ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»
Механико-математический факультет

на правах рукописи

УДК 517.51, 517.52

Мелешкина Анна Владимировна

О коэффициентах разложения функций некоторых классов по ортонормированным базисам и фреймам

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
академик РАН Б. С. Кашин

Москва — 2016

Содержание

Используемые обозначения

В диссертации будут использоваться общепринятые обозначения: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbb{R}^n$ — линейное пространство n-мерных векторов $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^n$, $x_i \in \mathbb{R}$; $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. Кроме того, будут использоваться следующие обозначения:

$L^p(0,\,1)$, $L^p(\Omega)$ — пространства функций, суммируемых в степени p на $(0,\,1)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ соответственно;

$||f||_{L^p(0,\,1)} = \left(\int\limits_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ — норма функции f в пространстве $L^p(0,\,1)$;

$||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}$ — норма функции f в пространстве $L^p(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$;

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение;

$\#\Lambda$ — число элементов в конечном множестве Λ;

$[x]$ — целая часть действительного числа x;

C_p, $C_{p,D}$ — величины, зависящие от указанных параметров;

C, C_1, C_2, $\ldots$ — абсолютные постоянные;

ОНС — ортонормированная система.

Остальные обозначения вводятся непосредственно в тексте диссертации.

Введение

Актуальность работы. В диссертации рассматриваются задачи теории ортогональных рядов и теории приближений. Основными объектами исследования являются n-членные приближения и коэффициенты разложения функции по полным ортонормированным системам и фреймам. Связь между указанными объектами хорошо известна (см., в частности, соотношение (3) ниже).

Первая глава посвящена изучению коэффициентов разложения гладких функций многих переменных по ортонормированным базисам. Напомним, что при $0 < \alpha \leqslant 1$ функция $f(\mathbf{x})$, определённая на кубе $[0,\,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, принадлежит классу Lip α, если существует такая константа M, что для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из области определения функции выполняется неравенство $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant M \cdot \rho^{\alpha}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$, где $\rho(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ — евклидово растояние между точками. А при $\alpha = p + \gamma$, где $p \in \mathbb{N}$ и $0 < \gamma \leqslant 1$, принадлежность функции $f(\mathbf{x})$ классу Lip α будем понимать так, что у неё существуют и непрерывны все производные $D^{\mathbf{s}} f = \frac{d^{|\mathbf{s}|} f(\mathbf{x})}{dx_1^{s_1} \ldots dx_d^{s_d}}$, где $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, порядка $0 \leqslant |\mathbf{s}| \leqslant p$, причем все старшие производные $D^{\mathbf{s}} f$, $|\mathbf{s}| = p$, принадлежат классу Lip γ.

Хорошо известна классическая теорема С. Н. Бернштейна, которая дает достаточное условие абсолютной сходимости ряда Фурье по тригонометрической системе функции одной переменной.

Теорема A (С. Н. Бернштейн, [9, стр. 608]). *Если периодическая функция* $f(x) \in \mathrm{Lip}\ \alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$, *то ряд её коэффициентов Фурье по тригонометрической системе сходится абсолютно. Существует периодическая функция* $f(x) \in \mathrm{Lip}\ \frac{1}{2}$, *ряд коэффициентов Фурье по тригонометрической системе которой не сходится абсолютно.*

Эта теорема усиливалась и обобщалась многими авторами в направлении нахождения иных достаточных условий абсолютной сходимости ряда Фурье (С. Н. Бернштейн, О. Сас, С. Б. Стечкин, см. [9, глава 9]), а также получения аналогичных результатов для других систем. В частности, для системы Хаара имеются результаты З. Чисельского и Ю. Муселака [2], П. Л. Ульянова [27], Б. И. Голубова [13].

Получены также обобщения второй части данной теоремы на случай произвольной полной ортонормированной системы, а также для произвольного нормированного базиса. Точность таких результатов легко подтверждается первой частью теоремы С. Н. Бернштейна или аналогичными результатоми для базисов в других пространствах. Эти задачи для класса липшицевых функций решались Б. С. Митягиным, С. В. Бочкарёвым, Б. С. Кашиным. Приведём некоторые результаты.

Б. С. Митягин [24] в 1964 году доказал, что для произвольной полной ортонормированной системы функций на отрезке $[0,\, 1]$ существует функция $f(x) \in \mathrm{Lip}\ \frac{1}{2}$, для которой ряд коэффициентов Фурье по этой системе не сходится абсолютно.

С. В. Бочкарёвым [10] в 1972 году получен следующий результат, касающийся функций ограниченной вариации: пусть $\alpha \in (0,\, 1)$, тогда для любой полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, ограниченной в совокупности, найдётся такая абсолютно непрерывная функция $f(t) \in \mathrm{Lip}\ \alpha$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^{\frac{2}{2+\alpha}} = \infty.$$

Б. С. Кашин [14] в 1977 году доказал справедливость следующего результата для произвольного нормированного базиса в $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$.

Теорема B (Б. С. Кашин [14]). *Пусть* $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *базис в* $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, *и*

$$||\psi_n(x)||_p = 1, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда существует такая функция $f(x) \in \mathrm{Lip}\ \alpha$, *где* $\alpha = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\right\}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *что ряд из модулей коэффициентов разложения функции* $f(x)$ *по базису* Ψ *расходится, то есть*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x),$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Случаем многих переменных в данном вопросе занимались С. Бохнер [1], С. Вейнгер [8], Б. С. Митягин [24]. В [1] и [8] получены следующие аналоги теоремы Бернштейна:

Для любой периодической функции $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\ \left(\frac{d}{2} + \varepsilon\right)$, $\varepsilon > 0$, *определённой на* $[0, 1]^d$, *ряд из модулей коэффициентов Фурье по тригонометрической системе сходится абсолютно.*

Существует периодическая функция $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\ \frac{d}{2}$, *определённая на* $[0, 1]^d$, *для которой ряд из модулей коэффициентов Фурье по тригонометрической системе не сходится абсолютно.*

Б. С. Митягин [24] в 1964 году методами функционального анализа получил аналог последнего результата для случая произвольной полной ортонормированной системы функций многих переменных. Приведём частный случай полученного Б. С. Митягиным результата.

Теорема C (Б. С. Митягин, [24]). *Пусть* $\Psi = \{\psi_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$ *— произвольная полная ортонормированная система на* $[0,\,1]^d$. *Существует функция* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\ \frac{d}{2}$, *для которой ряд коэффициентов Фурье по системе* Ψ *не сходится абсолютно.*

Аналогичный результат для произвольного нормированного базиса в пространстве $L^p[0,\,1]^d$ был получен автором диссертации в работе [21] и составляет основной результат первой главы.

Теорема 1.1. *Пусть* $\Psi = \{\psi_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$ *— произвольный нормированный базис в* $L^p[0,\,1]^d$, $1 < p < \infty$. *Пусть также* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *и* $\alpha = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\right\}$.

1. *Если* $d\alpha \notin \mathbb{Z}$, *то существует функция* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\ d\alpha$, *для которой ряд из модулей коэффициентов разложения по базису* Ψ *расходится.*

2. *Если* $d\alpha \in \mathbb{Z}$, *то существует функция* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\ (d\alpha - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, *для которой ряд из модулей коэффициентов разложения по базису* Ψ *расходится.*

Доказательство данной теоремы основано на методе, использованном при доказательстве теоремы Б. С. Кашина [18, стр. 395].

Вторая глава диссертации посвящена вопросу изучения n-членных приближений по норме пространства $L^2(0,\,1)$ семейства характеристических функций интервалов, лежащих в интервале $(0,\,1)$.

Назовем n-членным приближением элемента f действительного нормированного пространства X относительно словаря $\Phi \subset X$ величину

$$e_n(f, \Phi, X) = \inf_{P \in \Sigma_n} ||f - P||_X, \tag{1}$$

где $n = 1, 2, \ldots$,

$$\Sigma_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j, a_j \in \mathbb{R}, x_j \in \Phi \right\}.$$

Словарём мы называем произвольное подмножество $\Phi \subset X$. Если K — подмножество действительного нормированного пространства X, то

$$e_n(K, \Phi, X) = \sup_{f \in K} e_n(f, \Phi, X). \tag{2}$$

При разных K, Φ, X оценки величин (2) имеют теоретическое и практическое значение (см. Р. Девор [3], В. Н. Темляков [6]). В случае когда $X = \mathcal{H}$ — гильбертово пространство, Φ — полная ортонормированная система функций, величина (1) была введена в 1955 году С. Б. Стечкиным [26], для неё справедливо равенство

$$e_n(f, \Phi, \mathcal{H}) \equiv \left(\sum_{k \geqslant n+1} [c_k^*(f)]^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

где $\{c_k^*(f)\}$ — неубывающая перестановка последовательности абсолютных величин коэффициентов Фурье функции f по полной ортонормированной системе Φ. Формула (3) проясняет связь между двумя темами — оценками n-членных приближений и исследованием поведения коэффициентов Фурье.

Б. С. Кашин в [16] предложил геометрический подход к доказательству оценок снизу величин (2), который может быть применён к любому ортонормированному словарю в гильбертовом пространстве. Б. С. Кашин доказал, что если имеет место вложение $Q \subset K$, где Q — $2n$-мерный куб

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i \psi_i, \quad \varepsilon_i = \pm 1, \quad \{\psi_i\}_{i=1}^{2n} \text{ — ОНС} \right\}, \tag{4}$$

то справедливо неравенство

$$e_n(K, \Phi, \mathcal{H}) \geqslant c \cdot n^{\frac{1}{2}}, \quad c > 0. \tag{5}$$

Если теперь найти при данном n такое достаточно большое число λ и множество Q вида (4), что $\lambda \cdot Q \subset K$, а такая задача решается для классических функциональных классов K, то можно получить точные по порядку оценки снизу для n-членных приближений. Обобщения и аналоги оценки (5) см. в работах [4], [17].

В 1993 году С. В. Конягин обратил внимание на естественную с теоретической и практической точки зрения задачу оценки величин (2) в случае когда $X = L^2(0,\,1)^d$, Φ — ортонормированная система функций в X, K — совокупность характеристических функций выпуклых подмножеств единичного куба $(0,\,1)^d$. При $d = 1$ задача сводится к нахождению оценок величины (2) для однопараметрического семейства характеристических функций интервалов

$$\mathbb{X} = \{\chi_t\}_{t \in (0,1]},$$
$$\chi_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant t; \\ 0, & \text{если } t < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{6}$$

В случае если $\Phi = H$ — система Хаара (см., например, [18, стр. 69]), справедлива оценка сверху

$$e_n(\mathbb{X}, H, L^2(0,\,1)) \leqslant C \cdot 2^{-n/2}. \tag{7}$$

Для доказательства неравенства (7) необходимо воспользоваться оценкой для L^2-приближения функций χ_t частными суммами ряда Фурье—Хаара (см. [18, стр. 75]) с учётом того, что в каждой пачке ряда Фурье—Хаара функции χ_t только один коэффициент не равен нулю.

В силу «малой массивности» семейства $\mathbb{X}$ для него неприменим описанный выше геометрический подход к оценкам снизу n-членных приближений, но возможно использование техники теории общих ортогональных рядов. Б. С. Кашиным [5] в 2002 году были получены следующие результаты.

Теорема D (Б. С. Кашин, [5]). *Существует такая абсолютная постоянная $C > 0$, что при $n = 1, 2, \ldots$ для произвольной ортонормированной системы $\Phi \subset L^2(0,\,1)$ справедливо неравенство*

$$e_n(\mathbb{X}, \Phi, L^2(0,\,1)) \geqslant C^{-n}. \tag{8}$$

Теорема E (Б. С. Кашин, [5]). *Если равномерно ограниченная полная ортонормированная система функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\varphi_j \in L^2(0,\,1)$, такова, что*

$$||\varphi_j||_{L^\infty(0,\,1)} \leqslant D, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

то при $n = 1, 2, \ldots$

$$e_n(\mathbb{X}, \Phi, L^2(0,\,1)) \geqslant \frac{C_D}{\sqrt{n}} > 0. \tag{9}$$

В диссертации наряду с приближением полиномами по ортонормированным системам рассматривается приближение полиномами по жёстким фреймам. Фрейм — это система функций

$$\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(0,\, 1),$$

для которой существуют такие положительные постоянные A и B, что для любой функции $f \in L^2(0,\, 1)$ выполняются «рамочные» неравенства

$$A||f||_{L^2(0,\,1)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f,\, \varphi_k\rangle|^2 \leqslant B||f||_{L^2(0,\,1)}.$$

Жёстким фреймом называется фрейм с рамочными константами $A = B = 1$, то есть система функций, для которой выполняется равенство Парсеваля (подробнее о фреймах см. в [25]).

Каноническим разложением функции $f \in L^2(0,\, 1)$ по жёсткому фрейму Φ называется сходящийся по норме $L^2(0,\, 1)$ ряд

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k\rangle \varphi_k.$$

Наилучшим каноническим n-членным приближением функции $f \in L^2(0,\, 1)$ по жёсткому фрейму Φ называется величина

$$\sigma_n(f, \Phi) = \inf_{\Lambda\subset\mathbb{N}, \#\Lambda\leqslant n} \left\| f - \sum_{k\in\Lambda} \langle f, \varphi_k\rangle \varphi_k \right\|_2 . \qquad (10)$$

Далее, если F — подмножество $L^2(0,\, 1)$, то наилучшим каноническим n-членным приближением F называется величина

$$\sigma_n(F, \Phi) = \sup_{f\in F} \sigma_n(f, \Phi). \qquad (11)$$

В случае когда жёсткий фрейм — это полная ортонормированная система, величины (10), (11) совпадают с обычными наилучшими приближениями n-членными полиномами ((1), (2) соответственно).

Наряду с семейством (6) будем рассматривать семество $\mathbb{I}$ характеристических функций интервалов, лежащих в интервале (0, 1):

$$\mathbb{I} = \{I_\omega, \omega = (\alpha,\, \beta) \subset (0,\, 1)\},$$
$$I_\omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \omega; \\ 0, & \text{если } x \notin \omega. \end{cases}$$

Пример полной ортонормированной системы Хаара H, для которой аналогично (7) имеет место оценка

$$\sigma_n(\mathbb{I}, H) \leqslant 2^{-\frac{n}{4}+2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

показывает, что для систем Φ величины $\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi)$ могут убывать экспоненциально. Однако, для равномерно ограниченных жёстких фреймов это не так. Сопоставление оценок (8) и (9) для ортонормированных систем приводит к вопросу о возможном порядке убывания величин $\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi)$ для ортонормированных систем или фреймов, равномерно ограниченных в простренстве $L^p(0,\, 1)$, $2 < p < \infty$:

$$\|\varphi_k\|_{L^p(0,\,1)} \leqslant D, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \quad 2 < p \leqslant \infty. \tag{12}$$

Справедливы следующие результаты, которые доказаны в совместной работе автора и Б. С. Кашина [19] и изложены во второй главе.

Теорема 2.1 (получена совместно с Б. С. Кашиным). *Для произвольного жёсткого фрейма с условием* (12) *справдливо неравенство*

$$\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi) \geqslant C_{p,D} \cdot n^{-\frac{p}{2(p-2)}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 2.2 (получена совместно с Б. С. Кашиным). *Существует такой жёсткий фрейм* Φ *с условием* (12)*, что*

$$\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi) \leqslant C_p \cdot n^{-\frac{p}{2(p-1)}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

В третьей главе изучается одно свойство коэффициентов Фурье функций класса (6) по полным в $L^2[0,\, 1]$ ортонормированным системам функций

$$\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}, \tag{13}$$

равномерно ограниченным в $L^p[0,\, 1]$, $2 < p < \infty$:

$$\exists D > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad ||\varphi_j||_{L^p[0,\,1]} \leqslant D. \tag{14}$$

Ранее свойства коэффициентов Фурье функций из класса (6) рассматривались С. В. Бочкарёвым [10], [12] и Б. С. Кашиным [5], [15]. С. В. Бочкарёвым установлено, в частности, что для равномерно ограниченных в $L^\infty[0,\, 1]$ систем (13) справедливо соотношение

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{\infty} |c_j(\chi_t)| dt = \infty, \tag{15}$$

где $c_j(\chi_t) = \int\limits_0^t \varphi_j(x)dx$ — коэффициенты Фурье по системе Ф. Б. С. Кашиным [15] показано, что для любой полной ортонормированной системы расходится следующий ряд:

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||c_j(\chi_t)||_{L^2[0,\,1]} = \infty. \qquad (16)$$

В связи с оценками (15) и (16) представляет интерес изучение поведения коэффициентов Фурье функций класса (6) по полным ортонормированным системам (13) с условием (14). Автором диссертации получен следующий результат, составляющий основу главы 3.

Теорема 3.1. *Для любой системы* (13) *с условием* (14) *существует такая функция* $\chi \in \mathbb{X}$ *в классе* (6), *что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} | < \chi, \varphi_j > |^{\frac{p-2}{p-1}} = \infty. \qquad (17)$$

Отметим, что из соотношений вида (16) нельзя сделать вывода о поведении последовательности $\{c_j(\chi_t)\}_{j=1}^{\infty}$ в некоторой точке t, который фактически содержится в теореме 3.1. Это, видимо, не случайно. Как показывает пример системы Хаара для общих ортонормированных систем, убывающая перестановка последовательности коэффициентов Фурье функций χ_t может убывать экспоненциально. Теорема 3.1 показывает, что при условии (14) коэффициенты Фурье функций класса (6) не могут убывать слишком быстро. Вопрос о точности показателя $\frac{p-2}{p-1}$ в теореме 3.1 остаётся открытым.

Вопрос о расходимости ряда (17) связан с оценками снизу n-членных приближений в метрике $L^2[0,\,1]$. Такие оценки для систем с условием (14) рассматриваются в главе 2. Однако вывести из полученных в главе 2 результатов утверждение теоремы 3.1 не удаётся. Возможно, это связано с тем, что оценки снизу для величин (11) в теореме 2.2 использовали малость коэффициентов $c_j(\chi_t - \chi_{t'})$ в случае если величина $|t - t'|$ достаточно мала. Для доказательства результатов третьей главы, наоборот, используется оценка снизу для элементов последовательности $\{c_j(\chi_t)\}_{j=1}^{\infty}$.

Четвёртая глава посвящена вопросу абсолютной сходимости рядов Фурье по двукратным равномерно ограниченным полным ортонормированным системам. Определим модуль непрерывности $f \in C(X)$ для $X = [0,\, 1]^n$, $[0,\, 2\pi)^n$, равенством

$$\omega(f, \delta) = \sup_{\substack{x, x+h \in X \\ 0 < |h| \leqslant \delta}} |f(x+h) - f(x)|.$$

Пусть также $H^{\Omega} = \{f \in C(X) : \omega(f, \delta) \leqslant \Omega(\delta),\ \delta > 0\}$. Здесь $\Omega(\delta)$ — некоторый модуль непрерывности.

Рассмотрим пространство BV функций ограниченной вариации. А. Зигмундом было установлено достаточное условие абсолютной сходимости тригонометрического ряда Фурье функции ограниченной вариации:

Теорема F (А. Зигмунд, [18, стр. 149]). *Если функция* $f(x) \in C[0,\, 2\pi) \cap$ $\cap BV[0,\, 2\pi)$ *имеет модуль непрерывности, удовлетворяющий соотношению*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)}}{n} < \infty,$$

то ряд из модулей коэффициентов Фурье по тригонометрической системе такой функции сходится.

Условие теоремы F для некоторых ортонормированных систем является слишком ограничительным. Например, ряд Фурье—Хаара каждой функции ограниченной вариации сходится абсолютно (см. [18, стр. 420]). В 1973 году

С. В. Бочкарёвым было доказано, что указанным свойством системы Хаара не может обладать ни одна равномерно ограниченная полная ортонормированная система функций. Точнее, им получена

Теорема G (С. В. Бочкарёв, [11]). *Для любой равномерно ограниченной полной ортонормированной системы* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$*, определённой на* $[0,\,1]$*, и модуля непрерывности* $\Omega(\delta)$*, для которого*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\Omega\left(\frac{1}{n}\right)}}{n} = \infty,$$

найдётся непрерывная функция $F(x) \in H^{\Omega}$ *с условием* $F(0) = F(1) = 0$*, для которой расходится ряд из модулей коэффициентов Фурье*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(F)| = \infty, \quad c_n(F) = \int_0^1 F(x)\varphi_n(x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

.

Следствие. *Для любой равномерно ограниченной полной ортонормированной системы* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$*, определённой на* $[0,\,1]$*, найдётся непрерывная функция* $F(x) \in BV[0,\,1]$ *с условием* $F(0) = F(1) = 0$ *и модулем непрерывности*

$$\omega(F, \delta) = O\left(\log^{-2}\frac{1}{\delta}\right)$$

при $\delta \to 0$*, для которой расходится ряд из модулей её коэффициентов Фурье.*

Рассмотрим функции двух переменных $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) \in C(X)$, имеющие ограниченную вариацию по Харди, то есть $f \in BV_H(X)$ (см. [20, с. 768]). Для них также определим смешанный модуль непрерывности

$$\omega(f, \delta_1, \delta_2) = \sup_{\substack{\mathbf{x},\, \mathbf{x}+\mathbf{h} \in X \\ 0<h_1\leqslant\delta_1,\, 0<h_2\leqslant\delta_2}} |\Delta_{\mathbf{h}}(f, \mathbf{x})|, \quad X = \mathbb{I}^2,\, \mathbb{T}^2,$$

где $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ и

$$\Delta_{\mathbf{h}}(f, \mathbf{x}) = f(x_1, x_2) + f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2 + h_2).$$

Аналогичный теореме F результат для функций из $BV_H[0,\,2\pi)^2$ и тригонометрической системы в двумерном случае вытекает из результатов работы А. Вереса (см. [7]):

Теорема H (А. Верес, [7]). *Если функция* $f(\mathbf{x}) \in C[0,\,2\pi)^2 \cap BV_H[0,\,2\pi)^2$ *имеет модуль непрерывности, удовлетворяющий соотношению*

$$\omega(f, \delta_1, \delta_2) = O\left(\log^{-(2+\varepsilon)}\frac{1}{\delta_1}\log^{-(2+\varepsilon)}\frac{1}{\delta_2}\right) \quad \text{\textit{при} } \delta_1, \delta_2 \to 0,$$

где $\varepsilon > 0$, *то ряд из модулей коэффициентов Фурье по тригонометрической системе такой функции сходится.*

Заметим, что для функций вида $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$ справедливо $\omega(f, \delta_1, \delta_2) \leqslant \omega(f_1, \delta_1) \cdot \omega(f_2, \delta_2)$. Учитывая этот факт, из теоремы G нетрудно вывести

Следствие. *Для равномерно ограниченной полной ортонормированной системы вида* $\Phi = \{\varphi_{n_1}(x_1)\cdot\varphi_{n_2}(x_2)\}_{n_1,n_2=1}^{\infty}$, *определённой на* $[0,\,1]^2$, *найдётся непрерывная функция* $F(\mathbf{x}) \in BV_H[0,\,1]^2$ *с условием* $F(x_1, 0) = F(x_1, 1) = 0$, $F(0, x_2) = F(1, x_2) = 0$ *и модулем непрерывности*

$$\omega(F, \delta_1, \delta_2) = O\left(\log^{-2}\frac{1}{\delta_1}\log^{-2}\frac{1}{\delta_2}\right) \quad \text{\textit{при} } \delta_1, \delta_2 \to 0,$$

для которой расходится ряд из модулей коэффициентов Фурье.

Для систем общего вида такое следствие получить не удаётся. Однако, справедлива

Теорема 4.1. *Для любой равномерно ограниченной полной в* $L^2[0,\,1]^2$ *ортонормированной системы* $\Phi = \{\varphi_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$ *найдётся непрерывная функция* $F(\mathbf{x}) \in BV_H[0,\,1]^2$ *с условием* $F(x_1, 0) = F(x_1, 1) = F(0, x_2) = F(1, x_2) = 0$ *и модулем непрерывности*

$$\omega(F, \delta_1, \delta_2) = O\left(\log^{-2} \frac{1}{\max\{\delta_1, \delta_2\}}\right)$$

при $\delta_1, \delta_2 \to 0$*, для которой расходится ряд из модулей коэффициентов Фурье*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(F)| = \infty, \quad c_n(F) = \int_0^1 \int_0^1 F(\mathbf{x}) \varphi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

.

Доказательство теоремы 4.1 основано на построениях, изложенных в [18, теорема 10.11]. Вопрос о точности теоремы 4.1 остается открытым и тесно связан с открытым вопросом Б. С. Кашина о справедливости двумерного аналога неравенства (8) из [15] (с заменой в двумерном случае обычной производной на смешанную производную $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$).

Цель работы: исследование поведения коэффициентов разложения гладких функций по ортонормированным базисам, ограниченным в $L^p(0,\,1)^d$, исследование поведения n-членных приближений характеристических функций интервалов по фреймам, ограниченным в $L^p(0,\,1)$, исследование поведения коэффициентов разложения характеристических функций интервалов по полным ортонормированным систмемам, ограниченным в $L^p(0,\,1)$, построение примера непрерывной функции двух переменных с ограниченной вариацией по Харди и логарифмическим модулем непрерывности, для которой ряд из модулей коэффициентов Фурье по произвольной равномерно ограниченной полной ортонормированной системе расходится.

Научная новизна. Все результаты являются новыми и заключаются в следующем:

1. Для произвольного нормированного базиса в пространстве $L^p[0,\,1]^d$, $2 < p < \infty$, и $\alpha = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\right\}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, построена функция $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\ d\alpha$, если $d\alpha \notin \mathbb{Z}$, и $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\ (d\alpha - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, если $d\alpha \in \mathbb{Z}$, для которой ряд из модулей коэффициентов разложения по данному базису расходится.

2. Получены оценки снизу канонических n-членных приближений характеристических функций интервалов из интервала $(0,\,1)$ по жёстким фреймам, ограниченным в $L^p(0,\,1)$, $2 < p < \infty$.

3. Установлены оценки снизу коэффициентов Фурье характеристических функций интервалов по полной ортонормированной системе, ограниченной в $L^p[0,\,1]$, $2 < p < \infty$.

4. Построена непрерывная функция двух переменных, имеющая ограниченную вариацию по Харди и модуль непрерывности $\omega(F, \delta_1, \delta_2) = O\left(\log^{-2} \frac{1}{\max\{\delta_1, \delta_2\}}\right)$ при $\delta_1, \delta_2 \to 0$, для которой расходится ряд из модулей коэффициентов Фурье по произвольной наперёд заданной равномерно ограниченной полной ортонормированной системе.

Методы исследования. Для доказательства научных результатов использованы методы теории ортогональных рядов, современной теории приближений, теории функций.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами в области теории приближений и теории ортогональных рядов, а также в других областях теории функций.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались на семинаре по ортогональным рядам под руководством академика РАН Б. С. Кашина и чл.-корр. РАН С. В. Конягина (2010 — 2014 гг.), на семинаре по геометрической теории приближений под руководством профессора П. А. Бородина (2014 г.), на международной конференции "Probability, Analysis and Geometry" в Ульме (Германия, сентябрь 2013) и в Москве (Россия, сентябрь 2014), на международной саратовского зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (2010 — 2014 гг.), на международной воронежской зимней школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (2013 г.).

Публикации. Результаты глав 1, 3 и 4 получены автором самостоятельно и изложены в работах [21], [22], [23], результаты главы 2 получены в соавторстве с Б. С. Кашиным и опубликованы в работе [19]. Все работы опубликованы в ведущих научных журнала из списка, рекомендованного ВАК.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из списка обозначений, введения, четырёх глав, заключения и списка литературы из 27 наименований. Общий объём диссертации составляет 65 страниц.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю академику РАН Борису Сергеевичу Кашину за постановку задач и внимание к работе, а также сотрудникам кафедры теории функции и функционального анализа и кафедры математического анализа за доброжелательное отношение и поддержку.

Глава 1

О коэффициентах разложения гладких функций по базисам

В этой главе изучаются коэффициенты разложения гладких функций d переменных по базисам пространств $L^p[0,\,1]^d$, а именно рассматривается вопрос о сходимости ряда из модулей коэффициентов. Сформулируем основной результат.

Теорема 1.1. *Пусть* $\Psi = \{\psi_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$ *— произвольный нормированный в* $L^p[0,\,1]^d$, $1 < p < \infty$, *базис. Пусть* $\alpha = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\right\}$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

1. *Если* $d\alpha \notin \mathbb{Z}$, *то существует функция* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\; d\alpha$, *для которой ряд из модулей коэффициентов разложения по базису* Ψ *расходится.*

2. *Если* $d\alpha \in \mathbb{Z}$, *то существует функция* $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\;(d\alpha - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, *для которой ряд из модулей коэффициентов разложения по базису* Ψ *расходится.*

1.1. Вспомогательные результаты

Пусть $d\alpha = m + \gamma$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $0 < \gamma \leqslant 1$. Определим индуктивно системы функций

$$\varphi_{l,k}^{i}(x), \quad l = 0,\, 1, \ldots,\, m, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots, 2^k, \quad k = 1,\, 2, \ldots. \tag{1.1}$$

Пусть $\varphi_{0,k}^{i}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$, — функции системы Фабера—Шаудера (см. [18, стр. 204]). При $l = 1, 2, \ldots, m$ положим

$$\varphi_{l,k}^{i}(x) = 2^{k+2} \int\limits_{x}^{x+\frac{1}{2^{k+1}}} \varphi_{l-1,k+1}^{2i}(t)dt, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Функции (1.1) обладают следующими свойствами:

1. $\varphi_{l,k}^{i}(x) = 0$ для всех $x \notin \left(\frac{i-1}{2^k},\, \frac{i}{2^k}\right)$; $\varphi_{l,k}^{i}\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{2^k}\right) = 1$;
2. $|\varphi_{l,k}^{i}(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in [0,\, 1]$;
3. $\frac{\partial \varphi_{l,k}^{i}(x)}{\partial x} = 2^{k+2}\left(\varphi_{l-1,k+1}^{2i}(x + \frac{1}{2^{k+1}}) - \varphi_{l-1,k+1}^{2i}(x)\right)$;
4. $\frac{\partial^l \varphi_{l,k}^{i}(x)}{\partial x^l} = 2^{(k+2)l} \sum_{j=0}^{l} (-1)^j C_l^j \varphi_{0,\,k+l}^{2^l i}\left(x + \frac{l-j}{2^{k+1}}\right)$, то есть $\frac{\partial^l \varphi_{l,k}^{i}(x)}{\partial x^l}$ является линейной комбинацией функций системы Фабера—Шаудера с коэффициентами, не превышающими $B \cdot 2^{(k+2)l}$, B — величина, зависящая лишь от l.

Сформулируем и докажем для систем (1.1) аналог результата теоремы 6.3 из [18], полученного З. Чисельским для системы Фабера—Шаудера.

Лемма 1.1. *Если для коэффициентов ряда*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^k} A_{k,i} \varphi_{l,k}^i(x) \qquad (1.2)$$

выполняется соотношение $|A_{k,i}| \leqslant \frac{C}{2^{k\gamma}}$ *с постоянной* C *и* $0 < \gamma < 1$, *то* $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\gamma$.

Доказательство. Ряд (1.2) с заданным условием на коэффициенты является разложением функции $f(x)$ по системе (1.1), поскольку сходится равномерно и абсолютно, так как

$$\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} |A_{k,i}\varphi_{l,k}^i(x)| \leqslant \max_{2^{k-1}<i\leqslant 2^k} |A_{k,i}| \leqslant \frac{1}{2^{k\gamma}}.$$

Используя свойство 2 функций $\varphi_{l,k}^i(x)$, получим

$$|\varphi_{l,k}^i(x) - \varphi_{l,k}^i(y)| \leqslant \min\left\{1, 2^{k+3}\left|\int\limits_y^x \varphi_{l-1,k+1}^{2i}(t)dt\right|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \min\left\{1, 2^{k+3}\max_t|\varphi_{l-1,k+1}^{2i}(t)|\cdot|x-y|\right\} \leqslant \min\{1, 2^{k+3}|x-y|\}.$$

Оценим теперь разность

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^k} |A_{k,i}|\cdot|\varphi_{l,k}^i(x) - \varphi_{l,k}^i(y)|.$$

Количество ненулевых слагаемых в сумме справа не превышает двух, так как носители функций $\varphi_{l,k}^i(x)$ не пересекаются. Выбирая k_0 так, чтобы

$2^{-k_0-1} < |x-y| < 2^{-k_0}$, имеем

$$|f(x)-f(y)| \leqslant 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \max_{1 \leqslant i \leqslant 2^k-1} |A_{k,i}| \cdot \min\{1, 2^{k+3}|x-y|\} \leqslant$$
$$\leqslant 2C \sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k\gamma} \cdot 2^{k+3}|x-y| + 2C \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k\gamma} \leqslant$$
$$\leqslant 16C|x-y| \sum_{k=1}^{k_0} 2^{k(1-\gamma)} + C_1 2^{-k_0\gamma} \leqslant C_2|x-y|^{\gamma}.$$

Получаем, что $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\gamma$. Лемма доказана.

1.2. Доказательство теоремы 1.1

Будем использовать схему доказательства теоремы Б. С. Кашина (см. введение), изложенную в [18, стр. 395]. Используя систему функций (1.1), определим функции d переменных следующим образом:

$$\varphi_k^{i_1\dots i_d}(\mathbf{x}) = \varphi_k^{i_1\dots i_d}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \prod_{j=1}^{d} \varphi_{m,k}^{i_j}(x_j),$$
$$k = 1, 2, \dots, \quad i_j = 1, 2, \dots, 2^k.$$

Пусть
$$\varphi_k^{i_1\dots i_d}(\mathbf{x}) \overset{L^p}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{k, i_1\dots i_d} \psi_n(\mathbf{x}).$$

Будем предполагать, что

$$\forall k = 1, 2, \dots \quad \forall i_1, i_2, \dots, i_d = 1, \dots, 2^k \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{k, i_1\dots i_d}| < \infty, \qquad (1.3)$$

иначе в качестве искомой функции можно взять при некотором k

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2^{kd\alpha}}\varphi_k^{i_1\ldots i_d}(\mathbf{x}),$$

которая будет принадлежать нужному нам классу.

Докажем одно свойство коэффициентов $a_n^{k,i_1\ldots i_d}$. Обозначим

$$\Delta_k^{i_1,\ldots,i_d} = \left[\frac{i_1-1}{2^k}, \frac{i_1}{2^k}\right) \times \ldots \times \left[\frac{i_d-1}{2^k}, \frac{i_d}{2^k}\right).$$

Рассмотрим

$$C_d = \frac{1}{2^d} = \sum_{i_1=1}^{2^k} \ldots \sum_{i_d=1}^{2^k} \int\limits_{[0,\,1]^d} \varphi_k^{i_1\ldots i_d}(\mathbf{x})\chi_{\Delta_k^{i_1\ldots i_d}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} =$$

$$= \int\limits_{[0,\,1]^d} \sum_{i_1=1}^{2^k} \ldots \sum_{i_d=1}^{2^k} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{k,i_1\ldots i_d}\psi_n(\mathbf{x})\right] \chi_{\Delta_k^{i_1\ldots i_d}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

По неравенству Гёльдера далее получим:

$$C_d \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{[0,\,1]^d} \left|\psi_n(\mathbf{x}) \sum_{i_1=1}^{2^k} \ldots \sum_{i_d=1}^{2^k} a_n^{k,i_1\ldots i_d}\chi_{\Delta_k^{i_1\ldots i_d}}(\mathbf{x})\right| d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} ||\psi_n(\mathbf{x})||_p \left|\left|\sum_{i_1=1}^{2^k} \ldots \sum_{i_d=1}^{2^k} a_n^{k,i_1\ldots i_d}\chi_{\Delta_k^{i_1\ldots i_d}}(\mathbf{x})\right|\right|_q.$$

Учитывая что $||\psi_n(\mathbf{x})||_p = 1$ и

$$\left|\left|\sum_{i_1=1}^{2^k} \ldots \sum_{i_d=1}^{2^k} a_n^{k,i_1\ldots i_d}\chi_{\Delta_k^{i_1\ldots i_d}}(\mathbf{x})\right|\right|_q = \left(\frac{1}{2^{kd}} \sum_{i_1=1}^{2^k} \ldots \sum_{i_d=1}^{2^k} |a_n^{k,i_1\ldots i_d}|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

получим:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{kd}}\sum_{i_1=1}^{2^k}\dots\sum_{i_d=1}^{2^k}|a_n^{k,i_1\dots i_d}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant C_d. \tag{1.4}$$

Введём новую нумерацию функций $\varphi_k^{i_1\dots i_d}(\mathbf{x})$. Пусть

$$\varphi_k^{i_1\dots i_d}(\mathbf{x}) = \varphi_k^j(\mathbf{x}), \quad \text{где } j = 1, \dots, 2^{kd}.$$

Соответственно $a_n^{k,i_1\dots i_d} = a_n^{k,j}$. Рассмотрим функции

$$F_{k,t}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{2^{kd}} r_j(t)\varphi_k^j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in[0,\,1]^d, \quad t\in[0,\,1], \quad k=1,2,\dots.$$

Здесь $r_j(t)$ — функции Радемахера (см. [18, стр. 22]). Пусть

$$F_{k,t}(\mathbf{x}) \stackrel{L^p}{=} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,k}(t)\psi_n(\mathbf{x}).$$

Тогда
$$A_{n,k}(t) = \sum_{j=1}^{2^{kd}} r_j(t)a_n^{k,j}.$$

Аналогично одномерному случаю (см. [18, стр. 397]), используя лишь свойства системы Радемахера и неравенство (1.4), получим:

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}|A_{n,k}(t)|dt \geqslant C_d\cdot 2^{kd\alpha},$$

откуда следует, что для каждого k существует t_k такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A_{n,k}(t_k)| \geqslant C_d\cdot 2^{kd\alpha}. \tag{1.5}$$

Рассмотрим функцию

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k_s d\alpha}} F_{k_s,\, t_{k_s}}(\mathbf{x}).$$

Здесь для каждого s выбираем t_{k_s} так, чтобы выполнялось неравенство (1.5), а последовательность k_s выбираем, используя предположение (1.3), столь быстро растущей, что выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(F)| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{k_s d\alpha}} A_{n,\, k_s} \right| = \infty. \tag{1.6}$$

Если $m \geqslant 1$, то рассмотрим частную производную по x_1 порядка m, учитывая, что для остальных частных производных рассуждения аналогичны:

$$\frac{\partial^m F(\mathbf{x})}{\partial x_1^m} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k_s d\alpha}} \sum_{i_1=1}^{2^k} \ldots \sum_{i_d=1}^{2^k} r_{i_1 \ldots i_d}(t) \frac{\partial^m \varphi_{m,k}^{i_1}(x_1)}{\partial x_1^m} \cdot \varphi_{m,\,k}^{i_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi_{m,\,k}^{i_d}(x_d).$$

Используя свойство 4 функций $\varphi_{m,k}^{i}(x)$, получим:

$$\frac{\partial^m F(\mathbf{x})}{\partial x_1^m} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k_s d\alpha}} \sum_{i_1=1}^{2^k} \ldots \sum_{i_d=1}^{2^k} r_{i_1 \ldots i_d}(t) \cdot$$
$$\cdot \left[2^{m(k+1)} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j \varphi_{0,k+m}^{2^m i_1} \left(x_1 + \frac{m-j}{2^{k+1}} \right) \right] \varphi_{m,\,k}^{i_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi_{m,\,k}^{i_d}(x_d) =$$
$$= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i_1=1}^{2^k} \ldots \sum_{i_d=1}^{2^k} \sum_{j=0}^{m} \frac{r_{i_1 \ldots i_d}(t)(-1)^j C_m^j}{2^{k_s(d\alpha - m)}} \cdot$$
$$\cdot \varphi_{0,k+m}^{2^m i_1} \left(x_1 + \frac{m-j}{2^{k+1}} \right) \cdot \varphi_{m,\,k}^{i_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi_{m,\,k}^{i_d}(x_d).$$

Производная $\frac{\partial^m F(\mathbf{x})}{\partial x_1^m}$ как функция переменной x_l ($l = 1, 2, \ldots, d$) представлена в виде разложения по системе функций $\varphi_{m,k}^{i_l}(x_l)$, если $l \neq 1$, и по системе функций $\varphi_{0,k+m}^{2^m i_1}(x_1)$, если $l = 1$, с коэффициентами, удовлетворяющими нера-

венству:
$$|c_{k_s,i_l}| \leqslant \frac{C(d)}{2^{k_s\gamma}},$$
где $C(d) = \frac{1}{4}\max_{0\leqslant j\leqslant m} C_m^j$ — величина, зависящая лишь от размерности пространства, а $\gamma = d\alpha - m$, по предположению $0 < \gamma \leqslant 1$. По лемме 1.1 получаем, что как функция переменной x_l $(l = 1, 2, \ldots, d)$ производная $\frac{\partial^m F(\mathbf{x})}{\partial x_1^m}$ принадлежит Lip γ, если $0 < \gamma < 1$, а следовательно для таких γ имеем $\frac{\partial^m F(\mathbf{x})}{\partial x_1^m} \in \mathrm{Lip}\,\gamma$ как функция многих переменных. При $\gamma = 1$ (то есть $d\alpha \in \mathbb{N}$) можем лишь утверждать, что $\frac{\partial^m F(\mathbf{x})}{\partial x_1^m} \in \mathrm{Lip}\,(\gamma - \varepsilon)$.

Аналогично, используя лемму 1.1, получим, что в случае, когда $d\alpha \notin \mathbb{N}$ все остальные частные производные порядка m принадлежат классу Lip γ, а в случае $d\alpha \in \mathbb{N}$ — классу Lip $(\gamma - \varepsilon)$. Если же $m = 0$, то рассматриваем саму функцию и проводим те же рассуждения. Таким образом, получаем, что $F(\mathbf{x})$ с учётом неравенства (1.6) удовлетворяет условиям теоремы.

Теорема доказана.

Результаты п. 1 теоремы 1.1 являются неулучшаемыми. Это можно показать на примере кратной тригонометрической системы в случае $p \geqslant 2$ и на примере многомерного аналога системы Хаара в случае $1 < p \leqslant 2$.

Если $d\alpha \in \mathbb{Z}$, вопрос о построении примера, аналогичного построенному Б.С. Митягиным в теореме C, при $p = 2$ остаётся нерешённым. С учётом теоремы C существование такого примера весьма вероятно.

Глава 2

Об n-членных приближениях по фреймам, ограниченным в $L^p(0,1)$, $p>2$

В этой главе изучаются наилучшие канонические n-членные приближения по норме пространства $L^2(0,1)$ семества $\mathbb{I}$ характеристических функций интервалов, лежащих в интервале $(0,1)$:

$$\mathbb{I} = \{I_\omega, \omega = (\alpha,\, \beta) \subset (0,1)\},$$
$$I_\omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \omega; \\ 0, & \text{если } x \notin \omega. \end{cases}$$

Системы функций, полиномами по которым осуществляется приближение, это жёсткие фреймы $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(0,1)$ с дополнительным свойством

$$\|\varphi_k\|_{L^p(0,1)} \leqslant D, \quad k = 1,2,3,\ldots, \quad 2 < p \leqslant \infty. \tag{2.1}$$

2.1. Канонические приближения характеристических функций интервалов по жёстким фреймам

Каноническим разложением функции $f \in L^2(0,1)$ по жёсткому фрейму Φ называется сходящийся по норме $L^2(0,1)$ ряд

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f,\, \varphi_k \rangle \, \varphi_k.$$

Наилучшим каноническим n-членным приближением функции $f \in L^2(0,1)$ по жёсткому фрейму Φ называется величина

$$\sigma_n(f, \Phi) = \inf_{\Lambda \subset \mathbb{N}, \# \Lambda \leqslant n} \left\| f - \sum_{k \in \Lambda} \langle f,\, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|_{L^2(0,\,1)}.$$

Если F — подмножество $L^2(0,1)$, то наилучшим каноническим n-членным приближением F называется величина

$$\sigma_n(F, \Phi) = \sup_{f \in F} \sigma_n(f, \Phi).$$

Справедливы следующие теоремы о величинах $\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi)$ для фреймов с условием (2.1) при $2 < p < \infty$.

Теорема 2.1. *Для произвольного жёсткого фрейма с условием* (2.1) *справедливо неравенство*

$$\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi) \geqslant C_{p,D} \cdot n^{-\frac{p}{2(p-2)}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 2.2. *Существует жёсткий фрейм* Φ *с условием* (2.1) *такой, что справедливо неравенство*

$$\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi) \leqslant C_p \cdot n^{-\frac{p}{2(p-1)}}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Замечание. *Для фрейма* Φ*, построенного в теореме 2.2, величина* D *в* (2.1) *зависит от* p.

2.2. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 2.1 весьма просто. Пусть n задано, N — натуральный параметр, значение которого уточняется ниже. Пусть также

$$f_0 = I_\omega \subset \mathbb{I}, \quad \omega = \left(0, \frac{1}{N}\right).$$

Очевидно, что

$$\sigma_n(f_0, \Phi) \geqslant \inf_{\Lambda \subset \mathbb{N}, \#\Lambda \geqslant n} \left\| f_0 - \sum_{k \in \Lambda} \langle f_0, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|_{L^2\left(0, \frac{1}{N}\right)}. \tag{2.2}$$

Используя определение жёсткого фрейма для любого $\Lambda \subset \mathbb{N}$, $\#\Lambda \geqslant n$, имеем

$$\begin{aligned} \left\| f_0 - \sum_{k \in \Lambda} \langle f_0, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|_{L^2\left(0, \frac{1}{N}\right)} &\geqslant \\ \geqslant N^{-\frac{1}{2}} - \left(\sum_{k \in \Lambda} |\langle f_0, \varphi_k \rangle| \right) \sup_{k=1,2,\ldots} \|\varphi_k\|_{L^2\left(0, \frac{1}{N}\right)} &\geqslant \\ \geqslant N^{-\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k \in \Lambda} \langle f_0, \varphi_k \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{k=1,2,\ldots} \|\varphi_k\|_{L^2\left(0, \frac{1}{N}\right)} &\geqslant \\ \geqslant N^{-\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} N^{-\frac{1}{2}} \sup_{k=1,2,\ldots} \|\varphi_k\|_{L^2\left(0, \frac{1}{N}\right)}&. \end{aligned} \tag{2.3}$$

При этом в силу (2.1) и неравенства Гёльдера с показателями $\frac{p}{2}$ и $\frac{p}{p-2}$ при $k = 1, 2, \ldots$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{N}} \varphi_k^2 dx = \int\limits_0^{\frac{1}{N}} 1 \left(|\varphi_k|^p\right)^{\frac{2}{p}} dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^{\frac{1}{N}} |\varphi_k|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int\limits_0^{\frac{1}{N}} 1 dx \right)^{\frac{p-2}{p}} \leqslant D^2 \cdot N^{-\frac{p-2}{p}}.$$

Следовательно

$$\sup_{k=1,2,\ldots} \|\varphi_k\|_{L^2\left(0,\frac{1}{N}\right)} \leqslant D \cdot N^{-\frac{p-2}{2p}}. \tag{2.4}$$

Положим $N = \left[(4nD^2)^{\frac{p}{p-2}} \right] + 1$. Тогда из (2.2) – (2.4) вытекает неравенство

$$\sigma_n(f_0, \Phi) \geqslant \frac{1}{2} N^{-\frac{1}{2}} \geqslant C_{p,D} \cdot n^{-\frac{p}{2(p-2)}},$$

что и требовалось проверить.

Доказательство теоремы 2.2. Построим полную в $L^2(0,1)$ ортонормированную систему $\Psi = \{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ с условием

$$\|\psi_m\|_{L^p(0,1)} \leqslant D_p, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

такую, что для любого интервала $\omega \subset \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $n = 1, 2, \ldots$ найдётся множество $\Lambda = \Lambda(n, \omega) \subset \mathbb{N}$ со следующим условием

$$\left(\sum_{m \notin \Lambda} \langle I_\omega, \psi_m \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_p \cdot n^{-\frac{p}{2(p-1)}}. \tag{2.5}$$

Тогда для жёсткого фрейма $\tilde{\Phi}$ в пространстве $L^2\left(0, \frac{1}{2}\right)$ с элементами $\psi_m(x)$, $x \in (0, \frac{1}{2})$, $m = 1, 2, \ldots$, имеем

$$\sigma_n\left(\mathbb{I}_{\left(0,\frac{1}{2}\right)}, \tilde{\Phi}\right) \leqslant C_p \cdot n^{-\frac{p}{2(p-1)}},$$

где $\mathbb{I}_{\left(0,\frac{1}{2}\right)} = \left\{I_\omega \subset \mathbb{I}, \omega \subset \left(0, \frac{1}{2}\right)\right\}$. Действительно, из (2.5) и неравенства Бесселя для рядов по системе Ψ вытекает, что для $\omega \subset \left(0, \frac{1}{2}\right)$ справедливо неравенство

$$\left\| I_\omega - \sum_{m \in \Lambda} \langle I_\omega, \psi_m \rangle \psi_m \right\|_{L^2\left(0,\frac{1}{2}\right)} \leqslant C_p \cdot n^{-\frac{p}{2(p-1)}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Преобразование $T : L^2\left(0, \frac{1}{2}\right) \to L^2(0, 1)$, заданное равенством $(Tf)(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{z}{2}\right)$, переводит фрейм $\tilde{\Phi}$ в жёсткий фрейм Φ, удовлетворяющий всем требованиям теоремы 2.2.

Искомую систему Ψ мы построим, преобразуя систему Хаара (см. [18, стр. 70]):

$$H = \left\{\chi_0^0, \chi_k^i, k = 0, 1, 2, \ldots, i = 1, \ldots, 2^k\right\}.$$

Рассмотрим при $k = 2, 3, \ldots$ ортогональные $2^k \times 2^k$ матрицы $A_k = \left\{\alpha_{is}^k\right\}$, где

$$\alpha_{is}^k = \begin{cases} 1 - (2^k - 1)^{-1}, & \text{если } 1 \leqslant i = s < 2^k; \\ 0, & \text{если } i = s = 2^k; \\ -(2^k - 1)^{-1}, & \text{если } i \neq s,\ i, s < 2^k; \\ (2^k - 1)^{-\frac{1}{2}}, & \text{если } i \neq s,\ i = 2^k \text{ или } s = 2^k. \end{cases}$$

Матрицы A_k используются в теории ортогональных рядов, начиная с работ А. М. Олевского (см. также [18, стр. 441]).

Определим новую полную в $L^2(0,1)$ ортонормированную систему $\{\tilde{\chi}_k^i\}$, положив $\tilde{\chi}_k^i = \chi_k^i$, если $k = 0,\ 1$, и $\tilde{\chi}_k^i = \sum_{s=1}^{2^k} \alpha_{is}^k \chi_k^s$, $k = 2, 3, \ldots$, $i = 1, \ldots, 2^k$. Легко видеть, что при $k = 2, 3, \ldots$ имеют место следующие равенства:

a) $w_k(x) = \tilde{\chi}_k^{2^k}(x) = r_{k+1}(x) \dfrac{2^{\frac{k}{2}}}{(2^k-1)^{\frac{k}{2}}} I_{(0,1-2^{-k})}(x)$,

где $r_{k+1}(x)$ — $(k+1)$-ая функция Радемахера (см. [18, стр. 22]);

b) при $i = 1, \ldots, 2^k - 1$

$$\tilde{\chi}_k^i(x) = \begin{cases} \chi_k^i(x) - r_{k+1} \frac{2^{\frac{k}{2}}}{(2^k-1)}, & \text{если } 0 < x < 1 - 2^{-k}; \\ (2^k-1)^{-\frac{1}{2}} \chi_k^{2^k}, & \text{если } 1 - 2^{-k} < x < 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Из (2.6) вытекает, что для $2 < p \leqslant \infty$

1) равномерно по $i = 1, 2, \ldots, 2^k - 1$ при $k \to \infty$

$$\left\|\chi_k^i\right\|_p \cdot 2^{-k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \to 1; \tag{2.7}$$

2) $\left\|\tilde{\chi}_k^i\right\|_{L^p(1-2^{-k},1)} \leqslant 2 \cdot 2^{-\frac{k}{p}}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k - 1.$

Пусть

$$\beta_k = 2^{\left[k\left(1-\frac{2}{p}\right)\right]+1}, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{2.8}$$

и U_{β_k} — ортогональная матрица Уолша порядка β_k, для элементов которой имеет место равенство

$$|(U_{\beta_k})_{rs}| = \beta_k^{-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leqslant r, s \leqslant \beta_k.$$

Для краткости введём обозначение $u_k = U_{\beta_k}$, $k = 2, 3, \ldots$. Определим также последовательность натуральных чисел s_k, $k = 2, 3, \ldots$, положив

$$s_2 = 1, \quad s_k = s_{k-1} + \beta_{k-1} - 1, \quad k = 3, 4, \ldots.$$

Построим теперь искомую полную в $L^2(0,1)$ ортонормированную систему Ψ, элементы которой будем нумеровать тремя индексами k, i, ν, положив

$$\begin{cases} \psi_k^{i,1} = \chi_k^i & \text{при } k = 0, 1,\ 1 \leqslant i \leqslant 2^k,\ \nu = 1; \\ \psi_k^{i,\nu} = (u_k)_{\nu,1} \cdot \tilde{\chi}_k^i + & \sum_{\mu=2}^{\beta_k} (u_k)_{\nu,\mu} \cdot w_{s_k+\mu-1} \\ & \text{при } k = 2, 3, \ldots,\ 1 \leqslant i \leqslant 2^k,\ \nu = 1, \ldots, \beta_k. \end{cases} \tag{2.9}$$

В силу соотношений (2.6) – (2.8) и неравенства Хинчина для системы Радемахера (см. [18, стр. 34])

$$\sup_{k,i,\nu} \left\| \psi_k^{i,\nu} \right\|_p \leqslant D_p,$$

где sup берется по всем допустимым значениям параметров k, i, ν.

Оценим коэффициенты разложения функции I_ω, $\omega \subset \left(0, \frac{1}{2}\right)$, по системе Ψ. Прежде всего отметим, что для каждого $k = 0, 1, \ldots$ найдётся не более двух функций Хаара «ранга» k, для которых $\langle \chi_k^i, I_\omega \rangle \neq 0$. Для таких функций Хаара, очевидно, имеет место оценка $\left| \langle I_\omega, \chi_k^i \rangle \right| \leqslant 2^{-\frac{k}{2}}$, а значит (см. определение функций $\tilde{\chi}_k^i$), для тех же значений i

$$\left| \langle I_\omega, \tilde{\chi}_k^i \rangle \right| \leqslant 2^{-\frac{k}{2}}.$$

Для остальных значений i скалярное произведение $\langle I_\omega, \tilde{\chi}_k^i \rangle$ оценивается так:

$$\left| \langle I_\omega, \tilde{\chi}_k^i \rangle \right| \leqslant 2 \cdot 2^{-\frac{3k}{2}}.$$

Следовательно (см. (2.9)) при $k = 2, 3, \ldots$ среди скалярных произведений $\langle I_\omega, \psi_k^{i,\nu}\rangle$ имеется не более $2\beta_k$ величин, оцениваемых следующим образом:

$$\left|\langle I_\omega, \psi_k^{i,\nu}\rangle\right| \leqslant 2^{-\frac{k}{2}}\beta_k^{-\frac{1}{2}} + 2^{-s_k+1}\beta_k^{-\frac{1}{2}} \leqslant C_p \cdot 2^{-\frac{k}{2}}\beta_k^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.10}$$

Все остальные числа $\langle I_\omega, \psi_k^{i,\nu}\rangle$ допускают оценку

$$\left|\langle I_\omega, \psi_k^{i,\nu}\rangle\right| \leqslant 2^{-\frac{3k}{2}}\beta_k^{-\frac{1}{2}} + 2^{-s_k+1}\beta_k^{-\frac{1}{2}} \leqslant C_p \cdot 2^{-\frac{3k}{2}}\beta_k^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.11}$$

В (2.10), (2.11) учитывается быстрый рост последовательности s_k, $k = 2, 3, \ldots$. Определим для данного n множество индексов Λ, $\#\Lambda \leqslant n$, для которого

$$\left(\sum_{(k,i,\nu)\notin\Lambda} \langle I_\omega, \psi_k^{i,\nu}\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_p \cdot n^{-\frac{p}{2(p-1)}}.$$

Включим в Λ не более чем $\frac{n}{2}$ троек (k, i, ν), соответствующих всем «большим» коэффициентам $\langle I_\omega, \psi_k^{i,\nu}\rangle$, которые оцениваются по неравенству (2.10), где $k \leqslant k_0$. Число k_0 определяется из соотношения

$$k_0 = \max\left\{\nu : \sum_{k=2}^{\nu} 2\beta_k \leqslant \frac{n}{2}\right\}. \tag{2.12}$$

Из (2.12) и (2.8) имеем

$$k_0 \geqslant \frac{p}{p-2}(\log_2 n - C'_p). \tag{2.13}$$

Оставшуюся часть Λ', $\#\Lambda' \geqslant \frac{n}{2}$, множества Λ составят все оставшиеся тройки (k, i, ν) с $k \leqslant k_1$. Для чисел k_1 справедлива оценка

$$2^{k_1}\beta_{k_1} \geqslant C''_p n,$$

откуда получаем

$$k_1 \geqslant \frac{p}{2(p-1)}(\log_2 n - C_p''''). \tag{2.14}$$

Используя соотношения (2.13), (2.14) и оценки (2.10), (2.11) для коэффициентов $\langle I_\omega, \psi_k^{i,\nu}\rangle$ мы получаем:

$$S^2 \equiv \sum_{(k,i,\nu)\notin\Lambda} \left|\langle I_\omega, \psi_k^{i,\nu}\rangle\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_p \left(\sum_{k>k_0} \beta_k \frac{2^{-k}}{\beta_k} + \sum_{k>k_1} 2^k \beta_k \frac{2^{-3k}}{\beta_k} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_p' \left(2^{-k_0} + 2^{-2k_1}\right) \leqslant C_p'' \cdot n^{-\frac{p}{p-1}}.$$

Таким образом $S \leqslant C_p \cdot n^{-\frac{p}{2(p-1)}}$ и нужное нам соотношение (2.5) проверено. Теорема 2.2 доказана.

Глава 3

Коэффициенты Фурье характеристических функций интервалов по полным ОНС, ограниченным в $L^p[0,\,1]$, $2 < p < \infty$

Рассмотрим семейство характеристических функций интервалов

$$\mathbb{X} = \{\chi_t\}_{t\in(0,1]},$$
$$\chi_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant t; \\ 0, & \text{если } t < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

В этой главе изучаются свойства коэффициентов Фурье функций класса (3.1) по полным в $L^2[0,\,1]$ ортонормированным системам функций

$$\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}, \tag{3.2}$$

равномерно ограниченным в $L^p[0,\,1]$, $2 < p < \infty$:

$$\exists D > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad ||\varphi_j||_{L^p[0,\,1]} \leqslant D. \tag{3.3}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 3.1. *Для любой системы* (3.2) *с условием* (3.3) *существует такая функция* $\chi \in \mathbb{X}$ *в классе* (3.1), *что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle \chi, \varphi_j \rangle|^{\frac{p-2}{p-1}} = \infty. \tag{3.4}$$

3.1. Вспомогательные утверждения

Нам потребуется хорошо известное утверждение (см., например, [18, прил. 1]). Пусть $g \in L^s(\mathbb{R})$, $0 < s < \infty$, и для $t \in \mathbb{R}$ определим функцию $\lambda_g(t) = \mu\{x \in \mathbb{R} : |g(x)| > t\}$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |g(x)|^s dx = s \int\limits_0^{\infty} t^{s-1} \lambda_g(t) dt. \tag{3.5}$$

Пусть функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$. Введём в рассмотрение величину (возникающую при определении нормы в пространстве Соболева $W_2^{\frac{1}{2}}$)

$$N\left(f, W_2^{1/2}\right) = \left(\int\limits_0^{\infty} h^{-2} ||f(x+h) - f(x)||_2^2 dh\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.6}$$

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству О. В. Бесова утверждения 1 в [18, гл. 10, §3]. При этом в нашем случае показатель $\frac{p-2}{p-1} < 1$.

Лемма 3.1. *Для любого* $p > 2$ *существует такое* $C > 0$, *что для любой функции* $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *для которой* $f' \in L^p(\mathbb{R})$, *выполняется неравенство*

$$N\left(f, W_2^{1/2}\right) \leqslant C \cdot ||f||_{\frac{p-2}{p-1}}^{\frac{p-2}{2(p-1)}} \cdot ||f'||_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{2(p-1)}}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $||f'||_{L^p(\mathbb{R})} = 1$. Тогда для любого h, применяя неравенство Гёльдера, получим

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant h^{\frac{1}{q}}. \tag{3.7}$$

Рассмотрим множества

$$E(h) = \{x : |f(x)| \leqslant h^{\frac{1}{q}}, |f(x+h)| \leqslant h^{\frac{1}{q}}\},$$
$$F(h) = \mathbb{R} \backslash E(h).$$

Легко проверить, что

$$\mu F(h) \leqslant 2\lambda_f(h^{\frac{1}{q}}).$$

Будем использовать на множестве $F(h)$ неравенство (3.7), а на множестве $E(h)$ равенство (3.5) и оценку $|f(x+h) - f(x)|^2 \leqslant 2(|f(x+h)|^2 + |f(x)|^2)$. Получим

$$||f(x+h) - f(x)||_2^2 =$$
$$= \int\limits_{E(h)} |f(x+h) - f(x)|^2 dx + \int\limits_{F(h)} |f(x+h) - f(x)|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int\limits_{E(h)} |f(x+h)|^2 + f(x)|^2 dx + h^{\frac{2}{q}} \cdot \mu F(h) \leqslant$$
$$\leqslant 4 \int\limits_{\{x:|f(x)|^q \leqslant h\}} (|f(x)|^q)^{\frac{2}{q}} dx + 2h^{\frac{2}{q}} \lambda_f(h^{\frac{1}{q}}) =$$
$$= \frac{8}{q} \int\limits_0^h t^{\frac{2}{q}-1}(\lambda_{f^q}(t) - \lambda_{f^q}(h))dt + 2h^{\frac{2}{q}} \lambda_{f^q}(h) =$$
$$= \frac{8}{q} \int\limits_0^h t^{\frac{2}{q}-1} \lambda_{f^q}(t)dt - 2h^{\frac{2}{q}} \lambda_{f^q}(h).$$

Используя полученное неравенство и отношение (3.5), оценим величину (3.6):

$$N^2\left(f, W_2^{1/2}\right) = \int\limits_0^\infty h^{-2}||f(x+h)-f(x)||_2^2 dh \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty h^{-2}\left[\frac{8}{q}\int\limits_0^h t^{\frac{2}{q}-1}\lambda_{f^q}(t)dt - 2h^{\frac{2}{q}}\lambda_{f^q}(h)\right]dh =$$

$$= \frac{8}{q}\int\limits_0^\infty t^{\frac{2}{q}-1}\lambda_{f^q}(t)\int\limits_t^\infty h^{-2}dhdt - 2\int\limits_0^\infty h^{\frac{2}{q}-2}\lambda_{f^q}(h)dh =$$

$$= \left(\frac{8}{q}-2\right)\int\limits_0^\infty t^{\frac{2}{q}-2}\lambda_{f^q}(t)dt = \frac{2(4-q)}{q}\frac{q}{2-q}\int\limits_{\mathbb{R}}(|f(t)|^q)^{\frac{2}{q}-1}dt =$$

$$\frac{2(4-q)}{2-q}\int\limits_{\mathbb{R}}|f(t)|^{2-q}dt = \frac{2(4-q)}{2-q}|f||_{\frac{p-2}{p-1}}^{\frac{p-2}{p-1}},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. *Утверждение леммы 3.1 будет справедливо, если функция определена на любом конечном отрезке* $[a,b]$. *В этом случае величина* (3.6) *принимает вид*

$$N\left(f, W_2^{1/2}[a,b]\right) = \left(\int\limits_a^b\int\limits_a^b \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^2}dxdy\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.8}$$

3.2. Доказательство теоремы 3.1

Рассмотрим систему функций (3.2) с условием (3.3) и систему

$$f_j(x) = \int\limits_0^x \varphi_j(t)dt, \quad x\in[0,\,1], \quad j\in\mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Для любого $x \in [0,\,1]$ последовательность (3.9) — это последовательность коэффициентов Фурье функции χ_x класса (3.1) по системе (3.2). Согласно (3.3) имеем $||f_j'||_{L^p[0,\,1]} \leqslant D$, $j \in \mathbb{N}$. По лемме 1

$$N^2\left(f_j, W_2^{1/2}[a,b]\right) \leqslant C^2 \int\limits_0^1 |f_j(t)|^{\frac{p-2}{p-1}} dt \cdot ||f_j'||_{L^p[0,\,1]}^{\frac{p}{p-1}} \leqslant$$

$$\leqslant C^2 D^{\frac{p}{p-1}} \int\limits_0^1 |f_j(t)|^{\frac{p-2}{p-1}} dt. \quad (3.10)$$

Для системы (3.9) в силу (3.8) и равенства Парсеваля для любого отрезка $[a,b]$ имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} N^2\left(f_j, W_2^{1/2}[a,b]\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_a^b \int\limits_a^b \frac{|f_j(x) - f_j(y)|^2}{|x-y|^2} dxdy =$$

$$= \int\limits_a^b \int\limits_a^b \frac{\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x) - f_j(y)|^2}{|x-y|^2} dxdy = \int\limits_a^b \int\limits_a^b \frac{|x-y|}{|x-y|^2} dxdy = \infty. \quad (3.11)$$

Из (3.10) и (3.11) получаем оценку

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_0^1 |f_j(t)|^{\frac{p-2}{p-1}} dt = \infty. \quad (3.12)$$

Выберем последовательность M_s так, что

$$\lim_{s\to\infty} M_s = \infty.$$

Из (3.12) следует, что существуют такие точка $x_1 \in (0,\,1)$ и индекс N_1, что

$$\sum_{j=1}^{N_1} |f_j(x_1)|^{\frac{p-2}{p-1}} > M_1.$$

Из непрерывности функций f_j вытекает существование такого отрезка $\omega_1 \subset (0,\,1)$ с центром в точке x_1, что $\forall y \in \omega_1$

$$\sum_{j=1}^{N_1} |f_j(y)|^{\frac{p-2}{p-1}} \geqslant M_1.$$

Используя (3.11) в случае, когда $[a,b] = \omega_1$, и учитывая, что существует такое $M > 0$, что $\forall j \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$N(f_j, W_2^{1/2}[a,b]) \leqslant M,$$

находим точку $x_2 \in \omega_1$ и индекс N_2, для которых

$$\sum_{j=N_1+1}^{N_2} |f_j(x_2)|^{\frac{p-2}{p-1}} > M_2,$$

а значит существует такой отрезок $\omega_2 \subset \omega_1$ с центром в точке x_2, что $\forall y \in \omega_2$

$$\sum_{j=N_1+1}^{N_2} |f_j(y)|^{\frac{p-2}{p-1}} \geqslant M_2.$$

Продолжая построение, получим последовательность вложенных отрезков $\omega_1 \supset \omega_2 \supset \ldots$. Пусть $z \in \cap_{s=1}^{\infty} \omega_s$. Из построения ясно, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(z)|^{\frac{p-2}{p-1}} = \infty.$$

Теорема 3.1 доказана.

Глава 4

Об абсолютной сходимости рядов Фурье по двукратным ограниченным полным ортонормированным системам

4.1. Используемые определения и вспомогательные утверждения

Пусть функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1,\, x_2)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}^2$ и пусть $\mathbf{h} = (h_1,\, h_2) \in \mathbb{R}^2$ такова, что $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in X$. Обозначим смешанную разность

$$\Delta_{\mathbf{h}}(f,\, \mathbf{x}) = f(x_1,\, x_2) + f(x_1 + h_1,\, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1,\, x_2) - f(x_1,\, x_2 + h_2).$$

Смешанный модуль непрерывности функции $f(\mathbf{x}) \in C(X)$ определим равенством

$$\omega(f,\, \delta_1,\, \delta_2) = \sup_{\substack{\mathbf{x},\, \mathbf{x}+\mathbf{h} \in X \\ 0<|h_1|<\delta_1,\, 0<|h_2|<\delta_2}} |\Delta_{\mathbf{h}}(f,\, \mathbf{x})|. \tag{4.1}$$

Пусть $f(\mathbf{x}) \in L^1(X)$ и

$$\lambda_f(t) = m\{\mathbf{x} \in X :\, |f(\mathbf{x})| > t\}.$$

Тогда аналогично (3.5) для функций двух переменных и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ справедливо следующее равенство, проверка которого использует по существу только определение интеграла Лебега и не отличается от одномерного аналога:

$$\left(\iint\limits_X |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} = p\int\limits_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)dt. \tag{4.2}$$

Кроме того, при $b > 0$ имеем

$$\iint\limits_{\mathbf{x}\in X:|f(\mathbf{x})|>b} |f(\mathbf{x})|d\mathbf{x} = \int\limits_b^\infty \lambda_f(t)dt + b\lambda_f(b) \geqslant \int\limits_b^\infty \lambda_f(t)dt. \tag{4.3}$$

Введём в рассмотрение величину, имеющую смысл для функции $f(\mathbf{x})$, определённой на $(0,\, a)^2$

$$N(f,\, \beta,\, a) = \left(\int\limits_\beta^a \int\limits_\beta^a h_1^{-2}h_2^{-2} \int\limits_0^{a-h_1}\int\limits_0^{a-h_2} \left|\Delta_{\mathbf{h}}(f,\, \mathbf{x})\right|^2 d\mathbf{x}d\mathbf{h}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 4.1. *Для любой такой дважды дифференцируемой на* $(0,\, a)^2$ *функции* $f(\mathbf{x})$, *что*

$$\left|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right|\right|_{L^\infty(0,\, a)^2} \leqslant 1, \tag{4.4}$$

и для всех таких β, что $0 < \beta < \min\{1,\, a\}$, верно неравенство

$$N^2(f,\, \beta,\, a) \leqslant 32\left[\beta^2\int\limits_0^a\int\limits_0^a |f(\mathbf{x})|d\mathbf{x} + \ln\frac{a}{\beta}\iint\limits_{\{\mathbf{x}\in(0,\, a)^2:||f(\mathbf{x})|>\beta^4\}} |f(\mathbf{x})|d\mathbf{x}\right].$$

Доказательство. Рассмотрим при фиксированных h_1 и h_2 равенство

$$\Delta_{\mathbf{h}}(f,\, \mathbf{x}) = \int\limits_{x_1}^{x_1+h_1} \int\limits_{x_2}^{x_2+h_2} \frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1,\, t_2) dt_1 dt_2.$$

Из него с учётом (4.4) получаем

$$|\Delta_{\mathbf{h}}(f,\, \mathbf{x})| \leqslant h_1 h_2. \tag{4.5}$$

Определим множества $E(\mathbf{h})$ и $G(\mathbf{h})$:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{h}) = \{\mathbf{x} \in (0,\, a)^2 : \mathbf{x} + \mathbf{h} \in (0,\, a)^2,\, |f(x_1,\, x_2)| < h_1 h_2, \\ |f(x_1 + h_1,\, x_2)| < h_1 h_2,\, |f(x_1,\, x_2 + h_2)| < h_1 h_2, \\ |f(x_1 + h_1,\, x_2 + h_2)| < h_1 h_2\}; \quad G(\mathbf{h}) = (0,\, a)^2 \setminus E(\mathbf{h}). \end{aligned} \tag{4.6}$$

По определению $G(\mathbf{h})$ и $\lambda_f(t)$ получаем

$$m\{G(\mathbf{h})\} \leqslant 4\lambda_f(h_1 h_2). \tag{4.7}$$

Учитывая (4.6), разобьем следующий интеграл на два

$$\int\limits_0^{a-h_1} \int\limits_0^{a-h_2} |\Delta_{\mathbf{h}}(f,\, \mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} = \iint\limits_{E(\mathbf{h})} |\Delta_{\mathbf{h}}(f,\, \mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} + \iint\limits_{G(\mathbf{h})} |\Delta_{\mathbf{h}}(f,\, \mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}. \tag{4.8}$$

Второй интеграл оценим, используя (4.5) и (4.7):

$$\iint\limits_{G(\mathbf{h})} |\Delta_{\mathbf{h}}(f,\, \mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant h_1^2 h_2^2 \cdot m\{G(\mathbf{h})\} \leqslant 4h_1^2 h_2^2 \cdot \lambda_f(h_1 h_2). \tag{4.9}$$

Для оценки первого интеграла воспользуемся предположением (4.6) и неравенством

$$\frac{|\Delta_{\mathbf{h}}(f,\,\mathbf{x})|^2}{4} \leqslant f^2(x_1,\,x_2)+f^2(x_1+h_1,\,x_2)+f^2(x_1,\,x_2+h_2)+f^2(x_1+h_1,\,x_2+h_2).$$

Используя (4.2) при $p=1$ и определение $\lambda_f(t)$, получим:

$$\iint\limits_{E(\mathbf{h})} |\Delta_{\mathbf{h}}(f,\,\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant 4 \iint\limits_{E(\mathbf{h})} (f^2(x_1,\,x_2)+f^2(x_1+h_1,\,x_2)+f^2(x_1,\,x_2+h_2)+$$

$$+f^2(x_1+h_1,\,x_2+h_2))d\mathbf{x} \leqslant 16 \iint\limits_{\{\mathbf{x}\in(0,\,a)^2:|f(\mathbf{x})|\leqslant h_1h_2\}} f^2(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant 32 \int\limits_0^{h_1h_2} t\left(\lambda_f(t)-\lambda_f(h_1h_2)\right)dt = 32\int\limits_0^{h_1h_2} t\lambda_f(t)dt - 16h_1^2h_2^2\cdot\lambda_f(h_1h_2). \quad (4.10)$$

Подставляя (4.9) и (4.10) в (4.8), в итоге получим

$$\int\limits_0^{a-h_1}\int\limits_0^{a-h_2} |\Delta_{\mathbf{h}}(f,\,\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant 32\int\limits_0^{h_1h_2} t\lambda_f(t)dt.$$

Оценим теперь с помощью полученого неравенства $N^2(f,\,\beta,\,a)$.

$$N^2(f,\,\beta,\,a) \leqslant 32\int\limits_\beta^a\int\limits_\beta^a h_1^{-2}h_2^{-2}\int\limits_0^{h_1h_2} t\lambda_f(t)dtdh_1dh_2 =$$

$$= 32\int\limits_0^{a^2} t\lambda_f(t) \iint\limits_{\left\{\substack{h_1h_2>t,\\ \beta<h_1<a,\\ \beta<h_2<a}\right\}} h_1^{-2}h_2^{-2}dh_1dh_2dt.$$

Далее, справедливо неравенство

$$N^2(f,\,\beta,\,a) \leqslant$$
$$\leqslant 32\left[\int\limits_0^{\beta^2} t\lambda_f(t)\int\limits_\beta^a\int\limits_\beta^a h_1^{-2}h_2^{-2}dh_1dh_2dt + \int\limits_{\beta^2}^{a^2} t\lambda_f(t)\int\limits_\beta^a h_1^{-2}\int\limits_{\frac{t}{h_1}}^a h_2^{-2}dh_2dh_1dt\right] =$$
$$= 32\left[\int\limits_0^{\beta^2} t\lambda_f(t)dt\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{a}\right)^2 + \int\limits_{\beta^2}^{a^2} t\lambda_f(t)\left(\frac{1}{t}\ln\frac{a}{\beta}-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{a}\right)\right)dt\right] <$$
$$< 32\left[\frac{1}{\beta^2}\int\limits_0^{\beta^2} t\lambda_f(t)dt + \ln\frac{a}{\beta}\int\limits_{\beta^2}^{a^2}\lambda_f(t)dt\right] < 32\beta^2\int\limits_0^{\beta^4}\lambda_f(t)dt + 32\int\limits_0^{\beta^4}\lambda_f(t)dt +$$
$$+ 32\ln\frac{a}{\beta}\int\limits_{\beta^2}^{a^2}\lambda_f(t)dt < 32\beta^2\int\limits_0^{\beta^4}\lambda_f(t)dt + 32\ln\frac{a}{\beta}\int\limits_{\beta^4}^{a^2}\lambda_f(t)dt.$$

Используя (4.2) и (4.3), получим неравенство

$$N^2(f,\,\beta,\,a) < 32\beta^2\int\limits_0^a\int\limits_0^a |f(x_1,\,x_2)|dx_1dx_2 +$$
$$+ 32\ln\frac{a}{\beta}\iint\limits_{\{\mathbf{x}\in(0,\,a)^2:|f(\mathbf{x})|>\beta^4\}} |f(x_1,\,x_2)|dx_1dx_2,$$

которое и завершает доказательство леммы 4.1.

Приведём определение класса BV_H функций ограниченной вариации по Харди (см. [20, с. 768]). Пусть $\tau_1 = 0 = x_1^0 < x_1^1 < \ldots < x_1^r = 1$, $\tau_2 = 0 = x_2^0 < x_2^1 < \ldots < x_2^r = 1$. Говорят, что функция $f(\mathbf{x}) \in BV_H[0,\, 1]^2$, если $V_H(f) = V_{1,0}(f) + V_{0,1}(f) + V_{1,1}(f) < \infty$, где

$$\begin{aligned}
&V_{1,0}(f) = \sup_{0\leqslant x_2\leqslant 1}\sup_{\tau_1}\left\{\sum_{i=1}^r |f(x_1^i,\, x_2) - f(x_1^{i-1},\, x_2)|\right\},\\
&V_{0,1}(f) = \sup_{0\leqslant x_1\leqslant 1}\sup_{\tau_2}\left\{\sum_{j=1}^r |f(x_1,\, x_2^j) - f(x_1,\, x_2^{j-1})|\right\},\\
&V_{1,1}(f) = \sup_{\tau_1}\sup_{\tau_2}\left\{\sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^r |f(x_1^i,\, x_2^j) - f(x_1^i,\, x_2^{j-1}) -\right.\\
&\left.-f(x_1^{i-1},\, x_2^j) + f(x_1^{i-1},\, x_2^{j-1})|\right\}.
\end{aligned}$$

Здесь все sup берутся по всевозможным разбиениям отрезка $[0,\, 1]$.

4.2. Основной результат и его доказательство

Теорема 4.1. *Для любой равномерно ограниченной полной в $L^2[0,\, 1]^2$ ортонормированной системы $\Phi = \{\varphi_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^\infty$ найдётся непрерывная функция $F(\mathbf{x}) \in BV_H[0,\, 1]^2$ с условием $F(x_1, 0) = F(x_1, 1) = F(0, x_2) = F(1, x_2) = 0$ и модулем непрерывности*

$$\omega(F, \delta_1, \delta_2) = O\left(\log^{-2}\frac{1}{\max\{\delta_1, \delta_2\}}\right) \tag{4.11}$$

при $\delta_1, \delta_2 \to 0$, для которой расходится ряд из модулей коэффициентов Фурье

$$\sum_{n=1}^\infty |c_n(F)| = \infty, \quad c_n(F) = \int_0^1\int_0^1 F(\mathbf{x})\varphi_n(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

.

Доказательство. Будем использовать конструкцию из доказательства теоремы 11 в [18, глава 10]. Заметим, что условие (4.11) в силу (4.1) равносильно условию

$$\sup_{|h_1|<\delta_1,\,|h_2|<\delta_2} |\Delta_{\mathbf{h}}(F,\,\mathbf{x})| \ln^2 \frac{1}{\max\{\delta_1,\,\delta_2\}} < \infty. \tag{4.12}$$

Пусть для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{x} \in [0,\,1]^2$ выполняется $|\varphi_n(\mathbf{x})| \leqslant D$. Пусть $\alpha \in \left(0,\,\frac{1}{4}\right)$. Рассмотрим харатеристические функции квадратов из множества $[0,\,1]^2$ следующего вида:

$$\chi_\alpha(\mathbf{x}) = \chi_\alpha(x_1) \cdot \chi_\alpha(x_2), \text{где для } j = 1,\,2$$

$$\chi_\alpha(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_j > \alpha + 2\alpha^2; \\ 1, & \text{если } \alpha^2 < x_j < \alpha + \alpha^2; \\ \text{линейна}, & \text{если } 0 \leqslant x_j \leqslant \alpha^2 \text{ или } \alpha + \alpha^2 \leqslant x_j \leqslant \alpha + 2\alpha^2. \end{cases} \tag{4.13}$$

Обозначим $c_n(\chi_\alpha(\mathbf{x})) = \langle \chi_\alpha(\mathbf{x}),\,\varphi_n(\mathbf{x})\rangle$. Также фиксируем $\mathbf{t} \in \left(0,\,\frac{1}{2}\right)^2$.

Предположим, что для любого $\alpha \in \left(0,\,\frac{1}{4}\right)$ и $\mathbf{t} \in \left(0,\,\frac{1}{2}\right)^2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(\chi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{t}))| < \infty, \tag{4.14}$$

иначе в качестве искомой функции можно взять одну из функций системы (4.13): $F(\mathbf{x}) = \chi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{t})$, для которой (4.14) не выполняется. Условие

$$F(x_1, 0) = F(x_1, 1) = F(0, x_2) = F(1, x_2) = 0$$

выполняется в силу определения (4.13) для всех $x_1 \in [0, 1]$ и $x_2 \in [0, 1]$. Условие (4.12) также выполняется, поскольку

$$\sup_{|h_1|<\delta_1,\,|h_2|<\delta_2} |\Delta_{\mathbf{h}}(F,\,\mathbf{x})| \ln^2 \frac{1}{\max\{\delta_1,\,\delta_2\}} = \ln^2 \alpha < \infty.$$

Наконец, $V_{1,0}(F)+V_{0,1}(F)+V_{1,1}(F) = 2+2+\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left|\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\right| dx_1 dx_2 \leqslant 4+D < \infty$. Рассмотрим ещё одно условие на коэффициенты

$$\sup_{0<\alpha<\frac{1}{4},\,\mathbf{t}\in\left(0,\,\frac{1}{2}\right)^2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(\chi_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{t}))| \ln^{-2}\alpha < \infty. \tag{4.15}$$

Если (4.14) выполняется, а (4.15) не выполняется, то искомую функцию построим следующим образом:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_{\alpha_k}(\mathbf{x}-\mathbf{t}_k)}{2^k \ln^2 \alpha_k}.$$

Последовательности $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$ и $\mathbf{t}_k \in \left(0,\,\frac{1}{2}\right)$ выберем так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n\left(\chi_{\alpha_k}(\mathbf{x}-\mathbf{t}_k)\right)| \geqslant 3^k \ln^2 \alpha_k;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| c_n \left(\sum_{s=1}^{k-1} \frac{\chi_{\alpha_s}(\mathbf{x}-\mathbf{t}_s)}{2^s \ln^2 \alpha_s} \right) \right| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left| c_n \left(\frac{\chi_{\alpha_k}(\mathbf{x}-\mathbf{t}_k)}{2^k \ln^2 \alpha_k} \right) \right|.$$

Тогда для построенной функции выполняются все условия теоремы:

$F(x_1,0)=F(x_1,1)=F(0,x_2)=F(1,x_2)=0;$

$V_H(F)\leqslant(4+D)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k\ln^2\alpha_k}<\infty;$

$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(F)|=\infty;$

$\sup_{|h_1|<\delta_1,\,|h_2|<\delta_2}|\Delta_{\mathbf{h}}(F,\,\mathbf{x})|\ln^2\frac{1}{\max\{\delta_1,\,\delta_2\}}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln^2\alpha_k}{2^k\ln^2\alpha_k}<\infty.$

Докажем теперь утверждение теоремы в случае, когда условия (4.14) и (4.15) выполнены. Нам понадобится следующий вспомогательный результат.

Лемма 4.2. *Пусть для любого* $\alpha\in\left(0,\,\frac{1}{4}\right)$ *и для любого* $\mathbf{t}\in\left(0,\,\frac{1}{2}\right)^2$ *выполняются* (4.14) *и* (4.15). *Тогда существует такое* $C>0$, *что для любого* $\alpha\leqslant\alpha_0<\frac{1}{4}$ *имеет место неравенство:*

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n:|c_n(\chi_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{t}))|>\alpha^8}|c_n(\chi_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{t}))|\right\}d\mathbf{t}\geqslant C\ln\frac{1}{\alpha}. \tag{4.16}$$

Доказательство. Пусть

$$f_n(\mathbf{t})=c_n(\chi_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{t}))=\int_0^1\int_0^1\chi_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{t})\varphi_n(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Если $2\alpha^2<h_1,\,h_2<\alpha$, то $|\chi_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{t}-\mathbf{h})-\chi_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{t})|>\frac{1}{2}h_1h_2$, откуда, применяя равенство Парсеваля, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(\mathbf{t}+\mathbf{h})-f_n(\mathbf{t})|^2=\int_0^1\int_0^1|\chi_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{t}-\mathbf{h})-\chi_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{t})|>\frac{1}{2}h_1h_2.$$

Оценим снизу следующую величину:

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{2\alpha^2}^{\alpha} \int\limits_{2\alpha^2}^{\alpha} h_1^{-2} h_2^{-2} \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}-h_1} \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}-h_2} |f_n(\mathbf{t}+\mathbf{h}) - f_n(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} d\mathbf{h} >$$

$$> \frac{1}{2} \int\limits_{2\alpha^2}^{\alpha} \int\limits_{2\alpha^2}^{\alpha} h_1^{-2} h_2^{-2} \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}-h_1} \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}-h_2} h_1 h_2 d\mathbf{t} d\mathbf{h} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \int\limits_{2\alpha^2}^{\alpha} \frac{dh_1}{h_1} \right)^2 \geqslant \frac{1}{32} \ln^2 \alpha.$$

С другой стороны, используя лемму 4.1 для функций $\frac{f_n(\mathbf{t})}{4D}$ с показателями $\beta = 2\alpha^2$ и $a = \frac{1}{2}$ и учитывая предположение (4.15), получим оценку сверху для J:

$$J \leqslant 32 \sum_{n=1}^{\infty} \left[4\alpha^4 \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} |f_n(\mathbf{t})| d\mathbf{t} + \ln \frac{1}{2\alpha^2} \iint\limits_{\left\{\mathbf{t} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)^2 : ||f_n(\mathbf{t})| > 4D\alpha^8 \right\}} |f_n(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \right] \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \alpha^4 \ln^2 \alpha + C_2 \ln \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n : |c_n(\chi_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{t}))| > \alpha^8} |c_n(\chi_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{t}))| \right\} d\mathbf{t}.$$

Совмещая оценки сверху и снизу для величины J, получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n : |c_n(\chi_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{t}))| > \alpha^8} |c_n(\chi_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{t}))| \right\} d\mathbf{t} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{32 C_2} \ln \frac{1}{\alpha} - \frac{C_1}{C_2} \alpha \ln \frac{1}{\alpha} \geqslant C \ln \alpha.$$

Лемма доказана.

Неравенство (4.16) можно записать в следующем виде:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2m}}\int\limits_0^{\frac{1}{2m}}\sum_{p_1=0}^{m-1}\sum_{p_2=0}^{m-1}\left\{\sum_{n:\left|c_n\left(\chi_\alpha\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{p}}{2m}-\mathbf{t}\right)\right)\right|>\alpha^8}\left|c_n\left(\chi_\alpha\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{p}}{2m}-\mathbf{t}\right)\right)\right|\right\}d\mathbf{t}\geqslant$$

$$\geqslant C\ln\frac{1}{\alpha}, \quad (4.17)$$

где $\mathbf{p}=(p_1,\,p_2)$, а $m=1,\,2,\ldots$. Определим множества:

$$E(t,\,m,\,\alpha)=\left\{n:\max_{\substack{0\leqslant p_1<m\\0\leqslant p_2<m}}\left|c_n\left(\chi_\alpha\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{p}}{2m}-\mathbf{t}\right)\right)\right|>\alpha^8\right\}.$$

В силу равенства Парсеваля имеем следующее:

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\left(\chi_\alpha\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{p}}{2m}-\mathbf{t}\right)\right)=\left\|\chi_\alpha\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{p}}{2m}-\mathbf{t}\right)\right\|^2_{L^2(0,\,1)^2}\leqslant C\alpha^2,$$

откуда получаем оценку $\#E(t,\,m,\,\alpha)\cdot(\alpha^8)^2\leqslant Cm^2\alpha^2$, то есть

$$\#E(t,\,m,\,\alpha)\leqslant Cm^2\alpha^{-14}. \quad (4.18)$$

Пусть

$$m_k=\frac{10^k}{k^\theta},\quad 0<\theta<1,\qquad \alpha_k=\frac{\alpha_0}{2^{10^k}}. \quad (4.19)$$

Определим функции

$$u_{k,\,y}=\frac{1}{m_k^2}\sum_{p_1=0}^{m-1}\sum_{p_2=0}^{m-1}r_{p_1+1,\,p_2+1}(y)\chi_{\alpha_k}\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{p}}{2m_k}-\mathbf{t_k}\right), \quad (4.20)$$

где $\mathbf{x} \in (0,\,1)^2$, $\mathbf{t}_k \in \left(0, \frac{1}{2m_k}\right)^2$; $r_{p_1+1,\,p_2+1}(y) = r_l(y)$ — функции Радемахера (см. [18, стр. 22]). Указанные функции обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
&1)\quad ||u_{k,\,y}||_{C(0,\,1)^2} \leqslant \tfrac{1}{m_k^2};\\
&2)\quad ||u_{k,\,y}||_{L^1(0,\,1)^2} \leqslant \tfrac{1}{\alpha_k^2};\\
&3)\quad ||\Delta_{\mathbf{h}} u_{k,\,y}||_{L^\infty(0,\,1)^2} \leqslant \tfrac{h_1 h_2}{\alpha_k^4 m_k^2}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Пусть $E_k = E(t_k,\, m_k,\, \alpha_k)$. Согласно (4.18)

$$\#E_k \leqslant m_k^2 \alpha_k^{-14}. \tag{4.22}$$

Используя оценки для многочленов по системе Радемахера (см. теорема 2.7 в [18]), а также неравенство (4.17) и предположение (4.19), получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left\{ \sum_{n\in E_k} |c_n(u_{k,\,y})| \right\} dy = \\
&\quad \sum_{n\in E_k} \int_0^1 \left| \frac{1}{m_k^2} \sum_{p_1=0}^{m-1} \sum_{p_2=0}^{m-1} r_{p_1+1,\,p_2+1}(y) c_n \left(\chi_{\alpha_k} \left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{2m_k} - \mathbf{t_k} \right) \right) \right| dy \geqslant \\
&\qquad \geqslant \frac{C}{m_k^2} \sum_{n\in E_k} \left\{ \sum_{p_1=0}^{m-1} \sum_{p_2=0}^{m-1} c_n^2 \left(\chi_{\alpha_k} \left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{2m_k} - \mathbf{t_k} \right) \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \geqslant \\
&\qquad \geqslant \frac{C}{m_k^3} \sum_{n\in E_k} \sum_{p_1=0}^{m-1} \sum_{p_2=0}^{m-1} \left| c_n \left(\chi_{\alpha_k} \left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{2m_k} - \mathbf{t_k} \right) \right) \right| \geqslant \\
&\qquad\qquad \geqslant \frac{C}{m_k} \ln \frac{1}{\alpha_k} \geqslant C k^\theta.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Таким образом для каждого k существует такая точка $y_0(k) \in (0,\, 1)$, что для функции $g_k(\mathbf{x}) = u_{k,\, y_0(k)}(\mathbf{x})$ выполняется неравенство:

$$\sum_{n \in E_k} |c_n(g_k)| \geqslant C k^{\theta}. \tag{4.24}$$

Пусть теперь $\varepsilon_k = \pm 1$. Положим

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k^{1+\theta}} g_k(\mathbf{x}).$$

Это непрерывная на $(0,\, 1)^2$ функция, равная нулю на границе указанной области, имеет ограниченную вариацию по Харди:

$$V_H(F) \leqslant (4 + D) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\theta}} < \infty.$$

Докажем, что ряд из модулей коэффициентов Фурье этой функции по системе $\Phi = \{\varphi_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$ расходится. В силу свойства 2 из (4.21) и равномерной ограниченности системы Φ для любых натуральных n и k справедливо неравенство:

$$|c_n(g_k)| \leqslant D||g_k||_{L^1(0,\,1)^2} \leqslant 2D\alpha_k^2 = C_1(2^{10^k})^{-1}. \tag{4.25}$$

Поскольку для E_k справедлива оценка (4.22), имеет место следующее неравенство для любых $k' > k$:

$$\sum_{n \in E_k} |c_n(g_{k'})| \leqslant \# E_k C_1 (2^{10^{k'}})^{-1} \leqslant C_2 (2^{10^{k'-1}})^{-1}.$$

Таким образом получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k'=k+1}^{\infty} \sum_{n \in E_k} |c_n(g_{k'})| \leqslant C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k'=k+1}^{\infty} (2^{10^{k'-1}})^{-1} \leqslant C_3 < \infty. \tag{4.26}$$

Обозначим $G_k = E_k \setminus \cup_{s=1}^{k-1} E_s$. Тогда для всех k, больших некоторого k_0, в силу (4.24), (4.18) и (4.25) справедливо

$$\sum_{n\in G_k} |c_n(g_k)| \geqslant Ck^\theta - \sum_{n\in \cup_{s=1}^{k-1} E_s} |c_n(g_k)| \geqslant Ck^\theta - \#\left(\cup_{s=1}^{k-1} E_s\right) C_1 (2^{10^k})^{-1} \geqslant$$
$$\geqslant Ck^\theta - C_4 2^{k10^{k-1}} (2^{10^k})^{-1} \geqslant C_5 k^\theta > 0. \quad (4.27)$$

Выберем $\varepsilon_k = \pm 1$ так, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\sum_{n\in G_k} \left| c_n \left(\sum_{s=1}^{k-1} \frac{\varepsilon_s}{s^{1+\theta}} g_s(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon_k}{k^{1+\theta}} g_k(\mathbf{x}) \right) \right| \geqslant \frac{1}{k^{1+\theta}} \sum_{n\in G_k} |c_n\left(g_k(\mathbf{x})\right)|. \qquad (4.28)$$

Тогда в силу свойства 3 из (4.21) и (4.27) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_n(F)| \geqslant \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n\in G_k} |c_n(F)| \geqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\theta}} \sum_{n\in G_k} |c_n(g_k)| - C_3 \geqslant$$
$$\geqslant C_5 \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k} - C_3 = \infty.$$

Осталось проверить свойство (4.12). Для этого выберем такое s, чтобы $\alpha_{s+1}^4 < h_1,\, h_2 < \alpha_s^4$. Тогда, используя свойство 3 из (4.21) функций g_k, получим оценку

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{\varepsilon_k}{k^{1+\theta}} |\Delta_{\mathbf{h}} g_k(\mathbf{x})| \leqslant \sum_{k=1}^{s} \frac{h_1 h_2}{k^{1+\theta} m_k^2 \alpha_k^4} \leqslant \alpha_s^4 \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k^{1+\theta} m_k^2 \alpha_k^4} \leqslant C' \frac{\alpha_s^4}{s^{1+\theta} m_s^2 \alpha_s^4} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{10^{2s}} \leqslant C \ln^{-2} \alpha_s \leqslant C \ln^{-2} h_1 h_2 \leqslant C \ln^{-2} \max\{h_1,\, h_2\}.$$

Далее, учитывая свойство 1 из (4.21) функций g_k, имеем:

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k^{1+\theta}} \, |\Delta_{\mathbf{h}} g_k(\mathbf{x})| \leqslant 4 \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{||g_k||_{C(0,\,1)^2}}{k^{1+\theta}} \leqslant 2 \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\theta} m_k^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{k^{2\theta}}{k^{1+\theta} 10^{2k}} \leqslant \frac{1}{10^{2s}} \leqslant C \ln^{-2} \max\{h_1,\, h_2\}.$$

Объединяя последние два неравенства, заключаем выполнение оценки (4.12) и завершаем доказательство теоремы 4.1.

Заключение

В диссертации рассмотрены задачи теории ортогональных рядов и теории приближений. Установлены следующие основные результаты:

1. Для произвольного нормированного базиса в пространстве $L^p[0,\,1]^d$, $2 < p < \infty$, и $\alpha = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\right\}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, построена функция $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\ d\alpha$, если $d\alpha \notin \mathbb{Z}$, и $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}\ (d\alpha - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, если $d\alpha \in \mathbb{Z}$, для которой ряд из модулей коэффициентов разложения по данному базису расходится.

2. Получены оценки снизу канонических n-членных приближений характеристических функций интервалов из интервала $(0,\,1)$ по жёстким фреймам, ограниченным в $L^p(0,\,1)$, $2 < p < \infty$.

3. Установлены оценки снизу коэффициентов Фурье характеристических функций интервалов по полной ортонормированной системе, ограниченной в $L^p[0,\,1]$, $2 < p < \infty$.

4. Для произвольной равномерно ограниченной полной ортонормированной системы построена непрерывная функция двух переменных, имеющая ограниченную вариацию по Харди и модуль непрерывности

$$\omega(F, \delta_1, \delta_2) = O\left(\log^{-2} \frac{1}{\max\{\delta_1, \delta_2\}}\right) \quad \text{при } \delta_1, \delta_2 \to 0,$$

для которой расходится ряд из модулей коэффициентов Фурье.

Рекомендации и персепективы по дальнейшей разработке темы. Вопрос о точности некоторых изложенных в работе результатов остаётся открытым. В частности, остался неисследован предельный случай пункта 2 теоремы 1.1 (при $d\alpha \in \mathbb{Z}$). В теореме 2.1 дана оценка снизу для n-членных приближений класса характеристических функций интервалов из интервала $(0, 1)$ по произвольному жёсткому фрейму, ограниченному в $L^p(0, 1)$, однако вопрос о точности этого результата также открыт.

Список литературы

[1] Bochner S. Review of «An absolute corvergence of multiple Fourier series» by Szasz and Minakshisundaram // Math. Rev. **8**. 1947. P. 376.

[2] Ciesielski Z., Musielak J. On absolute convergence of Haar series // Colloq. Math. **7**:1. 1959. P. 61–65.

[3] DeVore R. A. Nonlinear approximation // Acta Numer. **7**. 1998. P. 51–150.

[4] Donoho D. L. CART and best basis: a connexion // Ann. Statist. **25:5**. 1997. P. 1870–1911.

[5] Kashin B. S. On Lower Estimates for n-term Approximation in Hilbert Space // Approximation theory (volume dedicated to Blagovest Sendov). Darba, Sofia. 2002. P. 241–257.

[6] Temlyakov V. N. Nonlinear Methods of Approximation // IMI Preprint 2001:09. University of South Carolina. 2001.

[7] Veres A. Extensions of the theorems of Szasz and Zygmund on the absolute convergence of Fourier series // Acta Sci. Math. (Szeged). **74**. 2008. P. 191–206.

[8] Wainger S. Spesial trigonometric series in k-dimentions // Mem. AMS. **59**. 1965. P. 1–102.

[9] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры. — 1961. — 936 с.

[10] Бочкарёв С. В. Об абсолютной сходимости рядов Фурье // Докл. АН СССР. **202**:5. 1972. С. 225–227.

[11] Бочкарёв С. В. Абсолютная сходимость рядов Фурье по полным ортонормированным системам // Успехи матем. наук. **27**:2(164). 1972. С. 53–76.

[12] Бочкарёв С. В. Об абсолютной сходимости рядов Фурье по ограниченным системам // Матем. заметки. **15**:3. 1974. С. 363–370.

[13] Голубов Б. И. Об абсолютной сходимости рядов по системе Хаара // Успехи мат. наук. **20**:5(125). 1965. С. 198–202.

[14] Кашин Б. С. О коэффициентах разложения одного класса функций по полным системам // Сиб. Мат. Журнал. **XVIII**:1. 1977. С. 122–131.

[15] Кашин Б. С. Замечания об оценке функций Лебега ортонормированных систем // Матем. сб. **106**(148):3(7). 1978. С. 380–385.

[16] Кашин Б. С. Об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем // Исследования по теории функций многих действительных переменных и приближению функций. Сборник статей. Посвящается академику Сергею Михайловичу Никольскому к его восьмидесятилетию. Тр. МИАН СССР. **172**. 1985. С. 187–191.

[17] Кашин Б. С., Темляков В. Н. О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L^1 // Матем. заметки. **56**:5. 1994. С. 57–86.

[18] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. — М.: Изд-во АФЦ. — 1999. — 560 с.

[19] Кашин Б. С., Мелешкина А. В. Об n-членных приближениях по фреймам, ограниченным в $L^p(0,\,1)$, $2 < p < \infty$ // Матем. заметки. **95**:6. 2014. С. 830–835.

[20] Математическая энциклопедия. Том 5. Москва. —М.: Изд-во Советская энциклопедия. — 1984. — 1248 стб.

[21] Мелешкина А. В. О коэффициентах разложения по базисам гладких функций многих переменных // Матем. заметки. **89**:6. 2011. С. 938–943.

[22] Мелешкина А. В. О коэффициентах Фурье характеристических функций интервалов по полной ортонормированной системе, ограниченной в $L^p[0,1]$, $2 < p < \infty$ // Матем. заметки. **97**:4. 2015. С. 632–635.

[23] Мелешкина А. В. Об абсолютной сходимости рядов Фурье по двукратным ограниченным полным ортонормированным системам // Успехи мат. наук. **71**:4. 2016. С. 209-210.

[24] Митягин Б. С. Об абсолютной сходимости ряда коэффициентов Фурье // ДАН СССР. **157**:5. 1964. С. 1047–1050.

[25] Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. — М.: Физматлит. — 2006. — 616 с.

[26] Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. **102**:1. 1955. С. 37–40.

[27] Ульянов П. Л. Решённые и нерешённые проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов // Успехи мат. наук. **19**:1(115). 1964. С. 3–69.