ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»

На правах рукописи

Мелешкина Анна Владимировна

О коэффициентах разложения функций некоторых классов по ортонормированным базисам и фреймам

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	**Кашин Борис Сергеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН.
Официальные оппоненты:	**Рубинштейн Александр Иосифович**, доктор физико-математических наук, профессор, Мытищинский филиал ФГБОУ ВПО МГТУ им. Н. Э. Баумана, профессор;
	Холщевникова Наталья Николаевна, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО МГТУ «СТАНКИН», профессор;
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»**

Защита диссертации состоится 24 июня 2016 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А) и на сайте механико-математического факультета: `http://mech.math.msu.su/ snark/index.cgi`

Автореферат разослан «   » мая 2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 на базе МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор ВЛАСОВ Виктор Валентинович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В диссертации рассматриваются задачи теории ортогональных рядов и теории приближений. Основными объектами исследования являются n-членные приближения и коэффициенты разложения функции по полным ортонормированным системам и фреймам. Связь между указанными объектами хорошо известна (см., в частности, соотношение (3) ниже).

Важным направлением исследований является вопрос сходимости ряда из модулей коэффициентов Фурье различных классов функций. Хорошо известна классическая теорема С. Н. Бернштейна, которая дает достаточное условие абсолютной сходимости ряда Фурье по тригонометрической системе функции одной переменной.

Теорема A (С. Н. Бернштейн[1]). *Если периодическая функция $f(x) \in \mathrm{Lip}\ \alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$, то ряд её коэффициентов Фурье по тригонометрической системе сходится абсолютно. Существует периодическая функция $f(x) \in \mathrm{Lip}\ \frac{1}{2}$, ряд коэффициентов Фурье по тригонометрической системе которой не сходится абсолютно.*

Эта теорема усиливалась и обобщалась многими авторами в направлении нахождения иных достаточных условий абсолютной сходимости ряда Фурье (С. Н. Бернштейн, О. Сас, С. Б. Стечкин), а также получения аналогичных результатов для других систем. В частности, для системы Хаара имеются результаты З. Чисельского и Ю. Муселака[2], П. Л. Ульянова[3], Б. И. Голубова[4]. Получены также обобщения второй части данной теоремы на случай произвольной полной ортонормированной системы, а также для произвольного нормированного базиса. Точность таких результатов легко подтверждается первой частью теоремы С. Н. Бернштейна или аналогичными результатоми для базисов в других пространствах. Эти задачи для класса липшицевых функций решались Б. С. Митягиным, С. В. Бочкарёвым, Б. С. Кашиным. Приведём некоторые результаты.

Б. С. Митягин[5] в 1964 году доказал, что для произвольной полной ортонорми-

[1] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры. — 1961. — 936 с.
[2] Ciesielski Z., Musielak J. On absolute convergence of Haar series // Colloq. Math. 7:1. 1959. P. 61–65.
[3] Ульянов П. Л. Решённые и нерешённые проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов // Успехи мат. наук. 19:1(115). 1964. С. 3–69.
[4] Голубов Б. И. Об абсолютной сходимости рядов по системе Хаара // Успехи мат. наук. 20:5(125). 1965. С. 198–202.
[5] Митягин Б. С. Об абсолютной сходимости ряда коэффициентов Фурье // ДАН СССР. 157:5. 1964. С. 1047–1050.

рованной системы функций на отрезке $[0,\,1]$ существует функция $f(x)\in \mathrm{Lip}\ \frac{1}{2}$, для которой ряд коэффициентов Фурье по этой системе не сходится абсолютно. С. В. Бочкарёвым[6] в 1972 году получен следующий результат, касающийся функций ограниченной вариации: пусть $\alpha\in(0,\,1)$, тогда для любой полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, ограниченной в совокупности, найдётся такая абсолютно непрерывная функция $f(t)\in \mathrm{Lip}\ \alpha$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(f,\varphi_n)|^{\frac{2}{2+\alpha}}=\infty.$$

Б. С. Кашин в 1977 году доказал справедливость следующего результата для произвольного нормированного базиса в $L^p[0,\,1]$, $1<p<\infty$.

Теорема B (Б. С. Кашин[7]). *Пусть* $\Psi=\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *— базис в* $L^p[0,\,1]$, $1<p<\infty$, *и*

$$||\psi_n(x)||_p=1,\quad n=1,\,2,\ldots.$$

Тогда существует такая функция $f(x)\in \mathrm{Lip}\ \alpha$, *где* $\alpha=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{q}\right\}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *что ряд из модулей коэффициентов разложения функции* $f(x)$ *по базису* Ψ *расходится, то есть*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n(x)\qquad \textit{и}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\infty.$$

Случаем многих переменных в данном вопросе занимались С. Бохнер, С. Вейнгер, Б. С. Митягин. Получены следующие аналоги теоремы Бернштейна[8,9]:

Для любой периодической функции $f(\mathbf{x})\in \mathrm{Lip}\ \left(\frac{d}{2}+\varepsilon\right)$, $\varepsilon>0$, *определённой на* $[0,\,1]^d$, *ряд из модулей коэффициентов Фурье по тригонометрической системе сходится абсолютно.*

Существует периодическая функция $f(\mathbf{x})\in \mathrm{Lip}\ \frac{d}{2}$, *определённая на* $[0,\,1]^d$, *для которой ряд из модулей коэффициентов Фурье по тригонометрической системе не сходится абсолютно.*

Б. С. Митягин в 1964 году методами функционального анализа получил аналог

[6] Бочкарёв С. В. Об абсолютной сходимости рядов Фурье // Докл. АН СССР. 202:5. 1972. С. 225–227.

[7] Кашин Б. С. О коэффициентах разложения одного класса функций по полным системам // Сиб. Мат. Журнал. XVIII:1. 1977. С. 122–131.

[8] Bochner S. Review of «An absolute corvergence of multiple Fourier series» by Szasz and Minakshisundaram // Math. Rev. 8. 1947. P. 376.

[9] Wainger S. Spesial trigonometric series in k-dimentions // Mem. AMS. 59. 1965. P. 1–102.

последнего результата для случая произвольной полной ортонормированной системы функций многих переменных. Приведём частный случай полученного Б. С. Митягиным результата.

Теорема C (Б. С. Митягин[10]). *Пусть* $\Psi = \{\psi_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$ *— произвольная полная ортонормированная система на* $[0,\, 1]^d$*. Существует функция* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\ \frac{d}{2}$*, для которой ряд коэффициентов Фурье по системе* Ψ *не сходится абсолютно.*

Аналогичный результат для произвольного нормированного базиса в пространстве $L^p[0,\, 1]^d$ был получен автором диссертации.

В последние время активно изучаются вопросы, связанные с оценками n-членных приближений. Назовем n-членным приближением элемента f действительного нормированного пространства X относительно словаря $\Phi \subset X$ величину

$$e_n(f, \Phi, X) = \inf_{P \in \Sigma_n} ||f - P||_X, \tag{1}$$

где $n = 1, 2, \ldots$,

$$\Sigma_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j, a_j \in \mathbb{R}, x_j \in \Phi \right\}.$$

Словарём мы называем произвольное подмножество $\Phi \subset X$. Если K — подмножество действительного нормированного пространства X, то

$$e_n(K, \Phi, X) = \sup_{f \in K} e_n(f, \Phi, X). \tag{2}$$

При разных K, Φ, X оценки величин (2) имеют теоретическое и практическое значение (Р. Девор[11], В. Н. Темляков[12]). В случае когда $X = \mathcal{H}$ — гильбертово пространство, Φ — полная ортонормированная система функций, величина (1) была введена в 1955 году С. Б. Стечкиным[13], для неё справедливо равенство

$$e_n(f, \Phi, \mathcal{H}) \equiv \left(\sum_{k \geq n+1} [c_k^*(f)]^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

где $\{c_k^*(f)\}$ — неубывающая перестановка последовательности абсолютных вели-

[10] Митягин Б. С. Об абсолютной сходимости ряда коэффициентов Фурье // ДАН СССР. 157:5. 1964. С. 1047–1050.

[11] DeVore R. A. Nonlinear approximation // Acta Numer. **7**. 1998. P. 51–150.

[12] Temlyakov V. N. Nonlinear Methods of Approximation // IMI Preprint 2001:09. University of South Carolina. 2001.

[13] Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. 102:1. 1955. С. 37–40.

чин коэффициентов Фурье функции f по полной ортонормированной системе Φ. Формула (3) проясняет связь между двумя темами — оценками n-членных приближений и исследованием поведения коэффициентов Фурье.

Б. С. Кашин[14] предложил геометрический подход к доказательству оценок снизу величин (2), который может быть применён к любому ортонормированному словарю в гильбертовом пространстве. Б. С. Кашин доказал, что если имеет место вложение $Q \subset K$, где Q — $2n$-мерный куб

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i \psi_i, \quad \varepsilon_i = \pm 1, \quad \{\psi_i\}_{i=1}^{2n} - \text{ОНС} \right\}, \tag{4}$$

то справедливо неравенство

$$e_n(K, \Phi, \mathcal{H}) \geq c \cdot n^{\frac{1}{2}}, \quad c > 0. \tag{5}$$

Если теперь найти при данном n такое достаточно большое число λ и множество Q вида (4), что $\lambda \cdot Q \subset K$, а такая задача решается для классических функциональных классов K, то можно получить точные по порядку оценки снизу для n-членных приближений. Обобщения и аналоги оценки (5) см. в работах Д. Доноxо[15], Б. С. Кашина и В. Н. Темлякова[16].

В 1993 году С. В. Конягин обратил внимание на естественную с теоретической и практической точки зрения задачу оценки величин (2) в случае когда $X = L^2(0,\,1)^d$, Φ — ортонормированная система функций в X, K — совокупность характеристических функций выпуклых подмножеств единичного куба $(0,\,1)^d$. При $d = 1$ задача сводится к нахождению оценок величины (2) для однопараметрического семейства характеристических функций интервалов

$$\begin{gathered} \mathbb{X} = \{\chi_t\}_{t \in (0,1]}, \\ \chi_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq t; \\ 0, & \text{если } t < x \leq 1. \end{cases} \end{gathered} \tag{6}$$

[14] Кашин Б. С. Об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем // Исследования по теории функций многих действительных переменных и приближению функций. Сборник статей. Посвящается академику Сергею Михайловичу Никольскому к его восьмидесятилетию. Тр. МИАН СССР. 172. 1985. С. 187–191.

[15] Donoho D. L. CART and best basis: a connexion // Ann. Statist. 25:5. 1997. P. 1870–1911.

[16] Кашин Б. С., Темляков В. Н. О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L^1 // Матем. заметки. 56:5. 1994. С. 57–86.

В случае если $\Phi = H$ — система Хаара, справедлива оценка сверху

$$e_n(\mathbb{X}, H, L^2(0,\,1)) \le C \cdot 2^{-n/2}. \tag{7}$$

В силу «малой массивности» семейства $\mathbb{X}$ для него неприменим описанный выше геометрический подход к оценкам снизу n-членных приближений, но возможно использование техники теории общих ортогональных рядов. Б. С. Кашиным в 2002 году были получены следующие результаты.

Теорема D (Б. С. Кашин[17]). *Существует такая абсолютная постоянная* $C > 0$*, что при* $n = 1, 2, \ldots$ *для произвольной ортонормированной системы* $\Phi \subset L^2(0,\,1)$ *справедливо неравенство*

$$e_n(\mathbb{X}, \Phi, L^2(0,\,1)) \ge C^{-n}. \tag{8}$$

Теорема E (Б. С. Кашин[18]). *Если равномерно ограниченная полная ортонормированная система функций* $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\varphi_j \in L^2(0,\,1)$*, такова, что*

$$||\varphi_j||_{L^\infty(0,\,1)} \le D, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

то при $n = 1, 2, \ldots$

$$e_n(\mathbb{X}, \Phi, L^2(0,\,1)) \ge \frac{C_D}{\sqrt{n}} > 0. \tag{9}$$

В диссертации наряду с приближением полиномами по ортонормированным системам рассматривается приближение полиномами по жёстким фреймам. Фрейм — это система функций $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(0,\,1)$, для которой существуют такие положительные постоянные A и B, что для любой функции $f \in L^2(0,\,1)$ выполняются «рамочные» неравенства $A||f||_{L^2(0,\,1)} \le \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f,\, \varphi_k\rangle|^2 \le B||f||_{L^2(0,\,1)}$. Жёстким фреймом называется фрейм с рамочными константами $A = B = 1$, то есть система функций, для которой выполняется равенство Парсеваля (подробнее о фреймах см. в монографии, посвящённой теории всплесков[19]).

Каноническим разложением функции $f \in L^2(0,\,1)$ по жёсткому фрейму Φ называется сходящийся по норме $L^2(0,\,1)$ ряд $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k\rangle \varphi_k$. Наилучшим кано-

[17] Kashin B. S. On Lower Estimates for n-term Approximation in Hilbert Space // Approximation theory (volume dedicated to Blagovest Sendov). Darba, Sofia. 2002. P. 241–257.
[18] Kashin B. S. On Lower Estimates for n-term Approximation in Hilbert Space // Approximation theory (volume dedicated to Blagovest Sendov). Darba, Sofia. 2002. P. 241–257.
[19] Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. — М.: Физматлит. — 2006. — 616 с.

ническим n-членным приближением функции $f \in L^2(0,\,1)$ по жёсткому фрейму Φ называется величина

$$\sigma_n(f,\Phi) = \inf_{\Lambda\subset\mathbb{N},\#\Lambda\le n} \left\| f - \sum_{k\in\Lambda} \langle f,\varphi_k\rangle \varphi_k \right\|_2 . \tag{10}$$

Далее, если F — подмножество $L^2(0,\,1)$, то наилучшим каноническим n-членным приближением F называется величина

$$\sigma_n(F,\Phi) = \sup_{f\in F} \sigma_n(f,\Phi). \tag{11}$$

В случае когда жёсткий фрейм — это полная ортонормированная система, величины (10), (11) совпадают с обычными наилучшими приближениями n-членными полиномами ((1), (2) соответственно).

Наряду с семейством (6) будем рассматривать семество $\mathbb{I}$ характеристических функций интервалов, лежащих в интервале $(0,\,1)$:

$$\mathbb{I} = \{I_\omega, \omega = (\alpha,\,\beta) \subset (0,\,1)\},$$
$$I_\omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \omega; \\ 0, & \text{если } x \notin \omega. \end{cases}$$

Пример полной ортонормированной системы Хаара H, для которой аналогично (7) имеет место оценка

$$\sigma_n(\mathbb{I},H) \le 2^{-\frac{n}{4}+2}, \quad n = 1,2,\ldots,$$

показывает, что для систем Φ величины $\sigma_n(\mathbb{I},\Phi)$ могут убывать экспоненциально. Однако, для равномерно ограниченных жёстких фреймов это не так. Сопоставление оценок (8) и (9) для ортонормированных систем приводит к вопросу о возможном порядке убывания величин $\sigma_n(\mathbb{I},\Phi)$ для ортонормированных систем или фреймов, равномерно ограниченных в простренстве $L^p(0,\,1)$, $2 < p < \infty$:

$$\|\varphi_k\|_{L^p(0,\,1)} \le D, \quad k = 1,2,3,\ldots, \quad 2 < p \le \infty. \tag{12}$$

Этот вопрос также решается в диссертации.

Наряду с вопросами абсолютной сходимости рядов Фурье изучаются свойства коэффициентов Фурье различных классов функцийпо полным в $L^2[0,\,1]$ ортонормированным системам функций

$$\Phi = \{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}, \tag{13}$$

равномерно ограниченным в $L^p[0,\,1]$, $2 < p < \infty$:

$$\exists D > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad ||\phi_j||_{L^p[0,\,1]} \leq D. \tag{14}$$

Ранее свойства коэффициентов Фурье функций из класса (6) рассматривались С. В. Бочкарёвым[20][21] и Б. С. Кашиным[22][23]. С. В. Бочкарёвым установлено, в частности, что для равномерно ограниченных в $L^\infty[0,\,1]$ систем (13) справедливо соотношение

$$\int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{\infty} |c_j(\chi_t)| dt = \infty, \tag{15}$$

где $c_j(\chi_t) = \int\limits_0^t \phi_j(x)dx$ — коэффициенты Фурье по системе Ф. Б. С. Кашиным[24] показано, что для любой полной ортонормированной системы расходится следующий ряд:

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||c_j(\chi_t)||_{L^2[0,\,1]} = \infty. \tag{16}$$

В связи с оценками (15) и (16) представляет интерес изучение поведения коэффициентов Фурье функций класса (6) по полным ортонормированным системам (13) с условием (14).

С этим вопросом тесно связан вопрос абсолютной сходимости рядов Фурье. Важным направлением является изучение абсолютной сходимости рядов Фурье различных классов гладких функций по равномерно ограниченным полным ортонормированным системам.

Определим модуль непрерывности $f \in C(X)$ для $X = [0,\,1]^n$, $[0,\,2\pi)^n$, равен-

[20] Бочкарёв С. В. Об абсолютной сходимости рядов Фурье // Докл. АН СССР. 202:5. 1972. С. 225–227.
[21] Бочкарёв С. В. Об абсолютной сходимости рядов Фурье по ограниченным системам // Матем. заметки. 15:3. 1974. С. 363–370.
[22] Kashin B. S. On Lower Estimates for n-term Approximation in Hilbert Space // Approximation theory (volume dedicated to Blagovest Sendov). Darba, Sofia. 2002. P. 241–257.
[23] Кашин Б. С. Замечания об оценке функций Лебега ортонормированных систем // Матем. сб. 106(148):3(7). 1978. С. 380–385.
[24] Кашин Б. С. Замечания об оценке функций Лебега ортонормированных систем // Матем. сб. 106(148):3(7). 1978. С. 380–385.

ством

$$\omega(f,\delta)=\sup_{\substack{x,x+h\in X\\ 0<|h|\le\delta}}|f(x+h)-f(x)|.$$

Пусть также $H^\Omega=\{f\in C(X):\omega(f,\delta)\le\Omega(\delta),\ \delta>0\}$. Здесь $\Omega(\delta)$ — некоторый наперёд заданный модуль непрерывности. Рассмотрим пространство BV функций ограниченной вариации. А. Зигмундом было установлено достаточное условие абсолютной сходимости тригонометрического ряда Фурье функции ограниченной вариации.

Теорема F (А. Зигмунд[25]). *Если функция $f(x)\in C[0,\,2\pi)\cap\cap BV[0,\,2\pi)$ имеет модуль непрерывности, удовлетворяющий соотношению*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)}}{n}<\infty,$$

то ряд из модулей коэффициентов Фурье по тригонометрической системе такой функции сходится.

Условие теоремы F для некоторых ортонормированных систем является слишком ограничительным. Например, ряд Фурье — Хаара каждой функции ограниченной вариации сходится абсолютно. В 1973 году С. В. Бочкарёвым было доказано, что указанным свойством системы Хаара не может обладать ни одна равномерно ограниченная полная ортонормированная система функций. Точнее, им получена

Теорема G (С. В. Бочкарёв[26]). *Для любой равномерно ограниченной полной ортонормированной системы $\Phi=\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определённой на $[0,\,1]$, и модуля непрерывности $\Omega(\delta)$, для которого*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\Omega\left(\frac{1}{n}\right)}}{n}=\infty,$$

найдётся непрерывная функция $F(x)\in H^\Omega$ с условием $F(0)=F(1)=0$, для которой расходится ряд из модулей коэффициентов Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(F)|=\infty,\quad c_n(F)=\int_0^1F(x)\varphi_n(x)dx,\quad n=1,2,\ldots.$$

[25] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. — М.: Изд-во АФЦ. — 1999. — 560 с.

[26] Бочкарёв С. В.ЪАбсолютная сходимость рядов Фурье по полным ортонормированным системам // Успехи матем. наук. 27:2(164). 1972. С. 53–76.

.

Следствие. *Для любой равномерно ограниченной полной ортонормированной системы $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определённой на $[0,\,1]$, найдётся непрерывная функция $F(x) \in BV[0,\,1]$ с условием $F(0) = F(1) = 0$ и модулем непрерывности*

$$\omega(F,\delta) = O\left(\log^{-2}\frac{1}{\delta}\right)$$

при $\delta \to 0$, для которой расходится ряд из модулей её коэффициентов Фурье.

Рассмотрим функции двух переменных $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) \in C(X)$, имеющие ограниченную вариацию по Харди[27], то есть $f \in BV_H(X)$. Для них также определим смешанный модуль непрерывности

$$\omega(f,\delta_1,\delta_2) = \sup_{\substack{\mathbf{x},\,\mathbf{x}+\mathbf{h}\in X\\ 0<h_1\le\delta_1,\,0<h_2\le\delta_2}} |\Delta_{\mathbf{h}}(f,\mathbf{x})|, \quad X = \mathbb{I}^2,\ \mathbb{T}^2,$$

где $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ и

$$\Delta_{\mathbf{h}}(f,\mathbf{x}) = f(x_1,x_2) + f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1+h_1, x_2) - f(x_1, x_2+h_2).$$

Аналогичный теореме F результат для функций из $BV_H[0,\,2\pi)^2$ и тригонометрической системы в двумерном случае вытекает из результатов работы А. Вереса:

Теорема H (А. Верес[28]). *Если функция $f(\mathbf{x}) \in C[0,\,2\pi)^2 \cap BV_H[0,\,2\pi)^2$ имеет модуль непрерывности, удовлетворяющий соотношению*

$$\omega(f,\delta_1,\delta_2) = O\left(\log^{-(2+\varepsilon)}\frac{1}{\delta_1}\log^{-(2+\varepsilon)}\frac{1}{\delta_2}\right) \quad \text{при } \delta_1,\delta_2 \to 0,$$

где $\varepsilon > 0$, то ряд из модулей коэффициентов Фурье по тригонометрической системе такой функции сходится.

Заметим, что для функций вида $f(\mathbf{x}) = f(x_1,x_2) = f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)$ справедливо $\omega(f,\delta_1,\delta_2) \le \omega(f_1,\delta_1)\cdot\omega(f_2,\delta_2)$. Учитывая этот факт, из теоремы G нетрудно вывести

Следствие. *Для равномерно ограниченной полной ортонормированной системы вида $\Phi = \{\varphi_{n_1}(x_1)\cdot\varphi_{n_2}(x_2)\}_{n_1,n_2=1}^{\infty}$, определённой на $[0,\,1]^2$, найдётся непрерывная функция $F(\mathbf{x}) \in BV_H[0,\,1]^2$ с условием $F(x_1,0) = F(x_1,1) = 0$, $F(0,x_2) =$*

[27] Математическая энциклопедия. Том 5. Москва. —М.: Изд-во Советская энциклопедия. — 1984. — 12

[28] Veres A. Extensions of the theorems of Szasz and Zygmund on the absolute convergence of Fourier series // Acta Sci. Math. (Szeged). 74. 2008. P. 191–206.

$F(1, x_2) = 0$ *и модулем непрерывности*

$$\omega(F, \delta_1, \delta_2) = O\left(\log^{-2}\frac{1}{\delta_1}\log^{-2}\frac{1}{\delta_2}\right) \quad \text{\textit{при} } \delta_1, \delta_2 \to 0,$$

для которой расходится ряд из модулей коэффициентов Фурье.

Для систем общего вида такое следствие получить не удаётся. Однако, в диссертационной работе получен двумерный аналог следствия из теоремы G.

Цель и задачи исследования

Цели работы — изучение поведения коэффициентов разложения гладких функций по нормированным базисам пространств $L^p(0,\,1)^d$, исследование поведения n-членных приближений характеристических функций интервалов по фреймам, ограниченным в $L^p(0,\,1)$, исследование поведения коэффициентов разложения характеристических функций интервалов по полным ортонормированным систмемам, ограниченным в $L^p(0,\,1)$, построение примера непрерывной функции двух переменных с ограниченной вариацией по Харди и логарифмическим модулем непрерывности, для которой ряд из модулей коэффициентов Фурье по произвольной наперёд заданной равномерно ограниченной полной ортонормированной системе расходится.

Методы исследования

Для доказательства научных результатов использованы методы теории ортогональных рядов, современной теории приближений, теории функций.

Научная новизна

Результаты, полученные в диссертации, являются новыми и состоят в следующем:

1. Для произвольного нормированного базиса в пространстве $L^p[0,\,1]^d$, $2 < p < \infty$, и $\alpha = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\right\}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, построена функция $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\ d\alpha$, если $d\alpha \notin \mathbb{Z}$, и $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\ (d\alpha - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, если $d\alpha \in \mathbb{Z}$, для которой ряд из модулей коэффициентов разложения по данному базису расходится.

2. Получены оценки снизу канонических n-членных приближений характеристических функций интервалов из интервала $(0,\,1)$ по жёстким фреймам, ограниченным в $L^p(0,\,1)$, $2 < p < \infty$.

3. Установлены оценки снизу коэффициентов Фурье характеристических функций интервалов по полной ортонормированной системе, ограниченной в $L^p[0, 1]$, $2 < p < \infty$.

4. Построена непрерывная функция двух переменных, имеющая ограниченную вариацию по Харди и модуль непрерывности $\omega(F, \delta_1, \delta_2) = = O\left(\log^{-2} \frac{1}{\max\{\delta_1, \delta_2\}}\right)$ при $\delta_1, \delta_2 \to 0$, для которой расходится ряд из модулей коэффициентов Фурье по произвольной наперёд заданной равномерно ограниченной полной ортонормированной системе.

Теоретическая и практическая ценность

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами в области теории приближений и теории ортогональных рядов, а также в других областях теории функций.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и всероссийских и международных конференциях:

1. Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, (2010—2014 гг.), неоднократн;

2. Workshop «Probability, Analysis and Geometry», Ульм, Германия, сентябрь 2013 г.;

3. Workshop «Probability, Analysis and Geometry», МГУ, Москва, сентябрь 2014 г.;

4. Семинар «Ортогональные ряды» под руководством профессора Б. С. Кашина и профессора С. В. Конягина. Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (2011—2014 гг.), неоднократно;

5. Семинар «Геометрическая теория приближений» под руководством профессора П. А. Бородина. Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (2014 гг.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в четырёх работах, список которых приведён в конце автореферата [1—4]; все работы опубликованы в журналах из перечня, рекомендованного ВАК. Все сформулированные результаты являются новыми. Все приведенные в диссертации совместные результаты содержат указания соавторов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из оглавления, списка используемых обозначений, введения, четырёх глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 27 наименований. Объём диссертации составляет 65 страниц.

Краткое содержание работы

Во **введении** к диссертации содержится обзор результатов, относящихся к теме диссертации, а также формулируются основные полученные в ней результаты.

В **первой** главе диссертации установлены кратные аналоги известных результатов Б. С. Митягина и Б. С. Кашина о существовании для произвольного базиса в пространстве $L^p(0,\,1)^d$ функции $f \in \mathrm{Lip}\alpha$, $\alpha = \alpha(p, d) > 0$ с расходящимся рядом абсолютных величин коэффициентов разложения по базису. Справедлива

Теорема 1.1. *Пусть* $\Psi = \{\psi_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$ *— произвольный нормированный базис в* $L^p[0,\,1]^d$, $1 < p < \infty$. *Пусть также* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *и* $\alpha = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\right\}$.

1. *Если* $d\alpha \notin \mathbb{Z}$, *то существует функция* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\ d\alpha$, *для которой ряд из модулей коэффициентов разложения по базису* Ψ *расходится.*

2. *Если* $d\alpha \in \mathbb{Z}$, *то существует функция* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\ (d\alpha - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, *для которой ряд из модулей коэффициентов разложения по базису* Ψ *расходится.*

Во **второй** главе установлены оценки снизу n-членных приближений по норме пространства $L^2(0,\,1)$ семейства $\mathbb{I}$ характеристических функций интервалов $\omega \in (0,\,1)$ по произвольному жесткому фрейму, состоящему из функций, равномерно ограниченных константой D в $L^p(0,\,1)$, $2 < p < \infty$.

Справедливы следующие результаты, которые доказаны в совместной работе автора и Б. С. Кашина.

Теорема 2.1 (получена совместно с Б. С. Кашиным). *Для произвольного жёсткого фрейма с условием* (12) *справдливо неравенство*

$$\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi) \geq C_{p,D} \cdot n^{-\frac{p}{2(p-2)}}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Теорема 2.2 (получена совместно с Б. С. Кашиным). *Существует такой жёсткий фрейм* Φ *с условием* (12)*, что*

$$\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi) \leq C_p \cdot n^{-\frac{p}{2(p-1)}}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

В **третьей** главе диссертации исследуются коэффициенты Фурье функций из семейства $\mathbb{I}$ по полным ортонормированным системам (13) с условием (14). Автором диссертации получен следующий результат, составляющий основу главы 3.

Теорема 3.1. *Для любой системы* (13) *с условием* (14) *существует такая функция* $\chi \in \mathbb{X}$ *в классе* (6)*, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} | < \chi, \phi_j > |^{\frac{p-2}{p-1}} = \infty. \tag{17}$$

Отметим, что из соотношений вида (16) нельзя сделать вывода о поведении последовательности $\{c_j(\chi_t)\}_{j=1}^{\infty}$ в некоторой точке t, который фактически содержится в теореме 3.1. Это, видимо, не случайно. Как показывает пример системы Хаара для общих ортонормированных систем, убывающая перестановка последовательности коэффициентов Фурье функций χ_t может убывать экспоненциально. Теорема 3.1 показывает, что при условии (14) коэффициенты Фурье функций класса (6) не могут убывать слишком быстро. Вопрос о точности показателя $\frac{p-2}{p-1}$ в теореме 3.1 остаётся открытым.

Вопрос о расходимости ряда (17) связан с оценками снизу n-членных приближений в метрике $L^2[0, 1]$. Такие оценки для систем с условием (14) рассматриваются в главе 2. Однако вывести из полученных в главе 2 результатов утверждение теоремы 3.1 не удаётся. Возможно, это связано с тем, что оценки снизу для величин (11) в теореме 2.2 использовали малость коэффициентов $c_j(\chi_t - \chi_{t'})$ в случае если величина $|t - t'|$ достаточно мала. Для доказательства результатов третьей главы, наоборот, используется оценка снизу для элементов последовательности $\{c_j(\chi_t)\}_{j=1}^{\infty}$.

В **четвертой** главе установлен двумерный аналог теоремы С. В. Бочкарева о существовании для любой равномерно ограниченной полной ортонормированной системы Φ периодической функции f ограниченной вариации из класса H^{ω} с расходящимся рядом из модулей коэффициентов Фурье. Справедлива

Теорема 4.1. *Для любой равномерно ограниченной полной в $L^2[0,\,1]^2$ ортонормированной системы $\Phi = \{\varphi_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$ найдётся непрерывная функция $F(\mathbf{x}) \in BV_H[0,\,1]^2$ с условием $F(x_1, 0) = F(x_1, 1) = F(0, x_2) = F(1, x_2) = 0$ и модулем непрерывности*

$$\omega(F, \delta_1, \delta_2) = O\left(\log^{-2}\frac{1}{\max\{\delta_1, \delta_2\}}\right)$$

при $\delta_1, \delta_2 \to 0$, для которой расходится ряд из модулей коэффициентов Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(F)| = \infty, \quad c_n(F) = \int_0^1 \int_0^1 F(\mathbf{x})\varphi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство теоремы 4.1 основано на построениях, изложенных в теореме 10.11 монографии Б. С. Кашина, А. А. Саакяна[29]. Вопрос о точности теоремы 4.1 остается открытым и тесно связан с открытым вопросом Б. С. Кашина о справедливости двумерного аналога неравенства (8)[30] (с заменой в двумерном случае обычной производной на смешанную производную $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$).

Заключение

В работе получены следующие результаты: для произвольного нормированного базиса в пространстве $L^p[0,\,1]^d$, $2 < p < \infty$, и $\alpha = \alpha(p\,d)$, построена функция $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\; d\alpha$, если $d\alpha \notin \mathbb{Z}$, и $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\;(d\alpha - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, если $d\alpha \in \mathbb{Z}$, для которой ряд из модулей коэффициентов разложения по данному базису расходится; получены оценки снизу канонических n-членных приближений характеристических функций интервалов из интервала $(0,\,1)$ по жёстким фреймам, ограниченным в $L^p(0,\,1)$, $2 < p < \infty$; установлены оценки снизу коэффициентов Фурье характеристических функций интервалов по полной ортонормированной системе, ограниченной в $L^p[0,\,1]$, $2 < p < \infty$; для произвольной равномерно ограниченной полной ортонормированной системы построена непрерывная функция двух переменных, имеющая ограниченную вариацию по Харди и логарифмический модуль непрерывности, для которой расходится ряд из модулей коэффициентов Фурье.

[29] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. — М.: Изд-во АФЦ. — 1999. — 560 с.
[30] Кашин Б. С. Замечания об оценке функций Лебега ортонормированных систем // Матем. сб. **106**(148):3(7). 1978. С. 380–385.

Рекомендации и персепективы по дальнейшей разработке темы. Вопрос о точности некоторых изложенных в работе результатов остаётся открытым. В частности, остался неисследован предельный случай пункта 2 теоремы 1.1 (при $d\alpha \in \mathbb{Z}$). В теореме 2.1 дана оценка снизу для n-членных приближений класса характеристических функций интервалов из интервала $(0,\ 1)$ по произвольному жёсткому фрейму, ограниченному в $L^p(0,\ 1)$, однако вопрос о точности этого результата также открыт.

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю академику РАН Борису Сергеевичу Кашину за постановку задач и внимание к работе, а также сотрудникам кафедры теории функции и функционального анализа и кафедры математического анализа за доброжелательное отношение и поддержку.

Публикации по теме диссертации

[1] Мелешкина А. В. О коэффициентах разложения по базисам гладких функций многих переменных // Матем. заметки. **89**:6. 2011. С. 938–943.

[2] Кашин Б. С., Мелешкина А. В. Об n-членных приближениях по фреймам, ограниченным в $L^p(0,\ 1)$, $2 < p < \infty$ // Матем. заметки. **95**:6. 2014. С. 830–835.

[3] Мелешкина А. В. О коэффициентах Фурье характеристических функций интервалов по полной ортонормированной системе, ограниченной в $L^p[0, 1]$, $2 < p < \infty$ // Матем. заметки. **97**:4. 2015. С. 632–635.

[4] Мелешкина А. В. Об абсолютной сходимости рядов Фурье по двукратным ограниченным полным ортонормированным системам // Успехи мат. наук.**71**:4. 2016. С. 209-210.