ОТЗЫВ

официального оппонента, доктора физико-математических наук Плотникова Михаила Геннадьевича на диссертационную работу Перная Владимира Витальевича "Пространства, порожденные обобщенной мажорантой частных сумм",

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация является исследованием на стыке функционального анализа и действительного анализа и посвящена изучению различных вопросов теории приближений. В работе рассматриваются конечномерные нормированные пространства, норма в которых (см. ниже) устроена подобно обобщенным мажорантам частичных сумм в теории ортогональных рядов. В частности, изучаются Ф-поперечники множеств из таких пространств. Понятие Ф-поперечника в банаховом пространстве, которое ввели в 2012 г. Ж. Бургейн и Б. С. Кашин, обобщает введенное в 1970-х годах Р. С. Исмагиловым понятие тригонометрического поперечника и позволяет изучать вопросы приближения множеств линейными оболочками конечной системы элементов.

Теория приближений является актуальным разделом математики благодаря ее многочисленным приложениям. Сказанное относится и к теории приближений в конечномерных нормированных пространствах. Диссертационная работа находится в русле работ в этом направлении, опубликованных в последнее десятилетие (Б. С. Кашин, Ж. Бургейн, М. Талагран, О. Гедон, С. Мендельсон, А. Пажор, Н. Томчак-Ягерманн и др.). Таким образом, тематика исследований, представленная в диссертации, является актуальной.

В работе изучаются конечномерные векторные пространства, в которых норма задается следующим образом. Пусть I — заданный набор индексов, Ω — семейство подмножеств I, $\Phi = \{\varphi_k\}_{k\in I} \subset \mathbb{R}^N$ — система линейно независимых векторов. Рассматривается пространство $X = X(\Omega, \Phi)$, состоящее из векторов вида $\sum_{k\in I} a_k\varphi_k$, $a_k \in \mathbb{R}$, с нормой

$$\left\|\sum_{k\in I} a_k\varphi_k\right\|_X = \sup_{\omega\in\Omega}\left\|\sum_{k\in\omega} a_k\varphi_k\right\|_{l_\infty^N}. \tag{1}$$

При этом рассматриваются семейства Ω, геометрическая структура которых имеет ограниченную "сложность". А именно, предполагается, что каждое множество $\omega \in \Omega$ представимо в виде

$$\omega = \bigcup_{s=0}^{s_0} E_s, \quad E_s \in \Delta_s, \quad \#E_s \le \frac{\#I}{2^s}, \quad E_s \cap E_{s'} = \emptyset \text{ при } s \ne s'. \tag{2}$$

Здесь Δ_s $(s = 0, \dots, s_0)$ — семейства множеств такие, что $\emptyset \in \Delta_s$ и либо

$$\#\Delta_s \le C_0 \exp\exp s^\alpha \quad \text{для всех } s \text{ и некоторого } \alpha < 1, \tag{3}$$

либо

$$\#\Delta_s \leq C_0 N^\beta \exp s^\alpha \quad \text{для всех } s \text{ и некоторых } \alpha \geq 1 \text{ и } \beta \geq 0. \tag{4}$$

Диссертация изложена на 67 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения, а также списка литературы, включающего в себя 23 источника. Для удобства читателя перед введением приведен список используемых в работе обозначений.

Во введении приведены обзор предшествующих результатов по тематике исследований и основные определения, а также описаны основные результаты работы.

В главе 1 устанавливаются оценки $T_2(X)$ — постоянной типа 2 пространств с нормой (1), где семейство множеств Ω удовлетворяет либо условиям (2) и (3), либо условиям (2) и (4). Для первого случая в Теореме 1.2 была получена верхняя оценка

$$T_2(X) \leq C(\gamma) \exp\left(\frac{1}{2} \log^\alpha N\right) \cdot \log^{1+\gamma} N,$$

а также построен пример пространства X для которого верна нижняя оценка

$$\frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\log^\alpha N}{2^\alpha}\right) \leq T_2(X).$$

Для второго случая была найдена (Теорема 1.1) верхняя оценка $T_2(X)$.

Задача оценки поперечников многих функциональных классов часто сводится к оценке поперечников конечномерных множеств, в частности, конечномерных единичных шаров. Во второй главе диссертации находится оценка сверху Ф-поперечников $d_k^\Phi(*, X)$ множеств вида

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^n |a_i| \leq 1 \right\} \tag{5}$$

(своего рода "единичных шаров", точнее, "растянутых единичных шаров" в X). Показано (Теорема 2.1), что если норма в пространстве X задается формулой (1), где семейство Ω удовлетворяет условиям (2) и (4), то

$$d_k^\Phi(F, X) \leq K(C_0, \beta, \gamma) \cdot (\log N)^{4+\alpha/2+\gamma} \sqrt{\frac{n}{k}}$$

для любого целого k, $1 \leq k \leq n$, где $\gamma > 0$ выбирается произвольно. При доказательстве Теоремы 2.1 используются глубокие методы, использующие оценки, связанные с покрытиями шарами множеств в нормированном пространстве, а также методы теории случайных процессов.

В связи с результатами глав 1 и 2 естественным является вопрос нахождения достаточных условий того, что семейство Ω удовлетворяет условиям сложности (2) и (4). Для ответа на этот вопрос в главе 3 изучаются геометрические свойства семейств параллелепипедов и других выпуклых подмножеств дискретного куба. Устанавливается (Утверждение 3.1), что семейство $\Omega = \{\omega\}$, состоящее из всех дискретных параллелепипедов вида

$$\{1, \ldots, m_1\} \times \ldots \times \{1, \ldots, m_d\} \subset \{1, \ldots, n\}^d, \quad d \in \mathbb{N},$$

удовлетворяет условиям (2) и (4) при $\alpha = 1$ и $\beta = (d-1)/d$. Этот результат позволяет, в частности, распространить большую часть результатов глав 1 и 2 на пространства $X(\Omega, \Phi)$, нормы (1) в которых устроены подобно мажоранте прямоугольных частичных сумм **кратного** ортогонального ряда.

В главе 3 также показано (Теорема 3.1), что условиям (2) и (4) удовлетворяют некоторые семейства Ω множеств, приближающих выпуклые множества: *для каждого* $0 < \gamma < 1$ *найдется семейство* Ω *подмножеств* $\{1, \ldots, n\}^d$, *которое удовлетворяет* (2) *и* (4) *с* α *и* β, *зависящими лишь от* γ *и* d, *и такое, что для любого выпуклого множества* $B \in [1, n]$ *найдется* $A \in \Omega$, *причем* $A \subset B \cap \mathbb{Z}^d$ *и*

$$\#\left((B \cap \mathbb{Z}^d) \setminus A\right) \leq \gamma \cdot \#(B \cap \mathbb{Z}^d).$$

Вопрос, удовлетворяет ли условиям (2) и (4) семейство всех выпуклых подмножеств дискретного куба, остается открытым.

Имеется несколько замечаний к работе.

1) Во введении неаккуратно сформулировано определение k-го поперечника по Колмогорову. Если X — нормированное пространство, L_k — множество его линейных подпространств размерности не выше k, $G \subset X$, то

$$d_k(G, X) = \inf_{E \in L_k} \sup_{x \in G} \inf_{y \in E} \|x - y\|_X,$$

а не

$$d_k(G, X) = \inf_{E \subset L_k} \max_{x \in G} \min_{y \in E} \|x - y\|_X.$$

2) В Теореме 2.1 в оценке поперечника $d_k^\Phi(F, X)$ в правой части формулы (2.2) стоит произведение абсолютной постоянной M и величины $K(C_0, \beta, \gamma)$. Здесь можно обойтись только величиной, зависящей от C_0, β, γ.

3) Во введении после Определения 0.7 используется обозначение $\left|A \cap \mathbb{Z}^d\right|$ для количества элементов множества $A \cap \mathbb{Z}^d$. При этом во всей остальной работе используется другое обозначение для количества элементов конечных множеств.

4) Перед введением диссертации приведен список используемых обозначений, что удобно для читателя. В автореферате же такого списка нет, многие обозначения не поясняются, что несколько затрудняет прочтение автореферата отдельно от диссертации.

5) В работе имеется незначительное количество опечаток.

Замечания не являются существенными, не затрагивают основной сути работы и не снижают научную значимость диссертации.

Оценка диссертационной работы состоит в следующем. Диссертация является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории приближений. Автору диссертации пришлось преодолеть значительные технические сложности при доказательстве результатов. В работе существенно используются факты и техника доказательств из смежных разделов (теория случайных процессов, симплектическая геометрия); автор диссертации показывает хорошее владение такими фактами и техникой.

Изложение диссертации четкое и понятное.

Все результаты диссертации получены автором самостоятельно, являются новыми и снабжены строгими математическими доказательствами. Тем самым, научные положения и выводы, сформулированные в работе, являются обоснованными и достоверными. Основные результаты диссертации опубликованы в двух печатных работах в журнале "Математические заметки", входящем в официальный список ВАК и базы Web of Science и SCOPUS.

Автореферат диссертации полно и правильно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации могут использоваться как в учебном процессе при чтении спецкурсов студентам и аспирантам, так и в научных исследованиях, проводимых в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, МГУ им. М. В. Ломоносова, МФТИ, МГТУ им. Н. Э. Баумана, Институте математики СО РАН, Институте математики и механики УрО РАН, Ереванском университете, Евразийском университете им. Л. Н. Гумилева (Астана), ряде научных центров дальнего зарубежья.

Диссертационная работа "Пространства, порожденные обобщенной мажорантой частных сумм" удовлетворяет критериям "Положения о порядке присуждения ученых степеней", а ее автор, Пернай Владимир Витальевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Профессор, заведующий кафедрой математики и механики
Вологодской государственной молочнохозяйственной
академии им. Н. В. Верещагина,
доктор физико-математических наук, доцент М. Г. Плотников
01.01.01 mgplotnikov@gmail.com 03.06.2016

Подпись М. Г. Плотникова заверяю,
ученый секретарь Ученого совета
Вологодской государственной молочнохозяйственной
академии им. Н. В. Верещагина, доцент Л. В. Зарубина
+7(8172)52-56-03