ОТЗЫВ

официального оппонента

на диссертацию Мелешкиной Анны Владимировны "О коэффициентах разложения функций некоторых классов по ортонормированным базисам и фреймам", представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - "вещественный, комплексный и функциональный анализ"

В работе изучается поведение коэффициентов Фурье и коэффициентов разложения по нормированным базисам различных классов функций и исследуются n-членные приближения функций по жестким фреймам. Диссертация состоит из введения и четырех глав.

В первой главе рассматриваются разложения липшицевых функций d переменных по нормированным базисам пространств $L^p[0,1]^d$ и решается вопрос об абсолютной сходимости рядов коэффициентов этих разложений.

Отправной точкой этой тематики является теорема С.Н.Бернштейна для периодических функций:

если $f(x) \in Lip\,\alpha, \alpha > 1/2$, то ряд из модулей ее коэффициентов Фурье по тригонометрической системе сходится. Существует функция класса $Lip\,1/2$ для которой такой ряд расходится.

В дальнейшем эту теорему обобщали в различных направлениях многие математики.

Б.С.Кашин для нормированного базиса в пространстве $L^p[0,1]^d, 1 < p < \infty$, усилил отрицательную часть теоремы Бернштейна, построив функцию $f(x) \in Lip\,\alpha, \alpha = \min\{1/2, 1-1/p\}$, ряд из модулей коэффициентов разложения которой по базису расходится.

С.Бохнер и С.Вейнгер доказали полный аналог теоремы Бернштейна для периодических функций d переменных в тригонометрическом случае. Б.С.Митягин усилил вторую (отрицательную) часть этого результата на произвольные полные ортонормированные системы. В диссертации обобщаются этот результат и приведенный выше результат Кашина.

Доказано (Теорема 1.1.): для произвольного нормированного базиса $\{\Psi_n\}$ в $L^p[0,1]^d, 1 < p < \infty$, если αd нецелое, то найдется функция $f(x) \in Lip\,\alpha d, \alpha = \min\{1/2, 1-1/p\}$, а если αd целое число, то для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f(x) \in Lip\,(\alpha d - \varepsilon)$, ряд из модулей коэффициентов которой по базису $\{\Psi_n\}$ расходится.

Во второй главе диссертации изучаются n-членные приближения жесткими фреймами в пространстве $L^2(0,1)$ семейства I характеристических функций интервалов. Каноническим разложением функции $f \in L^2(0,1)$ по жесткому фрейму $\Phi = \{\phi_k\}$ называется ряд $f = \sum_{n=1}^{\infty}(f,\phi_k)\phi_k$, сходящийся по норме $L^2(0,1)$. Наилучшим каноническим n-членным приближением множества I фреймом Φ называется величина $\sigma_n(I,\Phi) = \sup_{f\in I}\sigma_n(f,\Phi)$, где $\sigma_n(f,\Phi)$, наилучшее приближение в $L^2(0,1)$ функции f суммами из не более чем n членов ее канонического разложения. Понятие n-членного приближения возникло в работе С.Б.Стечкина в 1955г. Оценки n-членных приближений функциональных классов в гильбертовом пространстве ортонормированными системами функций рассматривали Б.С.Кашин, Д.Донохо, В.Н.Темляков. Кашин получил результаты, которые показывают различие в приближении произвольными ортонормированными системами и равномерно ограниченными полными ортонормированными системами функций.

В диссертации рассматриваются жесткие фреймы Φ, с условием $||\phi_k||_{L^p(0,1)} \leqslant D, k = 1,2,...$, где $2 < p \leqslant \infty$. Для таких жестких фреймов в теореме 2.1 доказано, что

$$\sigma_n(I,\Phi) \geqslant C_{p,D}\cdot n^{-\frac{p}{2(p-2)}}, n = 1,2,....$$

А в теореме 2.2 строится жесткий фрейм (с тем же условием равномерной ограниченности норм его элементов), такой что

$$\sigma_n(I,\Phi) \leqslant C_p\cdot n^{-\frac{p}{2(p-1)}}, n = 1,2,....$$

(величина D здесь зависит от p).

(Теоремы 2.1 и 2.2 получены совместно с Б.С.Кашиным).

В третьей главе диссертации исследуются коэффициенты Фурье характеристических функций интервалов вида $(0,t)$ по полным ортонормированным системам $\{\varphi_k\}$, ограниченным в $L^p[0,1], 2 < p < \infty$. (Свойства коэффициентов Фурье таких характериститческих функций рассматривались ранее в работах С.В.Бочкарева и Б.С.Кашина.)

В диссертации доказано (теорема 3.1), что для любой такой системы $\{\varphi_k\}$ существует характеристическая функция χ интервала, для которой

$$\sum_{j=1}^{\infty}|(\chi,\varphi_j)|^{\frac{p-2}{p-1}} = \infty.$$

Автор отмечает, что вопрос о точности показателя $\frac{p-2}{p-1}$ открыт.

Четвертая глава диссертации посвящена абсолютной сходимости рядов Фурье по ограниченным полным ортонормированным системам в двумерном случае. Хорошо известна теорема Зигмунда, о том что, если непрерывная функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi)$ имеет модуль непрерывности, удовлетворяющий условию $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\omega(f,1/n)}{n}} < \infty$, то ряд из коэффициентов Фурье по тригонометрической системе такой функции абсолютно сходится. С.В.Бочкарев доказал необходимость подобного условия по классу равномерно ограниченных полных ортонормированных систем. В двумерном случае А.Верес получил для непрерывных функций ограниченной вариации по Харди аналог теоремы Зигмунда для тригонометрической системы. В работе доказана следующая

Теорема 4.1. Для любой равномерно ограниченной полной в $L^2[0,1]^2$ ортонормированной системы найдется непрерывная функция F ограниченной вариации по Харди с условием $F(x_1, 0) = F(x_1, 1) = F(0, x_2) = F(1, x_2) = 0$ и модулем непрерывности

$$\omega(F, \delta_1, \delta_2) = O\left(\log^{-2} \frac{1}{\max\{\delta_1, \delta_2\}}\right)$$

при $\delta_1, \delta_2 \to 0$, для которой расходится ряд из модулей коэффициентов Фурье.

В диссертации имеется некоторое количество опечаток и неточностей.

На С.12 (7-ая строка сверху) в неравенствах, определяющих фрейм, слева и справа должно быть $||f||^2$ вместо $||f||$.

На С.32 (9-ая строка сверху) вместо знака включения должен быть знак принадлежности, а в формуле (2.2) и строкой ниже количество элементов множества Λ должно быть не больше n.

На С.33 такое же условие надо добавить на $\Lambda(n, \omega)$ в формуле (2.5).

На С.35 в 4-ой строчке сверху в знаменателе дроби должно быть $(2^k - 1)^{1/2}$ вместо $(2^k - 1)^{k/2}$ и в формуле (2.7) пункте 1) функции $\tilde{\chi}_k^i$ вместо χ_k^i.

На С.36 при определении ортонормированной системы $\Psi_k^{i,\nu}$, занумерованной тройками индексов, в случае индексов $(i, k, \nu), (j, k, \nu)$ нарушается ортогональность. Эта погрешность легко исправляется выбором значений $s_{k,i}$ (в зависимости от индекса i) вместо s_k (3-я строчка сверху).

На С.37 в формулах (2.10) и (2.11) во втором слагаемом центрального неравенства должен быть множитель $\beta_k^{1/2}$ вместо $\beta_k^{-1/2}$.

Высказанные замечания не влияют на положительную оценку диссертации в целом. Результаты диссертации являются новыми, изложены четко и с полными доказательствами. Они относятся к актуальной области исследований математического анализа. Основные результаты диссертации опубликованы в математических журналах, рекомендованных ВАК РФ.

Диссертация является научно-квалификационной работой, в которой содержится решение задач, имеющих существенное значение для теории ортогональных рядов и теории приближений.

Результаты диссертации представляют интерес для специалистов по теории функций и функциональному анализу и могут быть использованы в исследованиях, проводимых в МГУ им. М.В.Ломоносова, Математическом институте РАН им. В.А.Стеклова, Саратовском, Воронежском, Уральском и других университетах, а также при чтении спецкурсов по теории рядов и теории приближений.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация удовлетворяет требованиям предъявляемым к кандидатским диссертациям "Положения о порядке присуждения ученых степеней" ВАК РФ, и ее автор Мелешкина Анна Владимировна заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент: доктор физико-математических наук по специальности 01.01.01., профессор Холщевникова Наталья Николаевна

профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО МГТУ "Станкин"
Москва Вадковский пер., 3а 8(499) 9729460
Kholshchevnikova@gmail.com

Подпись руки Холщевниковой Н.Н. удостоверяю
УД ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН»
Документовед Мзокова Т.К.
10.06.2016