Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517

ПЕРНАЙ Владимир Витальевич

Пространства, порождённые обобщённой мажорантой частных сумм

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор, академик РАН
Кашин Борис Сергеевич

Москва
2016

Оглавление

Список обозначений

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел;

$\mathbb{R}^N$ – множество векторов с элементами из $\mathbb{R}$ длины $N \in \mathbb{N}$;

$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел;

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Z}^d$ – множество векторов с элементами из $\mathbb{Z}$ длины $d \in \mathbb{N}$;

$\#A$ – мощность множества A;

$\bar{A}$ – дополнение к множеству A;

$\varnothing$ – пустое множество;

$\mathsf{P}(B)$ – вероятность события B;

$\mathsf{E}\xi$ – математическое ожидание случайной величины ξ;

$\mathsf{D}\xi$ – дисперсия случайной величины ξ;

$\lceil C \rceil$ – минимальное целое число, которое больше либо равно C;

$\operatorname{dist}_X(f, G) \equiv \inf_{g \in G} \|f - g\|_X$ – расстояние в банаховом пространстве X между элементом $f \in X$ и множеством $G \subset X$;

$\operatorname{span}(\{\varphi_i\})$ – линейная оболочка системы векторов $\{\varphi_i\}$;

$(\varphi)_j, 1 \leqslant j \leqslant N$, – j-я координата вектора $\varphi \in \mathbb{R}^N$;

$l_p^N, 1 \leqslant p \leqslant \infty$ – нормированное пространство векторов из $\mathbb{R}^N$ с нормой

$$\|\{a_k\}\|_\infty \equiv \sup_{1 \leqslant k \leqslant N} |a_k|, \ \|\{a_k\}\|_p \equiv \left(\sum_{k=1}^{N} |a_k|^p \right)^{1/p}, 1 \leqslant p < \infty.$$

B_p^N – единичный шар в пространстве l_p^N;

Введение

Актуальность темы. Вопросы сходимости функциональных рядов вида

$$\sum_{k\in I} a_k\varphi_k(x) \tag{0.1}$$

по различным системам функций $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k\in I}$, заданных на некотором множестве X при $I = \mathbb{N}$ или $I = \mathbb{Z}$, составляют классическую часть теории функций. Исследованию этих вопросов посвящены труды многих выдающихся математиков начиная с XIX века. Подробно история этих исследований изложена в монографиях [8], [2], [1], [6], [21] и [12].

Исследование вопросов сходимости рядов вида (0.1) в случае, когда $I = \mathbb{N}$, часто сводится к оценке мажорант частных сумм

$$S^*(\{a_k\}, x) = \sup_{1\leqslant i<\infty} \left| \sum_{k=1}^{i} a_k\varphi_k(x) \right|. \tag{0.2}$$

Например, если Φ – ортонормированная система, а $X = (0, 1)$, то сходимость почти всюду по мере Лебега ряда (0.1) для любых $\{a_k\} \in l_2$ эквивалентна конечности почти всюду мажоранты (0.2) для любых $\{a_k\} \in l_2$.

Уже при рассмотрении сходимости кратных рядов

$$\sum_{\vec{k}\in I} a_{\vec{k}}\varphi_{\vec{k}}(x), \tag{0.3}$$

где $I\subset\mathbb{Z}^d$, возникает потребность в оценках мажорант более общего вида

$$S^*_\Omega(\{a_{\vec{k}}\},x)=\sup_{\omega\in\Omega}\left|\sum_{\vec{k}\in\omega} a_{\vec{k}}\varphi_{\vec{k}}(x)\right|, \tag{0.4}$$

где Ω – некоторое семейство подмножеств I. В теории кратных рядов при исследовании сходимости рядов вида (0.3) рассматривают различные случаи семейств Ω. Среди основных семейств Ω, возникающих при различных определениях сходимости кратных рядов, можно выделить семейства кубов, параллелепипедов, шаров с центром в нуле, гиперболических крестов.

В 1995 году Б.С. Кашин и С.Й. Шарек получили оценки мажорант (0.4), зависящие от геометрических свойств семейства Ω. Для точной формулировки нам понадобится

Определение 0.1. *k-ым поперечником по Колмогорову* множества G в нормированном пространстве X называется величина

$$d_k(G,X)=\inf_{E\subset L_k}\max_{x\in G}\min_{y\in E}\|x-y\|_X, \tag{0.5}$$

где L_k – множество линейных подпространств в X размерности не выше k.

Если $X = l_2^N$ и $G \subset X$, то для краткости обозначим $d_k(G,X)=d_k(G)$.

При заданных I,Ω, $\#I<\infty$, определим $\widetilde{\Omega}\subset\mathbb{R}^I$, положив

$$\widetilde{\Omega}=\{\chi_\omega,\ \omega\in\Omega\},$$

где евклидово пространство $\mathbb{R}^I$ размерности $\#I$ мы отождествляем с множеством действительных функций на I, а χ_ω – характеристическая функция множества ω, то есть

$$\chi_\omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \omega; \\ 0, & \text{если } x \notin \omega. \end{cases}$$

Имеет место

Теорема A (Б.С. Кашин, С.Й. Шарек, [13]). *Пусть $\{\varphi_k\}_{k\in I}$ – ортонормированная система в $\mathbb{R}^I$ и Ω – семейство подмножеств I. Тогда*

$$\left\| S_\Omega^*\left(\sum_{k\in I}\varphi_k\right)\right\|_{l_1} \geqslant c\sum_{m\geqslant 1}\frac{d_{m-1}(\widetilde{\Omega})}{\sqrt{m}}, \tag{0.6}$$

где $c>0$ – абсолютная постоянная.

В 1989 году Б.С. Кашин [9] доказал аналог классической теоремы Меньшова "об исправлении" для дискретных ортонормированных систем. При этом в [9] вводилась норма, связанная с мажорантой частных сумм

$$\|g\|_U \equiv \|g\|_{U(\Phi)} \equiv \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\|\sum_{k=1}^{i}(g,\varphi_k)\varphi_k\right\|_{l_\infty^n}, \tag{0.7}$$

где $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^n$ – некоторый ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, а (g,φ) – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$:

Теорема B (Б.С. Кашин, [9]). *Для каждого $\varepsilon>0$ существует такая постоянная C_ε, что при $n=1,2,\dots$ для любого ортонормированного базиса Φ в $\mathbb{R}^n$ и любого вектора $g\in\mathbb{R}^n$, $\|g\|_{l_2^n}=1$, найдётся вектор $\widetilde{g}\in\mathbb{R}^n$, для которого*

1. $\#\{j : (g)_j \neq (\widetilde{g})_j\} \leqslant \varepsilon n$*;*

2. $\|\widetilde{g}\|_{U(\Phi)} \leqslant C_\varepsilon n^{-1/2}$.

В 1997 году в работе [10] Б.С. Кашин показал, что Теорему B можно доказать для норм более общего вида, заданных с помощью обобщённых мажорант частных сумм

$$\left\|\sum_{\alpha\in I} a_\alpha\varphi_\alpha\right\|_X = \sup_{\omega\in\Omega}\left\|\sum_{\alpha\in\omega} a_\alpha\varphi_\alpha\right\|_{l_\infty^N}. \qquad (0.8)$$

При этом в определении нормы (0.8) на семейство Ω подмножеств заданного набора индексов I накладывалось условие, ограничивающие его "сложность": при некотором $\alpha < 1$ найдутся семейства $\Delta_s, \varnothing \in \Delta_s, s = 0, \ldots, s_0$, с числом элементов

$$\#\Delta_s \leqslant C_0 \exp\exp s^\alpha, s = 0, \ldots, s_0, \qquad (0.9)$$

такие, что каждое множество $\omega \in \Omega$ допускает представление в виде

$$\omega = \bigcup_{s=0}^{s_0} E_s,\ E_s \in \Delta_s,\ \#E_s \leqslant \frac{\#I}{2^s}, E_s \cap E_{s'} = \varnothing \text{ при } s \neq s'. \qquad (0.10)$$

Заметим, что определение нормы (0.7) является частным случаем нормы (0.8), если в (0.8) положить $I = \{1, \ldots, n\}$ и

$$\Omega = \Big\{\{1\}, \{1,2\}, \ldots, \{1, \ldots, i\}, \ldots, \{1, \ldots, n\}\Big\}. \qquad (0.11)$$

Напомним известные определения.

Определение 0.2. Для $i = 1, 2, \ldots$ *i-ой функцией Радемахера* называется функция на $(0, 1)$, которая задаётся выражением

$$\varepsilon_i(t) = \begin{cases} +1 & \text{при } t \in \left(\frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i}\right),\ j \text{ – нечётное;} \\ -1 & \text{при } t \in \left(\frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i}\right),\ j \text{ – чётное,} \end{cases} \quad j = 1, 2, \ldots, 2^i.$$

Система функций Радемахера $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ является системой независимых функций.

Определение 0.3. Банахово пространство X с нормой $\|\cdot\|_X$ называется *пространством типа* p, $p \in [1,2]$, с постоянной $T_p(X)$, если для любого $m = 1,\ldots$ и для любой последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{m} \subset X$ выполняется неравенство

$$\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i(t)x_i\right\|_X \equiv \int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i(t)x_i\right\|_X \mathrm{d}t \leqslant T_p(X)\left(\sum_{i=1}^{m}\|x_i\|_X^p\right)^{1/p}. \tag{0.12}$$

При этом наименьшая константа $T_p(X)$, для которой неравенство (0.12) всегда будет выполняться, называется постоянной типа p.

Легко показать, что постоянная типа 2 пространства l_1^N равна $\sqrt{N}$, а постоянная типа 2 пространства l_∞^N оценивается сверху $C(\log N)^{1/2}$ для некоторой абсолютной постоянной $C > 0$ и $N = 1, 2, \ldots$.

Напомним еще определение, введённое Р.С. Исмагиловым в [7] в связи с вопросом приближения гладких функций подпространствами, порождёнными k элементами тригонометрической системы.

Определение 0.4. *Тригонометрическим поперечником* порядка n множества $F \subset L_\infty(-\pi,\pi)$ называется величина

$$d_n^T(F, L_\infty) = \inf_{G_n}\sup_{f\in F}\operatorname{dist}_{L_\infty}(f, G_n),$$

где inf берётся по всем пространствам вида

$$G_n = \operatorname{span}(\{e^{ikt}\}_{k\in\Lambda}),\ \Lambda\subset\mathbb{Z},\ |\Lambda| = n.$$

Аналогично тригонометрическим поперечникам, Ж. Бургейн и

Б.С. Кашин ввели понятие Ф-поперечиков в произвольном банаховом пространстве X для произвольной системы Φ элементов пространства X.

Определение 0.5. В банаховом пространстве X для заданной системы $\Phi = \{\varphi\} \subset X$, Φ-*поперечником* порядка n множества $F \subset X$ называется величина

$$d_n^{\Phi}(F, X) = \inf_{G_n} \sup_{f \in F} \operatorname{dist}_X(f, G_n),$$

где inf берётся по всем пространствам вида

$$G_n = \operatorname{span}(\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}),\ |\Lambda| = n.$$

Обычно задача об оценке поперечников функциональных классов, лежащих в пространстве $L_p(-\pi, \pi)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, сводится к оценке поперечников конечномерных множеств. В частности, рассмотрение наиболее важного для приложений случая, когда принадлежность к функциональному классу (вложенному в пространство непрерывных функций) определяется ограничением нормы в некотором гильбертовом пространстве, приводит к задаче об оценках $d_n(B_2^N, l_\infty^N)$, $d_n^T(B_2^N, l_\infty^N)$ (в последнем случае рассматривается дискретная тригономерическая система).

Достаточно точные оценки поперечников $d_n(B_2^N, l_\infty^N)$ были установлены в [11] (см. также [5]). Было показано, что шар B_2^N может быть хорошо приближен в метрике l_∞^N подпространством очень малой по сравнению с N размерности. Получение оценок $d_n^T(B_2^N, l_\infty^N)$ потребовало существенно более сложной техники. Первый результат о существовании в $\mathbb{C}^N$ подпространств, натянутых на $n \leqslant (1-\delta)N$

элементов дискретной тригонометрической системы, где $\delta > 0$ – абсолютная постоянная, хорошо приближающих шар B_2^N в метрике l_∞^N был получен Ж. Бургейном и усовершенствован М. Талаграном (см. [22]). Порядок приближения, доставляемый этими подпространствами, ухудшается лишь на логарифмический множитель по сравнению с подпространствами, реализующими колмогоровский поперечник. Точнее говоря, теоремы Ж. Бургейна и М. Талаграна формулировались в двойственной форме как утверждение о существовании подпространств в $L_1(-\pi, \pi)$ вида

$$\operatorname{span}\{e^{ikt}\}_{k\in\Lambda}, \qquad \Lambda \subset \{1, \dots, N\}, \qquad |\Lambda| \geqslant \delta N,$$

для элементов которых L_1- и L_2-нормы отличаются не более, чем логарифмическими множителями.

Интерес представляет случай, когда размерность приближающего подпространства гораздо меньше, чем размерность приближаемого множества. Этот случай для Φ-поперечников по равномерно ограниченным ортонормированным в l_2^N системам $\Phi = \{\varphi_i\}_i$ был рассмотрен в 2007 году О. Гедоном, С. Мендельсоном, А. Пажором и Н. Томчак-Ягерманн. Они получили следующий результат

Теорема C (O. Guedon, S. Mendelson, A. Pajor, N. Tomczak–Jaegermann, [19]). *Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ – ортонормированный базис в l_2^N, и пусть $\|\varphi_j\|_{l_\infty^N} \leqslant K$, $j = 1, \dots, N$.*

Для каждого целого $m, 1 \leqslant m \leqslant N$, найдётся набор $\Lambda \subset \{1, \dots, N\}$ такой, что $|\Lambda| = N - m$ и для любых коэффи-

циентов $\{a_j\} \in \mathbb{C}^N$

$$\left(\sum_{j\in\Lambda} |a_j|^2\right)^{1/2} \leqslant C \cdot K(\log N)^2 \sqrt{\frac{N}{m}} \cdot \left\|\sum_{j\in\Lambda} a_j\varphi_j\right\|_{l_1^N}. \qquad (0.13)$$

Из соображений двойственности и теоремы C непосредственно вытекает оценка Φ-поперечника шара B_2^N по норме пространства l_∞^N.

Также напомним необходимые нам классические понятия теории приближений

Определение 0.6. Пусть K – компакт в метрическом пространстве E с метрикой ρ. Обозначим шар радиуса ε с центром в y по метрике ρ как

$$B_\rho(y,\varepsilon) = \{z \in E : \rho(y,z) \leqslant \varepsilon\}.$$

Числом покрытия $N_\rho(K,\varepsilon)$ называется величина

$$N_\rho(K,\varepsilon) = \inf\left\{r : K \subset \bigcup_{j=1}^{r} B(y_j,\varepsilon) \text{ для некоторых } y_j \in E, j = 1,\dots,r\right\},$$

а *s-ым энтропийным числом* множества K в пространстве E называется величина

$$e_s(K) = e_s(K,\rho) = \inf\left\{\varepsilon : N(K,\varepsilon) \leqslant 2^s\right\}, \quad s = 0,1,\dots.$$

При доказательстве теоремы C использовались современные варианты chaining-метода Колмогорова и достаточно точные оценки ε-энтропии конечномерных компактов. В 2012 году Ж. Бургейн и Б.С. Кашин, получили следующий результат

Теорема D (Ж. Бургейн, Б.С. Кашин, [4])**.** *Пусть задан набор элементов* $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset l_2^N$, $N \geqslant n$, *причём*

$$\|\varphi_i\|_{l_\infty^N} \leqslant K, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Для любого целого $k, 1 \leqslant k \leqslant n$, найдётся подмножество Λ набора $\{1, \ldots, n\}$ такое, что

$$|\Lambda| = k,$$

$$\sup_{\{a_i\}_{i=1}^n, \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \leqslant 1} \mathrm{dist}_{l_\infty^N} \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i,\ \mathrm{span}(\{\varphi_i, i \in \Lambda\}) \right) \leqslant CK(\log N)^{7/2} \sqrt{\frac{n}{k}}.$$

Принципиальным отличием теоремы D от теоремы C является отказ от требования ортогональности системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$.

Цель работы. Исследование нормированных пространств, норма в которых задаётся с помощью обобщённой мажоранты частных сумм по семействам множеств с определенной сложностью. Получение оценок Ф-поперечников в этих пространствах. Оценка сложности семейства дискретных параллелепипедов и семейства выпуклых помножеств куба $[1, n]^d$.

Научная новизна работы. Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Установлены верхние оценки для постоянной типа 2 нормированных пространств, норма в которых задаётся обобщённой мажорантой частных сумм функционального ряда по семейству Ω подмножеств заданного набора индексов I, удовлетворяющему определённым ограничениям на сложность.

2. Для указанных пространств установлены верхние оценки для Ф-поперечников.

3. Доказано, что рассмотренным в диссертации ограничениям на сложность семейств Ω удовлетворяет семейство множеств, хо-

рошо приближающее пересечения всех выпуклых подмножеств куба $[1,n]^d$ с целочисленной решеткой $\mathbb{Z}^d$.

Методы исследования. В работе используются различные методы теории приближений, функционального анализа, теории случайных процессов и выпуклой геометрии.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории приближений, функциональном анализе и геометрии.

Апробация работы. Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- семинар "Ортогональные ряды" на Механико-математическом факультете ФГБОУ ВО "Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова" под руководством академика РАН Б. С. Кашина и члена-корреспондента РАН С. В. Конягина (неоднократно, 2012–2015);

- спецсеминар по теории тригонометрических и ортогональных рядов на Механико-математическом факультете ФГБОУ ВО "Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова" под руководством профессора М. К. Потапова, профессора В. А. Скворцова, профессора Т. П. Лукашенко и профессора М. И. Дьяченко (2016);

- семинар Кафедры высшей математики ФГАОУ ВПО "Московский физико-технический институт (государственный университет)" под руководством профессора Е. С. Половинкина (2016).

Публикации. Результаты диссертации получены автором самостоятельно и опубликованы (без соавторов) в следующих работах автора в журналах из списка, рекомендованного ВАК: [14], [15].

Структура и объём работы. Диссертация состоит из списка обозначений, введения, трёх глав, заключения и списка литературы из 23 наименований. Общий объём диссертации — 68 страниц.

Краткое содержание работы. Приведём основные результаты диссертации. Нумерация утверждений совпадает с их нумерацией в соответствующих главах.

Глава 1 диссертации посвящена изучению типа нормированных пространств, норма в которых задаётся с помощью равенства (0.8), где семейство подмножеств Ω заданного набора индексов I, удовлетворяет ограничениям (0.9) и (0.10), а также если семейство Ω подмножеств заданного набора индексов I, удовлетворяет более жёсткому, чем (0.9) ограничению: для некоторых $\alpha \geqslant 1$ и $\beta \geqslant 0$ найдутся семейства $\Delta_s, \varnothing \in \Delta_s$, с числом элементов

$$\#\Delta_s \leqslant C_0 N^\beta \exp s^\alpha, s = 0, \ldots, s_0, \tag{0.14}$$

такие, что каждое множество $\omega \in \Omega$ допускает представление в виде (0.10).

В первой главе устанавливаются верхние оценки постоянных типа 2 пространств, норма в которых задаётся с помощью мажоранты (0.8) по семействам множеств Ω, удовлетворяющим ограничениям (0.10) и (0.14).

Теорема 1.1.(В.В. Пернай, [14]). *Пусть семейство Ω подмножеств I удовлетворяет (0.10) и (0.14) при некоторых $\alpha \geqslant 1$ и*

$\beta \geqslant 0$. *Тогда постоянная типа 2 пространства* $X(\Omega)$ *допускает оценку*

$$T_2(X) \leqslant K(C_0, \beta, \gamma) \cdot (\log N)^{\alpha/2+1+\gamma},$$

где γ *– произвольное число больше 0, а* $K(C_0, \beta, \gamma)$ *– постоянная, которая зависит только от* C_0,β *и* γ.

Также в главе 1 для пространств, норма в которых задаётся с помощью (0.8) по семействам множеств Ω, удовлетворяющим ограничениям (0.9) и (0.10) с некоторым $\alpha < 1$, устанавливается верхняя оценка постоянной типа 2. Кроме того, приводится пример такого пространства, у которого нижняя оценка постоянной типа 2 близка по порядку к верхней. Точнее, доказывается

Теорема 1.2.(В.В. Пернай, [15]). *Для произвольного* $\gamma > 0$ *пространство* $X(\Omega)$, *где* Ω *удовлетворяет (0.9) и (0.10), является пространством типа 2 с постоянной* $T_2(X)$, *которая удовлетворяет неравенству*

$$T_2(X) \leqslant C' \exp\left(\frac{1}{2}\log^{\alpha} N\right) \cdot \log^{1+\gamma} N,$$

где $C' > 0$ *– постоянная, зависящая только от* γ.

При этом найдётся такое пространство $X(\Omega)$, *где* Ω *удовлетворяет (0.9) и (0.10), что постоянная* $T_2(X)$ *типа 2 пространтва* $X(\Omega)$ *будет удовлетворять неравенству*

$$\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\log^{\alpha} N}{2^{\alpha}}\right) \leqslant T_2(X).$$

В главе 2 диссертации, используя методы работы [4], мы устанавливаем верхние оценки Ф-поперечников множеств

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \quad \middle| \quad \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \leqslant 1 \right\}$$

в пространстве X, норма в котором задаётся с помощью определения (0.8) по семействам множеств Ω, удовлетворяющим ограничениям (0.10) и (0.14) при некоторых $\alpha \geqslant 1$ и $\beta > 0$. Точнее доказывается

Теорема 2.1.(В.В. Пернай, [14]). *Пусть* $\Phi = \{\varphi\}_{i=1}^{n}$ *– набор линейно-независимых функций в* l_2^N *таких, что*

$$\|\varphi_i\|_\infty \leqslant M, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

и множество

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \quad \middle| \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Пусть норма в пространстве X *задаётся с помощью мажоранты (0.8), где семейство* Ω *удовлетворяет (0.10) и (0.14) с некоторыми* $\alpha \geqslant 1$ *и* $\beta \geqslant 0$. *Тогда для любого целого* k, $1 \leqslant k \leqslant n$, *верно неравенство*

$$d_k^{\Phi}(F, X) \leqslant K(C_0, \beta, \gamma) M (\log N)^{4+\alpha/2+\gamma} \sqrt{\frac{n}{k}},$$

где γ *– произвольное число больше 0,* M *– абсолютная постоянная, а* $K(C_0, \beta, \gamma)$ *– постоянная, зависящая от* C_0*,*β *и* γ*.*

В главе 3 рассматриваются примеры семейств множеств, которые удовлетворяют ограничениям на сложность (0.10) и (0.14) с некоторыми $\alpha \geqslant 1$ и $\beta \geqslant 0$. Важным примером такого семейства является совокупность всех "параллелепипедов"

$$\Pi = \Big\{ \{1, \ldots, m_1\} \times \cdots \times \{1, \ldots, m_d\} \subset \{1, \ldots, n\}^d \Big\}.$$

В работе [14] отмечается, что данная совокупность удовлетворяет условиям (0.10) и (0.14) при $\alpha = 1$ и $\beta = (d-1)/d$. Точнее имеет место

Утверждение 3.1. *Совокупность всех дискретных параллелепипедов вида*

$$\Pi_d = \Big\{\{1,\dots,m_1\}\times\dots\times\{1,\dots,m_d\}\subset\{1,\dots,n\}^d\Big\}$$

при $d\in\mathbb{N}$ *удовлетворяет (0.10) и (0.14) при* $\alpha=1$ *и* $\beta=(d-1)/d$.

Обозначим пересечение множества $B\subset\mathbb{R}^d$ и решётки $\mathbb{Z}^d$ как $B_{\mathbb{Z}}$. Множества $B_{\mathbb{Z}}$, полученные как пересечение выпуклого множества B с целочисленной решёткой, можно называть выпуклыми множествами в $\mathbb{Z}^d$.

Как уже отмечалось выше, в теории кратных рядов рассматриваются различные случаи семейств подмножеств в $\mathbb{Z}^d$, суммирование по которым задаёт частные суммы, исследуемые на сходимость. При этом чаще всего рассматриваются семейства кубов, параллелепипедов, шаров, гиперболических крестов. Представляет интерес также случай, когда семейство состоит из всех "выпуклых множеств". При этом встает вопрос о "сложности" этого семейства. В частности, С.В. Конягиным был поставлен вопрос: удовлетворяет ли ограничениям на сложность (0.10) и (0.14), семейство множеств Ω, полученное как пересечение всевозможных выпуклых подмножеств куба $[1,n]^d$ с целочисленной решёткой $\mathbb{Z}^d$. В связи с задачей С.В. Конягина в главе 3 доказывается

Теорема 3.1.(В.В. Пернай, [15]). *Для любого* $0<\gamma<1$ *найдётся семейство* Ω *подмножеств* $\{1,\dots,n\}^d$, *удовлетворяющее (0.10) и*

(0.14) с некоторыми постоянными $\alpha \geqslant 1$ и $\beta \geqslant 0$, зависящими только от γ и d, такое, что для любого выпуклого множества $B \subset [1,n]^d$ найдётся $A \in \Omega$ такое, что $A \subset B_{\mathbb{Z}}$ и

$$\#(B_{\mathbb{Z}} \setminus A) \leqslant \gamma \cdot \#B_{\mathbb{Z}}.$$

При доказательстве теоремы 3.1 изучаются свойства симплексов с вершинами в целых точках, вписанных в данное выпуклое тело. Напомним,

Определение 0.7. *Симплексом* в d-мерном евклидовом пространстве называется выпуклая оболочка $d+1$ аффинно-независимых точек.

Зададим на множестве $\mathbb{R}^d$ меру, "считающую" количество целых точек в множестве:

$$\mu_{\mathbb{Z}}(A) = |A \cap \mathbb{Z}^d|,\ A \subset \mathbb{R}^d.$$

Тогда имеет место

Лемма 3.3. *Произвольное выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^d$ содержит симплекс S, возможно, размерности меньше d, с вершинами в точках с целочисленными координатами такой, что*

$$\mu_{\mathbb{Z}}(K) \leqslant d^{3d} \cdot \mu_{\mathbb{Z}}(S)$$

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю академику Борису Сергеевичу Кашину за поставновку интересных задач, плодотворные обсуждения, неоценимую помощь и постоянное внимание, а также профессору Сергею Владимировичу Конягину и доценту Константину Сергеевичу Рютину за ценные советы и замечания.

Глава 1

Тип пространств, порождённых обобщённой мажорантой частных сумм

В данной главе будем считать, что I – заданный набор индексов, Ω – семейство подмножеств I и $\Phi = \{\varphi_k\}_{k \in I} \subset \mathbb{R}^N$ – система линейно-независимых векторов. Обозначим как $X(\Omega) \equiv X(\Omega, \Phi)$ пространство векторов вида

$$\sum_{k \in I} a_k \varphi_k, \text{ где } a_k \in \mathbb{R},$$

с нормой, заданной с помощью (0.8), в которой sup берётся по семейству Ω.

Мы доказываем следующую

Теорема 1.1 ([14]). *Пусть семейство Ω подмножеств I удовлетворяет (0.10) и (0.14) при некоторых $\alpha \geqslant 1$ и $\beta \geqslant 0$. Тогда постоянная $T_2(X)$ типа 2 пространства $X(\Omega)$ допускает оценку*

$$T_2(X) \leqslant K(C_0, \beta, \gamma) \cdot (\log N)^{\alpha/2+1+\gamma}, \tag{1.1}$$

где γ – произвольное число больше 0, а $K(C_0, \beta, \gamma)$ – постоянная, которая зависит только от C_0,β и γ.

Для доказательства теоремы 1.1 нам понадобится техническая

Лемма 1.1. *Пусть для семейства Ω подмножеств I найдутся такие семейства Δ_s, $\varnothing \in \Delta_s$, $s = 0, \dots, s_0,$, что будет выполнено (0.10). Тогда для произвольного нетривиального набора элементов $\{x_i\}_{i=1}^m \subset X(\Omega)$ будет выполняться*

$$\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right\|_{X(\Omega)} \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|_{X(\Omega)}^2\right)^{1/2} \leqslant A + N\sum_{s=0}^{s_0} \#\Delta_s \cdot \frac{s^{2(1+\gamma)}}{C_\gamma^2 A} \cdot \exp\left(-\frac{C_\gamma^2 A^2}{2s^{2(1+\gamma)}}\right),$$

где A, γ – произвольные числа больше 0, а

$$C_\gamma = \left(\sum_{s=0}^{s_0} \frac{1}{(s+1)^{1+\gamma}}\right)^{-1}. \tag{1.2}$$

Напомним классическое неравенство А.Я. Хинчина

Теорема E ([20], [12]). *Если $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^m$ – система Радемахера, тогда для любого $t \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\mathsf{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^m c_i\varepsilon_i\right| > t\left(\sum_{i=1}^m c_i^2\right)^{1/2}\right\} \leqslant 2e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{1.3}$$

Теперь приведём

Доказательство леммы 1.1. Без ограничения общности для заданного набора $\{x_i\}_{i=1}^m \subset X(\Omega)$, можно считать, что

$$\sum_{i=1}^m \|x_i\|^2_{X(\Omega)} = 1.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right\|_{X(\Omega)} &= \int_0^\infty \mathsf{P}\left\{\left\|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right\|_{X(\Omega)} > y\right\} \mathrm{d}y \\ &= \int_0^A \mathsf{P}\left\{\left\|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right\|_{X(\Omega)} > y\right\} \mathrm{d}y \\ &\quad + \int_A^\infty \mathsf{P}\left\{\left\|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right\|_{X(\Omega)} > y\right\} \mathrm{d}y \\ &\leqslant \int_0^A 1\,\mathrm{d}y + \int_A^\infty \mathsf{P}\left\{\left\|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right\|_{X(\Omega)} > y\right\} \mathrm{d}y \\ &\leqslant A + \int_A^\infty \mathsf{P}\left\{\left\|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right\|_{X(\Omega)} > y\right\} \mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Введём обозначение

$$C_\gamma = \left(\sum_{s=0}^{s_0} \frac{1}{(s+1)^{1+\gamma}}\right)^{-1}$$

Так как найдутся такие $\Delta_s, \varnothing \in \Delta_s, s = 0, \ldots, s_0,$, что будет выполнено (0.10), второе слагаемое в (1.4) можно оценить

$$\begin{aligned}\int_A^\infty \mathsf{P}\left\{\left\|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right\|_{X(\Omega)} > y\right\} \mathrm{d}y \\ = \int_A^\infty \mathsf{P}\left\{\sup_{\omega\in\Omega}\left\|\sum_{j\in\omega}\left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right)_j \varphi_j\right\|_{l_\infty^N} > y\right\}\end{aligned}$$

$$= \int_A^\infty \mathsf{P}\left\{\sup_{\omega\in\Omega}\sup_{1\leqslant k\leqslant N}\left|\left(\sum_{j\in\omega}\left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right)_j \varphi_j\right)_k\right| > y\right\}$$

$$\leqslant \int_A^\infty \sum_{k=1}^N \mathsf{P}\left\{\sup_{\bigcup E_s\in\Omega}\left|\sum_{s=0}^{s_0}\sum_{j\in E_s}\left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i (x_i)_j\right)(\varphi_j)_k\right| > y\right\}$$

$$= \int_A^\infty \sum_{k=1}^N \mathsf{P}\left\{\sup_{\bigcup E_s\in\Omega}\left|\sum_{s=0}^{s_0}\sum_{j\in E_s}\left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i (x_i)_j\right)(\varphi_j)_k\right| > yC_\gamma\sum_{s=0}^{s_0}\frac{1}{(s+1)^{1+\gamma}}\right\}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^N \int_A^\infty \mathsf{P}\left\{\sum_{s=0}^{s_0}\sup_{E_s\in\Delta_s}\left|\sum_{j\in E_s}\left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i (x_i)_j\right)(\varphi_j)_k\right| > \sum_{s=0}^{s_0}\frac{C_\gamma y}{(s+1)^{1+\gamma}}\right\}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^N \sum_{s=0}^{s_0}\int_A^\infty \mathsf{P}\left\{\sup_{E_s\in\Delta_s}\left|\sum_{j\in E_s}\left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i (x_i)_j\right)(\varphi_j)_k\right| > \frac{C_\gamma y}{(s+1)^{1+\gamma}}\right\}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^N \sum_{s=0}^{s_0}\sum_{E_s\in\Delta_s}\int_A^\infty \mathsf{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i\left(\sum_{j\in E_s}(x_i)_j(\varphi_j)_k\right)\right| > \frac{C_\gamma y}{(s+1)^{1+\gamma}}\right\} = J_1.$$

Применяя теорему E, получаем

$$J_1 \leqslant \sum_{k=1}^N \sum_{s=0}^{s_0}\sum_{E_s\in\Delta_s}\int_A^\infty \exp\left(-\frac{C_\gamma^2 y^2}{2(s+1)^{2(1+\gamma)}\cdot\Sigma}\right)\,\mathrm{d}y,$$

где $\Sigma = \left(\sum_{i=1}^m\left(\sum_{j\in E_s}(x_i)_j(\varphi_j)_k\right)^2\right)$.

Из определения нормы в пространстве $X(\Omega)$, для произвольного $E_s\in\Delta_s$

$$\Sigma \equiv \left(\sum_{i=1}^m\left(\sum_{j\in E_s}(x_i)_j(\varphi_j)_k\right)^2\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^m\left(\sup_{E_s\in\Delta_s}\sum_{j\in E_s}(x_i)_j(\varphi_j)_k\right)^2\right)$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^m\left(\sup_{\omega\in\Omega}\sum_{j\in\omega}(x_i)_j(\varphi_j)_k\right)^2\right) = \sum_{i=1}^m \|x_i\|_{X(\Omega)}^2 = 1.$$

Следовательно,

$$J_1 \leqslant \sum_{k=1}^{N} \sum_{s=0}^{s_0} \sum_{E_s \in \Delta_s} \int_A^\infty \exp\left(-\frac{C_\gamma^2 y^2}{2(s+1)^{2(1+\gamma)}}\right) \mathrm{d}y$$
$$= N \cdot \sum_{s=0}^{s_0} \#\Delta_s \int_A^\infty \exp\left(-\frac{C_\gamma^2 y^2}{2(s+1)^{2(1+\gamma)}}\right) \mathrm{d}y.$$

Учитывая, что $y/a > 1$ при $y \in (a, \infty), a > 0$, можно получить следующее несложное неравенство

$$\int_a^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y < \int_a^\infty \frac{y}{a} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right).$$

Из него простой заменой переменой получается, что для $b > 0$ верно

$$\int_a^\infty \exp\left(-\frac{b^2 y^2}{2}\right) \mathrm{d}y = \frac{1}{b} \int_{ab}^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y < \frac{1}{ab^2} \exp\left(-\frac{a^2 b^2}{2}\right).$$

Используя последнее неравенство, получаем следующую оценку для J_1:

$$J_1 \leqslant N \sum_{s=0}^{s_0} \#\Delta_s \frac{(s+1)^{2(1+\gamma)}}{A \cdot C_\gamma^2} \cdot \exp\left(-\frac{A^2 C_\gamma^2}{2(s+1)^{2(1+\gamma)}}\right).$$

Следовательно,

$$\mathsf{E} \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i \right\|_{X(\Omega)} \leqslant A + N \sum_{s=0}^{s_0} \#\Delta_s \frac{(s+1)^{2(1+\gamma)}}{A \cdot C_\gamma^2} \cdot \exp\left(-\frac{A^2 C_\gamma^2}{2(s+1)^{2(1+\gamma)}}\right),$$

и лемма 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Воспользуемся Леммой 1.1. Зададим значение A как

$$A = C_1 (\log N)^{\alpha/2+1+\gamma},$$

где C_1 – постоянная больше 0, которую мы определим ниже. Тогда, учитывая ограничения на $\#\Delta_s, s = 0, \ldots, s_0$ из условия теоремы, а также то, что $s \leqslant s_0 \leqslant \log N$ получаем

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right\|_{X(\Omega)} \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{m}\|x_i\|_{X(\Omega)}^2\right)^{1/2} \leqslant C_1(\log N)^{\alpha/2+1+\gamma} \\
&\quad + N\sum_{s=0}^{s_0}\#\Delta_s\cdot\frac{s^{2(1+\gamma)}}{C_1C_\gamma^2(\log N)^{\alpha/2+1+\gamma}}\cdot\exp\left(-\frac{C_1^2C_\gamma^2(\log N)^{\alpha+2+2\gamma}}{2s^{2(1+\gamma)}}\right) \\
\leqslant & C_1(\log N)^{\alpha/2+1+\gamma} \\
&\quad + N\sum_{s=0}^{s_0}C_0N^{\beta}\exp s^{\alpha}\cdot\frac{s^{2(1+\gamma)}}{C_1C_\gamma^2(\log N)^{\alpha/2+1+\gamma}}\cdot\exp\left(-\frac{C_1^2C_\gamma^2(\log N)^{\alpha+2+2\gamma}}{2s^{2(1+\gamma)}}\right) \\
\leqslant & C_1(\log N)^{\alpha/2+1+\gamma} \\
&\quad + N^{\beta+1}\sum_{s=0}^{s_0}\frac{C_0 s^{2(1+\gamma)}}{C_1C_\gamma^2(\log N)^{\alpha/2+1+\gamma}}\cdot\exp\left(s^{\alpha}-\frac{C_1^2C_\gamma^2(\log N)^{\alpha+2(1+\gamma)}}{2s^{2(1+\gamma)}}\right) \\
\leqslant & C_1(\log N)^{\alpha/2+1+\gamma} \\
&\quad + N^{\beta+1}\sum_{s=0}^{s_0}\frac{C_0(\log N)^{2(1+\gamma)}}{C_1C_\gamma^2(\log N)^{\alpha/2+1+\gamma}}\cdot\exp\left((\log N)^{\alpha}-\frac{C_1^2C_\gamma^2(\log N)^{\alpha+2(1+\gamma)}}{2(\log N)^{2(1+\gamma)}}\right) \\
\leqslant & C_1(\log N)^{\alpha/2+1+\gamma} \\
&\quad + 2N^{\beta+1}\log N\cdot\frac{C_0}{C_1C_\gamma^2(\log N)^{\alpha/2-1-\gamma}}\cdot\exp\left((\log N)^{\alpha}-\frac{C_1^2C_\gamma^2}{2}(\log N)^{\alpha}\right) \\
= & C_1(\log N)^{\alpha/2+1+\gamma} \\
&\quad + \frac{2C_0}{C_1C_\gamma^2}(\log N)^{2-\alpha/2+\gamma}\cdot N^{\beta+1+\left(1-C_1^2C_\gamma^2/2\right)\cdot(\log N)^{\alpha-1}}. \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

По условию $\alpha \geqslant 1$. Значит

$$
2-\alpha/2+\gamma \leqslant 1+\alpha-\alpha/2+\gamma = \alpha/2+1+\gamma.
$$

Выбрав постоянную C_1 в (1.5) достаточно большой, получаем

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right\|_{X(\Omega)} \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{m}\|x_i\|_{X(\Omega)}^2\right)^{1/2} \\
&\qquad\qquad \leqslant C_1(\log N)^{\alpha/2+1+\gamma} + C_2(\log N)^{\alpha/2+1+\gamma}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant K(C_0, \beta, \gamma) \cdot (\log N)^{\alpha/2+1+\gamma}$$

где $K(C_0, \beta, \gamma)$ – постоянная, зависящая от γ, β и C_0. Следовательно, постоянная типа 2 пространства $X(\Omega)$ будет не больше, чем $K(C_0, \beta, \gamma) \cdot (\log N)^{\alpha/2+1+\gamma}$. Теорема 1.1 доказана.

Рассмотрим пространство $X(\Omega)$ при Ω удовлетворяющим ограничениям на сложность (0.9) и (0.10). Имеет место

Теорема 1.2 ([15]). *Для произвольного $\gamma > 0$ пространство $X(\Omega)$, где Ω удовлетворяет (0.9) и (0.10), является пространством типа 2 с постоянной $T_2(X)$, которая удовлетворяет неравенству*

$$T_2(X) \leqslant C' \exp\left(\frac{1}{2}\log^\alpha N\right) \cdot \log^{1+\gamma} N, \tag{1.6}$$

где $C' > 0$ – постоянная, зависящая только от γ.

При этом найдётся такое пространство $X(\Omega)$, где Ω удовлетворяет (0.9) и (0.10), что постоянная $T_2(X)$ типа 2 пространтва $X(\Omega)$ будет удовлетворять неравенству

$$\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\log^\alpha N}{2^\alpha}\right) \leqslant T_2(X). \tag{1.7}$$

Доказательство теоремы 1.2. В Лемме 1.1 положив

$$A = C_1 \exp\left(\frac{1}{2}\log^\alpha N\right) \cdot \log^{1+\gamma} N, \tag{1.8}$$

получаем

$$\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right\|_{X(\Omega)} \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|^2_{X(\Omega)}\right)^{1/2} \leqslant C_1 \exp\left(\frac{1}{2}\log^\alpha N\right) \cdot \log^{1+\gamma} N$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{s_0}\#\Delta_s\frac{s^{2(1+\gamma)}}{C_1C_\gamma^2\exp\left(\frac{1}{2}\log^\alpha N\right)\cdot\log^{1+\gamma}N}$$
$$\cdot\exp\left(-\frac{C_1^2C_\gamma^2\exp\log^\alpha N\cdot\log^{2(1+\gamma)}N}{2s^{2(1+\gamma)}}\right). \quad (1.9)$$

Обозначим второе слагаемое в (1.9) как S_1. По условию теоремы семейства $\Delta_s, s=0,\dots,s_0$, удолветворяют ограничению (0.9), то есть для некоторого $\alpha<1$

$$\#\Delta_s\leqslant\exp\exp s^\alpha.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
S_1\leqslant&N\sum_{s=1}^{s_0}\frac{C_0s^{2(1+\gamma)}}{C_1C_\gamma^2\exp\left(\frac{1}{2}\log^\alpha N\right)\cdot\log^{1+\gamma}N}\cdot\\
&\cdot\exp\left(\exp s^\alpha-\frac{C_1^2C_\gamma^2\exp\log^\alpha N\cdot\log^{2(1+\gamma)}N}{2s^{2(1+\gamma)}}\right)\\
\leqslant&N\sum_{s=1}^{s_0}\frac{C_0\log^{2(1+\gamma)}N}{C_1C_\gamma^2\exp\left(\frac{1}{2}\log^\alpha N\right)\cdot\log^{1+\gamma}N}\cdot\\
&\cdot\exp\left(\exp\log^\alpha N-\frac{C_1^2C_\gamma^2\exp\log^\alpha N\cdot\log^{2(1+\gamma)}N}{2\log^{2(1+\gamma)}N}\right)\\
\leqslant&N\log N\cdot\frac{C_0\log^{1+\gamma}N}{C_1C_\gamma^2\exp\left(\frac{1}{2}\log^\alpha N\right)}\cdot\\
&\cdot\exp\left(\exp\log^\alpha N-\frac{C_1^2C_\gamma^2\exp\log^\alpha N}{2}\right)\\
=&\frac{C_0}{C_1C_\gamma^2}\cdot\exp\left(\exp\log^\alpha N+\log N+(2+\gamma)\log\log N-\right.\\
&\left.-\frac{C_1^2C_\gamma^2\exp\log^\alpha N}{2}-\frac{1}{2}\log^\alpha N\right).
\end{aligned}$$

При выборе C_1 достаточно большим, мы получим, что

$$S_1\leqslant 1.$$

Следовательно, для некоторого $C' > 0$ будем иметь

$$\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right\|_{X(\Omega)}\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{m}\|x_i\|_{X(\Omega)}^2\right)^{1/2}$$
$$\leqslant C_1\exp\left(\frac{1}{2}\log^{\alpha}N\right)\cdot\log^{1+\gamma}N+1$$
$$\leqslant C'\exp\left(\frac{1}{2}\log^{\alpha}N\right)\cdot\log^{1+\gamma}N.$$

Теперь построим семейство Ω подмножеств набора индексов $I = \{1,\dots,N\}$, удовлетворяющее (0.9) и (0.10), такое что постоянная 2-типа пространства $X(\Omega)$ будет удовлетворять (1.7). Для этого положим, что $N = 2^{2\nu}$ для некоторого натурального ν, и построим семейства Δ_s, $s = 0,\dots,\frac{1}{2}\cdot\log_2 N$. Пусть

$$E = \left\{1,\dots,\exp\left(\frac{\log^{\alpha}N}{2^{\alpha}}\right)\right\},$$

где $\alpha < 1$. Тогда

$$\Delta_s = \begin{cases} 2^E, & \text{если } s = \frac{1}{2}\cdot\log_2 N;\\ \{\varnothing\}, & \text{если } s < \frac{1}{2}\cdot\log_2 N,\end{cases}$$

где 2^E – набор всевозможных подмножеств множества E. Тогда

$$\#\Delta_{\frac{1}{2}\cdot\log_2 N} \leqslant 2^{\exp\left(\frac{\log^{\alpha}N}{2^{\alpha}}\right)},$$
$$\#\Delta_s = 1,\ \text{при } s < \frac{1}{2}\cdot\log_2 N,$$

и набор семейств $\Delta_s, s = 0,\dots,\frac{1}{2}\cdot\log_2 N$, удовлетворяет условию (0.9). Если определить $\Omega = \Delta_{\frac{1}{2}\cdot\log_2 N}$, тогда для любого $\omega\in\Omega$

$$\omega = \bigcup_{s=0}^{\frac{1}{2}\cdot\log_2 N} E_s,\ E_s\in\Delta_s.$$

Произвольное множество $G \in \Delta_{\frac{1}{2}\cdot\log_2 N}$ будет подмножеством E. Следовательно, при достаточно большом N

$$\begin{aligned}\#G \leqslant \#E \leqslant \exp\left(\frac{\log^\alpha N}{2^\alpha}\right) &= \exp\left(\frac{\ln^\alpha N}{(2\ln 2)^\alpha}\right)\\ \leqslant \exp\left(\ln^\alpha N \cdot \frac{\ln^{1-\alpha} N}{2}\right) &= \exp\left(\frac{\ln N}{2}\right)\\ = \sqrt{N} = \frac{N}{\sqrt{N}} &= \frac{N}{2^{\frac{\log_2 N}{2}}},\end{aligned}$$

и система Ω удовлетворяет (0.10). Получаем, что

$$\sup_{G\in\Omega}\left\|\sum_{k\in G} a_k\varphi_k\right\|_{l_\infty^N} = \sup_{G\subset E}\left\|\sum_{k\in G} a_k\varphi_k\right\|_{l_\infty^N}.$$

Определим вектора $\varphi_k \in \mathbb{R}^N, k \in I = \{1, \dots, N\}$, как

$$\varphi_1 = (1, 0, \dots, 0),\ \dots,\ \varphi_k = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k}, 0, \dots, 0),\ \dots,\ \varphi_N = (1, 1, \dots, 1),$$

а набор $\{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^N$, где $m = \exp\left(\frac{\log^\alpha N}{2^\alpha}\right) \leqslant \sqrt{N}$, следующим образом:

$$(x_i)_k = \begin{cases} 1, & \text{при } i = k;\\ 0, & \text{при } i \neq k.\end{cases}$$

Тогда, если $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^m$ – система Радемахера, то есть набор независимых случайных величин, принимающих значения ± 1 с вероятностью $1/2$, определим случайное множество

$$E_0(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = \begin{cases} E_+ = \{i : \varepsilon_i = +1\}, & \text{если } \#E_+ \geqslant \#E/2;\\ E_- = \{i : \varepsilon_i = -1\}, & \text{если } \#E_- > \#E/2.\end{cases}$$

Для фиксированных значений ε_i получаем, что

$$\sup_{G\subset E}\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\left(\sum_{k\in G}(x_i)_k\varphi_k\right)\right\|_{l_\infty^N}\geqslant\sup_{G\subset E}\left|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\left(\sum_{k\in G}(x_i)_k(\varphi_k)_1\right)\right|$$

$$\geqslant\left|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\left(\sum_{k\in E_0(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)}(x_i)_k\right)\right|=\left|\sum_{i\in E_0(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)}\varepsilon_i(x_i)_i\right|$$

$$=\left|\sum_{i\in E_0(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)}\varepsilon_i\right|\geqslant\#E/2=\frac{1}{2}\cdot\exp\left(\frac{\log^\alpha N}{2^\alpha}\right).$$

Значит,

$$\mathsf{E}\sup_{G\subset E}\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\left(\sum_{k\in G}(x_i)_k\varphi_k\right)\right\|_{l_\infty^N}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\exp\left(\frac{\log^\alpha N}{2^\alpha}\right).$$

С другой стороны, для любого x_i

$$\|x_i\|_{X(\Omega)}=\sup_{G\subset E}\left\|\sum_{k\in G}(x_i)_k\varphi_k\right\|_{l_\infty^N}=1.$$

Получаем, что

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\|x_i\|^2_{X(\Omega)}\right)^{1/2}\leqslant\sqrt{m}=\exp\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\log^\alpha N}{2^\alpha}\right).$$

Таким образом мы получили элементы x_i такие, что

$$\mathsf{E}\sup_{G\subset E}\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\left(\sum_{k\in G}(x_i)_k\varphi_k\right)\right\|_{l_\infty^n}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\log^\alpha N}{2^\alpha}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\|x_i\|^2_{X(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Следовательно, постоянная 2-типа построенного пространства $X(\Omega)$ будет не меньше, чем $\frac{1}{2}\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\log^\alpha N}{2^\alpha}\right)$, и выполнено (1.7).

Теорема 1.2 доказана.

Глава 2

Оценки Φ-поперечников

В данной главе также будем предполагать, что для заданного набора индексов I, семейство Ω подмножеств I удовлетворяет свойствам (0.10) и (0.14) с некоторыми $\alpha \geqslant 1$ и $\beta \geqslant 0$, то есть найдутся семейства $\Delta_s, \varnothing \in \Delta_s$, с числом элементов

$$\#\Delta_s \leqslant C_0 N^\beta \exp s^\alpha, s = 0, \ldots, s_0,$$

такие, что каждое множество $\omega \in \Omega$ допускает представление в виде

$$\omega = \bigcup_{s=0}^{s_0} E_s,\ E_s \in \Delta_s,\ \#E_s \leqslant \frac{\#I}{2^s}, E_s \cap E_{s'} = \varnothing \text{ при } s \neq s'.$$

Для системы линейно-независимых векторов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k\in I} \subset \mathbb{R}^N$ обозначим как $X(\Omega) \equiv X(\Omega, \Phi)$ пространство векторов вида

$$\sum_{k\in I} a_k \varphi_k,\ \text{где } a_k \in \mathbb{R},$$

с нормой, заданной как

$$\left\| \sum_{\alpha\in I} a_\alpha \varphi_\alpha \right\|_X = \sup_{\omega\in\Omega} \left\| \sum_{\alpha\in\omega} a_\alpha \varphi_\alpha \right\|_{l_\infty^N}.$$

В данной главе устанавливаются верхние оценки Ф-поперечников в пространстве X множеств

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \quad \middle| \quad \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \leqslant 1 \right\}.$$

При доказательстве мы будем опираться на результаты главы 1. Доказывается

Теорема 2.1 ([14]). *Пусть* $\Phi = \{\varphi\}_{i=1}^{n}$ – *набор линейно-независимых функций в* l_2^N *таких, что*

$$\|\varphi_i\|_\infty \leqslant M, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

и множество

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \quad \middle| \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \leqslant 1 \right\}. \tag{2.1}$$

Пусть норма в пространстве X *задается равенством (0.8), где семейства* Ω *удовлетворяют (0.10) и (0.14) с некоторыми* $\alpha \geqslant 1$ *и* $\beta \geqslant 0$*. Тогда для любого целого* k*,* $1 \leqslant k \leqslant n$*, верно неравенство*

$$d_k^\Phi(F, X) \leqslant K(C_0, \beta, \gamma) M (\log N)^{4+\alpha/2+\gamma} \sqrt{\frac{n}{k}}, \tag{2.2}$$

где γ – *произвольное число больше 0,* M – *абсолютная постоянная, а* $K(C_0, \beta, \gamma)$ – *постоянная, зависящая от* C_0*,*β *и* γ*.*

Прежде, чем перейти к доказательству, дадим

Определение 2.8. Если P – оператор из банахового пространства X с единичным шаром B_X в банахово пространство Y, то *числом покрытия оператора* P называется величина

$$N_Y(P, \varepsilon) \equiv N_{\|\cdot\|_Y}(P(B_X), \varepsilon).$$

s-ым энтропийным числом оператора P называется величина

$$e_s(P) = e_s(P(B_X), \|\cdot\|_Y).$$

Нам понадобятся следующие результаты технического характера для энтропийных чисел и чисел покрытия

Утверждение 2.1. *Для произвольных $c > 0$, $\varepsilon > 0$, компакта K и метрики ρ*

$$e_s(K, c\rho) = c \cdot e_s(K, \rho), s = 0, 1, \ldots.$$

Утверждение 2.2. *Для произвольных $c > 0$, $\varepsilon > 0$, компакта K и нормы $\|\cdot\|_\rho$*

$$N_{\|\cdot\|_\rho}(cK, \varepsilon) = N_{\|\cdot\|_\rho}\left(K, \frac{\varepsilon}{c}\right).$$

Доказательство утверждения 2.1. Для шаров с центром в точке y будет верно

$$B_{c\rho}(y, \varepsilon) \equiv \{z : c\rho(y, z) \leqslant \varepsilon\} = \left\{z : \rho(y, z) \leqslant \frac{\varepsilon}{c}\right\} \equiv B_\rho\left(y, \frac{\varepsilon}{c}\right).$$

Тогда для произвольного компакта K

$$N_{c\rho}(K, \varepsilon) = N_\rho\left(K, \frac{\varepsilon}{c}\right).$$

Получаем для $s = 0, 1, \ldots$

$$\begin{aligned} e_s(K, c\rho) &\equiv \inf\{\varepsilon : N_{c\rho}(K, \varepsilon) \leqslant 2^s\} = \inf\left\{\varepsilon : N_\rho\left(K, \frac{\varepsilon}{c}\right) \leqslant 2^s\right\} \\ &= \inf\left\{c \cdot \frac{\varepsilon}{c} : N_\rho\left(K, \frac{\varepsilon}{c}\right) \leqslant 2^s\right\} = \inf\left\{c \cdot \varepsilon : N_\rho\left(K, \varepsilon\right) \leqslant 2^s\right\} \\ &= c \cdot \inf\left\{\varepsilon : N_\rho\left(K, \varepsilon\right) \leqslant 2^s\right\} = c \cdot e_s(K, \rho). \end{aligned}$$

Доказательство утверждения 2.2. Заметим, что если для некоторых компакта $K \subset \mathbb{R}^n$, постоянной $c > 0$, натурального r и точек $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^n$ будет выполняться

$$cK \subset \bigcup_{j=1}^{r} B_{\|\cdot\|_\rho}(x_j, \varepsilon),$$

тогда для любой точки $y \in K$ и некоторого $j, 1 \leqslant j \leqslant n$, будет верно

$$\|cy - x_j\|_\rho \leqslant \varepsilon.$$

Последнее неравенство эквивалентно

$$\|y - \frac{1}{c} \cdot x_j\|_\rho \leqslant \frac{\varepsilon}{c},$$

то есть для некоторых точек $y_1, \ldots, y_r \in \mathbb{R}^n$

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{r} B_{\|\cdot\|_\rho}\left(y_j, \frac{\varepsilon}{c}\right),$$

или в терминах чисел покрытия получаем, что для произвольного компакта $K \subset \mathbb{R}^n$, постоянной $c > 0$ и произвольного $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} N_{\|\cdot\|_\rho}(cK, \varepsilon) &\equiv \inf\left\{ r : cK \subset \bigcup_{j=1}^{r} B_{\|\cdot\|_\rho}(x_j, \varepsilon) \text{ для некоторых } x_1, \ldots, x_r \right\} \\ &= \inf\left\{ r : K \subset \bigcup_{j=1}^{r} B_{\|\cdot\|_\rho}\left(y_j, \frac{1}{c}\varepsilon\right) \text{ для некоторых } y_1, \ldots, y_r \right\} \\ &\equiv N_{\|\cdot\|_\rho}\left(K, \frac{1}{c}\varepsilon\right). \end{aligned}$$

Напомним

Теорема F (Неравенство Бернштейна, [3]). *Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ – последовательность независимых случайных величин, таких что $\mathsf{E}\psi_i = 0$ и $\psi_i \leqslant 1$(с вероятностью 1) для $i = 1, \ldots, n$. Положим*

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}\psi_i.$$

Тогда для любого $\varepsilon \geqslant 0$ справедливо

$$\mathsf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n} \psi_i > \varepsilon\right\} \leqslant \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2n(\sigma^2 + \varepsilon/(3n))}\right).$$

Теорему 2.1 мы получим как следствие следующего результата двойственного характера

Лемма 2.1. *Пусть $\{\varphi\}_{i=1}^{n} \subset l_2^N$ – набор линейно-независимых функций с ограничением*

$$\|\varphi_i\|_\infty \leqslant M, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Пусть норма в пространстве X задается с помощью равенства (0.8), где семейство Ω удовлетворяет (0.10) и (0.14) с некоторыми $\alpha \geqslant 1$ и $\beta \geqslant 0$. Для любого такого целого k, что для некоторой постоянной $C > 0$ будет выполняться $C(\log N)^{3/2} \leqslant k \leqslant n/2$, найдется множество $I \subset \{1, \dots, n\}$ такое, что

$$|I| = n - k', \text{где } k' \text{ удовлетворяет } |k - k'| \leqslant \frac{k}{10},$$

любого набора коэффициентов $a = \{a_i\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ с

$$\operatorname{supp} a = \{i : a_i \neq 0\} \subset I, \tag{2.3}$$

произвольного $\gamma > 0$, абсолютной постоянной M, постоянной $K(C_0, \beta, \gamma)$, зависящей от C_0,β и γ, справедливо неравенство

$$\|a\|_{l_2^n} = \left(\sum_{i \in I} |a_i|^2\right)^{1/2} \leqslant K(C_0, \beta, \gamma) M (\log N)^{4+\alpha/2+\gamma} \sqrt{\frac{n}{k}} \|a\|_*, \tag{2.4}$$

где по определению

$$\|a\|_* = \sup_{b \in \mathbb{R}^n} \left\{ \left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| : \left\|\sum_{i=1}^{n} b_i \varphi_i\right\|_X \leqslant 1 \right\} \tag{2.5}$$

Для доказательства леммы 2.1 будем применять методы работ [19] и [4].

Доказательство леммы 2.1. Для простоты изложения, введем обозначение

$$A = K(C_0, \beta, \gamma) M (\log N)^{4+\alpha/2+\gamma} \sqrt{\frac{n}{k}}, \tag{2.6}$$

где постоянная $K(C_0, \beta, \gamma)$, зависящая от C_0, β и γ, будет определена ниже. Также обозначим множество

$$F_A \equiv \{a \in \mathbb{R}^n : \|a\|_* \leqslant 1, \quad \|a\|_{l_2^n} = A\}.$$

Будем предполагать, что множество F_A не пусто. Иначе, утверждение леммы будет справедливо для любого a. Покажем, что существует такое множество $\Lambda = \{i_1, \dots, i_{k'}\} \subset \{1, \dots, n\}$ ($i_{\nu_1} \neq i_{\nu_2}$ при $\nu_1 \neq \nu_2$), что

$$|k - k'| \leqslant \frac{k}{10}$$

и для любого $a \in F_A$ будет верно

$$\sum_{i \in \Lambda} \left(\frac{A^2}{n} - |a_i|^2 \right) \leqslant 0.4 \frac{k}{n} A^2.$$

Если множество Λ будет построено, тогда для любого элемента $a \in F_A$ будет выполняться

$$\sum_{i \in \Lambda} |a_i|^2 \geqslant |\Lambda| \frac{A^2}{n} - 0.4 \frac{k}{n} A^2 \geqslant \frac{A^2}{n}(k' - 0.4k) \geqslant \frac{A^2}{n} \frac{k}{2} > 0,$$

а значит, не существует векторов из F_A, носитель которых лежит в множестве $I = \{1, \dots, n\} \setminus \Lambda$. То есть

$$\|a\|_* \geqslant \frac{1}{A} \|a\|_{l_2^n}, \text{ если } \operatorname{supp} a \subset I,$$

и утверждение леммы выполнено.

Пусть Θ, Θ' – стандартные вероятностные пространства и $\{\eta_i(\theta)\}_{i=1}^n$, $\{\eta_i'(\theta')\}_{i=1}^n$ – два набора независимых случайных величин, заданных соответственно на пространствах Θ и Θ', имеющих распределение Бернулли, то есть:

$$\mathsf{P}(\eta_i = 1) = \mathsf{P}(\eta_i' = 1) = \frac{k}{n},$$
$$\mathsf{P}(\eta_i = 0) = \mathsf{P}(\eta_i' = 0) = 1 - \frac{k}{n}.$$

Рассмотрим случайный процесс, проиндексированный элементами множества F_A:

$$\xi_a(\theta) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{A^2}{n} - |a_i|^2\right)\eta_i(\theta), \quad a \in F_A.$$

Покажем, что будет выполняться неравенство

$$\mathsf{E}_\theta \sup_{a\in F_A} \xi_a(\theta) \leqslant \frac{k}{3n}A^2. \tag{2.7}$$

Для произвольного элемента $a \in F_A$ будем иметь

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_\theta\xi_a(\theta) &= \mathsf{E}_\theta\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{A^2}{n} - |a_i|^2\right)\eta_i(\theta)\right)\\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{A^2}{n} - |a_i|^2\right)\mathsf{E}_\theta\eta_i(\theta) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{A^2}{n} - |a_i|^2\right)\frac{k}{n}\\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{A^2}{n} - \sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)\frac{k}{n} = \left(A^2 - A^2\right)\frac{k}{n} = 0.\end{aligned}$$

Зафиксируем $a^0 \in F_A$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_\theta \sup_{a\in F_A}\xi_a(\theta) &= \mathsf{E}_\theta\left\{\sup_{a\in F_A}\xi_a(\theta) - \xi_{a^0}(\theta)\right\} = \mathsf{E}_\theta \sup_{a\in F_A}\left\{\xi_a(\theta) - \xi_{a^0}(\theta)\right\}\\ &\leqslant \mathsf{E}_\theta \sup_{a,a'\in F_A}\left\{\xi_a(\theta) - \xi_{a'}(\theta)\right\} \leqslant \mathsf{E}_\theta \sup_{a,a'\in F_A}\left|\xi_a(\theta) - \xi_{a'}(\theta)\right|\\ &= \mathsf{E}_\theta \sup_{a,a'\in F_A}\left|\sum_{i=1}^n \left\{|a_i'|^2 - |a_i|^2\right\}\eta_i(\theta)\right| \equiv J_1.\end{aligned}$$

Заметим, что для произвольных элементов $a, a' \in F_A$ будет выполняться

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} |a_i'|^2\right) \frac{k}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(|a_i|^2 - |a_i'|^2\right) \frac{k}{n}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(|a_i|^2 - |a_i'|^2\right) \mathsf{E}_\theta \eta_i'(\theta').$$

Значит

$$J_1 = \mathsf{E}_\theta \sup_{a,a' \in F_A} \left| \sum_{i=1}^{n} \left\{|a_i|^2 - |a_i'|^2\right\} \eta_i(\theta) - \sum_{i=1}^{n} \left\{|a_i'|^2 - |a_i|^2\right\} \mathsf{E}_\theta \eta_i'(\theta) \right|$$
$$= \mathsf{E}_\theta \sup_{a,a' \in F_A} \left| \sum_{i=1}^{n} \left\{|a_i|^2 - |a_i'|^2\right\} \left(\eta_i(\theta) - \mathsf{E}_{\theta'} \eta_i'(\theta')\right) \right|$$
$$= \mathsf{E}_\theta \sup_{a,a' \in F_A} \left| \sum_{i=1}^{n} \left\{|a_i|^2 - |a_i'|^2\right\} \mathsf{E}_{\theta'} \left(\eta_i(\theta) - \eta_i'(\theta')\right) \right|$$
$$\leqslant \mathsf{E}_\theta \sup_{a,a' \in F_A} \mathsf{E}_{\theta'} \left| \sum_{i=1}^{n} \left\{|a_i|^2 - |a_i'|^2\right\} \left(\eta_i(\theta) - \eta_i'(\theta')\right) \right|$$
$$\leqslant \mathsf{E}_\theta \mathsf{E}_{\theta'} \sup_{a,a' \in F_A} \left| \sum_{i=1}^{n} \left\{|a_i|^2 - |a_i'|^2\right\} \left(\eta_i(\theta) - \eta_i'(\theta')\right) \right| \equiv J_2.$$

Пусть $\{\varepsilon_i(\theta'')\}_{i=1}^n$ – система независимых случайных величин Радемахера, заданных на стандартном вероятностном пространстве Θ''. Случайные величины $\eta_i(\theta) - \eta_i'(\theta')$, заданные на $\Theta \times \Theta'$ имеют такое же распределение, как и случайные величины $\varepsilon_i(\theta'')(\eta_i(\theta) - \eta_i'(\theta'))$, заданные на $\Theta \times \Theta' \times \Theta''$. Тогда, используя стандартный прием симметризации, получаем, что

$$J_2 = \mathsf{E}_\theta \mathsf{E}_{\theta'} \mathsf{E}_{\theta''} \sup_{a,a' \in F_A} \left| \sum_{i=1}^{n} \left\{|a_i|^2 - |a_i'|^2\right\} \varepsilon_i(\theta'') \left(\eta_i(\theta) - \eta_i'(\theta')\right) \right|$$
$$\leqslant 2\mathsf{E}_\theta \mathsf{E}_{\theta''} \sup_{a,a' \in F_A} \left| \sum_{i=1}^{n} \left\{|a_i|^2 - |a_i'|^2\right\} \varepsilon_i(\theta'') \eta_i(\theta) \right| \equiv J_3.$$

Учитывая, что случайный процесс $\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \varepsilon_i(\theta'')\eta_i(\theta)$ является симметричным, используя [23, лемма 1.2.8], получаем

$$J_3 = 4\mathsf{E}_\theta \mathsf{E}_{\theta''} \sup_{a \in F_A} \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \varepsilon_i(\theta'')\eta_i(\theta)$$

Для оценки величины J_3 воспользуемся chaining-методом, изложенным, в частности, в [23]. Рассмотрим для фиксированного $\theta \in \Theta$ случайный процесс

$$\zeta_a(\theta'') = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \varepsilon_i(\theta'')\eta_i(\theta).$$

Из теоремы E следует, что этот процесс является субгауссовским относительно псевдометрики

$$\rho(a, b) = \rho_\theta(a, b) = \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i(\theta) \left(|a_i|^2 - |b_i|^2 \right)^2 \right)^{1/2}, \ a, b \in F_A,$$

то есть для произвольного $y > 0$ будет выполняться

$$\mathsf{P}\left\{ |\zeta_a(\theta'') - \zeta_b(\theta'')| > y \right\} \leqslant 2 \exp\left(-\frac{y^2}{2\rho^2(a, b)} \right).$$

Используя неравенство Дадли (см. [23, неравенство (1.16)]) для процесса $\zeta_a(\theta'')$, получаем

$$\mathsf{E}_{\theta''} \sup_{a \in F_A} \zeta_a(\theta'') \leqslant C' \sum_{s \geqslant 0} 2^{s/2} e_{2^s}(F_A, \rho_\theta).$$

Значит

$$J_3 \leqslant C E_\theta \left(\sum_{s \geqslant 0} 2^{s/2} e_{2^s}(F_A, \rho_\theta) \right). \tag{2.8}$$

Для $\theta \in \Theta$ положим $H_\theta = \{i : \eta_i(\theta) = 1\}$. Тогда

$$\rho_\theta(a,b) = \left(\sum_{i\in H_\theta}(|a_i|^2 - |b_i|^2)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i\in H_\theta}(|a_i| - |b_i|)^2(|a_i| + |b_i|)^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \sup_{i\in H_\theta}\big||a_i| - |b_i|\big| \cdot \left(\sum_{i\in H_\theta}\big(|a_i| + |b_i|\big)^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \sup_{i\in H_\theta}\big|a_i - b_i\big| \cdot \left(\sup_{a\in F_A}\sum_{i\in H_\theta} 2^2|a_i|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant 2\|a-b\|_{l_\infty(H_\theta)} \cdot \left(\sup_{a\in F_A}\sum_{i\in H_\theta} |a_i|^2\right)^{1/2}$$

Из утверждения 2.1 получаем

$$\begin{aligned} e_{2^s}(F_A, \rho_\theta) &= e_{2^s}\left(F_A, 2\|\cdot\|_{l_\infty(H_\theta)} \cdot \left(\sup_{a\in F_A}\sum_{i\in H_\theta}|a_i|^2\right)^{1/2}\right) \\ &= 2\left(\sup_{a\in F_A}\sum_{i\in H_\theta}|a_i|^2\right)^{1/2} \cdot e_{2^s}\left(F_A, \|\cdot\|_{l_\infty(H_\theta)}\right) \\ &\leqslant 2\left(\sup_{a\in F_A}\sum_{i\in H_\theta}|a_i|^2\right)^{1/2} \cdot e_{2^s}\left(F_A, \|\cdot\|_{l_\infty^n}\right). \qquad (2.9) \end{aligned}$$

Из (2.8), (2.9) и нервенства Гёльдера

$$\begin{aligned} J_3 &\leqslant CE_\theta\left(\sum_{s\geqslant 0} 2^{s/2} e_{2^s}(F_A, \rho_\theta)\right) \\ &\leqslant CE_\theta\left(\sum_{s\geqslant 0} 2^{s/2}\cdot 2\left(\sup_{a\in F_A}\sum_{i\in H_\theta}|a_i|^2\right)^{1/2} e_{2^s}\left(F_A, \|\cdot\|_{l_\infty^n}\right)\right) \\ &= 2C\left(\sum_{s\geqslant 0} 2^{s/2} e_{2^s}\left(F_A, \|\cdot\|_{l_\infty^n}\right)\right) E_\theta\left(\sup_{a\in F_A}\sum_{i\in H_\theta}|a_i|^2\right)^{1/2} \\ &= 2C\left(\sum_{s\geqslant 0} 2^{s/2} e_{2^s}\left(F_A, \|\cdot\|_{l_\infty^n}\right)\right) E_\theta\left(\sup_{a\in F_A}\sum_{i=1}^{n}\eta_i(\theta)|a_i|^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$= C' \left(\sum_{s \geqslant 0} 2^{s/2} e_{2^s} \left(F_A, \| \cdot \|_{l_\infty^n} \right) \right) \left(E_\theta \sup_{a \in F_A} \sum_{i=1}^n \eta_i(\theta) |a_i|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.10)$$

С другой стороны,

$$J_3 \geqslant J_2 \geqslant J_1 \geqslant \mathsf{E}_\theta \left\{ \sup_{a \in F_A} \xi_a(\theta) - \xi_{a^0}(\theta) \right\} = \mathsf{E}_\theta \sup_{a \in F_A} \xi_a(\theta) - \mathsf{E}_\theta \xi_{a^0}(\theta)$$

$$= \mathsf{E}_\theta \sup_{a \in F_A} \sum_{i=1}^n \eta_i(\theta) |a_i|^2 - \mathsf{E}_\theta \left(\sum_{i=1}^n \eta_i(\theta) |a_i^0|^2 \right)$$

$$= \mathsf{E}_\theta \sup_{a \in F_A} \sum_{i=1}^n \eta_i(\theta) |a_i|^2 - \sum_{i=1}^n \mathsf{E}_\theta \eta_i(\theta) |a_i^0|^2$$

$$= \mathsf{E}_\theta \sup_{a \in F_A} \sum_{i=1}^n \eta_i(\theta) |a_i|^2 - A^2 \frac{k}{n}. \quad (2.11)$$

Таким образом, из (2.10) и (2.11) получаем

$$\mathsf{E}_\theta \sup_{a \in F_A} \sum_{i=1}^n \eta_i(\theta) |a_i|^2 - A^2 \frac{k}{n}$$

$$\leqslant C' \left(\sum_{s \geqslant 0} 2^{s/2} e_{2^s} \left(F_A, \| \cdot \|_{l_\infty^n} \right) \right) \cdot \left(E_\theta \sup_{a \in F_A} \sum_{i=1}^n \eta_i(\theta) |a_i|^2 \right)^{1/2},$$

откуда следует, что

$$\mathsf{E}_\theta \sup_{a \in F_A} \sum_{i=1}^n \eta_i(\theta) |a_i|^2$$

$$\leqslant \max \left\{ 2A^2 \frac{k}{n}, 2C' \left(\sum_{s \geqslant 0} 2^{s/2} e_{2^s} \left(F_A, \| \cdot \|_{l_\infty^n} \right) \right) \cdot \left(E_\theta \sup_{a \in F_A} \sum_{i=1}^n \eta_i(\theta) |a_i|^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

Поэтому для некоторой постоянной $C > 0$

$$J_1 \leqslant C \max \left\{ \left(\sum_{s \geqslant 0} 2^{s/2} e_{2^s} \left(F_A, \| \cdot \|_{l_\infty^n} \right) \right) A \sqrt{\frac{k}{n}}, \left(\sum_{s \geqslant 0} 2^{s/2} e_{2^s} \left(F_A, \| \cdot \|_{l_\infty^n} \right) \right)^2 \right\} \quad (2.12)$$

Оценим теперь величину

$$\left(\sum_{s\geqslant 0} 2^{s/2} e_{2^s}\left(F_A, \|\cdot\|_{l_\infty^n}\right)\right). \tag{2.13}$$

Так как $F_A \subset B_*$, где B_* – единичный шар пространства $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$, то справедливо неравенство

$$e_q(F_A, l_\infty^n) \leqslant e_q(B_*, l_\infty^n).$$

Пусть $a \in B_*$, то есть $\|a\|_* \leqslant 1$. Тогда для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\sup_{b_i\colon \|b_i\varphi_i\|_{l_\infty^n} \leqslant 1} |a_i b_i| \leqslant \sup_{b_i\colon \|b_i\varphi_i\|_X \leqslant 1} |a_i b_i| \leqslant 1.$$

Значит,

$$\sup_{b_i\colon |b_i| \leqslant 1/\|\varphi_i\|_{l_\infty^n}} |a_i| \leqslant \frac{1}{|b_i|} \leqslant \frac{1}{1/\|\varphi_i\|_{l_\infty^n}} \leqslant \|\varphi_i\|_{l_\infty^n} \leqslant M.$$

Следовательно,

$$B_* \subset M B_{l_\infty^n} \tag{2.14}$$

и $e_q(B_*, l_\infty^n) \leqslant M$, для всех $q = 0, 1, \ldots$. С другой стороны при $q > n$ будем иметь

$$\begin{aligned} e_q(B_\infty^n, l_\infty^n) &\equiv \inf\left\{\varepsilon : N_{l_\infty^n}(B_\infty^n, \varepsilon) \leqslant 2^q\right\} = \inf\left\{\varepsilon : \frac{1}{\varepsilon^n} \leqslant 2^q\right\} \\ &= \inf\left\{\varepsilon : \varepsilon \geqslant \frac{1}{2^{q/n}}\right\} = \left\lceil \frac{1}{2^{s/n}} \right\rceil \leqslant C 2^{-q/n}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $q > n$

$$e_q(B_*, l_\infty^n) \leqslant e_q(M B_\infty^n, l_\infty^n) \leqslant C M 2^{-q/n}. \tag{2.15}$$

Другую оценку энтропийных чисел можно получить используя свойства двойственности. Пусть P – тождественное линейное преобразование в $\mathbb{R}^n$, рассматриваемое как оператор

$$P : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{l_\infty^n}).$$

Ясно, что тогда

$$e_q(B_*, l_\infty^n) = e_q(P), q = 0, 1 \dots . \tag{2.16}$$

Введем в рассмотрение сопряженный оператор

$$P^* : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{l_1^n}) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X).$$

Учитывая (2.14), норму оператора P можно оценить как

$$\|P\| = \sup_{a:\, \|a\|_* \leqslant 1} \|Pa\|_{l_\infty^n} \leqslant \sup_{a:\, \|a\|_{l_\infty^n} \leqslant M} \|a\|_{l_\infty^n} \leqslant M.$$

Поэтому $\|P^*\| \leqslant M$. К энтропийным числам оператора P^* можно применить оценку Карла (см. [18, предложение 1])

$$e_q(P^*) \leqslant \frac{C \cdot 2^{-q/n} \cdot \|P^*\| \cdot T_2(X)}{q^{1/2}} \left(1 + \ln \frac{n}{q}\right)^{1/2}, \quad 1 \leqslant q \leqslant C'n,$$

где $T_2(X)$ – постоянная типа 2 пространства X. Учитывая теорему 1.1, при $1 \leqslant q \leqslant C'n$ для некоторой $C' > 0$ получаем

$$e_q(P^*) \leqslant \frac{C \cdot \|P^*\| \cdot K(C_0, \beta, \gamma) \cdot (\log N)^{\alpha/2+1+\gamma} (\log n)^{1/2}}{2^{q/n} \cdot q^{1/2}}. \tag{2.17}$$

Для произвольного оператора U такого, что $\|U\| \leqslant 1$, $\operatorname{rank} U \leqslant n$, при $\varepsilon \in (0,1)$ будет верна следующая оценка для чисел покрытия $N(U, \varepsilon)$ (см. [17, теорема 6]):

$$\log N(U, \varepsilon) \leqslant C \left(\log \frac{n}{\varepsilon}\right) \cdot \log N\left(U^*, \frac{C^{-1}\varepsilon}{\log(n/\varepsilon)}\right),$$

где C – абсолютная постоянная.

Если $\log 1/\varepsilon \leqslant C \log n$, тогда

$$\log N(U, C\varepsilon \log n) \leqslant C_1 \log n \log N(U^*, \varepsilon). \tag{2.18}$$

Применяя неравенство (2.18) к оператору $U = P/M$, получаем

$$\log N(P/M, C\varepsilon \log N) \leqslant C_1 \log n \log N(P^*/M, \varepsilon).$$

Из утверждения 2.2

$$\begin{aligned}
e_q(P) &\equiv \inf\{\varepsilon : N(P,\varepsilon) \leqslant 2^q\} = \inf\{CM\varepsilon \log n : N(P, CM\varepsilon \log n) \leqslant 2^q\} \\
&= \inf\{CM\varepsilon \log n : N(P/M, C\varepsilon \log n) \leqslant 2^q\} \\
&= C\log n \cdot \inf\{M\varepsilon : \log N(P/M, C\varepsilon \log n) \leqslant q\} \\
&\leqslant C\log n \cdot \inf\{M\varepsilon : C_1 \log n \log N(P^*/M, \varepsilon) \leqslant q\} \\
&= C\log n \cdot \inf\{M\varepsilon : C_1 \log n \log N(P^*, M\varepsilon) \leqslant q\} \\
&= C\log n \cdot \inf\{\varepsilon : C_1 \log n \log N(P^*, \varepsilon) \leqslant q\} \\
&= C\log n \cdot \inf\left\{\varepsilon : \log N(P^*, \varepsilon) \leqslant \frac{q}{C_1 \log n}\right\} \\
&= C\log n \cdot \inf\{\varepsilon : N(P^*, \varepsilon) \leqslant 2^{q/(C_1 \log n)}\} = C\log n \cdot e_{q/(C_1 \log n)}.
\end{aligned}$$

Учитывая (2.17), находим при $1 \leqslant q \leqslant C'n$ для некоторой постоянной $C' > 0$

$$\begin{aligned}
e_q(P) &\leqslant \frac{\log n \cdot \|P^*\| \cdot K(C_0,\beta,\gamma) \cdot (\log N)^{\alpha/2+1+\gamma} \log n}{2^{q/(C_1 n \log n)} \cdot q^{1/2}} \\
&\leqslant \frac{M \cdot K(C_0,\beta,\gamma) \cdot (\log N)^{\alpha/2+1+\gamma} (\log n)^2}{q^{1/2}} \\
&\leqslant \frac{CM \cdot K(C_0,\beta,\gamma) \cdot (\log N)^{\alpha/2+3+\gamma}}{q^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Используя (2.15), (2.16) и (2.19), оценим величину (2.13)

$$\begin{aligned}
&\sum_{s\geqslant 0} 2^{s/2} e_{2^s}\left(F_A, \|\cdot\|_{l_\infty^n}\right) \\
&\quad = \sum_{s:2^s \leqslant C'n} 2^{s/2} e_{2^s}\left(F_A, \|\cdot\|_{l_\infty^n}\right) + \sum_{s:2^s > C'n} 2^{s/2} e_{2^s}\left(F_A, \|\cdot\|_{l_\infty^n}\right) \\
&\quad \leqslant \sum_{s:2^s \leqslant C'n} 2^{s/2} e_{2^s}(P) + \sum_{s:2^s > C'n} 2^{s/2} e_{2^s}\left(F_A, \|\cdot\|_{l_\infty^n}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{s:2^s\leqslant C'n} 2^{s/2}\frac{CM\cdot K(C_0,\beta,\gamma)\cdot(\log N)^{\alpha/2+3+\gamma}}{2^{s/2}}\\
&\quad+\sum_{s:2^s>C'n} 2^{s/2}CM2^{-2^s/n}\\
&\leqslant CM\cdot K(C_0,\beta,\gamma)\cdot(\log N)^{\alpha/2+4+\gamma}+C_2M\\
&\leqslant CM\cdot K(C_0,\beta,\gamma)\cdot(\log N)^{\alpha/2+4+\gamma}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, (см. (2.12))

$$
\begin{aligned}
J_1\leqslant C\max\Bigg\{&MK(C_0,\beta,\gamma)\cdot(\log N)^{\alpha/2+4+\gamma}A\sqrt{\frac{k}{n}},\\
&M^2K^2(C_0,\beta,\gamma)\cdot(\log N)^{\alpha+8+2\gamma}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

С учетом значения A (см. (2.6)), при соответсвующем выборе постоянной C, будет выполняться неравенство (2.7).

Пусть $\psi_i=\eta_i-k/n$, $i=1,\dots,n$ и

$$
\begin{aligned}
G&=\left\{\theta\in\Theta:0.9k\leqslant\sum_{i=1}^n\eta_i(\theta)\leqslant 1.1k\right\}\\
&=\left\{\theta\in\Theta:-0.1k\leqslant\sum_{i=1}^n\psi_i(\theta)\leqslant 0.1k\right\}
\end{aligned}
$$

Заметим, что для ψ_i будут выполняться требования теоремы F и будет справедливо

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\{\Theta\setminus G\}&=\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^n\psi_i(\theta)>0.1k\right)\\
&\leqslant\exp\left(-\frac{0.01k^2}{2n(\sigma^2+0.1k/(3n))}\right).
\end{aligned}\tag{2.20}
$$

Учитывая, что для случайных величин ψ_i, $i=1,\dots,n$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\psi_i=1-\frac{k}{n}\right)=\frac{k}{n},\quad \mathsf{P}\left(\psi_i=-\frac{k}{n}\right)=1-\frac{k}{n},\\
\mathsf{E}\psi_i=0,\quad \mathsf{D}\psi_i=\mathsf{E}(\psi_i^2)=\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{k}{n},
\end{aligned}
$$

из (2.20) получаем

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\{\Theta\setminus G\} &\leqslant \exp\left(-\frac{0.01k^2}{2n((1-k/n)k/n+0.1k/(3n))}\right)\\
&= \exp\left(-\frac{k}{580/3-200k/n}\right)\leqslant \exp\left(-\frac{k}{194}\right).
\end{aligned}
$$

Кроме того, отметим, что для любых $\theta\in\Theta$ и $a\in F_A$

$$
\xi_a(\theta)\geqslant -A^2.
$$

Из (2.7) с учётом того, что $k\geqslant C(\ln N)^{3/2}$ – достаточно большое число, если $N>1$ и C достаточно велика, вытекает

$$
\begin{aligned}
\int\limits_G \sup_{a\in F_A}\xi_a(\theta)\,\mathrm{d}\theta &\leqslant \mathsf{E}_\theta \sup_{a\in F_A}\xi_a(\theta)-\int\limits_{\Theta\setminus G}\sup_{a\in F_A}\xi_a(\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&\leqslant \frac{k}{3n}A^2-\int\limits_{\Theta\setminus G}(-A^2)\,\mathrm{d}\theta\leqslant \frac{k}{3n}A^2+A^2\mathsf{P}\{\Theta\setminus G\}\\
&\leqslant A^2\left(\frac{k}{3n}+e^{-k/194}\right)\leqslant 0.35A^2\frac{k}{n}.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\min_{\theta\in\Theta}\sup_{a\in F_A}\xi_a(\theta)\leqslant 0.35\frac{k}{n}A^2(\mathsf{P}\{G\})^{-1}\leqslant 0.4\frac{k}{n}A^2. \tag{2.21}
$$

Из неравенства (2.21) вытекает существование такого $\theta_0\in\Theta$, что

$$
\begin{cases}
\sup\limits_{a\in F_A}\xi_a(\theta_0)\leqslant 0.4\dfrac{k}{n}A^2,\\
|\{i:\eta_i(\theta_0)=1\}|\equiv k_0'\in[0.9k,1.1k].
\end{cases}
$$

Положив

$$
\Lambda=\{i:\eta_i(\theta_0)=1\},
$$

мы получим утверждение леммы 2.1.

Приведём

Доказательство теоремы 2.1. Допустим, что $k \leqslant C(\log N)^{3/2}$ для некоторой постоянной $C > 0$. Если F имеет вид (2.1), тогда для любого $\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i \in F$ будет выполняться

$$\operatorname{dist}_X\left(\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i, 0\right) = \left\|\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i\right\|_X \leqslant M\sum_{i=1}^n |a_i| \leqslant M\sqrt{n}$$
$$\leqslant M\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{\frac{C(\log N)^{3/2}}{k}} = MC^{1/2}(\log N)^{3/4}\sqrt{\frac{n}{k}}.$$

Следовательно,

$$d_k^\Phi(F,X) \equiv \inf_{G_k}\sup_{f\in F}\operatorname{dist}_X(f,G_k) \leqslant MC^{1/2}(\log N)^{3/4}\sqrt{\frac{n}{k}},$$

и неравенство (2.2) будет выполнено.

Случай, когда $k > n/2$, является простым следствием случая, когда $k = n/2$.

Предположим, что неравенство (2.2) нарушается для некоторого $k, C(\log N)^{3/2} \leqslant k \leqslant n/2$. Найдём такое I, что для некоторого $k', |k-k'| < k/10, |I| = n-k'$, и для произвольного $a, \operatorname{supp} a \subset I$, будет верно неравенство (2.4).

Из предположения, что неравенство (2.2) не будет выполняться, следует, что найдётся вектор

$$\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i, \text{ где } \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \leqslant 1,$$

для которого будет верно неравенство

$$\frac{1}{\left\|\sum_{i\in I} a_i\varphi_i\right\|_X} < \frac{1}{K(C_0,\beta,\gamma)M(\log N)^{4+\alpha/2+\gamma}\sqrt{\frac{n}{k}}}. \tag{2.22}$$

Следствием теоремы Хана-Банаха является существование такого элемента $g \in X^*$, что

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i\right) = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i\right\|_X,$$

$$\|g\|_{X^*} = 1,$$

$$g(\varphi_i) = 0,\ \text{если } i \notin I.$$

Зададим $f \in X^*$ как

$$f = \frac{1}{\|\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i\|_X} \cdot g.$$

Тогда для функционала f с учётом (2.22) будет выполняться

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i\right) = 1,$$

$$f(\varphi_i) = 0,\ \text{если } i \notin I,$$

$$\|f\|_{X^*} = \frac{1}{\|\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i\|_X} < K^{-1}(C_0,\beta,\gamma)M^{-1}(\log N)^{-4-\alpha/2-\gamma}\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и лемму 2.1, находим

$$\begin{aligned}
1 = f\left(\sum_{i\in I} a_i\varphi_i\right) &= \sum_{i\in I} a_i f(\varphi_i) \\
&\leqslant \left(\sum_{i\in I} |a_i|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i\in I} |f(\varphi_i)|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i\in I} |f(\varphi_i)|^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant K(C_0,\beta,\gamma)M(\log N)^{4+\alpha/2+\gamma}\sqrt{\frac{n}{k}} \cdot \|\{f(\varphi_i)\}\|_*. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Из определения нормы $\|\cdot\|_*$ выводим

$$\begin{aligned}
\|\{f(\varphi_i)\}\|_* &= \sup\left\{\left|\sum_{i\in I} b_i f(\varphi_i)\right| : \left\|\sum_{i=1}^{n} b_i\varphi_i\right\|_X \leqslant 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|f\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\varphi_i\right)\right| : \left\|\sum_{i=1}^{n} b_i\varphi_i\right\|_X \leqslant 1\right\} = \|f\|_{X^*},
\end{aligned}$$

а из (2.23) получаем

$$\|f\|_{X^*} \geqslant K^{-1}(C_0, \beta, \gamma) M^{-1} (\log N)^{-4-\alpha/2-\gamma} \sqrt{\frac{k}{n}}.$$

Полученное противоречие доказывает теорему 2.1.

Глава 3

Сложность семейств параллелепипедов и выпуклых множеств в $\{1,\ldots,n\}^d$

В данной главе будем считать, что набор индексов I совпадает с $\{1,\ldots,n\}^d = \{1,\ldots,n\} \times \ldots \times \{1,\ldots,n\}$, $n^d \leqslant N$.

Определение 3.9. *Дискретным параллелепипедом* в $\mathbb{N}^d$ будем называть множество вида

$$P = \Big\{n_1,\ldots,m_1\Big\} \times \cdots \times \Big\{n_d,\ldots,m_d\Big\},$$

где для всех $i, 1 \leqslant i \leqslant d$, будет выполняться $n_i, m_i \in N$, $n_i \leqslant m_i$.

Утверждение 3.1. *Совокупность всех дискретных параллелепипедов вида*

$$\Pi_d = \Big\{\{1,\ldots,m_1\} \times \cdots \times \{1,\ldots,m_d\} \subset \{1,\ldots,n\}^d\Big\}$$

при $d \in \mathbb{N}$ удовлетворяет (0.10) и (0.14) при $\alpha = 1$ и $\beta = \frac{d-1}{d}$.

Доказательство утверждения 3.1. Для простоты выкладок будем считать, что $n = 2^\nu$ для некоторого натурального $\nu \in \mathbb{N}$.

Построим семейства Δ_s, $s = 0, \ldots, \nu$.

Определим Δ_0 как совокупность пустого множества $\varnothing$ и всего параллелепипеда $\{1, \ldots, n\}^d$.

Для построения семейств Δ_s, $s = 1, \ldots, \nu$, нам понадобятся вспомогательные конструкции. Определим множества $\tau(i, k) \subset \{1, \ldots, n\}$ при $i = 1, \ldots, \nu$ и $k = 0, \ldots, 2^{i-1} - 1$ как

$$\begin{aligned}\tau(i, k) &= \left\{k \cdot \frac{n}{2^{i-1}} + 1, \ldots, k \cdot \frac{n}{2^{i-1}} + \frac{n}{2^i}\right\} \\ &= \left\{k \cdot 2^{\nu-i+1} + 1, \ldots, k \cdot 2^{\nu-i+1} + 2^{\nu-i}\right\}.\end{aligned}$$

Множества $\tau(i, k)$ представляют собой дискретный интервал с числом элементов равным $2^{\nu-i}$.

Определим набор множеств

$$T(s) = \left\{\tau(s, k) \,\middle|\, k = 0, \ldots, 2^{s-1} - 1\right\},\ s = 1, \ldots, \nu.$$

Тогда семейства Δ_s, $s = 1, \ldots, \nu$, зададим как

$$\Delta_s = \begin{cases}(T(s) \times \Pi_{d-1}) \bigcup \{\varnothing\}, & \text{если } d \geqslant 2 \\ T(s) \bigcup \{\varnothing\}, & \text{если } d = 1.\end{cases}$$

Рассмотрим произвольный элемент P семейства Π_d. Для некоторых натуральных $m_1, \ldots, m_d, 1 \leqslant m_j \leqslant n$, множество P можно представить как

$$P = \{1, \ldots, m_1\} \times \{1, \ldots, m_2\} \times \cdots \times \{1, \ldots, m_d\}. \tag{3.1}$$

Число m_1 можно единственным способом представить как сумму целых степеней двойки:

$$m_1 = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_r} \text{ для некоторого целого } r,$$

$$\nu \geqslant k_1 > k_2 > \ldots > k_r \geqslant 0.$$

Далее будем считать, что $\sum_{i=1}^{0} \equiv 0$. Множество $\{1,\ldots,m_1\}$ можно представить как

$$
\begin{aligned}
\{1,\ldots,m_1\} = \{1,\ldots,2^{k_1}\} \bigcup \{2^{k_1}+1,\ldots,2^{k_1}+2^{k_2}\} \bigcup \ldots \\
\ldots \bigcup \left\{ \sum_{i=1}^{r-1} 2^{k_i}+1,\ldots,\sum_{i=1}^{r-1} 2^{k_i}+2^{k_r} \right\} \\
= \bigcup_{t=1}^{r} \left\{ \sum_{i=1}^{t-1} 2^{k_i}+1,\ldots,\sum_{i=1}^{t-1} 2^{k_i}+2^{k_t} \right\}.
\end{aligned}
$$

В терминах множеств $\tau(i,k)$ интервал $\{1,\ldots,m_1\}$ можно записать как

$$
\begin{aligned}
\{1,\ldots,m_1\} = \bigcup_{t=1}^{r} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{t-1} 2^{k_i-k_t-1} \right) \cdot 2^{k_t+1}+1,\ldots \right. \\
\left. \ldots, \left(\sum_{i=1}^{t-1} 2^{k_i-k_t-1} \right) \cdot 2^{k_t+1}+2^{k_t} \right\} \\
= \bigcup_{t=1}^{r} \tau \left(\nu-k_t, \sum_{i=1}^{t-1} 2^{k_i-k_t-1} \right) \in \bigcup_{t=1}^{r} T\left(\nu-k_t\right).
\end{aligned}
$$

Таким образом, для дискретного параллелепипеда P будет выполняться

$$
P \in \left(\bigcup_{t=1}^{r} T\left(\nu-k_t\right) \right) \times \Pi_{d-1} = \bigcup_{t=1}^{r} \Delta_{\nu-k_t}, \text{ если } d \geqslant 2,
$$

$$
P \in \left(\bigcup_{t=1}^{r} T\left(\nu-k_t\right) \right) = \bigcup_{t=1}^{r} \Delta_{\nu-k_t}, \text{ если } d = 1.
$$

Следовательно, для произвольного дискретного параллелепипеда P найдутся такие множества $E_s \in \Delta_s$, $s=0,\ldots,\nu$, что

$$
P = \bigcup_{s=0}^{\nu} E_s.
$$

Рассмотрим произвольное множество $E_s \in \Delta_s, s = 1,\ldots,\nu$,

$E_s \neq \varnothing$. Его можно представить как

$$E_s = \begin{cases} \tau(s,k) \times \{1,\dots,m_2\} \times \dots \times \{1,\dots,m_d\}, & \text{если } d \geqslant 2, \\ \tau(s,k), & \text{если } d = 1, \end{cases}$$

для некоторого $k \in \{0,\dots,2^{s-1}-1\}$.

Следовательно, количество элементов в E_s равно

$$\#E_s = \begin{cases} \#\tau(s,k) \times m_2 \times \dots \times m_d, & \text{если } d \geqslant 2; \\ \#\tau(s,k), & \text{если } d = 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Учитывая, что

$$\#\tau(s,k) \leqslant 2^{\nu-s},\ m_j \leqslant n,$$

получаем

$$\#E_s \leqslant 2^{\nu-s} \cdot n^{d-1} = \frac{n}{2^s} \cdot n^{d-1} = \frac{n^d}{2^s}. \tag{3.3}$$

Для $E_0 \in \Delta_0$ оценка количества элементов $\#E_0 \leqslant n^d$ тривиальна. Следовательно, семейства множеств Δ_s удовлетворяют (0.10).

Оценка же $\#\Delta_s$, $s = 1,\dots,\nu$, сводится к оценке $\#T(s)$. Для последнего будет верно

$$\#T(s) = \#\{0,\dots,2^{s-1}-1\} = 2^{s-1}.$$

Таким образом, учитывая равенство

$$\#\Pi_d = n^d,$$

получаем

$$\#\Delta_s \begin{cases} \#T(s) \times \#\Pi_{d-1} + 1 = 2^{s-1} \cdot n^{d-1}, +1 & \text{если } d \geqslant 2; \\ \#T(s) + 1 = 2^{s-1} + 1, & \text{если } d = 1. \end{cases}$$

Заметим, что $\#\Delta_0 = 2$. Отсюда

$$\#\Delta_s \leqslant \max\{\cdot 2^{s-1} \cdot n^{d-1} + 1, 2\} \leqslant 2e^s n^{d-1} \leqslant 2e^s N^{(d-1)/d}.$$

Таким образом, построенные семейства Δ_s удовлетворяют (0.14) при $\alpha = 1$ и $\beta = \frac{d-1}{d}$. Утверждение доказано.

Пересечение выпуклого множества $B \subset \mathbb{R}^d$ и решётки $\mathbb{Z}^d$ будем обозначать $B_{\mathbb{Z}}$. Представляет интерес вопрос, удовлетворяет ли ограничениям на сложность (0.10) и (0.14), семейство множеств Ω, полученное как пересечение всевозможных выпуклых подмножеств куба $[1, n]^d$ с целочисленной решёткой $\mathbb{Z}^d$. Ниже устанавливается, что семейство множеств, приближающих выпуклые, удовлетворяет этим ограничениям. Точнее доказывается

Теорема 3.1 ([15])**.** *Для любого $0 < \gamma < 1$ найдётся семейство Ω подмножеств $\{1, \ldots, n\}^d$, удовлетворяющее (0.10) и (0.14) с некоторыми постоянными $\alpha \geqslant 1$ и $\beta \geqslant 0$, зависящими только от γ и d, такое, что для любого выпуклого множества $B \subset [1, n]^d$ найдётся $A \in \Omega$ такое, что $A \subset B_{\mathbb{Z}}$ и*

$$\#(B_{\mathbb{Z}} \setminus A) \leqslant \gamma \cdot \#B_{\mathbb{Z}}. \tag{3.4}$$

Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобятся вспомогательные результаты. Заметим, что при $d > 1$ каждая $d-1$-мерная грань d-мерного симплекса будет $(d-1)$-мерным симплексом. Далее будем считать, что $d \geqslant 2$.

d-мерный симплекс, который является выпуклой оболочкой точек $a_0, \ldots, a_d$ будем обозначать как $S_d(a_0, \ldots, a_d)$. Зафиксируем симплекс $S_d(a_0, \ldots, a_d)$. При $1 \leqslant i \leqslant d$ зададим точки

$$a_i' = a_i + \sum_{j=0}^{d} \overrightarrow{a_i a_j}. \tag{3.5}$$

Далее будем рассматривать замкнутые симплексы, то есть симплексы содержащие свои грани. Рассмотрим симплекс $S_d(a_0', \ldots, a_d')$.

Лемма 3.1. *Симплекс $S_d(a_0', \ldots, a_d')$ содержит симплекс $S_d(a_0, \ldots, a_d)$ и подобен ему с коэффициентом подобия d. При этом, если $a_0, \ldots, a_d \in (d\mathbb{Z})^d$, тогда и $a_0', \ldots, a_d' \in (d\mathbb{Z})^d$.*

Доказательство леммы 3.1. Рассмотрим вектора $\overrightarrow{a_{i_1}' a_{i_2}'}, i_1 \neq i_2$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a_{i_1}' a_{i_2}'} &= a_{i_2} + \sum_{j=0}^{d} \overrightarrow{a_{i_2} a_j} - a_{i_1} - \sum_{j=0}^{d} \overrightarrow{a_{i_1} a_j} = \overrightarrow{a_{i_1} a_{i_2}} + \sum_{j=0}^{d} \overrightarrow{a_{i_2} a_j} - \sum_{j=0}^{d} \overrightarrow{a_{i_1} a_j} \\
&= \sum_{j=0}^{d} (\overrightarrow{a_{i_2} a_j} - \overrightarrow{a_{i_1} a_j}) - \overrightarrow{a_{i_2} a_{i_1}} = \sum_{j=0}^{d} (\overrightarrow{a_{i_2} a_j} + \overrightarrow{a_j a_{i_1}}) - \overrightarrow{a_{i_2} a_{i_1}} \\
&= \sum_{j=0}^{d} \overrightarrow{a_{i_2} a_{i_1}} - \overrightarrow{a_{i_2} a_{i_1}} = (d+1) \cdot \overrightarrow{a_{i_2} a_{i_1}} - \overrightarrow{a_{i_2} a_{i_1}} \\
&= d \cdot \overrightarrow{a_{i_2} a_{i_1}} = -d \cdot \overrightarrow{a_{i_1} a_{i_2}}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Следовательно, симплекс $S_d(a_0', \ldots, a_d')$ подобен симплексу $S_d(a_0, \ldots, a_d)$ с коэффициентом подобия d.

Покажем, что симплекс $S_d(a_0', \ldots, a_d')$ содержит симплекс $S_d(a_0, \ldots, a_d)$. Для этого покажем, что все вершины симплекса $S_d(a_0, \ldots, a_d)$ принадлежат симплексу $S_d(a_0', \ldots, a_d')$. Из (3.5) и (3.6)

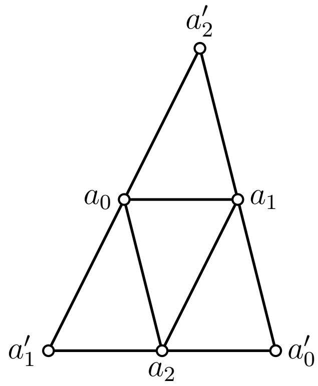

Рис. 3.1: Пример построения объемлющего симплекса при $d = 2$

следует, что

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{a_i} &= \overrightarrow{a'_i} - \sum_{j=0}^{d} \overrightarrow{a_i a_j} = \overrightarrow{a'_i} - \sum_{j=0}^{d} \left(-\frac{1}{d}\right) \overrightarrow{a'_i a'_j} \\
&= \overrightarrow{a'_i} + \frac{1}{d} \cdot \sum_{j=0}^{d} \overrightarrow{a'_i a'_j} = \overrightarrow{a'_i} + \frac{1}{d} \cdot \sum_{j=0}^{d} \left(\overrightarrow{a'_j} - \overrightarrow{a'_i}\right) \\
&= \overrightarrow{a'_i} + \frac{1}{d} \cdot \sum_{j=0}^{d} \overrightarrow{a'_j} - \frac{1}{d} \cdot \sum_{j=0}^{d} \overrightarrow{a'_i} = \frac{1}{d} \cdot \sum_{j=0}^{d} \overrightarrow{a'_j} + \frac{1}{d} \cdot d\overrightarrow{a'_i} - \frac{1}{d} \cdot (d+1) \cdot \overrightarrow{a'_i} \\
&= \frac{1}{d} \cdot \sum_{j=0}^{d} \overrightarrow{a'_j} - \frac{1}{d} \cdot \overrightarrow{a'_i} = \frac{1}{d} \cdot \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{d} \overrightarrow{a'_j} \in S_d(a'_0, \ldots, a'_d).
\end{aligned}
$$

Из принадлежности вершин симплекса $S_d(a_0, \ldots, a_d)$ выпуклому множеству $S_d(a'_0, \ldots, a'_d)$ следует, что $S_d(a_0, \ldots, a_d) \subset S_d(a'_0, \ldots, a'_d)$.

Если $a_0, \ldots, a_d \in (d\mathbb{Z})^d$, тогда непосредственно из определения (3.5) следует, что $a'_0, \ldots, a'_d \in (d\mathbb{Z})^d$

Симплекс $S_d(a'_0, \ldots, a'_d)$ будем называть *объемлющим симплексом* по отношению к симплексу $S_d(a_0, \ldots, a_d)$. Замкнутый параллелепипед, натянутый на вектора $\overrightarrow{v_0}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$, отложенные от точки a будем обозначать $P_k(a; \overrightarrow{v_0}, \ldots, \overrightarrow{v_k})$.

Замечание. Использованное в лемме 3.1 построение имеет аналогию с построением, используемым по другому поводу в [16].

Лемма 3.2. *Пусть вершины* $a_0, \ldots, a_d \in (d\mathbb{Z})^d$ *и не лежат в одной гиперплоскости. Тогда*

$$\mu_{\mathbb{Z}}\left(S_d(a'_0, \ldots, a'_d)\right) \leqslant d^{2d} \cdot \mu_{\mathbb{Z}}\left(S_d(a_0, \ldots, a_d)\right),$$

где $S_d(a'_0, \ldots, a'_d)$ *– объемлющий симплекс для* $S_d(a_0, \ldots, a_d)$.

Доказательство леммы 3.2. Рассмотрим параллелепипед

$$P_d(a'_0; \frac{1}{d^2} \cdot \overrightarrow{a'_0a'_1}, \ldots, \frac{1}{d^2} \cdot \overrightarrow{a'_0a'_d}). \tag{3.7}$$

Заметим, что координаты векторов, задающих параллелепипед, являются целочисленными, так как $|(a'_i - a'_0)_k| = d \cdot |(a_i - a_0)_k|$, $k \in \{1, \ldots, d\}$, а $|(a_i - a_0)_k|$ делится нацело на d. Тогда объединение всевозможных сдвигов параллелепипеда (3.7) на вектора $\sum_{i=1}^{d} l_i/d^2 \cdot \overrightarrow{a'_0a'_i}$, где $l_i \in \{0, \ldots, d^2 - 1\}$, образует покрытие симплекса $S_d(a'_0, \ldots, a'_d)$. Учитывая, что количество таких сдвигов равно d^{2d}, получаем

$$\mu_{\mathbb{Z}}\left(S_d(a'_0, \ldots, a'_d)\right) \leqslant d^{2d} \cdot \mu_{\mathbb{Z}}\left(P_d(a'_0; \frac{1}{d^2} \cdot \overrightarrow{a'_0a'_1}, \ldots, \frac{1}{d^2} \cdot \overrightarrow{a'_0a'_d})\right). \tag{3.8}$$

Рассмотрим параллелепипед

$$P_d(a_0; \frac{1}{d} \cdot \overrightarrow{a_0a_1}, \ldots, \frac{1}{d} \cdot \overrightarrow{a_0a_d}). \tag{3.9}$$

Заметим, что $a_0, a'_0 \in (d\mathbb{Z})^d$ и

$$\frac{1}{d^2} \cdot \overrightarrow{a'_0a'_1} = -\frac{1}{d} \cdot \overrightarrow{a_0a_1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\mu_{\mathbb{Z}}\left(P_d\left(a_0; \frac{1}{d} \cdot \overrightarrow{a_0a_1}, \ldots, \frac{1}{d}\overrightarrow{a_0a_d}\right)\right) \\ &\quad = \mu_{\mathbb{Z}}\left(P_d(a'_0; \frac{1}{d^2} \cdot \overrightarrow{a'_0a'_1}, \ldots, \frac{1}{d^2} \cdot \overrightarrow{a'_0a'_d})\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

По построению параллелепипед (3.9) лежит в симплексе $S_d(a_0, \ldots, a_d)$. Значит

$$\mu_{\mathbb{Z}}\left(P_d(a_0; \frac{1}{d}\cdot\overrightarrow{a_0a_1}, \ldots, \frac{1}{d}\cdot\overrightarrow{a_0a_d})\right) \leqslant \mu_{\mathbb{Z}}\left(S_d(a_0, \ldots, a_d)\right). \qquad (3.11)$$

Из (3.8), (3.10) и (3.11) непосредственно следует утверждение леммы.

Лемма 3.3. *Произвольное выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^d$ содержит симплекс S, возможно, размерности меньше d, с вершинами в точках с целочисленными координатами такой, что*

$$\mu_{\mathbb{Z}}(K) \leqslant d^{3d}\cdot\mu_{\mathbb{Z}}(S) \qquad (3.12)$$

Доказательство леммы 3.3. Найдётся $\vec{c} \in \{0, \ldots, d-1\}^d$ такое, что для множества

$$K_c = \operatorname{conv}\left[K \cap \left(\vec{c} + (d\mathbb{Z})^d\right)\right]$$

будет выполняться неравенство

$$\mu_{\mathbb{Z}}(K_c) \geqslant \frac{1}{d^d}\mu_{\mathbb{Z}}(K). \qquad (3.13)$$

Пусть неравенство (3.13) выполняется при $c = (0, \ldots, 0)$. При этом будем считать, что объем K_0 больше нуля. Если объем K_0 равен нулю, тогда K_0 лежит в гиперплоскости и рассмотрение сводится к $(d-1)$-мерному случаю.

Множество K_0 содержит d-мерный симплекс, вершины которого лежат в $(d\mathbb{Z})^d$. Пусть $S_d(a_0, \ldots, a_d)$ – симплекс максимального объема с вершинами в целых точках, содержащийся в K_0, и

$S = S_d(a'_0, \ldots, a'_d)$ – его объемлющий симплекс. Заметим из того, что вершины многранника K_0 лежат в $(d\mathbb{Z})^d$ следует, что и $a_0, \ldots, a_d \in (d\mathbb{Z})^d$.

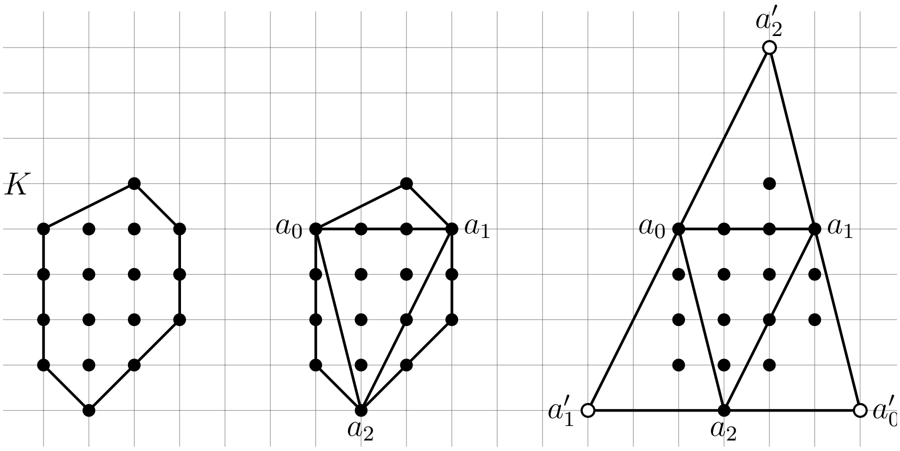

Рис. 3.2: Пример построения $S_2(a_0, a_1, a_2)$ и $S_2(a'_0, a'_1, a'_2)$

Симплекс $S_d(a'_0, \ldots, a'_d)$ содержит тело K_0. Действительно, в противном случае существует точка $a \in \mathbb{Z}^d$ такая, что $a \in K_0$ и $a \notin S_d(a'_0, \ldots, a'_d)$. Тогда, если $S_{d-1}(a'_0, \ldots, a'_{i-1}, a'_{i+1}, \ldots, a'_d)$ ближайшая к a грань симплекса $S_d(a'_0, \ldots, a'_d)$, то объем симплекса $S_d(a_0, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_d) \subset K_0$ больше, чем симплекса $S_d(a_0, \ldots, a_d)$. Противоречие.

Следовательно, $K_0 \subset S_d(a'_0, \ldots, a'_d)$ и, применяя лемму 3.2, получаем

$$\mu_{\mathbb{Z}}(K_0) \leqslant \mu_{\mathbb{Z}}\left(S_d(a'_0, \ldots, a'_d)\right) \leqslant d^{2d} \mu_{\mathbb{Z}}(S_d(a_0, \ldots, a_d)).$$

Учитывая, что $S_d(a_0, \ldots, a_d) \subset K_0 \subset K$ и (3.13) получаем, что

$$\mu_{\mathbb{Z}}(K) \leqslant d^d \mu_{\mathbb{Z}}(K_0) \leqslant d^{3d} \mu_{\mathbb{Z}}(S).$$

Если неравенство (3.13) выполняется при некотором $c \neq (0, \ldots, 0)$, тогда рассмотрим $K' = K - c$. Из приведенного выше доказательства следует, что в множестве K' найдётся симплекс S' такой, что

$$\mu_{\mathbb{Z}}(K) = \mu_{\mathbb{Z}}(K') \leqslant d^{3d}\mu_{\mathbb{Z}}(S').$$

Тогда симплекс $S = S' + c$ будет удовлетворять условиям леммы.

Теперь приведем

Доказательство теоремы 3.1. Заметим, что количество симплексов всех размерностей с вершинами в точках с целочисленными координатами, находящимися в кубе $\{1, \ldots, n\}^d$ ограничено сверху числом

$$\binom{n^d}{d+1} \leqslant n^{d(d+1)}.$$

Из леммы (3.3) следует, что в произвольном выпуклом теле K найдётся симплекс S_0 с вершинами в целых точках, который будет содержать не менее, чем $\mu_{\mathbb{Z}}(K)/(d^{3d})$ целых точек. Рассмотрим набор множеств, полученных последовательным отсечением от $K \setminus S_0$ гиперплоскостями, проходящими по сторонам симплекса S_0. Таким образом получено не более, чем $d+1$ выпуклое множество. К каждому из них можно вновь применить лемму (3.3). Объединение получившихся симплексов обозначим как S_1. Итерационно применяя лемму (3.3) к $K \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} S_i$, мы получаем S_k, $k = 1, \ldots$. При этом S_k состоит из не более, чем $(d+1)^k$ симплексов и

$$\mu_{\mathbb{Z}}(S_k) \geqslant \frac{1}{d^{3d}} \mu_{\mathbb{Z}} \left(K \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} S_i \right),$$

$$\mu_{\mathbb{Z}} \left(K \setminus \bigcup_{i=0}^{k} S_i \right) \leqslant \left(1 - \frac{1}{d^{3d}} \right)^{k+1} \mu_{\mathbb{Z}}(K),$$

$$\mu_{\mathbb{Z}}\left(\bigcup_{i=0}^{k} S_i\right) \geqslant \left(1-\left(1-\frac{1}{d^{3d}}\right)^{k+1}\right)\mu_{\mathbb{Z}}(K). \qquad (3.14)$$

Построим систему Δ_0. Определим число k_0 как

$$k_0 = \left\lceil \frac{1}{\log_2(d^{3d}) - \log_2(d^{3d}-1)} \right\rceil.$$

Тогда

$$\left(1-\frac{1}{d^{3d}}\right)^{k_0} \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\mu_{\mathbb{Z}}\left(\bigcup_{i=0}^{k_0-1} S_i\right) \geqslant \left(1-\left(1-\frac{1}{d^{3d}}\right)^{k_0}\right)\mu_{\mathbb{Z}}(K) \geqslant \frac{1}{2}\mu_{\mathbb{Z}}(K).$$

Множество $\bigcup_{i=0}^{k_0-1} S_i$ содержит не менее половины всех целых точек K. При этом $\bigcup_{i=0}^{k_0-1} S_i$ состоит не более, чем из

$$1+\ldots+(d+1)^{k_0-1} = \frac{(d+1)^{k_0}-1}{d}$$

симплексов. Пусть Δ_0 состоит из всевозможных объединений не более, чем $((d+1)^{k_0}-1)/d$ симплексов с вершинами в целых точках. Для произвольного K в Δ_0 найдётся элемент, содержащий не менее половины всех целых точек K и

$$\#\Delta_0 \leqslant \left(n^{d(d+1)}\right)^{\frac{(d+1)^{k_0}-1}{d}} \leqslant n^{(d+1)^{k_0+1}}.$$

Пусть построены последовательности k_i и Δ_i при $i \leqslant s-1$. Построим k_s и Δ_s. Заметим, что из (3.14) следует, что

$$\mu_{\mathbb{Z}}\left(K \setminus \bigcup_{i=0}^{i_2} S_i\right) \leqslant \left(1-\frac{1}{d^{3d}}\right)^{i_2-i_1} \cdot \mu_{\mathbb{Z}}\left(K \setminus \bigcup_{i=0}^{i_1} S_i\right),$$

где $0 \leqslant i_1 \leqslant i_2$. Значит, для произвольных целых $0 \leqslant i_1 < i_2$

$$\mu_{\mathbb{Z}}\left(\bigcup_{i=i_1+1}^{i_2} S_i\right) \geqslant \left(1 - \left(1 - \frac{1}{d^{3d}}\right)^{i_2 - i_1}\right) \mu_{\mathbb{Z}}\left(K \setminus \bigcup_{i=0}^{i_1} S_i\right).$$

Пусть k_s такое целое число, что

$$\mu_{\mathbb{Z}}\left(\bigcup_{i=k_{s-1}}^{k_s-1} S_i\right) \geqslant \left(1 - \left(1 - \frac{1}{d^{3d}}\right)^{k_s - k_{s-1}}\right) \mu_{\mathbb{Z}}\left(K \setminus \bigcup_{i=0}^{k_{s-1}-1} S_i\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\mu_{\mathbb{Z}}\left(K \setminus \bigcup_{i=0}^{k_{s-1}-1} S_i\right).$$

Тогда

$$\left(1 - \frac{1}{d^{3d}}\right)^{k_s - k_{s-1}} \leqslant \frac{1}{2},$$

$$k_s \geqslant k_{s-1} + \frac{1}{\log_2(d^{3d}) - \log_2(d^{3d}-1)} \geqslant (s+1) \cdot \frac{1}{\log_2(d^{3d}) - \log_2(d^{3d}-1)},$$

и определим

$$k_s = (s+1) \cdot \left\lceil \frac{1}{\log_2(d^{3d}) - \log_2(d^{3d}-1)} \right\rceil = (s+1)k_0.$$

Множество $\bigcup_{i=k_{s-1}}^{k_s-1} S_i$ содержит не менее половины всех целых точек $\bigcup_{i=0}^{k_{s-1}-1} S_i$. При этом $\bigcup_{i=k_{s-1}}^{k_s-1} S_i$ состоит не более, чем из

$$(d+1)^{k_{s-1}} + \ldots + (d+1)^{k_s - 1} = (d+1)^{k_{s-1}} \cdot \frac{(d+1)^{k_s - k_{s-1}} - 1}{d}$$

симплексов. Пусть Δ_s состоит из всевозможных объединений не более, чем $(d+1)^{k_{s-1}} \cdot ((d+1)^{k_s - k_{s-1}} - 1)/d$ симплексов с вершинами в целых точках. Тогда

$$\#\Delta_s \leqslant \left(n^{d(d+1)}\right)^{(d+1)^{k_{s-1}} \cdot \frac{(d+1)^{k_s - k_{s-1}} - 1}{d}} \leqslant n^{(d+1)^{k_s+1}}.$$

Пусть построены Δ_s при $s \leqslant s_0$, где s_0 определим ниже. Тогда для любого K найдутся элементы $E_s \in \Delta_s$ такие, что

$$\mu_{\mathbb{Z}}\left(\bigcup_{i=0}^{s_0} E_s\right) \geqslant \sum_{i=0}^{s_0} \frac{1}{2^{i+1}} \mu_{\mathbb{Z}}(K) = \frac{2^{s_0+1} - 1}{2^{s_0+1}} \mu_{\mathbb{Z}}(K). \qquad (3.15)$$

Установим значение s_0 минимальным целым, удовлетворяющим неравенству

$$\mu_{\mathbb{Z}}\left(K \setminus \bigcup_{i=0}^{s_0} E_s\right) \leqslant \frac{1}{2^{s_0+1}}\mu_{\mathbb{Z}}(K) \leqslant \gamma \cdot \mu_{\mathbb{Z}}(K).$$

То есть

$$\frac{1}{2^{s_0+1}} \leqslant \gamma.$$

Положим

$$s_0 = \lceil -\log_2 \gamma \rceil - 1$$

Определим $\Delta_s = \emptyset$ при $s > s_0$. Тогда при $s \leqslant s_0$ получаем, что

$$\begin{aligned} \#\Delta_s &\leqslant n^{(d+1)^{k_s+1}} \leqslant N^{\frac{(d+1)^{k_s+1}}{d}} \leqslant N^{\frac{(d+1)^{(s+1)\cdot k_0+1}}{d}} \\ &\leqslant N^{\frac{(d+1)^{(s_0+1)\cdot k_0+1}}{d}} \\ &= N^{\frac{(d+1)^{\lceil -\log_2 \gamma\rceil \cdot k_0+1}}{d}}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Определим систему Ω, как набор всевозможных объединений

$$\bigcup_{s \geqslant 0} E_s,\ E_s \in \Delta_s.$$

Построенная система Ω удовлетворяет ограничениям (0.10) и (0.14) при

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \\ \beta &= \frac{(d+1)^{\lceil -\log_2 \gamma\rceil \cdot \left\lceil \frac{1}{\log_2(d^{3d}) - \log_2(d^{3d}-1)}\right\rceil + 1}}{d}. \end{aligned}$$

Теорема 3.1 доказана.

Если вместо ограничения (0.14) рассмотреть менее жесткое условие на семейство Ω: для некоторого $\alpha \geqslant 1$ найдутся семейства $\Delta_s, \emptyset \in \Delta_s$, с числом элементов

$$\#\Delta_s \leqslant C_0 \exp(\log N)^\alpha, s = 1, \ldots, s_0, \tag{3.17}$$

такие, что каждое множество $\omega \in \Omega$ допускает представление в виде (0.10). Тогда будет верна следующая

Теорема 3.2. *Найдётся семейство Ω подмножеств $\{1, \ldots, n\}^d$, удовлетворяющее (0.10) и (3.17) для некоторой постоянной $\alpha \geqslant 1$, такое, что для любого выпуклого множества $B \subset [1, n]^d$, найдётся $A \in \Omega$ такое, что $A \subset B_{\mathbb{Z}}$ и*

$$\#(B_{\mathbb{Z}} \setminus A) \leqslant \frac{1}{\log N} \cdot \#B_{\mathbb{Z}}. \tag{3.18}$$

Доказательство теоремы 3.2. Возьмем

$$\gamma = \frac{1}{\log^c N},$$

где c определим ниже. Неравенство (3.16) позволяет получить

$$\begin{aligned} \#\Delta_s &\leqslant N^{(d+1)^{\lceil \log\log^c N \rceil \cdot k_0 + 1}/d} \\ &= 2^{2^{\log(d+1) \cdot \lceil \log\log N \rceil \cdot \left\lceil \frac{1}{\log(d^{3d}) - \log(d^{3d}-1)} \right\rceil + 1} \cdot \log N/d} \\ &\leqslant 2^{(\log N)^{2\log(d+1)\frac{1}{\log(d^{3d}) - \log(d^{3d}-1)}}/d}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Тогда из доказательства теоремы 3.1 и неравенства (3.19) следует, что найдётся система Ω, такая что для произвольного выпуклого подмножества куба B найдётся $A \in \Omega$ такое, что

$$\mu_{\mathbb{Z}}(B \setminus A) \leqslant \frac{1}{\log N} \cdot \mu_{\mathbb{Z}}(B).$$

При этом Ω будет удовлетворять (0.10) и (3.17) при

$$\alpha = 2\log(d+1) \cdot \frac{1}{\log(d^{3d}) - \log(d^{3d} - 1)}.$$

Теорема 3.2 доказана.

Заключение

В диссертации исследованы пространства, норма в которых задаётся обобщённой мажорантой частных сумм ряда дискретных функций по семействам множеств с определённой сложностью. Привлечение понятия сложности семейства множеств позволяет, в частности, на основе единого подхода исследовать различные определения сходимости. Основные результаты, установленные в данной работе:

1. Установлены верхние оценки для постоянной типа 2 нормированных пространств, норма в которых задаётся обобщённой мажорантой частных сумм функционального ряда по семейству Ω подмножеств заданного набора индексов I, удовлетворяющему определённым ограничениям на сложность.

2. Для указанных пространств установлены верхние оценки для Φ-поперечников.

3. Доказано, что рассмотренным в диссертации ограничениям на сложность семейств Ω удовлетворяет семейство множеств, хорошо приближающее пересечения всех выпуклых подмножеств куба $[1, n]^d$ с целочисленной решёткой $\mathbb{Z}^d$.

По мнению автора, в перспективе сфера приложения методов, использующих различные варианты понятия сложности семейств множеств (как заимствованные из дискретной математики, так и естественно возникающие в теории функций), будет заметно расширена.

Список литературы

[1] Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. – Москва: ИЛ, 1963.

[2] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. – Москва: Физматлит, 1961.

[3] Бернштейн С. Н. Теория вероятностей, 4-е изд. – Москва-Ленинград, 1946.

[4] Бургейн Ж., Кашин Б. С. О равномерном приближении частной суммы ряда Дирихле более короткой суммой и Ф-поперечниках // Матем. сб. – 2012 – Т. 203, № 12 – С. 57–80.

[5] Гарнаев А. Ю., Глускин Е. Д. О поперечниках евклидова шара // Докл. АН СССР. – 1984 – Т. 277, № 5 – С. 1048–1052.

[6] Зигмунд А. Тригонометрические ряды Т.I-II. – Москва: Мир, 1965.

[7] Исмагилов Р. С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // УМН. – 1974 – Т. 29, № 3(177) – С. 161–178.

[8] Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. – Москва: Физматлит, 1958.

[9] Кашин Б. С. Аналог теоремы Меньшова "об исправлении" для дискретных ортонормированных систем // Матем. заметки. – 1989 – Т. 46, № 6 – С. 67–74.

[10] Кашин Б. С. О возможности обобщения теорем "об исправлении" // Матем. заметки. – 1997 – Т. 62, № 6 – С. 931–939.

[11] Кашин Б. С. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1977 – Т. 41, № 2 – С. 334–351.

[12] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды, 2-е изд. – Москва: Изд-во АФЦ, 1999.

[13] Кашин Б. С., Шарек С. Й. Логарифмический рост L^1-нормы мажоранты частных сумм ортогонального ряда // Матем. заметки. – 1995 – Т. 58, № 2. – С. 218–230.

[14] Пернай В. В. Пространства, порожденные обобщенной мажорантой частных сумм // Матем. заметки. – 2014. – Т. 96, № 1. – С. 154–157.

[15] Пернай В. В. О сложности семейства выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$ // Матем. заметки. – 2016. – Т. 98, № 4 – С. 537–549.

[16] Andrews G. E. A Lower Bound for the Volume of Strictly Convex Bodies with many Boundary Lattice Points // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963 – Vol. 106, no. 2 – P. 270–279.

[17] Bourgain J., Pajor A., Szarek S. J., Tomczak-Jaegermann N. On the duality problem for entropy numbers of operators // Geometric aspects of functional analysis. – Berlin: Springer-Verlag, 2006. - Vol. 1376 of Lecture Notes in Math – P. 50–63.

[18] Carl B. Inequalities of Bernstein-Jackson-type and degree of compactness of operators in Banach spaces // Ann. Inst. Fourier (Grenoble) – 1985 – Vol. 35, no. 3 – P. 79–118.

[19] Guedon O., Mendelson S., Pajor A. , Tomczak-Jaegermann N. Subspaces and orthogonal decompositions generated by bounded orthogonal systems // Positivity. – 2007 – Vol. 11, no. 2 – P. 269–283.

[20] Khintchine A. Über dyadische Brüche // Math. Zeitschrift. – 1923 – Bd. 18 – S. 109-116.

[21] Olevskii A. M. Fourier Series with respect to general orthogonal systems. – Berlin: Springer-Verlag, 1975.

[22] Talagrand M. Selecting a proportion of characters // Israel J. Math. – 1998 – Vol. 108, no. 1 – P. 173–191.

[23] Talagrand M. The generic chaining. Springer Monogr. Math. – Berlin: Springer-Verlag, 2005.