ОТЗЫВ

научного руководителя
о диссертации Перная Владимира Витальевича
«Пространства, порожденные обобщенной мажорантой частных сумм»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико–математических наук по специальности
01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертационная работа В.В. Перная «Пространства, порожденные обобщенной мажорантой частных сумм» выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, под моим научным руководством.

Работа В.В. Перная является, вероятно, первой диссертацией, в которой изучаются пространства, норма в которых задается с помощью обобщенной мажоранты частных сумм. Интерес к этой теме связан с тем, что при ее исследовании естественно возникает вопрос о "сложности" различных семейств дискретных множеств.

Пусть $\Phi = \{\varphi_\alpha(x)\}_{\alpha\in I}$ – некоторая конечная система функций, "занумерованных" элементами множества I. Пусть также Ω – семейство подмножеств множества I. Тогда обобщенная мажоранта функции

$$f(x) = \sum_{\alpha\in I} a_\alpha \varphi_\alpha(x)$$

определяется равенством

$$S^*_\Omega(f,x) = \sup_{\omega\in\Omega} \left| \sum_{\alpha\in\omega} a_\alpha \varphi_\alpha(x) \right|.$$

Классическими примерами указанной конструкции является обычная мажоранта: $I = \Big\{1,\dots,N\Big\}$, $\Omega = \Big\{\{1,\dots,s\}, 1\leqslant s\leqslant N\Big\}$ и мажоранта по прямоугольникам: $I = \Big\{1,\dots,N\Big\}^d$, $\Omega = \Big\{\{1,\dots,s_1\}\times\dots\times\{1,\dots,s_d\}, 1\leqslant s_i\leqslant N, i=1,\dots,d\Big\}$.

Б.С. Кашиным и американским математиком С. Шареком были установлены оценки обобщенных мажорант, зависящие от "сложности" семейства Ω, а также от геометрических свойств этого семейства (рассматриваемого как соответствующее множество векторов с координатами из $\{0,1\}$ в пространстве $\mathbb{R}^{|I|}$). В первой главе диссертации, продолжая эти исследования, автор рассмотрел геометрические свойства пространства X функций вида $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha\varphi_\alpha(x)$, норма в котором задается равенством

$$\left\| \sum_{\alpha\in I} a_\alpha\varphi_\alpha(x) \right\|_X = \left\| S^*_\Omega(\sum_{\alpha\in I} a_\alpha\varphi_\alpha, x) \right\|_{l^N_\infty} \tag{1}$$

(здесь мы предполагаем, что функции φ_α – дискретные и задаются векторами из $\mathbb{R}^N$).

В.В. Пернаем установлены оценки постоянной типа 2 – $T_2(X)$ пространства с нормой (1), в случае, когда семейство Ω удовлетворяет определенным ограничениям на "сложность", в частности, обладает свойствами, аналогичными свойствам семейства d-мерных целочисленных параллелепипедов. Кроме того, в главе 1 приведены примеры норм вида (1), показывающие, что найденные оценки для $T_2(X)$ близки к окончательным.

Во второй главе диссертации неравенства для постоянной типа 2, установленные в первой главе, применены для получения оценок Ф-поперечников по норме (1) в случае, когда приближаемое множество имеет вид

$$F = \left\{ \sum_{\alpha\in I} a_\alpha \varphi_\alpha \,\middle|\, \sum_{\alpha\in I} a_\alpha^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Результаты диссертации дают некоторое обобщение оценок Ф-поперечников, полученных Ж. Бургейном и Б.С. Кашиным и представляют интерес, в частности, когда Ω является семейством целочисленных параллелепипедов из $\{1,\dots,n\}^d$.

В третьей главе диссертации рассматривается семейство $K_d(n)$ всех выпуклых подмножеств в $\{1,\dots,n\}^d$ (точнее речь идет о множествах, полученных пересечением целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$ с выпуклыми множествами из $\mathbb{R}^d$, лежащими в кубе $[1,n]^d$). С.В. Конягиным был поставлен вопрос о том, удовлетворяет ли $K_d(n)$ ограничениям на сложность, рассмотренным в главе 1 диссертации. В этом направлении В.В. Пернаем установлена возможность хорошей аппроксимации произвольного множества из $K_d(n)$ множеством из семейства Ω простой структуры (со свойствами, рассмотренными в главе 1). Точнее показано, что для любого $B \in K_d(n)$ найдется $A \in \Omega$ с $A \subset B$ и такое, что число целых точек

$$\#(B \setminus A) \leqslant \varepsilon \# B$$

(здесь $\#B$ – число целых точек в B, а ε – произвольное малое положительное число).

Глава 3 представляет, по моему мнению, наиболее интересную часть диссертации, а полученные в ней результаты могут найти различные приложения, в том числе при оценке обобщенных мажорант, порожденных семействами $K_d(n)$.

Оценивая диссертацию в целом, отмечу, что она посвящена весьма интересным вопросам одновременно относящимся и к теории функций, и к дискретной математике. В работе получены нетривиальные результаты существенно дополнившие исследования по рассматриваемой теме.

Я не сомневаюсь, что диссертация В.В. Перная «Пространства, порожденные обобщенной мажорантой частных сумм» удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения учёных степеней» Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации, а ее автор Пернай Владимир Витальевич несомненно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Научный руководитель,
академик
д.ф.-м.н. по спец. 01.01.01
Кашин Борис Сергеевич
01 апреля 2016 г.

Кашин Борис Сергеевич
депутат Государственной Думы ФС РФ
kashin@mi.ras.ru
(495)6921915

Подпись Кашина Б.С. заверяю
Главный консультант
отдела обеспечения прохождения государственной службы и повышения квалификации
Управления государственной службы и кадров
Берновский С.Г.

Аппарат Государственной Думы Федерального Собрания
УПРАВЛЕНИЕ ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ И КАДРОВ
№ 1
Российская Федерация