МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517

ПЕРНАЙ Владимир Витальевич

ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЁННЫЕ ОБОБЩЁННОЙ МАЖОРАНТОЙ ЧАСТНЫХ СУММ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2016

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:
доктор физико–математических наук, профессор,
академик РАН **Кашин Борис Сергеевич**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, доцент
Плотников Михаил Геннадьевич,
заведующий кафедрой математики и механики
Вологодской государственной молочнохозяйственной
академии имени Н.В. Верещагина;

кандидат физико-математических наук
Григорьев Павел Геннадиевич,
ведущий экономист-математик
ООО "Геограком";

Ведущая организация:
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Защита диссертации состоится 24 июня 2016 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.
С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета:
`http://mech.math.msu.su`

Автореферат разослан « » мая 2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 на базе МГУ, **Власов**
доктор физико-математических наук **Виктор Валентинович**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Вопросы сходимости функциональных рядов вида

$$\sum_{k\in I} a_k\varphi_k(x) \tag{1}$$

по различным системам функций $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k\in I}$, заданных на некотором множестве X при $I = \mathbb{N}$ или $I = \mathbb{Z}$, составляют классическую часть теории функций. Исследованию этих вопросов посвящены труды многих выдающихся математиков начиная с XIX века. Подробно история этих исследований изложена в монографиях[1,2,3,4,5,6].

Исследование вопросов сходимости рядов вида (1) в случае, когда $I = \mathbb{N}$, часто сводится к оценке мажорант частных сумм

$$S^*(\{a_k\}, x) = \sup_{1\leqslant i<\infty}\left|\sum_{k=1}^{i} a_k\varphi_k(x)\right|. \tag{2}$$

Например, если Φ – ортонормированная система, а $X = (0, 1)$, то сходимость почти всюду по мере Лебега ряда (1) для любых $\{a_k\} \in l_2$ эквивалентна конечности почти всюду мажоранты (2) для любых $\{a_k\} \in l_2$.

Уже при рассмотрении сходимости кратных рядов

$$\sum_{\vec{k}\in I} a_{\vec{k}}\varphi_{\vec{k}}(x), \tag{3}$$

где $I \subset \mathbb{Z}^d$, возникает потребность в оценках мажорант более общего вида

$$S^*_\Omega(\{a_{\vec{k}}\}, x) = \sup_{\omega\in\Omega}\left|\sum_{\vec{k}\in\omega} a_{\vec{k}}\varphi_{\vec{k}}(x)\right|, \tag{4}$$

где Ω – некоторое семейство подмножеств I. В теории кратных рядов при исследовании сходимости рядов вида (3) рассматривают различные случаи семейств Ω. Среди основных семейств Ω, возникающих при различных

[1] Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. – Москва: Физматлит, 1958.

[2] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. – Москва: Физматлит, 1961.

[3] Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. – Москва: ИЛ, 1963.

[4] Зигмунд А. Тригонометрические ряды Т.I-II. – Москва: Мир, 1965.

[5] Olevskii A. M. Fourier Series with respect to general orthogonal systems. – Berlin: Springer-Verlag, 1975.

[6] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды, 2-е изд. – Москва: Изд-во АФЦ, 1999.

определениях сходимости кратных рядов, можно выделить семейства кубов, параллелепипедов, шаров с центром в нуле, гиперболических крестов.

В 1995 году Б.С. Кашин и С.Й. Шарек получили оценки мажорант (4), зависящие от геометрических свойств семейства Ω. Для точной формулировки напомним

Определение 1. *k-ым поперечником по Колмогорову множества G в нормированном пространстве X называется величина*

$$d_k(G,X) = \inf_{E\subset L_k} \max_{x\in G} \min_{y\in E} \|x-y\|_X, \tag{5}$$

где L_k – множество линейных подпространств в X размерности не выше k.

Если $X = l_2^N$ и $G \subset X$, то для краткости обозначим $d_k(G,X) = d_k(G)$.

При заданных I, Ω, $\#I < \infty$, определим $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^I$, положив

$$\widetilde{\Omega} = \{\chi_\omega,\ \omega \in \Omega\},$$

где евклидово пространство $\mathbb{R}^I$ размерности $\#I$ мы отождествляем с множеством действительных функций на I, а χ_ω – характеристическая функция множества ω, то есть

$$\chi_\omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \omega; \\ 0, & \text{если } x \notin \omega. \end{cases}$$

Имеет место[7]

Теорема A (Б.С. Кашин,С.Й. Шарек)**.** *Пусть $\{\varphi_k\}_{k\in I}$ – ортонормированная система в $\mathbb{R}^I$ и Ω – семейство подмножеств I. Тогда*

$$\left\| S_\Omega^*\left(\sum_{k\in I} \varphi_k\right)\right\|_{l_1} \geqslant c \sum_{m\geqslant 1} \frac{d_{m-1}(\widetilde{\Omega})}{\sqrt{m}},$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная.

В 1989 году Б.С. Кашин[8] доказал аналог классической теоремы Меньшова "об исправлении" для дискретных ортнормированных систем. При

[7] Кашин Б. С., Шарек С. Й. *Логарифмический рост L^1-нормы мажоранты частных сумм ортогонального ряда* // Матем. заметки. – 1995 – Т. 58, № 2. – С. 218–230.

[8] Кашин Б. С. *Аналог теоремы Меньшова "об исправлении" для дискретных ортонормированных систем* // Матем. заметки. – 1989 – Т. 46, № 6 – С. 67–74.

этом вводилась норма, связанная с мажорантой частных сумм

$$\|g\|_U \equiv \|g\|_{U(\Phi)} \equiv \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left\| \sum_{k=1}^{i} (g,\varphi_k)\varphi_k \right\|_{l_\infty^n}, \qquad (6)$$

где $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^n$ – некоторый ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, а (g,φ) – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$:

Теорема B. *Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная C_ε, что при $n = 1, 2, \ldots$ для любого ортонормированного базиса Φ в $\mathbb{R}^n$ и любого вектора $g \in \mathbb{R}^n$, $\|g\|_{l_2^n} = 1$, найдётся вектор $\widetilde{g} \in \mathbb{R}^n$, для которого*

1. $\#\{j : (g)_j \neq (\widetilde{g})_j\} \leqslant \varepsilon n$;
2. $\|\widetilde{g}\|_{U(\Phi)} \leqslant C_\varepsilon n^{-1/2}$.

В 1997 году Б.С. Кашин[9] показал, что Теорему B можно доказать для норм более общего вида, заданных с помощью обобщённых мажорант частных сумм

$$\left\| \sum_{\alpha\in I} a_\alpha \varphi_\alpha \right\|_X = \sup_{\omega\in\Omega} \left\| \sum_{\alpha\in\omega} a_\alpha\varphi_\alpha \right\|_{l_\infty^N}. \qquad (7)$$

При этом в определении нормы (7) на семейство Ω подмножеств заданного набора индексов I накладывалось условие, ограничивающие его "сложность": при некотором $\alpha < 1$ найдутся семейства $\Delta_s, \varnothing \in \Delta_s, s = 0, \ldots, s_0$, с числом элементов

$$\#\Delta_s \leqslant C_0 \exp\exp s^\alpha, s = 0, \ldots, s_0, \qquad (8)$$

такие, что каждое множество $\omega \in \Omega$ допускает представление в виде

$$\omega = \bigcup_{s=0}^{s_0} E_s,\ E_s \in \Delta_s,\ \#E_s \leqslant \frac{\#I}{2^s}, E_s \cap E_{s'} = \varnothing \text{ при } s \neq s'. \qquad (9)$$

Определение нормы (6) является частным случаем нормы (7), если в (7) положить $I = \{1, \ldots, n\}$ и

$$\Omega = \Big\{ \{1\}, \{1, 2\}, \ldots, \{1, \ldots, i\}, \ldots, \{1, \ldots, n\} \Big\}.$$

Напомним известные определения.

[9]Кашин Б. С. *О возможности обобщения теорем "об исправлении"* // Матем. заметки. – 1997 – Т. 62, № 6 – С. 931–939.

Определение 2. *Для $i = 1, 2, \ldots$ i-ой функцией Радемахера называется функция на $(0, 1)$, которая задаётся выражением*

$$\varepsilon_i(t) = \begin{cases} +1 & \text{при } t \in \left(\frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i}\right),\ j \text{ – нечётное;} \\ -1 & \text{при } t \in \left(\frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i}\right),\ j \text{ – чётное,} \end{cases} \quad j = 1, 2, \ldots, 2^i.$$

Система функций Радемахера $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ является системой независимых функций.

Определение 3. *Банахово пространство X с нормой $\|\cdot\|_X$ называется пространством типа p, $p \in [1, 2]$, с постоянной $T_p(X)$, если для любого $m = 1, \ldots$ и для любой последовательности $\{x_i\}_{i=1}^m \subset X$ выполняется неравенство*

$$\mathsf{E} \left\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i(t) x_i \right\|_X \equiv \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i(t) x_i \right\|_X \mathrm{d}t \leqslant T_p(X) \left(\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|_X^p \right)^{1/p}. \qquad (10)$$

При этом наименьшая константа $T_p(X)$, для которой неравенство (10) всегда будет выполняться, называется постоянной типа p.

Напомним еще определение, введённое Р.С. Исмагиловым[10] в связи с вопросом приближения гладких функций подпространствами, порождёнными k элементами тригонометрической системы.

Определение 4. *Тригонометрическим поперечником порядка n множества $F \subset L_\infty(-\pi, \pi)$ называется величина*

$$d_n^T(F, L_\infty) = \inf_{G_n} \sup_{f \in F} \operatorname{dist}_{L_\infty}(f, G_n),$$

где $\inf$ *берётся по всем пространствам вида*

$$G_n = \operatorname{span}(\{e^{ikt}\}_{k \in \Lambda}),\ \Lambda \subset \mathbb{Z},\ |\Lambda| = n.$$

Аналогично тригонометрическим поперечникам, Ж. Бургейн и Б.С. Кашин ввели понятие Φ-поперечиков в произвольном банаховом пространстве X для произвольной системы Φ элементов пространства X.

[10] Исмагилов Р. С. *Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами* // УМН. – 1974 – Т. 29, № 3(177) – С. 161–178.

Определение 5. *В банаховом пространстве X для заданной системы $\Phi = \{\varphi\} \subset X$, Φ-поперечником порядка n множества $F \subset X$ называется величина*

$$d_n^\Phi(F, X) = \inf_{G_n} \sup_{f \in F} \operatorname{dist}_X(f, G_n),$$

где inf *берётся по всем пространствам вида*

$$G_n = \operatorname{span}(\{\varphi_k\}_{k \in \Lambda}),\ |\Lambda| = n.$$

Обычно задача об оценке поперечников функциональных классов, лежащих в пространстве $L_p(-\pi, \pi)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, сводится к оценке поперечников конечномерных множеств. В частности, рассмотрение наиболее важного для приложений случая, когда принадлежность к функциональному классу (вложенному в пространство непрерывных функций) определяется ограничением нормы в некотором гильбертовом пространстве, приводит к задаче об оценках $d_n(B_2^N, l_\infty^N)$, $d_n^T(B_2^N, l_\infty^N)$ (в последнем случае рассматривается дискретная тригономерическая система).

Достаточно точные оценки поперечников $d_n(B_2^N, l_\infty^N)$ были установлены Кашиным в 1977 году[11]. Было показано, что шар B_2^N может быть хорошо приближен в метрике l_∞^N подпространством очень малой по сравнению с N размерности. Получение оценок $d_n^T(B_2^N, l_\infty^N)$ потребовало существенно более сложной техники. Первый результат о существовании в $\mathbb{C}^N$ подпространств, натянутых на $n \leqslant (1-\delta)N$ элементов дискретной тригонометрической системы, где $\delta > 0$ – абсолютная постоянная, хорошо приближающих шар B_2^N в метрике l_∞^N был получен Ж. Бургейном и усовершенствован М. Талаграном[12]. Порядок приближения, доставляемый этими подпространствами, ухудшается лишь на логарифмический множитель по сравнению с подпространствами, реализующими колмогоровский поперечник. Точнее говоря, теоремы Ж. Бургейна и М. Талаграна формулировались в двойственной форме как утверждение о существовании подпространств в $L_1(-\pi, \pi)$ вида

$$\operatorname{span}\{e^{ikt}\}_{k \in \Lambda}, \qquad \Lambda \subset \{1, \ldots, N\}, \qquad |\Lambda| \geqslant \delta N,$$

для элементов которых L_1- и L_2-нормы отличаются не более, чем логарифмическими множителями.

[11]Кашин Б. С. *Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1977 – Т. 41, № 2 – С. 334–351.

[12]Talagrand M. *Selecting a proportion of characters* // Israel J. Math. – 1998 – Vol. 108, no. 1 – P. 173–191.

Интерес представляет случай, когда размерность приближающего подпространства гораздо меньше, чем размерность приближаемого множества. Этот случай для Ф-поперечников по равномерно ограниченным ортонормированным в l_2^N системам $\Phi = \{\varphi_i\}_i$ был рассмотрен в 2007 году О. Гедоном, С. Мендельсоном, А. Пажором и Н. Томчак-Ягерманн[13]. Они получили следующий результат

Теорема C (O. Guedon, S. Mendelson, A. Pajor, N. Tomczak-Jaegermann). *Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ – ортонормированный базис в l_2^N, и пусть $\|\varphi_j\|_{l_\infty^N} \leqslant K$, $j = 1, \ldots, N$.*

Для каждого целого $m, 1 \leqslant m \leqslant N$, найдётся набор $\Lambda \subset \{1, \ldots, N\}$ такой, что $|\Lambda| = N - m$ и для любых коэффициентов $\{a_j\} \in \mathbb{C}^N$

$$\left(\sum_{j\in\Lambda} |a_j|^2\right)^{1/2} \leqslant C \cdot K(\log N)^2 \sqrt{\frac{N}{m}} \cdot \left\|\sum_{j\in\Lambda} a_j\varphi_j\right\|_{l_1^N}. \tag{11}$$

Из соображений двойственности и теоремы C непосредственно вытекает оценка Ф-поперечника шара B_2^N по норме пространства l_∞^N.

Также напомним необходимые нам классические понятия теории приближений

Определение 6. *Пусть K – компакт в метрическом пространстве E с метрикой ρ. Обозначим шар радиуса ε с центром в y по метрике ρ как*

$$B_\rho(y, \varepsilon) = \{z \in E : \rho(y, z) \leqslant \varepsilon\}.$$

Числом покрытия $N_\rho(K, \varepsilon)$ называется величина

$$N_\rho(K, \varepsilon) = \inf\left\{r : K \subset \bigcup_{j=1}^{r} B(y_j, \varepsilon) \text{ для некоторых } y_j \in E, j = 1, \ldots, r\right\},$$

а s-ым энтропийным числом множества K в пространстве E называется величина

$$e_s(K) = e_s(K, \rho) = \inf\{\varepsilon : N(K, \varepsilon) \leqslant 2^s\}, \quad s = 0, 1, \ldots.$$

[13] Guedon O., Mendelson S., Pajor A. , Tomczak-Jaegermann N. *Subspaces and orthogonal decompositions generated by bounded orthogonal systems* // Positivity. – 2007 – Vol. 11, no. 2 – P. 269–283.

При доказательстве теоремы C использовались современные варианты chaining-метода Колмогорова и достаточно точные оценки ε-энтропии конечномерных компактов. В 2012 году Ж. Бургейн и Б.С. Кашин, получили следующий результат[14]

Теорема D (Ж. Бургейн, Б.С. Кашин)**.** *Пусть задан набор элементов* $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset l_2^N$, $N \geqslant n$, *причём*

$$\|\varphi_i\|_{l_\infty^N} \leqslant K, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Для любого целого $k, 1 \leqslant k \leqslant n$, *найдётся подмножество* Λ *набора* $\{1, \ldots, n\}$ *такое, что*

$$|\Lambda| = k,$$

$$\sup_{\{a_i\}_{i=1}^n, \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \leqslant 1} \operatorname{dist}_{l_\infty^N}\left(\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i,\ \operatorname{span}(\{\varphi_i, i \in \Lambda\})\right) \leqslant CK(\log N)^{7/2}\sqrt{\frac{n}{k}}.$$

Принципиальным отличием теоремы D от теоремы C является отказ от требования ортогональности системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$.

Цель работы. Исследование нормированных пространств, норма в которых задаётся с помощью обобщённой мажоранты частных сумм по семействам множеств с определенной сложностью. Получение оценок Ф-поперечников в этих пространствах. Оценка сложности семейства дискретных параллелепипедов и семейства выпуклых помножеств куба $[1, n]^d$.

Научная новизна работы. Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Установлены верхние оценки для постоянной типа 2 нормированных пространств, норма в которых задаётся обобщённой мажорантой частных сумм функционального ряда по семейству Ω подмножеств заданного набора индексов I, удовлетворяющему определённым ограничениям на сложность.

2. Для указанных пространств установлены верхние оценки для Ф-поперечников.

3. Доказано, что рассмотренным в диссертации ограничениям на сложность семейств Ω удовлетворяет семейство множеств, хорошо приближающее пересечения всех выпуклых подмножеств куба $[1, n]^d$ с целочисленной решеткой $\mathbb{Z}^d$.

[14] Бургейн Ж., Кашин Б. С. *О равномерном приближении частной суммы ряда Дирихле более короткой суммой и Ф-поперечниках* // Матем. сб. – 2012 – Т. 203, № 12 – С. 57–80.

Методы исследования. В работе используются различные методы теории приближений, функционального анализа, теории случайных процессов и выпуклой геометрии.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории приближений, функциональном анализе и геометрии.

Апробация работы. Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- семинар "Ортогональные ряды" на Механико-математическом факультете ФГБОУ ВО "Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова" под руководством академика РАН Б. С. Кашина и члена-корреспондента РАН С. В. Конягина (неоднократно, 2012–2015);

- спецсеминар по теории тригонометрических и ортогональных рядов на Механико-математическом факультете ФГБОУ ВО "Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова" под руководством профессора М. К. Потапова, профессора В. А. Скворцова, профессора Т. П. Лукашенко и профессора М. И. Дьяченко (2016);

- семинар Кафедры высшей математики ФГАОУ ВПО "Московский физико-технический институт (государственный университет)" под руководством профессора Е. С. Половинкина (2016).

Публикации. Результаты диссертации получены автором самостоятельно и опубликованы (без соавторов) в 2 работах в журналах из списка, рекомендованного ВАК. Список работ приведён в конце автореферата.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из списка обозначений, введения, трёх глав, заключения и списка литературы из 23 наименований. Общий объём диссертации — 68 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дан исторический обзор по тематике работы, обоснована актуальность и сформулированы цели исследования, а также изложены основные результаты диссертации.

Глава 1 диссертации посвящена изучению типа нормированных пространств, норма в которых задаётся с помощью равенства (7), где семейство подмножеств Ω заданного набора индексов I, удовлетворяет ограничениям (8) и (9), а также если семейство Ω подмножеств заданного набора индексов I, удовлетворяет более жёсткому, чем (8) ограничению: для некоторых $\alpha \geqslant 1$ и $\beta \geqslant 0$ найдутся семейства $\Delta_s, \varnothing \in \Delta_s$, с числом элементов

$$\#\Delta_s \leqslant C_0 N^\beta \exp s^\alpha, s = 0, \dots, s_0, \tag{12}$$

такие, что каждое множество $\omega \in \Omega$ допускает представление в виде (9).

В первой главе устанавливаются верхние оценки постоянных типа 2 пространств, норма в которых задаётся с помощью мажоранты (7) по семействам множеств Ω, удовлетворяющим ограничениям (9) и (12).

Теорема 1.1. *Пусть семейство Ω подмножеств I удовлетворяет (9) и (12) при некоторых $\alpha \geqslant 1$ и $\beta \geqslant 0$. Тогда постоянная типа 2 пространства $X(\Omega)$ допускает оценку*

$$T_2(X) \leqslant K(C_0, \beta, \gamma) \cdot (\log N)^{\alpha/2+1+\gamma},$$

где γ – произвольное число больше 0, а $K(C_0, \beta, \gamma)$ – постоянная, которая зависит только от C_0,β и γ.

Также в главе 1 для пространств, норма в которых задаётся с помощью (7) по семействам множеств Ω, удовлетворяющим ограничениям (8) и (9) с некоторым $\alpha < 1$, устанавливается верхняя оценка постоянной типа 2. Кроме того, приводится пример такого пространства, у которого нижняя оценка постоянной типа 2 близка по порядку к верхней. Точнее, доказывается

Теорема 1.2. *Для произвольного $\gamma > 0$ пространство $X(\Omega)$, где Ω удовлетворяет (8) и (9), является пространством типа 2 с постоянной $T_2(X)$, которая удовлетворяет неравенству*

$$T_2(X) \leqslant C' \exp\left(\frac{1}{2}\log^\alpha N\right) \cdot \log^{1+\gamma} N,$$

где $C' > 0$ – постоянная, зависящая только от γ.

При этом найдётся такое пространство $X(\Omega)$, где Ω удовлетворяет (8) и (9), что постоянная $T_2(X)$ типа 2 простраснтва $X(\Omega)$ будет удовлетворять неравенству

$$\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\log^\alpha N}{2^\alpha}\right)\leqslant T_2(X).$$

В главе 2 диссертации, используя методы работы Б.С. Кашина и Ж. Бургейна, автор установил верхние оценки Φ-поперечников множеств

$$F=\left\{\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i \quad\Big|\quad \sum_{i=1}^n |a_i|^2\leqslant 1\right\}$$

в пространстве X, норма в котором задаётся с помощью определения (7) по семействам множеств Ω, удовлетворяющим ограничениям (9) и (12) при некоторых $\alpha\geqslant 1$ и $\beta>0$. Точнее доказывается

Теорема 2.1. *Пусть $\Phi=\{\varphi\}_{i=1}^n$ – набор линейно-независимых функций в l_2^N таких, что*

$$\|\varphi_i\|_\infty\leqslant M,\quad 1\leqslant i\leqslant n$$

и множество

$$F=\left\{\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i \quad\Big|\sum_{i=1}^n |a_i|^2\leqslant 1\right\}.$$

Пусть норма в пространстве X задаётся с помощью мажоранты (7), где семейство Ω удовлетворяет (9) и (12) с некоторыми $\alpha\geqslant 1$ и $\beta\geqslant 0$. Тогда для любого целого k, $1\leqslant k\leqslant n$, верно неравенство

$$d_k^\Phi(F,X)\leqslant K(C_0,\beta,\gamma)M(\log N)^{4+\alpha/2+\gamma}\sqrt{\frac{n}{k}},$$

где γ – произвольное число больше 0, M – абсолютная постоянная, а $K(C_0,\beta,\gamma)$ – постоянная, зависящая от C_0,β и γ.ы

Глава 3 посвящена изучению семейств множеств, которые удовлетворяют ограничениям на сложность (9) и (12) с некоторыми $\alpha\geqslant 1$ и $\beta\geqslant 0$. Важным примером такого семейства является совокупность дискретных параллелепипедов:

Утверждение 3.1. *Совокупность всех дискретных параллелепипедов вида*

$$\Pi_d=\Big\{\{1,\dots,m_1\}\times\dots\times\{1,\dots,m_d\}\subset\{1,\dots,n\}^d\Big\}$$

при $d\in\mathbb{N}$ удовлетворяет (9) и (12) при $\alpha=1$ и $\beta=(d-1)/d$.

Обозначим пересечение множества $B \subset \mathbb{R}^d$ и решётки $\mathbb{Z}^d$ как $B_{\mathbb{Z}}$. Множества $B_{\mathbb{Z}}$, полученные как пересечение выпуклого множества B с целочисленной решёткой, можно называть выпуклыми множествами в $\mathbb{Z}^d$.

Как уже отмечалось выше, в теории кратных рядов рассматриваются различные случаи семейств подмножеств в $\mathbb{Z}^d$, суммирование по которым задаёт частные суммы, исследуемые на сходимость. При этом чаще всего рассматриваются семейства кубов, параллелепипедов, шаров, гиперболических крестов. Представляет интерес также случай, когда семейство состоит из всех "выпуклых множеств". При этом встает вопрос о "сложности" этого семейства. В частности, С.В. Конягиным был поставлен вопрос: удовлетворяет ли ограничениям на сложность (9) и (12), семейство множеств Ω, полученное как пересечение всевозможных выпуклых подмножеств куба $[1, n]^d$ с целочисленной решёткой $\mathbb{Z}^d$. В связи с задачей С.В. Конягина в главе 3 доказывается

Теорема 3.1. *Для любого $0 < \gamma < 1$ найдётся семейство Ω подмножеств $\{1, \dots, n\}^d$, удовлетворяющее (9) и (12) с некоторыми постоянными $\alpha \geqslant 1$ и $\beta \geqslant 0$, зависящими только от γ и d, такое, что для любого выпуклого множества $B \subset [1, n]^d$ найдётся $A \in \Omega$ такое, что $A \subset B_{\mathbb{Z}}$ и*

$$\#(B_{\mathbb{Z}} \setminus A) \leqslant \gamma \cdot \#B_{\mathbb{Z}}.$$

При доказательстве теоремы 3.1 изучаются свойства симплексов с вершинами в целых точках, вписанных в данное выпуклое тело. Напомним,

Определение 7. *Симплексом в d-мерном евклидовом пространстве называется выпуклая оболочка $d + 1$ аффинно-независимых точек.*

Зададим на множестве $\mathbb{R}^d$ меру, "считающую" количество целых точек в множестве:

$$\mu_{\mathbb{Z}}(A) = |A \cap \mathbb{Z}^d|, \ A \subset \mathbb{R}^d.$$

Тогда имеет место

Лемма 3.1. *Произвольное выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^d$ содержит симплекс S, возможно, размерности меньше d, с вершинами в точках с целочисленными координатами такой, что*

$$\mu_{\mathbb{Z}}(K) \leqslant d^{3d} \cdot \mu_{\mathbb{Z}}(S)$$

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю академику Борису Сергеевичу Кашину за постановку интересных задач, плодотворные обсуждения, неоценимую помощь и постоянное внимание, а также профессору Сергею Владимировичу Конягину и доценту Константину Сергеевичу Рютину за ценные советы и замечания.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Пернай В. В. Пространства, порожденные обобщенной мажорантой частных сумм // Матем. заметки. – 2014. – Т. 96, № 1. – С. 154–157.

[2] Пернай В. В. О сложности семейства выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$ // Матем. заметки. – 2016. – Т. 98, № 4 – С. 537–549.