ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации А. В. Мелешкиной
«О коэффициентах разложения функций некоторых классов
по ортонормированным базисам и фреймам»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико–математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация А. В. Мелешкиной состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы и посвящена исследованию коэффициентов разложения функций из некоторых классов по базисам и фреймам, а также оценкам n-членных приближений. Две указанные темы тесно связаны между собой, что демонстрируется, например, хорошо известным равенством:

$$e_n(f, \Phi) \equiv \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \{c_k^*(f, \Phi)\}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\Phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $L^2(0, 1)$, $f \in L^2(0, 1)$, $\{c_k^*(f, \Phi)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность абсолютных величин коэффициентов Фурье функции f по системе Φ, переставленных в невозрастающем порядке, а

$$e_n(f, \Phi) \equiv \inf_{P \in \Sigma_n} ||f - P||_{L^2(0,1)}$$

и Σ_n — совокупность всех полиномов по системе Φ, имеющих не более n ненулевых коэффициентов.

В первой главе диссертации установлены кратные аналоги известных результатов Б. С. Митягина и Б. С. Кашина о существовании для произвольного базиса в пространстве $L^p(0, 1)^d$ функции $f \in \mathrm{Lip}\alpha$, $\alpha = \alpha(p, d) > 0$ с расходящимся рядом абсолютных величин коэффициентов разложения по базису. Полученные в диссертации результаты окончательны (в смысле зависимости показателя гладкости α от p и размерности d) для всех p и d , за исключением случая, когда $\alpha = d \min\left\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{p}\right\}$ — целое число. В последнем случае гладкость построенной с расходящимся рядом из модулей коэффициентов разложения по базису отличается от наилучшей возможной величины α на произвольно малую величину $\varepsilon > 0$.

Во второй главе диссертации установлены оценки снизу n-членных приближений по норме пространства $L^2(0, 1)$ семейства $\mathbb{I}$ характеристических функций интервалов $\omega \in (0, 1)$ по произвольному жесткому фрейму, состоящему из функций, равномерно ограниченных константой D в $L^p(0, 1)$, $2 < p < \infty$. В «крайних» случаях $p = 2$ и $p = \infty$ эта задача была рассмотрена Б. С. Кашиным. Оказалось, что для промежуточных показателей задача существенно усложняется. В диссертации показано, что всегда

$$\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi) \geq C_{p,D} \cdot n^{-\frac{p}{2(p-2)}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и построен нетривиальный пример жесткого фрейма Φ_0, для которого

$$\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi_0) \leq C_p \cdot n^{-\frac{p}{2(p-1)}}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

При $p \to \infty$ оценки сверху и снизу смыкаются, однако вопрос об их окончательности остается открытым.

В третьей главе диссертации исследуются коэффициенты Фурье функций из семейства $\mathbb{I}$ по полным ортонормированным системам $\Phi = \{\phi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset L^2(0,\,1)$ с $||\phi_j||_{L^p} \le D$, $j = 1, 2, \ldots$, $2 < p < \infty$. Случай $p = \infty$ в этой задаче был исследован С. В. Бочкаревым, который установил существование функции $f \in \mathbb{I}$ с

$$\sum |c_n(f, \Phi)| = \infty.$$

Для $p < \infty$ А. В. Мелешкина, используя установленные ею аналоги неравенств Гальярдо-Ниренберга для пространств $L^q(0,\,1)$ с $0 < q < 1$, установила существование функции $f \in \mathbb{I}$ с

$$\sum |c_n(f, \Phi)|^{\frac{p-2}{p-1}} = \infty.$$

В четвертой главе установлен двумерный аналог теоремы С. В. Бочкарева о существовании для любой равномерно ограниченной полной ортонормированной системы Φ периодической функции f ограниченной вариации из класса H^ω (где ω — наперед заданный модуль непрерывности с условием $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}}{n} \le \infty$) с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f, \Phi)|$. Построена функция, имеющая ограниченную вариацию по Харди и логарифмический модуль непрерывности, ряд Фурье которой по произвольной наперед заданной равномерно ограниченной ортонормированной системе $\Phi \subset L^2(0,\,1)^2$ не сходится абсолютно.

Оценивая диссертацию в целом, отмечу, что в ней рассмотрены естественные по постановке, но весьма непростые задачи теории функциональных рядом и теории аппроксимации. Именно возникающие трудности объясняют тот факт, что в ряде случаем в диссертации получены результаты, не имеющие более ранних аналогов. В первую очередь это касается свойств ортонормированных базисов и фреймов, равномерно ограниченных по норме пространств L^p, $2 < p < \infty$. По той же причине автору не всегда удалось установить окончательность полученных в диссертации оценок.

Я не сомневаюсь, что диссертация «О коэффициентах разложения функций некоторых классов по ортонормированным базисам и фреймам» удволетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор А. В. Мелешкина заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель,
академик РАН,
д. ф.-м. н по спец. 01.01.01 — Б. С. Кашин

01.04.2016

Кашин Борис Сергеевич
Депутат Государственной Думы ФС РФ
kashin@mi.ras.ru
(495) 6921915

Подпись Кашина Б. С.
заверяю Главный консультант
отдела обеспечения прохождения государственной службы и повышения квалификации
Управления государственной службы
Берковский С. Г.

Аппарат Государственной Думы Федерального Собрания * Российская Федерация * УПРАВЛЕНИЕ ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ И КАДРОВ № 1