)\mathcal{M}'_p\left(\frac{r}{t}\right) dt =$$

$$= O\left(r^p \int\limits_{r_1}^{r} \frac{l(t)\varepsilon(t)}{t} dt\right) + O\left(r^{p+1} \int\limits_{r}^{+\infty} \frac{l(t)\varepsilon(t)}{t^2} dt\right). \qquad (2.5.14)$$

В условиях теоремы 2.2.1 верны асимптотические оценки $l(t) = O(1)$, $\varepsilon(t) = o(1)$, $t \to +\infty$, интеграл $\int\limits_{r_1}^{+\infty} (l(t)\varepsilon(t)/t)\, dt$ сходится. На основании этого из (2.5.14) находим

$$J_p(r; h_2) = O(r^p) + O\left(r^{p+1} \int\limits_{r}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}\right) = O(r^p), \qquad r \to +\infty. \qquad (2.5.15)$$

Второе соотношение (2.5.3) доказано, и тем самым доказательство первой части теоремы 2.2.1 завершено.

Докажем вторую часть теоремы. По данной возрастающей функции $H$ построим возрастающую последовательность положительных чисел $r_n$ как решения уравнения $H(r_n) = n$ (если $H(r_0) > 1$, то несколько первых членов этой последовательности берём произвольными). Тогда при всех значениях $r$, начиная с того, в котором функция $H$ принимает целое значение, считающая функция $n(r)$ построенной последовательности удовлетворяет двойному неравенству

$$H(r) - 1 < n(r) \le H(r),$$

а значит и асимптотике (2.2.4). Из (2.2.3), (2.2.4) следует эквивалентность

$$n(r) \sim Dr^{\rho(r)}, \qquad r \to +\infty. \qquad (2.5.16)$$

Из (2.5.16) и (0.0.27) вытекает сходимость интеграла

$$\int\limits_{r_1}^{+\infty} r^{-p-1} n(r) dr = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-p},$$

а, значит, выполняется условие леммы 2.4.1 ($q = p$). По этой лемме (можно взять $A(r) = \sqrt{B(r)}$) найдутся последовательность действительных чисел $\varphi_n$ и возрастающая последовательность положительных чисел $R_k = r_{n_{2k}}$, $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = +\infty$, такие, что

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right), \quad \lambda_n = r_n e^{i\varphi_n},$$

является целой функцией и для логарифма максимума её модуля на окружностях $|z| = R_k$ верна асимптотика

$$\ln M(G, R_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{R_k}{r_n}\right) + O\left(R_k^p \sqrt{B(R_k)}\right), \quad k \to \infty. \tag{2.5.17}$$

Очевидно также, что множество корней функции $G$ есть в точности последовательность $\{r_n e^{i\varphi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $n(r) = n_G(r)$.

Ввиду условия, наложенного в теореме на функцию $H$, и доказанной асимптотики (2.2.4) считающая функция множества корней функции $G$ допускает оценку снизу

$$n_G(r) \geq D r^{\rho(r)} - \varepsilon_1(r) r^{\rho(r)}, \tag{2.5.18}$$

где $\varepsilon_1(r) = o(1)$, $r \to +\infty$. Эта оценка следует из условий (2.2.3), (2.2.1) и доказанного выше соотношения (2.2.4). Из (2.4.19) и (2.5.18) следует неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{r}{r_n}\right) \geq D J_p(r; h_1) - J_p(r; h_2), \tag{2.5.19}$$

где $h_1 = t^{\rho(t)}$, $h_2 = \varepsilon_1(t) t^{\rho(t)}$.

Асимптотика (2.5.13) вместе с асимптотической оценкой (2.5.15) позволяют вывести из (2.5.19) оценку снизу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{r}{r_n}\right) \geq Dr^{\widetilde{\rho}(r)} + O(r^p), \qquad r \to +\infty. \tag{2.5.20}$$

Отсюда и из (2.5.17) находим

$$\ln M(G, R_k) \geq DR_k^{\rho(R_k)} + O\left(\sqrt{B(R_k)}R_k^p\right), \quad k \to \infty.$$

Следовательно, при всех достаточно больших $k$ выполняется неравенство (2.2.5), а за счёт отбрасывания нескольких первых элементов последовательности $\{R_k\}$ с последующей их перенумерацией можно сделать так, чтобы неравенство (2.2.5) выполнялось при всех $k \in \mathbb{N}$. Теорема полностью доказана. □

*Доказательство теоремы 2.2.2.* Если количество корней функции $f$ конечно, то $f(z) = \mathcal{P}(z)e^{g(z)}$, где $\mathcal{P}, g$—многочлены, $\deg g \leq p$. Следовательно,

$$\ln M(f, R) = O(R^p), \qquad R \to +\infty,$$

а так как в силу (0.0.32) $R^p = o\left(R^{\widetilde{\rho}(r)}\right)$, то асимптотическое неравенство (2.2.8) заведомо выполняется.

Если функция $f$ имеет бесконечно много корней, то, расположив все её ненулевые корни в последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (каждый корень встречается в этой последовательности столько раз, какова его кратность), получим следующее разложение функции $f$ в произведение:

$$f(z) = f_1(z)f_\Lambda(z), \quad \text{где} \quad f_1(z) = z^m e^{g(z)}, \quad f_\Lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right),$$

$g$—многочлен степени $\leq p$, $m$—кратность корня $f$ в точке $z = 0$ (если $f(0) \neq 0$, то множитель $z^m$ отсутствует). Поскольку $\ln M(f_1, R) = O(R^p)$, $R \to +\infty$, то оценку (2.2.8) достаточно вывести для $\ln M(f_\Lambda, R)$, а согласно лемме 2.4.1— даже для мажоранты логарифма максимума модуля—суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p(R/|\lambda_n|)$.

Согласно обозначению (0.0.34) верно неравенство

$$n_f(r) \le D_{\rho(r)}(f) r^{\rho(r)} + \Delta^+(f, r). \tag{2.5.21}$$

Лемма 2.4.2 вместе с оценкой (2.5.21) считающей функции последовательности $\Lambda$ показывают, что для этой суммы верна оценка сверху

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}\right) \le D_{\rho(r)}(f) J_p(r; h_1) + J_p(r; h_2), , \tag{2.5.22}$$

где $h_1(t) = t^{\rho(t)}$, $h_2(t) = t^{\rho(t)}\varepsilon(t)$.

Из асимптотики (2.5.13) следует, что для доказательства асимптотической оценки (2.2.8) нам осталось установить справедливость асимптотической оценки

$$J_p(r; h_2) = o(r^{\rho(r)}), \quad r \to +\infty. \tag{2.5.23}$$

Для этого воспользуемся оценками (1.2.6). Имеем:

$$\mathcal{M}_p' < p x^p, \quad 0 < x \le 1, \quad \mathcal{M}_p' < e p x^{p-1}, \quad x > 1.$$

Далее,

$$J_p(r; h_2) = r \int\limits_{r_1}^{+\infty} t^{p-2} l(t) \varepsilon(t) \mathcal{M}_p'\left(\frac{r}{t}\right) dt =$$

$$= O\left(r^p \int\limits_{r_1}^{r} \frac{l(t)\varepsilon(t)}{t} dt\right) + O\left(r^{p+1} \int\limits_{r}^{+\infty} \frac{l(t)\varepsilon(t)}{t^2} dt\right). \tag{2.5.24}$$

Поскольку в теореме (2.2.2) выполняется условие (2.2.7), то первое слагаемое в (2.5.24) есть $o(r^{\rho(r)})$ при $r \to +\infty$. Оценим второе слагаемое.

Ввиду стремления к нулю функцию $\varepsilon(t)$ при $t \to +\infty$ имеем

$$\int\limits_r^{+\infty} \frac{l(t)\varepsilon(t)}{t^2}dt = o\left(\int\limits_r^{+\infty} \frac{l(t)}{t^2}dt\right), \qquad r \to +\infty,$$

и нам осталось доказать, что

$$\int\limits_r^{+\infty} \frac{l(t)}{t^2}dt = O\left(\frac{l(r)}{r}\right), \qquad r \to +\infty. \tag{2.5.25}$$

Обозначим $\varphi(t) = t^{-1/2}l(t)$. Ввиду (2.3.1) функция $\varphi$ убывает на некотором луче $[t_0, +\infty)$.

Следовательно,

$$\int\limits_r^{+\infty} t^{-2}l(t)dt = \int\limits_r^{+\infty} t^{-3/2}\varphi(t)dt \le \varphi(r)\int\limits_r^{+\infty} t^{-3/2}dt = 2\varphi(r)r^{-1/2} = 2l(r)/r.$$

Этим соотношение (2.5.25) доказано, и доказательство первой части теоремы 2.2.2 завершено.

Докажем вторую часть теоремы. По данной возрастающей функции $H$ построим возрастающую последовательность положительных чисел $r_n$ как решения уравнения $H(r_n) = n$ (если $H(r_0) > 1$, то несколько первых членов этой последовательности берём произвольными). Тогда при всех значениях $r$, начиная с того, в котором функция $H$ принимает целое значение, считающая функция $n(r)$ построенной последовательности удовлетворяет двойному неравенству

$$H(r) - 1 < n(r) \le H(r),$$

а значит и асимптотике (2.2.4). Из (2.2.9), (2.2.4) следует эквивалентность

$$n(r) \sim Dr^{\rho(r)}, \qquad r \to +\infty. \tag{2.5.26}$$

Из (2.5.26) и (0.0.27) вытекает сходимость интеграла

$$\int\limits_{r_1}^{+\infty} r^{-p-1}n(r)dr = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-p},$$

а, значит, выполняется условие леммы 2.4.1 ($q = p$). По этой лемме (можно взять $A(r) = \sqrt{r^{\rho(r)-p}}$ найдутся последовательность действительных чисел $\varphi_n$ и возрастающая последовательность положительных чисел $R_k = r_{n_{2k}}$, $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = +\infty$, такие, что

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right), \quad \lambda_n = r_n e^{i\varphi_n},$$

является целой функцией и для логарифма максимума её модуля на окружностях $|z| = R_k$ верна асимптотика

$$\ln M(G, R_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{R_k}{r_n}\right) + o(r^{\rho(r)}), \quad k \to \infty. \tag{2.5.27}$$

Очевидно также, что множество корней функции $G$ есть в точности последовательность $\{r_n e^{i\varphi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $n(r) = n_G(r)$.

Ввиду условия, наложенного в теореме на функцию $H$, и доказанной асимптотики (2.2.4) считающая функция множества корней функции $G$ допускает оценку снизу

$$n_G(r) \geq Dr^{\rho(r)} - \varepsilon_1(r)r^{\rho(r)}, \tag{2.5.28}$$

где $\varepsilon_1(r)$—такая стремящаяся к нулю функция, что

$$\int\limits_{r_0}^{r} \varepsilon_1(t)t^{\rho(t)-p-1}dt = o(r^{\rho(r)-p}), \qquad r \to +\infty. \tag{2.5.29}$$

Эта оценка следует из условий (2.2.9), (2.2.10) теоремы и доказанного соотношения (2.2.4). Из (2.4.19) и (2.5.28) следует неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{r}{r_n}\right) \geq DJ_p(r; h_1) - J_p(r; h_2), \tag{2.5.30}$$

где $h_1 = t^{\rho(t)}, h_2 = \varepsilon_1(t)t^{\rho(t)}$.

Выше были выведены асимптотика (2.5.13) интеграла $J_p(r; h_1)$ и асимптотическая оценка (2.5.23) интеграла $J_p(r; h_2)$. Из этих соотношений и условия (2.2.6) находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{r}{r_n}\right) \geq Dr^{\widetilde{\rho}(r)} + DS_p^{\infty} r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}). \tag{2.5.31}$$

Из (2.5.27), (2.5.31) получаем (2.2.11). Теорема 2.2.2 полностью доказана. $\square$

# Заключение

В первой главе диссертации рассмотрены целые функции, порядок которых конечен, положителен и не является целым числом. В предположении, что задана мажоранта усреднённой считающей функции множества корней такой целой функции $f$ и эта мажоранта обладает на бесконечности "достаточно регулярным" поведением, автором получена асимптотическая оценка сверху $\ln M(f,R)$ с двумя неулучшаемыми слагаемыми. Неулучшаемость оценки понимается в следующем смысле. Доказывается, что для любого уточнённого порядка $\rho(r)$, предел на бесконечности которого не является целым числом, существует целая функция $F$, усреднённая считающая функция множества корней которой имеет заданную асимптотику $N_F(R) = R^{\rho(R)} + O(\ln R)$, $R \to +\infty$, и на некоторой последовательности окружностей радиусов $R_m \to +\infty$ оценка снизу $\ln M(F,R_m)$ асимптотически такая же, как и оценка сверху логарифма максимума модуля <u>любой</u> целой функции $f$ при условии $N_f(R) \le R^{\rho(R)} + O(R^a)$, $0 < a < \rho = \lim\limits_{R\to+\infty} \rho(R)$.

Подобная оценка сверху $\ln M(f,R)$ с двумя неулучшаемыми слагаемыми, когда известна "регулярная" мажоранта считающей функции множества корней $f$ (обычной, а не усреднённой) была получена в 2013 году А.Ю. Поповым, а ранее в оценке сверху был известен только неулучшаемый главный член. Интересна аналогия между результатами А.Ю. Попова и автора. Оценка А.Ю. Попова имеет вид

$$\ln M(f,R) \leq R^{\rho(R)}(S(\rho) + S'(\rho)w_l(R) + o(w_l(R))), \quad R \to +\infty, \tag{1}$$

а в задаче, рассматриваемой в диссертации

$$\ln M(f,R) \leq R^{\rho(R)}(S(\rho) + (\rho S(\rho))' w_l(R) + o(w_l(R))), \quad R \to +\infty. \tag{2}$$

Структура правых частей неравенств (1) и (2) одинакова и (2) получается из (1) заменой функции Валирона $S(\rho)$ на $\rho S(\rho)$.

Во второй главе диссертации в русле идей первой главы получено уточнение теоремы А.А. Гольдберга о точной оценке сверху типа целой функции при уточнённом порядке с данной верхней плотностью множества её корней относительно другого уточнённого порядка, стремящегося к целому числу. И в этой ситуации в оценке сверху логарифма максимума модуля целой функции автором найдено неулучшаемое второе слагаемое, хотя сам вид оценки сверху принципиально отличается от (1) и (2).

Результаты диссертации показывают, что логарифм максимума модуля канонического произведения, считающая или усреднённая считающая функция множества корней которого имеет заданную мажоранту, может быть оценен сверху значительно точнее, чем это делалось в предыдущих исследованиях. В этом, по-видимому, и состоит основное достижение диссертационной работы.

Обрисуем перспективы дальнейших исследований по тематике диссертации. Большой интерес вызывают задачи о целых функциях с геометрическими ограничениями на расположение корней. Например, в приложениях весьма востребован класс целых функций, все корни которых расположены на одном луче (скажем, на $\mathbb{R}_+$) или, более общо, в области $\mathcal{D}$ вида $\{z \in \mathbb{C} |\ |arg\ z| \leq h(|z|)\}$, где h—некоторая положительная функция, определённая на $(0,+\infty)$, $\lim\limits_{r\to+\infty} h(r) = 0$. Для этого класса функций А. А. Гольдбергом [4] в 1962 году получено неулучшаемое неравенство

$$\sigma_{\rho(r)}(f) \le S_0(\rho) D_{\rho(r)}(f) \qquad (3)$$

в случае $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho \overline{\in} \mathbb{N}$. Если $\rho \in (0,1)$, то

$$S_0 \equiv S(\rho) = \pi cosec(\pi\rho).$$

Но при $\rho > 1$ функция $S_0(\rho)$ устроена намного сложнее функции Валирона $S(\rho)$ и её поведение пока не исследовано. В качестве ближайшей перспективы видится исследование поведения $S_0(\rho)$ и получения аналога неравенства (3), в котором вместо верхней плотности множества корней $f$ при уточнённом порядке $\rho(r)$ стояла бы усреднённая верхняя плотность множества корней функции $f$.

# Литература


[1] Гольдберг А.А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. I // Матем. сборник, 1962, т. 58, № 3, с. 289—334.

[2] Гольдберг А.А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. III // Матем. сборник, 1964, т. 65, № 3, с. 414—-453.

[3] Гольдберг А.А. Интегральное представление монотонных медленно меняющихся функций // Изв. вузов. Матем., 1988, № 4, с. 21—-27.

[4] Гольдберг А.А. Экстремальный индикатор для целой функции с положительными нулями // Сибирский матем. журнал, 1962, т. 3, № 2, с. 170-—177.

[5] Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. М., 1970.

[6] Заболоцкий Н.В. Сильно регулярный рост целых функций нулевого порядка // Матем. заметки, 1998, т. 63, №2, с. 196-—208.

[7] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956.

[8] Мышаков Ф.С. Аналог теоремы Валирона–Гольдберга при ограничении на усредненную считающую функцию множества корней // Матем. заметки, 2014, т.96, №5, с. 794-—798.

[9] Мышаков Ф.С. Аналог теоремы Валирона–Гольдберга при ограничении на усредненную считающую функцию множества корней // Analysis Mathematica, 2015, т.41, №3, с. 175—198.

[10] Мышаков Ф.С., Попов А.Ю. Уточнение теоремы Гольдберга об оценке типа при уточнённом порядке целой функции целого порядка // Матем. сборник, 2015, т.206, №12, с. 119—144.

[11] Попов А.Ю. Наибольший возможный рост максимума модуля канонического произведения нецелого порядка с заданной мажорантой считающей функции корней // Матем. сборник, 2013, т. 204, №5, с. 67—108.

[12] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.

[13] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.

[14] Хабибуллин Б.Н. Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции // Матем. сборник, 2009, т. 200, №2, с. 129—158.

[15] Хабибуллин Б.Н. О типе целых и мероморфных функций // Матем. сборник, 1992, т. 183, №11, с. 35—44.

[16] Boas R.P. Entire functions. New York, 1954.

[17] Denjoy A. Sur les produits canoniques d'or dr e infini // J. Math., 1910, №6, p.1—136.

[18] Hadamard J. Essai d'ѓetude des fonctions donnѓees par leur dѓevѓeloppement de Taylor // J. Math. Pure et Appl., 1892, v.8, p. 154—186.

[19] Lindelof E. Sur les fonctions entieres d'or  dr e entier // Ann. Ec. Norm. Sup. (3), 22, 1905, p. 369—395.

[20] Saks S. Theory of the Integral. // Warszawa, 1937.

[21] Valiron G. Sur les fonctions entieres d'or  dr e nul et d'or  dr e fini et en particulier des fonctions a correspondance reguliere //Annales de la fac. sci. de l'univ. Toulouse, 1913, V.5, ser. 3, p. 117—257.

[22] Valiron G. Lectures on the General Theory of Integral Functions // Privat Toulouse, 1923.