ОТЗЫВ

официального оппонента П.Г. Григорьева
на диссертацию Владимира Витальевича Перная
"Пространства, порождённые обобщённой мажорантой частных сумм"
представленную на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.01 —
вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа В.В. Перная посвящена исследованию пространств порожденных мажорантой частных сумм. Многие задачи анализа и вероятности сводятся к оценке некоторых мажорант частных сумм. Появление теорем, посвященных оценкам мажорант частных сумм в специальных случаях, обусловлено их непосредственной применимостью в самых разных областях математики. Упомянем такие широко известные классические результаты как теорема Меньшова-Радемахера, неравенство Дуба, неравенство Карлесона-Ханта. Как правило, получение оценки мажорант является крайне трудной задачей, которую в каждом специальном случае рассматривают отдельно. Особенно ярко это проявляется в изучении кратных рядов, где сходимость (и, соответственно, мажоранты) можно изучать по кубам, параллелепипедам, гиперболическим крестам, шарам, выпуклым множествам и т.п. Диссертант сделал значительный прогресс в изучении общих условий на сложность системы индексов суммирования, по которым изучается мажоранта. Также диссертантом сделаны важные шаги в направлении исследования мажорант сумм по произвольным выпуклым подмножествам. Результаты диссертации были опубликованы автором в двух статьях в журнале из списка, рекомендованного ВАК.

Глава 1 диссертации посвящена оценке $T_2(X)$ (постоянной типа 2) пространства $X = X(\Omega)$ задаваемой нормой

$$\Big\| \sum_{k\in I} a_k\varphi_k \Big\|_{X(\Omega)} := \sup_{\omega\in\Omega} \Big\| \sum_{k\in\omega} a_k\varphi_k \Big\|_{\ell_\infty^N},$$

где $\{\varphi_k\}_{k\in I}$ — произвольное семейство линейно-независимых функций (векторов) из $\mathbb{R}^N$, а Ω — некоторое семейство подмножеств I (семейство допустимых множеств суммирования частных сумм).

Диссертантом была получена оценка $T_2(X)$ при некоторых условиях на сложность семейства Ω. А именно, пусть существуют некоторые подсемейства $\Delta_s \subset \Omega$, $\emptyset \in \Delta_s$, $s = 0, \dots, s_0$, такие, что

- $|\Delta_s| \leqslant C_0 N^\beta \exp(s^\alpha)$ при некоторых $\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 0$;
- любое $\omega \in \Omega$ представимо в виде $\omega = \bigcup_{s=0}^{s_0} E_s$, где $E_s \in \Delta_s$, причем $|E_s| \leqslant |I|2^{-s}$ и $E_s \cap E_{s'} = \emptyset$ при $s \neq s'$.

Тогда

$$T_2(X) := \sup_{(x_i)_1^m \subset X(\Omega)} \frac{\int_0^1 \Big\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i(t) x_i \Big\|_{X(\Omega)} dt}{\Big(\sum_{i=1}^m \|x_i\|_{X(\Omega)}^2 \Big)^{1/2}} \leqslant K(C_0, \beta, \gamma)(\log N)^{1+\alpha/2+\gamma},$$

где ε_i — функции Радемахера, $\gamma > 0$ — произвольная заранее фиксированная величина, $K(C_0, \beta, \gamma)$ — константа, зависящая только от C_0, β, γ.

Также в главе 1 исследованы и некоторые альтернативные ограничения на сложность Ω, установлена оценка на величину $T_2(X)$ при этих ограничениях, продемонстрировано, что эта оценка близка к окончательной.

Главу 2 можно считать развитием работ Ж. Бургейна, Б.С. Кашина (2012 г.), и О. Гедона, С. Мендельсона, А. Пажора, Н. Томчак-Ягерманна (2007 г.), где исследуются некоторые геометрические свойства конечномерных пространств большой размерности связанные с поперечниками. С привлечением вышеприведенного результата из главы 1 для произвольного множества линейно-независимых функций $\Phi = (\varphi_i)_{i=1}^n \subset \ell_2^N$, удовлетворяющего $\|\varphi_i\|_{\ell_\infty^N} \leqslant M$, и Ω — семейства подмножеств $\{1, \ldots, n\}$, удовлетворяющего вышеприведенным условиям на сложность с постоянными $\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 0$, было доказано следующее неравенство для Φ-поперечника:

$$d_k^\Phi(F, X(\Omega)) \leqslant K(C_0, \beta, \gamma) M (\log N)^{4+\alpha/2+\gamma} \sqrt{\frac{n}{k}},$$

где $\Phi = (\varphi_i)_{i=1}^n \subset \ell_2^N$ некоторое множество линейно-независимых функций,

$$d_k^\Phi(F, X) := \inf_{G_k = \mathrm{span}(\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}) : |\Lambda| = k} \sup_{f\in F} \mathrm{dist}_X(f, G_k),$$

$F := \left\{ \sum_1^n a_i\varphi_i \ : \ \sum_1^n |a_i|^2 \leqslant 1 \right\}$, а $\gamma > 0$ — произвольная заранее фиксированная константа.

Доказательство этого результата в основном следует работе Ж. Бургейна и Б.С. Кашина и использует весьма тонкие приемы оценки ε-энтропии с привлечением довольно изощренных вероятностных приемов.

В главе 3 диссертант от общих вопросов переходит к частным. Тем не менее результаты этой главы крайне интересны и элегантны. В главе 3 исследуется семейство $K_d(n)$, состоящее из пересечений произвольных выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^d$ с целочисленным кубом $\{1, \ldots, n\}^d$. Была предпринята попытка установить, что семейство $K_d(n)$ удовлетворяет ограничениям на сложность из вышеприведенного результата главы 1. Окончательно ответить на этот вопрос не удалось, но тем не менее удалось установить, что $K_d(n)$ в некотором смысле хорошо приближается некоторым Ω, удовлетворяющим этим ограничениям на сложность. (Элементы множества Ω строятся как объединения пересечений целочисленной решетки с некоторыми симплексами с целочисленными вершинами.)

Было установлено, что для произвольного $\gamma \in (0, 1)$ найдется семейство Ω_γ подмножеств $\{1, \ldots, n\}^d$, удовлетворяющее ограничениям на сложность (с константами α, β зависящими от γ и d) такое, что для любого $B \in K_d(n)$ найдется $A \in \Omega_\gamma$ так, что $A \subset B$ и

$$|B \setminus A| \leqslant \gamma |B|.$$

Для доказательства этого результата диссертантом была доказана очень элегантная лемма 3.3, которая утверждает для произвольного выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^d$ найдется симплекс с целочисленными вершинами $S \subset K$ такой, что число целочисленных точек попавших в S можно оценить следующим образом

$$|K \cap \mathbb{Z}^d| \leqslant d^{3d} |S \cap \mathbb{Z}^d|.$$

Замечания. Отмечу, что местами изложение в диссертации несколько нелогично, текст содержит некоторое число опечаток и мелких неточностей.

В качестве примеров неточностей я упомяну следующее. Формулируя теорему А, автор пользовался обозначениями статьи цитируемой им работы Б.С. Кашина и С.Й. Шарека, а не своими. Кроме того, автор обозначает число элементов конечного множества $\#\Lambda$, но местами сбивается на $|\Lambda|$, такая же непоследовательность местами и в обозначении норм. В доказательстве леммы 1.1 пропадает множитель 2 (но потом снова появляется при использовании леммы 1.1 для доказательства теоремы 1.1). Местами автор забывает применить "целую часть числа" и т.п.

В качестве примера нелогичности упомяну, что автор нашел довольно неудачное место для формулировки Определения 0.6. Также отмечу, что формат диссертации допускает и скорее подразумевает более подробные выкладки и пояснения, чем были предоставлены диссертантом в главе 3, что после крайне подробных (может быть даже излишне подробных) выкладок главы 1 выглядело для меня неожиданным.

Я считаю лишним перечислять все эти по большому счету незначительные претензии. Они никак не могут повлиять на оценку диссертации как высокоуровнего исследования в области анализа.

Я искренне считаю, что диссертация В.В. Перная "Пространства, порождённые обобщённой мажорантой частных сумм" является научно-квалифицированной работой, соответствующей требованиям "Положения о порядке присуждения ученых степеней" ВАК, предъявляемых к кандидатским диссертациям, а ее автор, Пернай Владимир Витальевич, заслуживает присвоения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

02.06.2016

Официальный оппонент,
ведущий экономист-математик ООО "ГЕОГРАКОМ",
кандидат физико-математических наук Григорьев Павел Геннадиевич
01.01.01
115230, Москва, Варшавское ш., 42. Тел. (499) 764 2331. thepavel@mail.ru,

02.06.2016

Подпись П.Г. Григорьева заверяю,
Директор ООО "ГЕОГРАКОМ",
А.В. Шубин