

## Отзыв научного руководителя

о диссертации Мышакова Фёдора Сергеевича  
"Развитие теоремы Валирона—Гольдберга", представленной на соискание  
учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности  
01.01.01—"вещественный, комплексный и функциональный анализ"

Работа Ф. С. Мышакова относится к разделу теории целых функций, в котором изучается связь между скоростью роста  $M(f, R)$ —максимума модуля целой функции  $f$  в круге  $|z| \leq R$  и  $n_f(R)$ —количества корней функции  $f$  в этом же круге. В 1913 г. Ж. Валирон получил ряд принципиальных результатов по этой тематике, а в начале 60-х годов 20-го века большой вклад в этот раздел теории целых функций внёс А. А. Гольдберг.

Напомним один фундаментальный факт, который по праву носит название "Теорема Валирона—Гольдберга".

Пусть  $\rho(r)$  — произвольный уточнённый порядок, имеющий своим пределом на бесконечности число  $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ . Тогда, какова бы ни была целая функция  $f$  порядка  $\rho$ , её тип при уточнённом порядке  $\rho(r)$ , обозначаемый  $\sigma_{\rho(r)}(f)$ , допускает следующую оценку сверху через  $D_{\rho(r)}(f)$  — верхнюю плотность множества корней функции  $f$  при уточнённом порядке  $\rho(r)$ :

$$\sigma_{\rho(r)}(f) \leq S(\rho) D_{\rho(r)}(f), \quad \text{где } S(\rho) = \int_0^{+\infty} r^{-\rho} d\mathcal{M}_p(r), \quad p = [\rho],$$

$$\mathcal{M}_0(r) = \ln(1+r), \quad \mathcal{M}_p(r) = \max_{|w|=r} \ln |E_p(w)|, \quad E_0(w) = 1-w, \quad E_p(w) = (1-w) \exp \left( \sum_{k=1}^p \frac{w^k}{k} \right).$$

Эта оценка неулучшаема в том смысле, что на некоторой функции, имеющей конечный и положительный тип при уточнённом порядке  $\rho(r)$ , неравенство обращается в равенство.

Заметим, что функция  $S(\rho)$  была введена Валироном в 1913 году, а функция  $\mathcal{M}_p(r)$  — А. Данжуа в 1909 году.

В моей работе, опубликованной в журнале "Математический сборник" в 2013 году, этот результат был уточнён: получена в некотором смысле неулучшаемая асимптотическая оценка  $\ln M(f, r)$  через "регулярную" мажоранту считающей функции множества корней  $f$ .

Диссертация состоит из введения, двух глав и заключения. В первой главе выводится неулучшаемая (на соответствующем классе функций) асимптотическая оценка  $\ln M(f, r)$  через "регулярную" мажоранту усреднённой считающей функции множества корней  $f$ . Как следствие получен аналог теоремы Валирона—Гольдберга

$$\sigma_{\rho(r)}(f) \leq \rho S(\rho) D_{\rho(r)}^*(f),$$

в котором  $D_{\rho(r)}^*(f)$  — усреднённая верхняя плотность множества корней функции  $f$  при уточнённом порядке  $\rho(r)$ . Доказано, что каков бы ни был уточнённый порядок

$\rho(r)$ , имеющий своим пределом на бесконечности нецелое число, существует функция  $f$ , имеющая конечный и положительный тип при уточнённом порядке  $\rho(r)$ , для которой это неравенство обращается в равенство.

Во второй главе уточнена оценка сверху логарифма максимума модуля канонического произведения целого порядка, найденная Гольдбергом в 1964 году. При определённых дополнительных условиях к оценке Гольдберга вместо остаточного члена добавлено неухудшаемое второе слагаемое и остаточный член, бесконечно малый в сравнении с указанным Гольдбергом.

Результаты диссертации представляют несомненный интерес для специалистов по теории целых функций, они опубликованы в трёх журналах, входящих в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий. Результаты диссертации докладывались на двух научных семинарах, работающих на факультете, и на следующих трёх конференциях: 1) КРОМШ-2013 (Крым, 2013); 2) Современные проблемы теории функций и их приложения (Саратов, 2014); 3) Теория функций, ее приложения и смежные вопросы (Казань, 2015).

Я полагаю, что диссертация "Развитие теоремы Валирона—Гольдберга" несомненно удовлетворяет всем требованиям "Положения о порядке присуждения ученых степеней" Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации, а её автор, Мышаков Фёдор Сергеевич, заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — "вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
ведущий научный сотрудник  
кафедры математического анализа  
механико-математического факультета  
МГУ им. М. В. Ломоносова

А. Ю. Попов

Подпись ведущего научного сотрудника  
кафедры математического анализа  
А. Ю. Попова заверяю  
И.о. декана механико-математического факультета  
МГУ им. М. В. Ломоносова,  
доктор физико-математических наук,  
профессор



В. Н. Чубариков