ФГБОУ ВО

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Андросенко Валентина Александровна

О ЛИНЕЙНЫХ ФОРМАХ
ОТ ЗНАЧЕНИЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА И ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ГАУССА

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре "Высшая математика" факультета информационных технологий ФГБОУ ВО "Брянский государственный технический университет"

Научный руководитель:	**Салихов Владислав Хасанович**, доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Матвеев Евгений Михайлович,** доктор физико-математических наук, доцент (ФГБОУ ВО Московский педагогический государственный университет) **Злобин Сергей Алексеевич,** кандидат физико-математических наук, (ООО "Аби Продакшн", руководитель группы разработки контроллера)
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВПО "Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана"**

Защита диссертации состоится 30 сентября 2016 г. в 16^{45} на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова" по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП—1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8й этаж), *http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi*, *http://istina.msu.ru/dissertations/*19718075.

Автореферат разослан 30 августа 2016 года.

Зам. председателя
диссертационного совета Д 501.001.84
на базе ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор

Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена изучению интегралов, представляющих линейные формы от значений дзета-функции Римана и гипергеометрической функции Гаусса.

Одним из направлений теории диофантовых приближений, начиная с работы К. Зигеля[1] 1929 года, является изучение арифметических свойств значений гипергеометрических функций.

Показателем (мерой) иррациональности $\mu(\gamma)$ вещественного числа γ называется нижняя грань множества чисел λ, для которых, начиная с некоторого положительного $q \geq q_0(\lambda)$, выполняется неравенство

$$\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| > q^{-\lambda}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Известно, что мера иррациональности любого иррационального числа $\mu \geq 2$. Это неравенство было получено в 1798 г. Лагранжем при доказательстве некоторой теоремы о цепных дробях.

К настоящему времени установлено достаточно много оценок мер иррациональности значений аналитических функций.

Современное состояние теории диофантовых приближений в той области, которая имеет отношение к данной части работы, определяется работами Ф. Аморозо и К. Виолы[2], К. Виолы[3], А. Хеймонена, Т. Матала - Ахо и К. Ваананена[4],[5], Л. В. Данилова[6], Дж. Рина [7], Е. А. Рухадзе[8], М. Хата[9],[10],[11], М. Хуттнера[12],[13], Г. В. Чудновского[14],

[1] C. L. Siegel, Uber einige Anwendungen Diophantischer Approximationen, *Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys., Math. Kl.*, **1**, (1929—1930), 1-70.

[2] F. Amoroso, C. Viola, Approximation measures for logarithms of algebraic numbers, *Ann. Scoula normale superiore (Pisa)*, **XXX** (2001), 225-249.

[3] C. Viola, Hypergeometric functions and irrationality measures, *Analitic number theory (Kyoto). 1996. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambrige Univ. Press. Cambrige*, (1997), 353-360.

[4] A. Heimonen, T. Matala-Aho, K. Väänänen, On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function, *Manuscripta Math.*, **81:1** (1993), 183-202.

[5] A. Heimonen, T. Matala-Aho, K. Väänänen, An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **50:2** (1994), 225-243.

[6] Л. В. Данилов, Рациональные приближения некоторых функций в рациональных точках, *Матем. заметки*, **24:4** (1978), 449-458.

[7] G. Rhin, Approximants de Pade et mesures effectives d′irrationalite, *Progr. in Math.*, **71** (1987), 155-164.

[8] Е. А. Рухадзе, Оценка снизу приближения $\ln 2$ рациональными числами, *Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика*, **6** (1987), 25-29.

[9] M. Hata, Legendre type polynomials and irrationality measures, *J. Reine Angew. Math.*, **407** (1990), 99-125.

[10] M. Hata, Irrationality measures of the values of hypergeometric functions, *Acta Arith.*, **LX** (1992), 335-347.

[11] M. Hata, Rational approximations to π and some other numbers, *Acta Arith.*, **63:4** (1993), 335-349.

[12] M. Huttner, Probléme de Riemann et irrationalité d'un quotient de deux fonctions hypergéométriques de Gauss, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I 302*, (1986), 603-606.

[13] M. Huttner, Irrationalité de certaines integrales hypergéométriques, *J. Number Theory*, **26** (1987), 166-178.

[14] G. V. Chudnovsky, Recurrences Pade approximations and their applications, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 92.*

Р. Марковеккио[15], Ю. В. Нестеренко[16], В. Х. Салихова[17],[18] и др.

Улучшение ряда результатов связано с применением новой интегральной конструкции, а именно со свойством симметрии, которым обладает подынтегральная функция.

Симметризованные интегралы и ранее использовались разными авторами, например, в работе Дж. Рина[7], но особенно повлияла идея симметричности на результаты работ В.Х. Салихова[17,18] и работавших под его руководством Е. С. Сальниковой[19] и Е. Б. Томашевской[20]. Ими использовались интегральные конструкции вида

$$\int_{\alpha}^{\beta} R(x)dx,$$

где $R(2\alpha - x) = R(x)$. С помощью вещественного симметризованного интеграла В. Х. Салихов[17] улучшил оценку меры иррациональности числа $log 3$. Позднее с помощью комплексного симметризованного интеграла им получена лучшая на данный момент оценка меры иррациональности числа π: $\mu(\pi) \leq 7.606308\ldots$.

Получение оценки меры иррациональности числа π является одной из классических задач теории диофантовых приближений.

В связи с этим было рассмотрено несколько констант непосредственно связанных с числом π, но являющихся более "чувствительными"к применению методов и подходов, позволяющих улучшить оценку меры иррациональности этих чисел.

Основная часть данной работы посвящена получению новой оценки меры иррациональности одной из таких констант, а именно $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

В 1978 г. Л. В. Данилов[6] получил первую оценку меры иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$:

$$\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leq 9.35\ldots.$$

Позднее этот результат неоднократно улучшался.

К. Алади и М. Л. Робинсон[21] снизили эту оценку до $8,3099\ldots$, Г. В. Чудновский[14] - до $5.7926\ldots$, А. К. Дубицкас[22] - до $5.516\ldots$, М. Хата[9] - до $5.0871\ldots$, Дж. Рин[7] - до

New York, (1984), 215-238.

[15]R. Marcovecchio, The Rhin - Viola method for $log 2$, *Acta Arith.*, **139:2** (2009), 147-184.

[16]Ю. В. Нестеренко, О показателе иррациональности числа $\log 2$, *Матем. заметки*, **88:4** (2010), 549-564.

[17]В. Х. Салихов, О мере иррациональности $\log 3$, *Докл. РАН*, **417:6** (2007), 753-755.

[18]В. Х. Салихов, О мере иррациональности числа π, *Успехи матем. наук*, **63:3** (2008), 163-164.

[19]Е. С. Сальникова, Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов, *Матем. заметки*, **83:3** (2008), 428-438.

[20]Е. Б. Томашевская, О диофантовых приближениях числа π числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, *Математические заметки*, **83:6** (2008), 912-922.

[21]K. Aladi, M. Robinson, Legendre polynomials and irrationality, *J.Reine Angew. Math*, **318** (1980), 137-155.

[22]А. К. Дубицкас, Приближение $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ рациональными дробями, *Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика*, **6** (1987), 73-76.

4.97 . . ..

В 1993 г. М. Хата[11] с помощью комплексного интеграла вида

$$\int\limits_{\Gamma} (F(a,b,c;z))^n \frac{dz}{z},$$

где $F(a,b,c;z) = \dfrac{(z-a)^2(z-b)^2(z-c)^2}{z^3}$, $a = 1, b = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, c = \dfrac{3+\sqrt{3}i}{4}, n \to \infty$, Γ - кривая, соединяющая точки a и b, получил новую оценку меры иррациональности числа $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$, а именно, $\mu(\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}) \leq 4.6015\ldots$.

Другим направлением в теории диофантовых приближений является изучение арифметических свойств значений дзета-функции Римана в целых точках, а именно, изучение сумм вида

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

при целых значениях параметра $s \geq 2$. Эта задача теории трансцендентных чисел восходит к Л. Эйлеру. Он, в частности, доказал расходимость ряда (1) при $s = 1$ и сходимость при $s > 1$, а также знаменитые соотношения

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{(2\pi i)^{2k} B_{2k}}{(2k)!}$$

для $k = 1, 2, 3, ...$, связывающие значение ряда при четных положительных s с архимедовой постоянной $\pi = 3.14159265\ldots$ [23] и числами Бернулли $B_s \in \mathbb{Q}$.

В 1882 г. Ф. Линдеман[24] доказал трансцендентность числа π и, тем самым, трансцендентность $\zeta(s)$ для четных s.

Веком спустя после Эйлера Б. Риман[25] рассмотрел ряд (1) как функцию комплексного переменного s. Этот ряд представляет в области $Res > 1$ аналитическую функцию, которая может быть продолжена на всю комплексную плоскость до мероморфной функции $\zeta(s)$. Именно это аналитическое продолжение и ряд важных свойств функции $\zeta(s)$ были открыты Риманом в его мемуаре о простых числах.

Дзета-функция Римана и ее обобщения играют неоценимую роль в аналитической теории чисел.

Цель работы

Целью данной диссертации является изучение интегралов, представляющих линейные

[23] S. R. Finch, Mathematical constants, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press.*, **94** (2003).

[24] F. Lindemann, Uber die Zalh π, *Math. Annalen*, **20** (1882), 269-293.

[25] Б. Риман, О числе простых чисел, не превышающих данной величины, *Сочинения. ОГИЗ. Москва*, (1948), 216 - 224.

формы от значений дзета-функции Римана и гипергеометрической функции Гаусса. В диссертации рассмотрена новая интегральная конструкция, позволяющая существенно улучшить оценку меры иррациональности числа $\pi/\sqrt{3}$.

Научная новизна и значимость результатов работы

Все результаты диссертации являются новыми. В диссертации доказаны следующие основные результаты:

- Получена новая оценка меры иррациональности числа $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.
- Получена новая оценка меры иррациональности числа $\tau = {}_2F_1(1, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}; -\frac{1}{64}) = \log\frac{13}{5} + 2\arctan\frac{4}{7}$.
- Получена линейная форма от чисел $1, \zeta(2), \zeta(4)$ с помощью четырехкратных интегралов вида

$$I = \frac{\Gamma(a_2+b_2-c)\Gamma(c)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)} \int\limits_{[0,1]^4} \frac{\prod\limits_{i=1}^{4} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-1}dx_1dx_2dx_3dx_4}{(1-x_1+x_1x_2(1-x_3x_4)))^c}$$

и

$$I = \int\limits_{[0,1]^4} \frac{x_1^{a_1-1}(1-x_1)^{b_1-1}x_2^{a_2-1}(1-x_2)^{b_2-1}x_3^{a_2+b_2-1}(1-x_3)^{a_4-1}x_4^{b_3-1}(1-x_4)^{b_4-1}\overline{dx}}{(1-x_3x_4)^{\alpha_2}(1-x_1(1-x_2x_3)))^{\alpha_1}},$$

где $\overline{dx} = dx_1dx_2dx_3dx_4$.

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и получены автором самостоятельно.

Основные методы исследования

В работе используются такие асимптотические методы, как метод перевала, метод Лапласа, основные идеи метода Чудновского-Рухадзе-Хата сокращения простых чисел, а также другие методы теории функций комплексной переменной и трансцендентных чисел.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы при изучении теории диофантовых приближений и разработке спецкурсов по теории чисел, преподаваемых в госуниверситетах для студентов математических специальностей.

Апробация работы

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на VII международной конференции ”Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения”, посвященной памяти профессора А. А. Карацубы (Россия, г. Тула, ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 11-16 мая 2010 года), на научно-исследовательском семинаре по теории чисел механико-математического факультета ФГБОУ ВПО МГУ им. М.В. Ломоносова (26 сентября 2014), на заседаниях кафедры ”Высшая математика” ФГБОУ ВПО "Брянский государственный технический университет".

Публикации

Результаты, полученные в диссертации, опубликованы в 7 работах, четыре из которых написаны в соавторстве, три работы опубликованы в журналах из списка ВАК РФ. Список работ приведён в конце автореферата.

Структура и объём диссертации

Диссертационная работа состоит из четырёх глав, первая из которых является введением, заключения, списка литературы (57 наименований) и приложения. Все главы разбиты на разделы. Общий объём работы составляет 123 страницы.

Краткое содержание диссертации

Содержание главы 1

В первой главе, являющейся введением, изложено современное состояние проблемы диофантовых приближений, показана актуальность темы и приведен обзор основных результатов диссертации. Здесь же сформулированы основные результаты, используемые в диссертационном исследовании.

В настоящей диссертации для получения оценок мер иррациональности конструируются комплексные симметризованные интегралы. Метод построения симметризованных интегралов впервые был опубликован В. Х. Салиховым[17] в 2007 году.

В 2009 г. Р. Марковеккио[15] применил новую интегральную конструкцию, с помощью которой улучшил оценку Е. А. Рухадзе[8] меры иррациональности числа $log2$. В основе доказательства лежала новая интегральная конструкция, основанная на использовании двухкратных несобственных комплексных интегралов. Групповой метод Рина

— Виолы, разработанный в связи с оценками показателя иррациональности значений дзета-функции Римана $\zeta(2), \zeta(3)$ позволил получить, в частности, оценку $\mu(\log 2) \leq 3,57455....$

Оказалось, что с помощью интегральной конструкции рассмотренной Р. Марковеккио[15] для набора параметров

$$h = l = 5n; \quad j = m = 6n; \quad k = q = 4n; \quad n \in \mathbb{N}; \quad n \longrightarrow +\infty$$

можно получить оценку меры иррациональности числа $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$, немного улучшающую оценку М. Хата[11].

В 2010 г. Ю. В. Нестеренко[16] предложил более простой способ вывода оценки $\mu(log 2)$. Доказательство основано на применении однократных комплексных интегралов и не использует групповой метод.

В. А. Андросенко и В. Х. Салиховым[26] был предложен новый метод, объединяющий интегральную конструкцию Р. Марковеккио и симметризованные интегралы В. Х. Салихова, который позволил получить новую оценку меры иррациональности числа $\pi/\sqrt{3}$.

Стандартным приёмом, который используется при построении рациональных приближений , является конструирование линейных форм и исследование поведения коэффициентов этих линейных форм при значении параметра, стремящемся к бесконечности. Используя этот способ при получении оценок мер иррациональностей ключевыми являются следующие утверждения.

Лемма 1.1[11] *Пусть α действительное иррациональное число и последовательность пар целых чисел q_n, p_n удовлетворяет условиям*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |q_n| = \sigma > 0, \lim_{n\to+\infty} \sup \frac{1}{n} \ln |q_n\alpha + p_n| \leq -\tau, \ \tau > 0.$$

Тогда показатель иррациональности числа α удовлетворяет неравенству

$$\mu(\alpha) \leq 1 + \frac{\sigma}{\tau}.$$

В настоящей работе применяются асимптотические методы и основные идеи метода Чудновского — Рухадзе — Хата "сокращения простых". Одним из методов теории функции комплексного переменного, который применялся в работах многих авторов, является метод перевала (метод седловых точек). Метод седловых точек используется при получении асимптотики интегралов диссертационной работы и коэффициентов конструируемых линейных форм.

[26] В. А. Андросенко, В. Х. Салихов, Симметризованная версия интеграла Марковеккио в теории диофантовых приближений, *Матем. заметки*, **97:4** (2015), 483-492.

Содержание главы 2

В работе Р. Марковеккио[15] была рассмотрена интегральная конструкция, позволяющая улучшить оценку меры иррациональности числа $log 2$. В главе 2 настоящей диссертации предложена новая интегральная конструкция, объединяющая идею симметрии В. Х. Салихова и интеграл Р. Марковеккио.

Пусть $x \in \mathbb{Q}, x \neq 1, x > 0, h, j, k, l, m, q \in \mathbb{Z}^+, h + j + q = k + l + m, l + k - j \geq 0, h + j - k \geq 0, k + m - h \geq 0$.

Рассмотрим интеграл

$$J \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{-\infty} ds \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s^h t^j dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}}(1-s)^{l+k-j+1}(s-t)^{h+j-k+1}(t-x)^{k+m-h+1}}, \tag{2}$$

в котором ветвь корня $\sqrt{\dfrac{s}{s-1}}$ выберем следующим образом: на комплексной плоскости ω проведем разрез $(-\infty; 0)$. Тогда для $\omega = |\omega| e^{i\varphi}$, где $-\pi < \varphi < \pi$, определим $\sqrt{\omega} = \sqrt{|\omega|} e^{\frac{i\varphi}{2}}$. Функция $\sqrt{\dfrac{s}{s-1}}$ аналитична на комплексной плоскости s с разрезом по лучу $(0; +\infty)$, так как равенство $\omega = \dfrac{s}{s-1} = -k,\ k > 0$, равносильно равенству $s = \dfrac{k}{k+1} \in (0; 1)$.

Отметим, что интеграл (2) отличается от интеграла Марковеккио лишь множителем $\sqrt{\dfrac{s}{s-1}}$ в знаменателе подынтегральной функции.

Данная интегральная конструкция позволяет получить новую оценку меры иррациональности числа $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Теорема 2.2. *Справедлива следующая оценка*:

$$\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leq 4.230464\ldots.$$

Доказательство этой теоремы, как и многих других подобных результатов в последние 20 лет, основывается на лемме 1.1.

Содержание главы 3

Третья глава диссертации посвящена одному из значений гипергеометрической функции Гаусса вида

$${}_2F_1\left(1, \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}; x\right), \text{где } k \geq 2, k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Q}. \tag{3}$$

Функцию такого вида в 1993 г. рассмотрели К. Ваананен, А. Хеймонен, Т. Матала - ахо[4].

Опираясь на свойства коэффициентов многочлена Якоби, ими был получен общий критерий, позволяющий оценить меру иррациональности значений функции вида (3).

Одним из значений гипергеометрической функции Гаусса, рассмотренных ими является

$$\log\frac{13}{5}+2\arctan\frac{4}{7}={}_2F_1\left(1,\frac{1}{4},\frac{5}{4};-\frac{1}{64}\right).$$

Было доказано, что $\mu\left(\log\frac{13}{5}+2\arctan\frac{4}{7}\right)\leq 13,164\ldots$.

Используя идею комплексного симметризованного интеграла эту оценку удалось улучшить.

Теорема 3.1. *Справедлива оценка*

$$\mu\left(\log\frac{13}{5}+2\arctan\frac{4}{7}\right)\leq 7,448\ldots\quad .$$

Следует отметить, что арифметические свойства значений гипергеометрической функции изучались с применением различных методов и подходов для получения оценок мер иррациональности значений функции $arctgx$ и $logx$ многими авторами. Эти функции рассматривались как частные случаи гипергеометрической функции Гаусса[27].

Содержание главы 4

В 1990 году О. Н. Василенко[28] рассмотрел интеграл

$$I=\int\limits_{[0,1]^m}\frac{\prod\limits_{i=1}^{m}x_i^n(1-x_i)^n\overline{dx_i}}{(1-x_1+x_1x_2-\ldots+(-1)^m x_1\cdot\ldots\cdot x_m)^{n+1}},\tag{4}$$

который при $m=2$ совпадает с интегралом Бейкерса[29]

$$\int\limits_{[0,1]^3}\frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n dxdydz}{(1-z(1-xy))^{n+1}}.\tag{5}$$

Д. В. Васильев[30] доказал, что при $m=4$ интеграл (4) представим в виде линейной формы от чисел $1,\zeta(2),\zeta(4)$, т.е.

$$I=p\zeta(4)+q\zeta(2)+r,\tag{6}$$

[27] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т.1: *Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра.* 2-е изд., Наука, М., 1973, 294 с.

[28] О. Н. Василенко, Об иррациональности значений гипергеометрической функции Гаусса, *Вестник МГУ. Сер 1. Математика, механика*, **3** (1985), 15-18.

[29] F. Beukers, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ end $\zeta(3)$, *Bull. Lond. Math.Soc. 11*, **33** (1978), 268-279.

[30] Д. В. Васильев, О малых линейных формах от значений дзета-функции Римана, *Препринт/ Минск: НАН Беларуси. Институт математики*, **1(558)** (2000), 17.

где $p, q, r \in \mathbb{Q}$. Для этого интеграла им была получена следующая оценка: $0 < 4 \cdot I \cdot D_n^4 < 7 \cdot \zeta(4) \cdot \beta^n$, где $\beta = -21z^2 + 75z - 40$, $z \in [0,1]$ — корень уравнения $z^3 - 3z^2 + 1 = 0$, $\beta \approx 0.02\ldots$.

В 1998 году В. Н. Сорокин[31] ввел в рассмотрение интеграл вида

$$I = \int\limits_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n dx_1 dx_2 dx_3}{(1-x_1x_2)^{n+1}(1-x_1x_2x_3)^{n+1}}. \tag{7}$$

Интеграл (7) равен интегралу (5), рассматриваемому ранее Бейкерсом[30], а затем Д. В. Васильевым[31]. Это было доказано С. Фишлером[32] и С. А. Злобиным[33].

В четвёртой главе диссертации рассмотрен четырехкратный интеграл, представимый в виде линейной формы (6)

$$I = \frac{\Gamma(a_2+b_2-c)\Gamma(c)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)} \int\limits_{[0,1]^4} \frac{\prod\limits_{i=1}^{4} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-1} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4}{(1-x_1+x_1x_2(1-x_3x_4)))^c}, \tag{8}$$

параметры которого удовлетворяют следующим условиям: $a_i, b_i, c \in \mathbb{N}, i = \overline{1,4}, a_1 + b_1 = a_4 + b_2, a_2 + b_2 = b_3 + b_4$.
Для интеграла (8) получены четыре преобразования, которые лежат в основе групповой структуры.

Всевозможные комбинации этих преобразований образуют группу G, состоящую из 720 элементов.

Актуальность рассмотрения групповой структуры связана с проблемой оценки интеграла, а также оценки меры иррациональности значений дзета-функции Римана в целых точках.

Также рассмотрен интеграл типа интеграла В. Н. Сорокина[32]

$$\begin{aligned} I \;\; = \;\; & \int\limits_{[0,1]^4} \frac{x_1^{a_1-1}(1-x_1)^{b_1-1}x_2^{a_2-1}(1-x_2)^{b_2-1}x_3^{a_2+b_2-1}(1-x_3)^{a_4-1}}{(1-x_3x_4)^{\alpha_2}} \times \\ & \times \;\; \frac{x_4^{b_3-1}(1-x_4)^{b_4-1}\overline{dx}}{(1-x_1(1-x_2x_3)))^{\alpha_1}}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\overline{dx} = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$.

В результате всевозможных комбинаций пяти преобразований, которые лежат в основе групповой структуры интеграла (9), была получена группа $\widetilde{G}$, состоящая из 288 элементов.

[31] В. Н. Сорокин, Теорема Апери, *Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика*, **3** (1998), 48-52.
[32] S. Fischler, Formes linearesen polyzetas et integrals multiples, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. 1. Math.*, **335** (2002), 1-4.
[33] С. А. Злобин, Разложение кратных интегралов в линейные формы, *Матем. заметки*, **77:5** (2005), 683-706.

Для интегралов (8) и (9) при определенных условиях на параметры справедливы теорема 4.1 и теорема 4.2 соответственно о представлении их в виде линейной формы (6). Сформулируем эти теоремы.

Теорема 4.1 *Пусть для параметров интеграла (8) выполняются следующие условия*:

$$1)\mathrm{c} \leq a_2 + b_2 + 1; \quad 2)a_2 + b_2 \leq b_4 + b_3; \quad 3)\mathrm{c} \leq a_2 + b_1;$$

$$4)min(a_3, a_4) + b_2 \geq min(a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$5)max(a_3, a_4) + b_2 \geq max(a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

Тогда интеграл (8) можно представить в виде линейной формы (6).

Теорема 4.2 *Интеграл (9) представим в виде линейной формы (6), если для его параметров справедливы следующие условия*:

$1)b_4 > \alpha_2, \alpha_2 \geq a_1^* - \alpha_1^*, a_2 \geq \alpha_1^*; \quad 2)a_1 + b_1 \leq a_4 + b_2;$

$3)\alpha_1 < b_1, a_2 + b_2 \geq b_3 + b_4; \quad 4)a_2 + b_2 + b_1 = \alpha_1 + b_3 + b_4,$

где $\alpha_1^* = min(a_1, \alpha_1), a_1^* = max(a_1, \alpha_1), \alpha_2^* = min(\alpha_2, b_3).$

В **заключении** подведены итоги диссертационной работы: перечислены главные результаты, полученные в диссертации.

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Рассмотрена новая интегральная конструкция, объединяющая идею симметрии, предложенную Салиховым в 2007 г., и интеграл, введенный Марковеккио в 2009 г., которая позволила значительно улучшить оценку меры иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

2. Используя идею комплексного симметризованного интеграла, удалось улучшить оценку одного из значений гипергеометрической функции Гаусса, а именно, числа $\tau = {}_2F_1(1, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}; -\frac{1}{64}) = \log\frac{13}{5} + 2\arctan\frac{4}{7}$.

3. Исследованы четырехкратные интегралы вида

$$I = \frac{\Gamma(a_2 + b_2 - c)\Gamma(c)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)} \int\limits_{[0,1]^4} \frac{\prod\limits_{i=1}^{4} x_i^{a_i - 1}(1 - x_i)^{b_i - 1} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4}{(1 - x_1 + x_1 x_2(1 - x_3 x_4)))^c}$$

и

$$I = \int\limits_{[0,1]^4} \frac{x_1^{a_1-1}(1-x_1)^{b_1-1}x_2^{a_2-1}(1-x_2)^{b_2-1}x_3^{a_2+b_2-1}(1-x_3)^{a_4-1}x_4^{b_3-1}}{(1-x_3x_4)^{\alpha_2}} \times$$
$$\times \frac{(1-x_4)^{b_4-1}dx_1dx_2dx_3dx_4}{(1-x_1(1-x_2x_3)))^{\alpha_1}},$$

а также получена их линейная форма от чисел $1, \zeta(2), \zeta(4)$.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук В.Х. Салихову за интересную тему, постановку задач и постоянное внимание к работе.

Публикации по теме диссертации

[1]. В. А. Андросенко, В. Х. Салихов, Групповая структура четырехкратного интеграла, *Вестник БГТУ*, **12:4** (2006), 122-125. (В.Х. Салихову принадлежит постановка задачи и общее руководство, лично В.А. Андросенко – доказательство основных результатов).

[2]. В. А. Андросенко, Е. В Квитко, Четырехкратные интегралы, представимые в виде линейных форм от значений дзета-функции Римана, *Вестник БГТУ*, **18:2** (2008), 155-158. (Лично В.А. Андросенко принадлежит формулировка и доказательство основных результатов, Е.В. Квитко – компьютерный перебор параметров).

[3]. В. А. Андросенко, Оценка меры иррациональности значений гипергеометрической функции Гаусса, *Чебышевский сборник*, **11:1** (2010), 7-14.

[4]. В. А. Андросенко, В. Х. Салихов, Интеграл Марковеккио и мера иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, *Вестник БГТУ*, **32:4** (2011), 129-132. (В.Х. Салихову принадлежит постановка задачи и общее руководство, лично В.А. Андросенко – доказательство основной теоремы).

[5]. В. А. Андросенко, Об оценках линейных форм от чисел $1, \zeta(2), \zeta(4)$, *Вестник Брянского государственного университета*, **4** (2012), 20-27.

[6]. В. А. Андросенко, Мера иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, *Изв. РАН. Серия математическая*, **79:1** (2015), 3-20.

[7]. В. А. Андросенко, В. Х. Салихов, Симметризованная версия интеграла Марковеккио в теории диофантовых приближений, *Матем. заметки*, **97:4** (2015), 483-492. (В.Х. Салихову принадлежит постановка задачи и общее руководство, лично В.А. Андросенко – доказательство основных результатов).