О Т З Ы В

официального оппонента о диссертации Мышакова Фёдора Сергеевича «**Развитие теоремы Валирона – Гольдберга**», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01. 01. 01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Исследование взаимосвязей между распределением нулей голоморфных функций и поведением функции — один из ключевых аспектов теории функций комплексной переменной. Диссертационная работа посвящена одному из таких направлений: изучению взаимосвязи асимптотического поведения на бесконечности усредненной считающей функции нулей целой функции конечного уточненного порядка и поведения самой этой функции. Актуальность этой тематики обусловлена как внутренней логикой теории, так и ее уже существующими и возможными применениями в вопросах полноты специальных функций или представления рядами из таких функций в функциональных пространствах, в теории аналитического продолжения, в уравнениях типа свертки и т. д. Ранее в основном исследовалась влияние асимптотического поведения верхней плотности распределения нулей (корней) канонического произведения Адамара – Вейерштрасса на рост (убывание вне различных исключительных множеств) самого канонического произведения. У истоков — исследования Ж. Адамара, Э. Бореля, Ж. Валирона, А. Данжуа (конец XIX – начало XX вв.), продолженные и существенно развитые А. А. Гольдбергом, Б. Я. Левиным. В последние десятилетия наблюдается всплеск интереса к исследованиям этого направления в работах А. Ю. Попова, А. А. Кондратюка и его учеников и последовательностей, В. Б. Шерстюкова, Г. Г. Брайчева и др., порою при специальных дополнительных ограничениях на расположение нулей канонического произведения.

В диссертации основные результаты А. Ю. Попова последних лет, сформулированные в терминах верхней плотности распределения нулей канонического произведения, даются уже в терминах усредненной (интегральной) верхней плотности, что, во-первых, не может быть непосредственно перенесено из предшествующих результатов и требует во-многом по существу иных дополнительных технических методов.

Перейдем непосредственно к обзору содержания диссертации с обсуждением новизны и значимости исследования, а также определенной завершенности ряда результатов.

Во **введении**, наряду с историческим обзором результатов по исследуемой тематике, приведены основные определения, классические теоремы теории целых функций (Теорема Адамара — Бореля), требуемые в дальнейшем функции, формулы и оценки Ж. Данжуа для функции

$$\mathcal{M}_p(r) := \ln\Bigl(\max_{|z|=r}\bigl|E_p(z)\bigr|\Bigr),\ p := [\rho],\ E_p \text{ — первичный множитель Вейерштрасса,} \quad (1)$$

а также Ж. Валиропа и его функции

$$S(\rho)=\int\limits_0^{+\infty} r^{-\rho}\,\mathrm{d}\mathcal{M}_p(r)=\rho\int\limits_0^{+\infty} r^{-\rho-1}\mathcal{M}_p(r)\,\mathrm{d}r,$$

сформулированы ключевые предшествующие и мотивировавшие исследования диссертанта Теорема Валиропа — Гольдберга, Теоремы A и B, принадлежащие А. Ю. Попову, Теорема C А. А. Гольдберга о целых функциях целого порядка после чего в обзорной форме, местами с упрощениями в условиях, описаны два основных результата диссертации.

В **главе I** сформулированы и доказаны три Теоремы 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 о верхних оценках канонического произведения через усредненную считающую функцию последовательности ее нулей $\mathsf{Z} := \{\mathsf{z_k}\}_{\mathsf{k}=1,2,\dots}$ и их точности (для удобства и краткости записей всюду в отзыве предполагаем, что $0 \neq \mathsf{Z}$)

$$N_{\mathsf{Z}}(r) := \sum_{|\mathsf{z}_k|\le r} \ln\frac{r}{|\mathsf{z}_k|} = \int\limits_0^r \frac{n_{\mathsf{Z}}(t)}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{где } n_{\mathsf{Z}}(t) := \sum_{|\mathsf{z}_k|\le r} 1 \tag{2}$$

— считающая функция последовательности Z. Терема 1.1.1 — для случая конечной верхней плотности функции N_{Z} при произвольном уточненном порядке

$$\rho(r) \underset{r\to+\infty}{\to} \bar\rho \in (0,+\infty), \tag{3}$$

содержательная при нецелом $\bar\rho$. В Теоремах 1.1.2 и 1.1.3 даются очень тонкие точные *двучленные* верхние оценки при определенных условиях «правильности» поведения уточненного порядка $\rho(r)$, которые в определенном смысле «параллельны» соответствующим верхним оценкам через верхнюю плотность считающей функции n_{Z}, полученным ранее А. Ю. Поповым. Доказательства этих теорем многоэтапны, включая точность, и потребовали нетривиальных технических подходов и тонких аналитических приемов, использования теории медленно меняющихся функций.

В **главе II** уже рассматриваются целые функции f произвольного уточненного порядка, когда в (3) число $\bar\rho$ — натуральное. А. А. Гольдберг в 1964 г. показал, как при условии конечности (в этом случае целая функция предполагается не являющиеся функций нормального типа) или бесконечности интеграла

$$\int_{r_0}^{+\infty} t^{\rho(t)-\bar\rho-1}\,\mathrm{d}t$$

можно дать явную конструкцию нового уточненного порядка $\tilde\rho$, тип относительно которого функции f не превышает верхней плотности нулей функции f и при этом равенство для некоторых функций достигается. В Теоремах 2.2.1 (верхняя оценка) и 2.2.2 (двучленная верхняя оценка) приводится далеко идущее развитие этого результата А. А. Гольдберга с соответствующими конструкциями, указывающими на некоторую завершенность результатов. Здесь эти результаты не формулируются, поскольку требуют значительной подготовки в части введения ряда новых обозначений.

В **Заключении** намечены дальнейшие перспективы исследований и поставлены открытые на момент оформления диссертации вопросы.

Таким образом, все основные результаты диссертации — новые, часто имеют достаточно завершенный характер, усиливают и обобщают как классические, так и современные результаты, охватывают серию новых проблем и открывают перспективы для дальнейших исследований. Доказательства потребовали как оригинальных технических приемов, так и существенного развития предшествующих методов, использовавшихся ранее в рассматриваемых в диссертации направлениях исследований. Все утверждения строго доказаны и там, где это необходимо, сопровождаются конкретными наглядными реализациями полученных общих результатов в виде частных, но новых случаев, раскрывающих существенность условий, преимущества по сравнению с результатами других авторов. В частности, приведено несколько примеров, иллюстрирующих отдельные результаты.

Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации и доступно разъясняет идейную сторону исследований.

Основные результаты автора опубликованы в 5 работах, 3 из которых входят в рекомендованный список ВАК.

Имеются 2 замечания. Во-первых, полезно было бы отметить работы и других авторов, причастных к тематике диссертации. Частично они отмечены в первом абзаце настоящего отзыва. Во-вторых, привлечение теории субгармонических функций и теории потенциала позволило бы сократить отдельные части доказательств, когда речь идет о верхних оценках, Чтобы не быть голословным, приведем наш «субгармонический» вывод части вспомогательных результатов диссертации, занимающих почти 3 страницы (28–30 стр.) и использующих значительное число дополнительных оценок. Итак, пусть u — канонический интеграл Адамара — Вейерштрасса по мере μ вида

$$u(re^{i\varphi}) := \int\limits_{\mathbb{C}} E_p\Bigl(\frac{re^{i\theta}}{\zeta}\Bigr)\,\mathrm{d}\mu(\zeta) \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \sup_{\theta\in(-\pi,\pi]} E_p\Bigl(\frac{re^{i\theta}}{t}\Bigr)\,\mathrm{d}\mu(t) \overset{(1)}{=} \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{M}_p(r/t)\,\mathrm{d}\mu(t),$$

где $\mu(t)$ — μ-мера круга $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < t\}$ (для простоты, но не умаляя общности, $\mu(t) \equiv 0$ в некоторой правой окрестности нуля). Тогда функция $\mathcal{M}_p$ из (1) по элементарным свойствам субгармонических функций радиальная и субгармоническая (выпуклая от функции log, т. е. всюду имеет правую и левую производные) с *положительной* мерой Рисса $\bigl(r\mathcal{M}_p'(r)\bigr)'\,dr \otimes \frac{1}{2\pi}\,d\theta$ (через оператор Лапласа и производные в обобщенном смысле). Отсюда сразу следует, что функции $\mathcal{M}_p$ и $0 \leqslant t \mapsto t\mathcal{M}_p'(t)$ — *возрастающие и положительные* ($\geqslant 0$). Дальше — цепочка интегрирований по частям:

$$u(re^{i\theta}) \leqslant \int_0^{+\infty} \mathcal{M}_p(r/t)\, \mathrm{d}\mu(t) = -\int_0^{+\infty} \mu(t)\, \mathrm{d}\mathcal{M}_p(r/t)$$

$$= \int_0^{+\infty} \mu(t)\mathcal{M}_p'(r/t)\,\frac{r}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \Bigl(\mathcal{M}_p'(r/t)(r/t)\Bigr)\,\mathrm{d}\int_0^t \frac{\mu(s)}{s}\,\mathrm{d}s$$

(подынтегральная функция убывающая по t, ниже дифференциалы по переменной t)

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t \frac{\mu(s)}{s}\,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}\Bigl(-\mathcal{M}_p'(r/t)(r/t)\Bigr) = \int_0^{+\infty} N_\mu(t)\,\mathrm{d}\Bigl(-\mathcal{M}_p'(r/t)(r/t)\Bigr)$$

— в случае $u = \ln|f|$, целой функции f и целочисленной меры μ это Лемма 1.2.2.

Выкладки и рассуждения заняли пол-страницы и используют элементы теории субгармонических функций, вполне сформировавшиеся уже в первой половине XX в.

Отмеченные погрешности и недочеты, частью субъективного характера, столь несущественны, что они никоим образом не могут снизить значимость, актуальность, ценность и глубокую содержательность результатов автора диссертации.

Предложенная диссертация Ф. С. Мышакова соответствует всем предписаниям «Положения о порядке присуждения ученых степеней».

Считаю, что диссертация Мышакова Федора Сергеевича «**Развитие теоремы Валирона – Гольдберга**» вполне удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по физико-математическим наукам, а ее автор — Мышаков Федор Сергеевич — безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01. 01. 01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

24 сентября 2016 года

Доктор физико-математических наук, профессор
заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»
ул. З. Валиди, 32, г. Уфа; , тел. +7-917-407-86-54
E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Б. Н. Хабибуллин

Подпись Хабибуллина Б.Н.
Заверяю: ученый секретарь БашГУ
Башнова С.Р.
«24» сентября 20 16 г.