

**ФГБОУ ВПО «Брянский государственный технический
университет»**

на правах рукописи

УДК 511.36

АНДРОСЕНКО Валентина Александровна

**О ЛИНЕЙНЫХ ФОРМАХ
ОТ ЗНАЧЕНИЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА
И ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ГАУССА**

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
доцент Салихов Владислав Хасанович

Брянск
2016

Оглавление

1	Введение	4
1.1	История вопроса. Формулировка результатов, полученных в диссертации.	4
1.2	Вспомогательные утверждения.	18
2	Мера иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$	26
2.1	Интеграл Марковеккио и мера иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$	26
2.2	Идея симметрии и интеграл Марковеккио в новой интегральной конструкции	31
3	Оценка меры иррациональности числа $\log \frac{13}{5} + 2 \arctan \frac{4}{7}$	73
4	Линейные формы от чисел $1, \zeta(2), \zeta(4)$	84
4.1	Групповая структура четырехкратных интегралов	84
4.2	О линейных формах от чисел $1, \zeta(2), \zeta(4)$	93
	Заключение	113
	Литература	114

Глава 1

Введение

1.1 История вопроса. Формулировка результатов, полученных в диссертации.

Одним из направлений теории диофантовых приближений, начиная с работы [55] К. Зигеля 1929 года, является изучение арифметических свойств значений гипергеометрических функций.

Напомним, что показателем (мерой) иррациональности $\mu(\gamma)$ вещественного числа γ называется нижняя грань множества чисел λ , для которых, начиная с некоторого положительного $q \geq q_0(\lambda)$, выполняется неравенство

$$\left| \gamma - \frac{p}{q} \right| > q^{-\lambda}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Известно, что мера иррациональности любого иррационального числа $\mu \geq 2$. Это неравенство было получено в 1798 г. Лагранжем при доказательстве некоторой теоремы о цепных дробях.

К настоящему времени установлено достаточно много оценок мер иррациональности значений аналитических функций.

Современное состояние теории диофантовых приближений в той области, которая имеет отношение к данной части работы, определяется статьями Ф. Аморозо и К. Виолы [33], К. Виолы [56], А. Хеймонена, Т. Матала - Ахо и К. Ваананена [45], [46], Л. В. Данилова [13], Дж. Рина [52], Е. А. Рухадзе [24], М. Хата [42]-[44], М. Хуттнера [47], [48], Г. В. Чудновского [38], Р. Марковеккио [51], Ю. В. Нестеренко [22], В. Х. Салихова [26], [27] и др.

В работах этих авторов рассматривались интегральные конструкции, дающие малые линейные формы от логарифмов алгебраических чисел, вычислялась асимптотика интегралов и коэффициентов линейных форм с помощью метода перевала, теоремы Лапласа, оценивался знаменатель коэффициентов линейных форм с использованием различных схем "сокращения простых чисел".

Заметим, что краткий обзор современного состояния теории диофантовых приближений, относящийся к этой области, приведен в работе [22] Ю. В. Нестеренко, а обзор некоторых конструкций для логарифмов рациональных чисел представлен в статье В. В. Зудилина [20].

Улучшение ряда результатов связано с применением новой интегральной конструкции, а именно со свойством симметрии, которым обладает

подынтегральная функция.

Симметризованные интегралы и ранее использовались разными авторами, например, в работе Дж. Рина [52], но особенно повлияла идея симметричности на результаты работ В.Х. Салихова [26], [27] и работавших под его руководством Е. С. Сальниковой [28] и Е. Б. Томашевской [30].

Ими использовались интегральные конструкции вида

$$\int_{\alpha}^{\beta} R(x)dx,$$

где $R(x)$ —рациональная функция, удовлетворяющая тождеству $R(x) = R(2\alpha - x)$.

С помощью вещественного симметризованного интеграла В. Х. Салихов [26] улучшил оценку меры иррациональности числа $\log 3$. Позднее в работе [27] с помощью комплексного симметризованного интеграла им получена лучшая на данный момент оценка меры иррациональности числа π : $\mu(\pi) \leq 7.606308 \dots$

Оценка меры иррациональности числа π является одной из классических задач теории диофантовых приближений.

В связи с этим было рассмотрено несколько констант непосредственно связанных с числом π , но являющихся более "чувствительными" к применению методов и подходов, позволяющих улучшить оценку меры иррациональности этих чисел.

Основная часть данной работы посвящена получению новой оценки

меры иррациональности одной из таких констант, а именно, $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

В 1978 г. [13] Л. В. Данилов получил первую оценку меры иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$:

$$\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leq 9.35 \dots$$

Позднее этот результат неоднократно улучшался.

К. Алади и М. Л. Робинсон [32] снизили эту оценку до $8,3099 \dots$, Г. В. Чудновский [38] - до $5.7926 \dots$, А. К. Дубицкас [14] - до $5.516 \dots$, М. Хата [42] - до $5.0871 \dots$, Дж. Рин [52] - до $4.97 \dots$

В 1993 г. М. Хата [44] с помощью комплексного интеграла вида

$$\int_{\Gamma} (f(a, b, c; z))^n \frac{dz}{z},$$

где $f(a, b, c; z) = \frac{(z-a)^2(z-b)^2(z-c)^2}{z^3}$, $a = 1, b = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, c = \frac{3 + \sqrt{3}i}{4}$,

$n \rightarrow \infty$, Γ - кривая, соединяющая точки a и b , получил новую оценку меры иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, а именно, $\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leq 4.6015 \dots$

В 2009 г. Р. Марковеккио [51] применил новую интегральную конструкцию, с помощью которой улучшил оценку Е. А. Рухадзе [24] меры иррациональности числа $\log 2$. В основе доказательства лежала новая интегральная конструкция, основанная на использовании двукратных несобственных комплексных интегралов. Групповой метод Рина — Виолы [53], [54], разработанный в связи с оценками показателя иррациональности значений дзета-функции Римана $\zeta(2), \zeta(3)$ позволил получить, в частности,

оценку $\mu(\log 2) \leq 3,57455\dots$

Оказалось, что подобный метод можно применить для доказательства следующего результата.

Теорема 2.1. *Справедлива оценка*

$$\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leq 4,601057\dots$$

Таким образом, с помощью интегральной конструкции рассмотренной Р. Марковеккио [51] для набора параметров

$$h = l = 5n; \quad j = m = 6n; \quad k = q = 4n; \quad n \in \mathbb{N}; \quad n \longrightarrow +\infty$$

получена оценка меры иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, немного улучшающая оценку М. Хата [44].

В 2010 г. Ю. В. Нестеренко [22] предложил более простой способ вывода оценки $\mu(\log 2)$. Доказательство основано на применении однократных комплексных интегралов и не использует групповой метод.

В работе [7] В. А. Андросенко и В. Х. Салиховым был предложен новый метод, объединяющий интегральную конструкцию Р. Марковеккио и симметризованные интегралы В. Х. Салихова, который позволил доказать следующую теорему.

Теорема 2.2. *Справедлива следующая оценка*

$$\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leq 4,230464\dots$$

Третья глава диссертации посвящена одному из значений гипергеометрической функции Гаусса.

Пусть

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. То есть,

$$(a)_0 = 1, (a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1), n = 1, 2, 3, \dots$$

Если $c \neq 0, -1, -2, \dots$, то функция

$$F(a, b; c; z) \equiv {}_2F_1(a, b; c; z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n z^n}{(c)_n n!} \quad (1.1)$$

называется гипергеометрическим рядом от переменной z с параметрами a, b, c (гипергеометрической функцией Гаусса) [8, с.69].

Если $Re(c) > Re(b) > 0$, то для функции (1.1) имеет место формула Эйлера

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt,$$

где $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ [8, с.72].

В 1993 г. К. Ваананен, А. Хеймонен, Т. Матала - ахо [45] рассмотрели гипергеометрическую функцию Гаусса вида

$${}_2F_1\left(1, \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}; x\right), \text{ где } k \geq 2, k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Q}. \quad (1.2)$$

Опираясь на свойства коэффициентов многочлена Якоби, они получили общий критерий, позволяющий оценить меру иррациональности значений функции вида (1.2).

Одним из значений гипергеометрической функции Гаусса, рассмотренных в работе [45] является

$$\log \frac{13}{5} + 2 \arctan \frac{4}{7} = {}_2F_1 \left(1, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}; -\frac{1}{64} \right).$$

Ими было доказано, что $\mu \left(\log \frac{13}{5} + 2 \arctan \frac{4}{7} \right) \leq 13,164 \dots$

Используя идею комплексного симметризованного интеграла мы улучшили эту оценку.

Теорема 3.1. *Справедлива оценка*

$$\mu \left(\log \frac{13}{5} + 2 \arctan \frac{4}{7} \right) \leq 7,448 \dots$$

Следует отметить, что арифметические свойства значений гипергеометрической функции изучались с применением различных методов и подходов. Для получения оценок мер иррациональности значений функции $\arctan x$ и $\log x$ многими авторами ([39, гл.2], [45], [46]) эти функции рассматривались как частные случаи гипергеометрической функции Гаусса.

В 1993 г. А. Хеймонен, Т. Матала-Ахо, К. Ваананен [45] используя, как и М. Хуттнер в работах 1986-1987 гг. [47], [48], аппроксимации Падэ для гипергеометрической функции Гаусса, доказали общую теорему об оценках мер иррациональности логарифмов рациональных чисел. В этой же работе приведен достаточно большой список конкретных результатов, улучшающих более ранние оценки М. Хуттнера. В частности, представлены оценки $\mu \left(\log \frac{5}{3} \right) \leq 9,7551\dots$, $\mu \left(\log \frac{3}{2} \right) \leq 3,3317\dots$. Позже этими

авторами были получены новые оценки: $\mu\left(\sqrt{7}\arctan\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \leq 4,0298\dots$, $\mu\left(\log 2 + \arctan\frac{3}{4}\right) \leq 3,6073\dots$ и другие. Улучшение результатов происходит, в основном, за счет применения методики сокращения простых чисел в знаменателях коэффициентов линейных форм.

Другим направлением в теории диофантовых приближений является изучение арифметических свойств значений дзета-функции Римана в целых точках, а именно, изучение сумм вида

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (1.3)$$

при целых значениях параметра $s \geq 2$. Эта задача теории трансцендентных чисел восходит к Л. Эйлеру. Он, в частности, доказал расходимость ряда (1.3) при $s = 1$ и сходимость при $s > 1$, а также знаменитые соотношения

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{(2\pi i)^{2k} B_{2k}}{(2k)!}$$

для $k = 1, 2, 3, \dots$, связывающие значение ряда при четных положительных s с архимедовой постоянной $\pi = 3.14159265\dots$ (см. [40, §1.4]) и числами Бернулли $B_s \in \mathbb{Q}$.

В 1882 г. Ф. Линдеман [49] доказал трансцендентность числа π и, тем самым, трансцендентность $\zeta(s)$ для четных s .

Веком спустя после Эйлера Б. Риман [23] рассмотрел ряд (1.3) как функцию комплексного переменного s . Этот ряд представляет в области $\operatorname{Re} s > 1$ аналитическую функцию, которая может быть продолжена на

всю комплексную плоскость до мероморфной функции $\zeta(s)$. Именно это аналитическое продолжение и ряд важных свойств функции $\zeta(s)$ были открыты Риманом в его мемуаре о простых числах.

Дзета-функция Римана и ее обобщения играют неоценимую роль в аналитической теории чисел.

Первый шаг в изучении значений дзета-функции в нечетных точках сделал в 1978 г. Р. Апери [34], доказав иррациональность $\zeta(3)$. Его доказательство заключается в том, что строятся диофантовы приближения к $\zeta(3)$,

$$u_n \zeta(3) - v_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.4)$$

где для u_n и v_n выписываются явные формулы, из которых следует, что $u_n \in \mathbb{Z}$ и $D_n^3 v_n \in \mathbb{Z}$ ($D_n = \text{НОК}(1, 2, \dots, n)$). При этом справедлива оценка

$$0 < |u_n \zeta(3) - v_n| < c(\sqrt{2} - 1)^{4n}. \quad (1.5)$$

Умножая (1.5) на D_n^3 , получим

$$0 < |D_n^3 u_n \zeta(3) - D_n^3 v_n| < c D_n^3 (\sqrt{2} - 1)^{4n}.$$

Так как $D_n \leq 3^n$ и $3^3(\sqrt{2} - 1)^4 < 1$, то правая часть стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Откуда и следует иррациональность $\zeta(3)$.

К. Малер [50] был первым, кто рассмотрел кратные интегралы в связи с диофантовыми приближениями. Он использовал интегралы вида (см.

[21])

$$\int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^m \frac{x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1 \dots x_i)^{c_i}} dx_1 \dots dx_m$$

при специальном выборе параметров a_i, b_i, c_i , для оценки сверху линейных форм, приближающих значения биномов $(1-z)^\omega$.

В 1979 году Бейкерс [36] предложил для доказательства иррациональности $\zeta(3)$ использовать интеграл вида

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n dx dy dz}{(1-z(1-xy))^{n+1}},$$

для конструкции последовательностью Апери. В этой же работе был рассмотрен интеграл вида

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n dx dy}{(1-xy)^{n+1}},$$

с помощью которого может быть доказана иррациональность $\zeta(2)$. Этот факт был известен ранее. С помощью интеграла Бейкерса и иного выбора параметров была улучшена оценка меры иррациональности π^2 . Были также предприняты различные попытки обобщения интегралов Бейкерса для изучения дзета-функции Римана в целых точках.

В свою очередь, Рином и Виолой [54] для получения более точной оценки меры иррациональности $\zeta(3)$ была рассмотрена групповая структура интеграла.

Как оказалось, исследование групповой структуры является важ-

ным элементом получения оценки меры иррациональности значений дзета-функции Римана в целых точках.

В 1990 году О. Н. Василенко [9] рассмотрел интеграл

$$I = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^n (1 - x_i)^n \overline{dx_i}}{(1 - x_1 + x_1 x_2 - \dots + (-1)^m x_1 \cdot \dots \cdot x_m)^{n+1}}, \quad (1.6)$$

который при $m = 2$ совпадает с интегралом Бейкерса. Д. В. Васильев [12] доказал, что при $m = 4$ интеграл (1.6) представим в виде линейной формы от чисел $1, \zeta(2), \zeta(4)$, т.е.

$$I = p\zeta(4) + q\zeta(2) + r, \quad (1.7)$$

где $p, q, r \in \mathbb{Q}$. Для этого интеграла им была получена следующая оценка: $0 < 4 \cdot I \cdot D_n^4 < 7 \cdot \zeta(4) \cdot \beta^n$, где $\beta = -21z^2 + 75z - 40$, $z \in [0, 1]$ — корень уравнения $z^3 - 3z^2 + 1 = 0$, $\beta \approx 0.02 \dots$

В 1998 году В. Н. Сорокин [29] ввел в рассмотрение интеграл вида

$$I = \int_{[0,1]^3} \frac{x_1^n (1 - x_1)^n x_2^n (1 - x_2)^n x_3^n (1 - x_3)^n dx_1 dx_2 dx_3}{(1 - x_1 x_2)^{n+1} (1 - x_1 x_2 x_3)^{n+1}}. \quad (1.8)$$

Интеграл (1.8) равен интегралу, рассматриваемому ранее Бейкерсом, а затем Д. В. Васильевым. Это было доказано С. Фишлером [41] и С. А. Злобиным [17].

В. В. Зудилин [19] рассмотрел s -кратный интеграл вида

$$I(a, b) = \int_{[0,1]^s} \frac{\prod_{j=1}^s x_j^{a_j-1} (1 - x_j)^{b_j-a_j-1} dx_1 \cdot \dots \cdot dx_s}{(1 - x_1(1 - x_2(\dots(1 - x_{s-1}(1 - x_s)) \dots)))^{a_0}}, \quad (1.9)$$

который является естественным обобщением интеграла (1.6).

При $Reb_j > Rea_j > 0$, $j = 1, \dots, s$, $Reb_1 \geq Re(a_1 + a_0)$ интеграл (1.9) сходится абсолютно.

Если все a и b целые, положительные параметры, которые удовлетворяют дополнительному условию $b_1 + a_2 = \dots = b_{s-1} + a_s$, то интеграл (1.9) есть $\mathbb{Q}$ -линейная форма от дзета-значений одинаковой четности.

В свою очередь, С. А. Злобин [15], [16] доказал (в наиболее общих предположениях), что заменой переменных при $z = 1$ интеграл (1.9) может быть приведен к форме

$$S(z) = \int_{[0,1]^s} \frac{\prod_{j=1}^s x_j^{a_j-1} (1-x_j)^{b_j-a_j-1} dx_1 \cdot \dots \cdot dx_s}{\prod_{i=1}^m (1-zx_1 \dots x_{r_i})^{c_i}}, \quad (1.10)$$

где $1 \leq r_1 < \dots < r_m = s$.

Интеграл (1.10) является обобщением интеграла, введенного ранее В. Н. Сорокиным.

В четвёртой главе диссертации рассмотрен четырехкратный интеграл, представимый в виде линейной формы (1.7)

$$I = \frac{\Gamma(a_2 + b_2 - c)\Gamma(c)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)} \int_{[0,1]^4} \frac{\prod_{i=1}^4 x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-1} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4}{(1-x_1 + x_1 x_2 (1-x_3 x_4))^c}, \quad (1.11)$$

параметры которого удовлетворяют следующим условиям: $a_i, b_i, c \in \mathbb{N}, i = \overline{1, 4}, a_1 + b_1 = a_4 + b_2, a_2 + b_2 = b_3 + b_4$.

Для интеграла (1.11) получены четыре преобразования, которые лежат в

основе групповой структуры.

Всевозможные комбинации этих преобразований образуют группу G , состоящую из 720 элементов.

Актуальность рассмотрения групповой структуры связана с проблемой оценки интеграла, а также оценки меры иррациональности значений дзета-функции Римана в целых точках.

Также рассмотрен интеграл типа интеграла (1.8) В. Н. Сорокина [29], который имеет вид

$$I = \int_{[0,1]^4} \frac{x_1^{a_1-1}(1-x_1)^{b_1-1}x_2^{a_2-1}(1-x_2)^{b_2-1}x_3^{a_2+b_2-1}(1-x_3)^{a_4-1}}{(1-x_3x_4)^{\alpha_2}} \times \\ \times \frac{x_4^{b_3-1}(1-x_4)^{b_4-1}\overline{dx}}{(1-x_1(1-x_2x_3))^{\alpha_1}}, \quad (1.12)$$

где $\overline{dx} = dx_1dx_2dx_3dx_4$, $a_i, b_i, \alpha_j \in \mathbb{N}, i = \overline{1,4}, j = \overline{1,2}$.

При $m = 4$ и соответствующей замене переменных, а именно $u = 1 - x_3x_4$, $v = \frac{1-x_3}{1-x_3x_4}$ интеграл (1.6) представим в виде (1.12).

Но в интеграле (1.12), в отличие от интегралов Бейкера (1.6) и В. Н. Сорокина (1.8), на один свободный параметр больше.

В результате всевозможных комбинаций пяти преобразований, которые лежат в основе групповой структуры интеграла (1.12), была получена группа $\tilde{G}$, состоящая из 288 элементов.

Для интегралов (1.11) и (1.12) при определенных условиях на параметры справедливы теорема 4.1 и теорема 4.2 соответственно о представ-

лении их в виде линейной формы (1.7). Сформулируем эти теоремы.

Теорема 4.1 Пусть для параметров интеграла (1.11) выполняются следующие условия:

$$1) c \leq a_2 + b_2 + 1; \quad 2) a_2 + b_2 \leq b_4 + b_3; \quad 3) c \leq a_2 + b_1;$$

$$4) \min(a_3, a_4) + b_2 \geq \min(a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$5) \max(a_3, a_4) + b_2 \geq \max(a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

Тогда интеграл (1.11) можно представить в виде линейной формы (1.7).

Аналогично для интеграла (1.12).

Теорема 4.2 Интеграл (1.12) представим в виде линейной формы (1.7), если для его параметров справедливы следующие условия:

$$1) b_4 > \alpha_2, \alpha_2 \geq a_1^* - \alpha_1^*, a_2 \geq \alpha_1^*; \quad 2) a_1 + b_1 \leq a_4 + b_2;$$

$$3) \alpha_1 < b_1, a_2 + b_2 \geq b_3 + b_4; \quad 4) a_2 + b_2 + b_1 = \alpha_1 + b_3 + b_4,$$

где $\alpha_1^* = \min(a_1, \alpha_1)$, $a_1^* = \max(a_1, \alpha_1)$, $\alpha_2^* = \min(\alpha_2, b_3)$.

Основные результаты настоящей диссертации опубликованы в работах [1]–[7].

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук В.Х. Салихову за интересную тему, постановку задач и постоянное внимание к работе.

1.2 Вспомогательные утверждения.

Сформулируем коротко вспомогательные результаты, которые понадобятся для исследования. Стандартным приёмом, который используется при построении рациональных приближений, является конструирование линейных форм и исследование поведения коэффициентов этих линейных форм при значении параметра, стремящемся к бесконечности. Используя этот способ будем опираться на следующую лемму, которая принадлежит М. Хата [44, замечание 2.1].

Лемма 1.1 *Пусть α действительное иррациональное число и последовательность пар целых чисел q_n, p_n удовлетворяет условиям*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |q_n| = \sigma > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{n} \ln |q_n \alpha + p_n| \leq -\tau, \quad \tau > 0.$$

Тогда показатель иррациональности числа α удовлетворяет неравенству

$$\mu(\alpha) \leq 1 + \frac{\sigma}{\tau}.$$

В лемме 1.2 сформулируем результаты К. Виолы, Дж. Рина [53] и М. Хата [44].

Лемма 1.2 *Пусть $c_1 = \beta_1 n, \dots, c_m = \beta_m n, d_1 = \alpha_1 n, \dots, d_l = \alpha_l n$, где $n \in \mathbb{N}$, все $\beta_i, \alpha_j \in \mathbb{N}$, $c_1 + \dots + c_m = d_1 + \dots + d_l$, $\frac{c_1! \cdot \dots \cdot c_m!}{d_1! \cdot \dots \cdot d_l!} = \frac{b_n}{a_n}$, $(a_n, b_n) = 1$.*

Пусть далее

$$\begin{aligned} E &= \{\omega \in [0, 1) \mid \varphi(\omega) = \\ &= [\beta_1\omega] + \dots + [\beta_m\omega] - [\alpha_1\omega] - \dots - [\alpha_l\omega] \geq 1\} = \\ &= \bigcup_{r=1}^s [u_r, v_r), \end{aligned}$$

где $u_l < v_l < u_{l+1}$, $v_l, u_l \in \mathbb{Q}$, $u_1 > 0$.

Тогда выполняется неравенство $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln b_n \geq \sum_{r=1}^s (\psi(v_r) - \psi(u_r))$,

где $\psi(\xi) = \frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)}$ — логарифмическая производная гамма-функции.

Если $\varphi(\omega) \leq 1$, $\omega \in [0, 1)$, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln b_n = \sum_{r=1}^s (\psi(v_r) - \psi(u_r))$.

Лемма 1.2 является следствием следующей леммы (см. [22, лемма 6]).

Лемма 1.3 Пусть u, v — действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $0 < u < v < 1$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{u \leq \left\{\frac{n}{p}\right\} \leq v} \ln p = \psi(v) - \psi(u),$$

где суммирование ведется по всем простым числам p , с условием, что дробная часть $\left\{\frac{n}{p}\right\}$ удовлетворяет неравенствам, указанным под знаком суммы.

В настоящей работе применяются асимптотические методы и основные идеи метода Чудновского — Рухадзе — Хата ”сокращения простых”. Сформулируем основные моменты одной из схем ”сокращения простых”, рассмотренных Е. А. Рухадзе [24].

Рассмотрим линейные формы

$$l = l_0 = \alpha_{00} + \alpha_{01}\theta_1 + \dots + \alpha_{0s}\theta_s,$$

, ...,

$$l_j = \alpha_{j0} + \alpha_{j1}\theta_1 + \dots + \alpha_{js}\theta_s,$$

где все $\alpha_{ji} \in \mathbb{Q}$, $1, \theta_1, \dots, \theta_s$ — линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Пусть для любого j справедливо представление

$$l_j = \frac{A_j}{B_j} l_0,$$

где все $A_j, B_j \in \mathbb{N}$ и $(A_j, B_j) = 1$, Q — общий знаменатель для всех α_{ji} . Тогда $Q \cdot l_j = Q \cdot \frac{A_j}{B_j} l_0$ — линейная форма с целыми коэффициентами. Следовательно, все $Q \cdot \frac{A_j}{B_j} \alpha_{0k} \in \mathbb{Z}$. Значит все простые $p > \sqrt{Q}$, являющиеся общими делителями Q и B_j не могут входить в знаменатель ни одного из α_{0k} .

Для исследования асимптотического поведения интегралов в работе будут применяться такие методы как метод Лапласа, метод перевала и двойной метод перевала. Приведем основные идеи этих методов (см. [31]).

Интегралами Лапласа называются интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx, \quad (1.13)$$

где $S(x)$ — вещественная функция, λ — большой положительный параметр, $f(x)$ может принимать и комплексные значения. Пусть I — некоторый ин-

тервал, $C[I]$ — класс непрерывных на I функций, $C^r[I]$ — класс r раз непрерывно дифференцируемых на I функций.

Теорема 1.1 [31, теорема 1.3, с. 39] Пусть $I = [a, b]$ — конечный отрезок и выполнены условия:

1. $f(x), S(x) \in C[I]$;
2. Максимум $S(x)$ достигается только в точке x_0 , $a < x_0 < b$;
3. $f(x), S(x) \in C^\infty$ при x , близких к x_0 и $S''(x_0) \neq 0$.

Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \approx \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} f(x_0) e^{\lambda S(x_0)}. \quad (1.14)$$

Аналогичное свойство будет выполнено в случае, если максимум подынтегральной функции достигается на конце отрезка интегрирования.

Теорема 1.2 [31, теорема 1.4, с. 41] Пусть $I = [a, b]$ — конечный отрезок и выполнены условия:

1. $f(x), S(x) \in C[I]$;
2. Максимум $S(x)$ достигается только в точке $x_0 = a$;
3. $f(x) \in C[I], S(x) \in C^\infty[x_0, x_0 + \delta], \delta > 0$ и $S''(x_0) \neq 0$.

Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$F(\lambda) \approx \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(a)}} f(a) e^{\lambda S(a)}.$$

Метод Лапласа является частным случаем более общего метода исследования асимптотики комплексных интегралов — метода перевала.

Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz,$$

где

A_1 : γ — кусочно - гладкая кривая в комплексной плоскости z ;

A_2 : функции $f(z), S(z)$ голоморфны в окрестности кривой γ ;

A_3 : при $\lambda > 0$ выполнено условие

$$\int_{\gamma} |f(z)| |e^{\lambda S(z)}| dz < \infty.$$

Введем определение точки перевала.

Точка z_0 называется точкой перевала функции $S(z)$, если $S'(z_0) = 0$.

Порядок точки перевала равен $n \geq 1$, если

$$S'(z_0) = \dots = S^{(n)}(z_0) = 0, \quad S^{(n+1)}(z_0) \neq 0.$$

При $n = 1$ точка перевала называется *простой*.

Лемма 1.4 [31, лемма 1.2, с. 166] Пусть z_0 - точка перевала порядка n функции $S(z)$. В малой окрестности U точки z_0 линия уровня $\Re S(z) = \Re S(z_0)$ состоит из $n+1$ аналитических кривых, которые пересекаются в точке z_0 и разбивают U на $2n+2$ секторов с углами $\frac{\pi}{n+1}$ при вершине. В соседних секторах знаки функции $\Re[S(z) - S(z_0)]$ различны.

Теорема 1.3 [31, теорема 1.3, с. 170] Пусть $\max_{z \in \gamma} \Re S(z)$ достигается только в точке z_0 , которая является внутренней точкой контура γ

и простой точкой перевала функции $S(z)$ и выполнено условие

A_0 : В окрестности точки перевала z_0 контур γ проходит через два различных сектора, в которых $\Re S(z) < \Re S(z_0)$.

Тогда при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$F(\lambda) \equiv \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz \sim e^{\lambda S(z_0)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k-\frac{1}{2}}.$$

Это асимптотическое разложение можно дифференцировать любое число раз.

Главный член асимптотики

$$F(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(z_0)}} f(z_0) e^{\lambda S(z_0)},$$

а остаточный член имеет вид $O\left(\lambda^{-\frac{3}{2}}\right) e^{\lambda S(z_0)}$. Выбор ветви корня при этом такой, что $\arg \sqrt{-S''(z_0)}$ равен углу между положительным направлением касательной к γ в точке z_0 и положительным направлением вещественной оси.

Для метода перевала в многомерном случае рассмотрим интеграл Лапласа вида

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz. \quad (1.15)$$

Здесь $z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n$, $dz = dz_1 \dots dz_n$, γ есть n -мерное гладкое многообразие (возможно с краем), λ — большой положительный параметр.

Функции $f(z)$, $S(z)$ голоморфны в некоторой окрестности контура γ . Считаем, что $f(z) \neq 0$, $S(z) \neq \text{const}$.

В настоящей работе возможно применение двойного метода перевала, но в силу того, что он является технически сложным и ненаглядным, для исследования асимптотического поведения интегралов была рассмотрена некая конструкция, с помощью которой получены необходимые результаты.

Основная идея метода перевала в многомерном случае та же, что и в одномерном. Рассмотрим интеграл

$$F_1(\lambda) = \int_{\gamma_0} \exp[\lambda S(z)] dz. \quad (1.16)$$

где γ_0 — компактное многообразие с краем.

Будем полагать, что можно ограничиться только такими $\gamma \in \Gamma$, для которых $V(\gamma) \leq C = \text{const}$. Допустим, что существует $\gamma^* \in \Gamma$ такое, на котором достигается минимакс

$$\min_{\gamma \in \Gamma} \max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z). \quad (1.17)$$

Если γ^* — минимаксный контур (см.[31, лемма 1.2, с.253]), то $\max_{z \in \gamma^*} \operatorname{Re} S(z)$ достигается либо на краю этого многообразия, либо в точке z_0 такой, что

$$S'_z(z^0) = 0. \quad (1.18)$$

Такая точка z^0 называется *точкой перевала* функции $S(z)$.

Точка перевала z^0 функции $S(z)$ называется *невыврожденной*, если $\det S''_{zz}(z^0) \neq 0$.

Рассмотрим интеграл $F(\lambda)$ вида (1.15), где γ есть n -мерное гладкое компактное многообразие с краем, функции $f(z), S(z)$ голоморфны при $z^0 \in \gamma$.

Теорема 1.4 [31, теорема 1.1, с. 258] Пусть $\max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в точке $z^0 \in \gamma$, которая является невырожденной точкой перевала и внутренней точкой контура γ . Тогда при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) \exp[\lambda S(z)] dz \sim \lambda^{-\frac{n}{2}} \exp[\lambda S(z^0)] \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k}.$$

Это разложение можно дифференцировать по λ любое число раз.

Предложение 1.1 [31, предложение 1.1, с. 259] В условиях теоремы 1.4 главный член асимптотики интеграла (1.15) имеет вид

$$F(\lambda) = \pm \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{\frac{n}{2}} \exp[\lambda S(z^0)] \prod_{j=1}^n (-\mu_j)^{-\frac{1}{2}} [f(z^0) + O(\lambda^{-1})]. \quad (1.19)$$

Здесь μ_j — собственные значения матрицы $S''_{zz}(z^0)$ и

$$|\arg \sqrt{-\mu_j}| < \frac{\pi}{4}.$$

Короче формулу (1.19) можно записать так

$$F(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{\frac{n}{2}} \exp[\lambda S(z^0)] [\det(-S''_{zz}(z^0))]^{-\frac{1}{2}} [f(z^0) + O(\lambda^{-1})]. \quad (1.20)$$

Глава 2

Мера иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

2.1 Интеграл Марковеккио и мера иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

Теорема 2.1. *Справедлива оценка*

$$\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leq 4,601057\dots$$

Доказательство. Для доказательства теоремы рассмотрим интеграл вида:

$$\begin{aligned} I &= I(h, j, k, m, l, q; x) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} ds \int_{l_2} \frac{s^h t^j dt}{(1-s)^{l+k-j+1} (s-t)^{h+j-k+1} (t-x)^{k+m-h+1}}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где l_1 - отрицательная вещественная полуось; l_2 - мнимая ось; $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$.

Причем для параметров h, j, q, k, l, m выполняются следующие условия:

$$1) h, j, q, k, l, m \in \mathbb{N};$$

$$2) h + j + q = k + l + m; \quad l + k - j = q + h - m \geq 0;$$

$$h + j - k = m + l - q \geq 0; \quad k + m - h = j + q - l \geq 0;$$

$$3) 0 < k = q < h = l < j = m; \quad 2h = j + k.$$

Компьютерный перебор параметров интеграла (2.1) дал те же самые оптимальные значения, что и в работе Р. Марковеккио [51]:

$$h = l = 5n; \quad j = m = 6n; \quad k = q = 4n; \quad n \in \mathbb{N}; \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Пусть $x \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} x > 0$. Рассмотрим интеграл

$$I_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} ds \int_{l_2} \frac{dt}{(1-s)(s-t)(t-x)} = -\frac{1}{1-x} \ln x.$$

В работе [51] показано, что в данной ситуации

$$I = \frac{1}{(1-x)(k+m+l+1)} (Q_n(x) \ln x - R_n(x)),$$

где $Q_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $R_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

При $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ получим

$$\frac{1}{1-x} = x, \quad \ln x = \ln \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = i \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} i \sqrt{3} \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Очевидно, что $2x^M \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$ для любого $M \in \mathbb{N}$.

Для получения оценки необходимо исследовать асимптотику интеграла и коэффициентов линейной формы $L = 6I = Q_n(x) \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) - R_n(x)$. К полученной линейной форме применим лемму 1.1.

При получении асимптотики интеграла и коэффициентов линейных форм используется метод перевала (метод седловых точек).

Для этого рассмотрим функцию

$$f(s, t) = \frac{s^{h'} t^{j'}}{(1-s)^{l'+k'-j'} (s-t)^{h'+j'-k'} (t-x)^{k'+m'-h'}}, \quad (2.2)$$

где $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$.

Для набора параметров

$$h' = l' = 5; \quad j' = m' = 6; \quad k' = q' = 4 \quad (2.3)$$

функция (2.2) равна

$$f(s, t) = \frac{s^5 t^6}{(1-s)^3 (s-t)^7 (t-x)^5},$$

Согласно выводам Р. Марковеккио, использовавшего для этой цели двойной метод перевала, C^2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Q_n(\sqrt{3}i) = \ln |f(s_1, t_1)|$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |I_n| \leq \ln |f(s_2, t_2)|,$$

где s_1 и s_2 – комплексные корни уравнения

$$\begin{aligned} h' k' s^3 - (j' - h')((j' - k')x + h' + 2k')s^2 + (j' - h')(j' - k' + \\ + (h' + 2k')x)s - h' k' x = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

удовлетворяющие условиям:

1) s_1 находится вблизи точки $x = 1$, а t_1 вблизи точки $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$,
причем $\ln|f(s_1, t_1)| > 0$;

2) s_2 выбирается таким образом, чтобы

$$|\ln|f(s_2, t_2)|| = \min\{|\ln|f(s_2, t_2)||, |\ln|f(s_3, t_3)||\}.$$

Соответствующие им t_1 и t_2 находятся из уравнения

$$t = s \frac{h's - m' + k'}{h' - (m' - k')s}.$$

Для параметров (2.3) уравнение (2.4) принимает вид

$$20s^3 - (14 + 1,732i)s^2 + (8,5 + 11,258i)s - (10 + 17,321i) = 0.$$

Тогда

$$s_1 = 0,978 + 0,2099i, t_1 = 0,767 + 0,642i, \ln|f(s_1, t_1)| = 15,065 \dots;$$

$$s_2 = 0,262 - 0,965i, t_2 = -0,96 + 0,2798i, \ln|f(s_2, t_2)| = -6,745 \dots;$$

$$s_3 = -0,53996 + 0,842i, t_3 = 0,10996 - 0,939i, \ln|f(s_3, t_3)| = -9,563 \dots$$

По методу перевала в C^2 можно построить два контура – Γ и Δ , проходящие через точки s_1 и t_1 соответственно. Контур Δ проходит через точку t_1 вокруг точки $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$. Контур Γ проходит через точку s_1 и содержит внутри себя точку $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ и контур Δ . Оба эти контура можно деформировать таким образом, чтобы для всех комплексных пар $(s, t) \in \Gamma \times \Delta$ выполнялось условие $\ln|f(s, t)| \leq \ln|f(s_1, t_1)|$.

Для линейной формы L вычислим σ и τ .

Применяя процедуру сокращения простых, описанную у Р. Марковскио [51], получим $D_n Q(x), D_n R(x) \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$. Здесь $D_n = \frac{d_{Mn}}{\Delta_n}$, $M = \max\{k, m, h, k + h - m, m + h - k, m + k - h\}$, Δ_n - произведение всех простых чисел $p > \sqrt{Mn}$, таких, что $\{\frac{p}{n}\} \in \Omega$.

Множество Ω при данных значениях параметров состоит из трех интервалов, а именно:

$$\Omega = \left[\frac{1}{6}, \frac{3}{7}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{7}\right) \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{6}{7}\right).$$

Обозначим

$$\begin{aligned} C_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} D_n = M - \int_{\Omega} d\Psi(z) = \\ &= 7 - \left(\Psi\left(\frac{3}{7}\right) - \Psi\left(\frac{1}{6}\right) + \Psi\left(\frac{5}{7}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2}\right) + \Psi\left(\frac{6}{7}\right) - \Psi\left(\frac{3}{4}\right) \right) = \\ &= 2.005 \dots \end{aligned}$$

Тогда

$$\sigma = \ln|f(s_1, t_1)| + C_0 = 15.065 \dots + 2.005 \dots = 17.07 \dots$$

$$\tau = -\ln|f(s_2, t_2)| - C_0 = 6.745 \dots - 2.005 \dots = 4.740 \dots$$

Таким образом, по лемме 1.1 для линейной формы имеем

$$\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leq 1 + \frac{\sigma}{\tau} = 4.601057 \dots$$

Теорема 2.1 доказана.

2.2 Идея симметрии и интеграл Марковеккио в новой интегральной конструкции

Пусть $x \in \mathbb{Q}, x \neq 1, x > 0, h, j, k, l, m, q \in \mathbb{Z}^+, h + j + q = k + l + m, l + k - j \geq 0, h + j - k \geq 0, k + m - h \geq 0$.

Рассмотрим интеграл

$$J \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s^h t^j dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{l+k-j+1} (s-t)^{h+j-k+1} (t-x)^{k+m-h+1}}, \quad (2.5)$$

в котором ветвь корня $\sqrt{\frac{s}{s-1}}$ выберем следующим образом: на комплексной плоскости ω проведем разрез $(-\infty; 0)$. Тогда для $\omega = |\omega|e^{i\varphi}$, где $-\pi < \varphi < \pi$, определим $\sqrt{\omega} = \sqrt{|\omega|}e^{\frac{i\varphi}{2}}$. Функция $\sqrt{\frac{s}{s-1}}$ аналитична на комплексной плоскости s с разрезом по лучу $(0; +\infty)$, так как равенство $\omega = \frac{s}{s-1} = -k, k > 0$, равносильно равенству $s = \frac{k}{k+1} \in (0; 1)$.

Отметим, что интеграл (2.3) отличается от интеграла Марковеккио (см. [51; формула (5)]) лишь множителем $\sqrt{\frac{s}{s-1}}$ в знаменателе подынтегральной функции. Заметим также, что в работе [51] проведено подробное исследование сходимости интеграла (5).

Эти же рассуждения применимы и в нашей ситуации. Изменим в интеграле (2.5) порядок интегрирования.

Пусть в интеграле (2.5) $s = \frac{u}{u-1}$. Тогда $u = \frac{s}{s-1}$, для $s \in (0; -\infty)$ имеем $u \in (0; 1)$; $ds = -\frac{du}{(1-u)^2}, 1-s = \frac{1}{1-u}$.

$$J \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{t^j}{(t-x)^{k+m-h+1}} J_s dt, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} J_s &\equiv - \int_0^1 \frac{\left(\frac{u}{u-1}\right)^h (1-u)^{l+k-j+1} (u-1)^{h+j-k+1} \frac{du}{(1-u)^2}}{\sqrt{u}(u-t(u-1))^{h+j-k+1}} \\ &\equiv (-1)^{j-k} \int_0^1 \frac{u^h (1-u)^l du}{\sqrt{u}(t+(1-t)u)^{h+j-k+1}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Положим в интеграле (2.7) $u = z^2$ ($\sqrt{u} = z$, $z \in [0; 1]$, $du = 2zdz$):

$$J_s \equiv 2(-1)^{j-k} \int_0^1 \frac{z^{2h}(1-z)^l(1+z)^l dz}{(t+(1-t)z^2)^{h+j-k+1}}. \quad (2.8)$$

Из (2.6) и (2.8) имеем

$$J \equiv 2(-1)^{j-k} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{t^j dt}{(t-x)^{k+m-h+1}} \int_0^1 \frac{z^{2h}(1-z)^l(1+z)^l dz}{(t+(1-t)z^2)^{h+j-k+1}}, \quad (2.9)$$

Проведём в интеграле (2.9) интегрирование по t . В полуплоскости $\text{Re } t > 0$ находится единственная особая точка $t = x$, так как $t + (1-t)z^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{z^2}{z^2-1} \in (-\infty; 0]$. По теореме Коши о вычетах с учетом направления интегрирования по мнимой оси имеем

$$J = 2(-1)^{j-k+1} \text{Res}_{t=x} \frac{u_1(t)u_2(t)}{(t-x)^{k+m-h+1}},$$

где

$$u_1(t) = t^j, \quad u_2(t) = \int_0^1 \frac{z^{2h}(1-z)^l(1+z)^l dz}{(t+(1-t)z^2)^{h+j-k+1}}.$$

Обозначим $D_r(u(t)) = \frac{1}{r!} \frac{d^r u(t)}{dt^r} \Big|_{t=x}$.

По теореме Лейбница

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{t=x} \frac{u_1(t)u_2(t)}{(t-x)^{k+m-h+1}} &= D_{k+m-h}(u_1(t)u_2(t)) = \\ &= \sum_{\substack{l_1+l_2=k+m-h \\ l_1, l_2 \geq 0; \ l_1 \leq j}} D_{l_1}(u_1(t))D_{l_2}(u_2(t)), \end{aligned}$$

а тогда

$$\begin{aligned} J &= 2(-1)^{j-k+1} \sum_{\substack{l_1+l_2=k+m-h \\ l_1, l_2 \geq 0; \ l_1 \leq j}} \frac{j \cdot (j-1) \cdot \dots \cdot (j-l_1+1)}{l_1!} x^{j-l_1} (-1)^{l_2} \cdot \\ &\cdot \frac{(h+j-k+1) \cdot \dots \cdot (h+j-k+l_2)}{l_2!} \int_0^1 \frac{z^{2h}(1-z)^{l+l_2}(1+z)^{l+l_2} dz}{(x+(1-x)z^2)^{h+j-k+l_2+1}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Покажем, что все интегралы в (2.10) представимы в виде

$$Q\alpha + R, \quad (2.11)$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ в случае $0 < x < 1$ и $\alpha = \frac{1}{a} \log \frac{a+1}{a-1}$ в случае $x > 1$, $a = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$, $a > 1$; $Q, R \in \mathbb{Q}$.

Произвольный интеграл в (2.10) удобно представить в виде

$$\int_0^1 \frac{z^{2h}(1-z^2)^{l+l_2} dz}{(X+z^2)^{h+j-k+l_2+1}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{h+j-k+l_2+1}}, \quad X = \frac{x}{1-x} \in \mathbb{Q}.$$

Далее, разлагая подынтегральную функцию в сумму простейших дробей по переменной z^2 , получим

$$\frac{z^{2h}(1-z^2)^{l+l_2}}{(X+z^2)^{h+j-k+l_2+1}} = P + \sum_{\nu=1}^{h+j-k+l_2+1} \frac{\gamma_\nu}{(X+z^2)^\nu},$$

где $P \in \mathbb{Q}[z^2]$, все $\gamma_\nu \in \mathbb{Q}$.

Достаточно показать, что все интегралы $\int_0^1 \frac{dz}{(X+z^2)^\nu} \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\alpha$.

Имеем, при $\nu = 1$ в случае $X > 0$, $\int_0^1 \frac{dz}{X+z^2} = \frac{1}{\sqrt{X}} \arctan \frac{1}{\sqrt{X}} = \alpha$, в случае $X < 0$, $X = -a^2$, аналогично $\int_0^1 \frac{dz}{z^2-a^2} = -\frac{1}{2a} \log \frac{a+1}{a-1} = -\frac{1}{2}\alpha$. Остается заметить, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dz}{(X+z^2)^{\nu+1}} &= \frac{1}{X} \left(\int_0^1 \frac{dz}{(X+z^2)^\nu} - \int_0^1 \frac{z^2 dz}{(X+z^2)^{\nu+1}} \right) = \\ &= \frac{1}{X} \left(\int_0^1 \frac{dz}{(X+z^2)^\nu} + \frac{1}{2\nu(X+1)^\nu} - \frac{1}{2\nu} \int_0^1 \frac{dz}{(X+z^2)^\nu} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл J представляет собой линейную форму от 1 и α с рациональными коэффициентами.

Рассмотрим преобразования интеграла (2.5). Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. Пусть дан интеграл

$$J = J(a, b, c) = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx}{(A+Bx)^c},$$

в котором $A > 0$, $A+B > 0$, $a, b, c > 0$. Тогда справедлива следующая формула

$$\begin{aligned} J &= (A+B)^{b-c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)} \int_0^1 \frac{x^{a+b-c-1}(1-x)^{c-1} dx}{(A+Bx)^b} = \\ &= (A+B)^{b-c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)} J(a+b-c, c, b). \end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства леммы 2.1. рассмотрим фор-

мулу Эйлера для гипергеометрической функции Гаусса

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}dx}{(1-zx)^a}$$

и формулу Куммера $F(a, b, c; z) = (1-z)^{c-a-b}F(c-b, c-a, c; z)$ (см. [8; формула (10), с.72; формула (23), с.76]). С одной стороны,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx}{(A+Bx)^c} &= \frac{1}{A^c} \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx}{(1+\frac{B}{A}x)^c} = \\ &= \frac{1}{A^c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} F(c, a, a+b; -\frac{B}{A}). \end{aligned}$$

С другой стороны, по формуле Куммера

$$\begin{aligned} F(c, a, a+b; -\frac{B}{A}) &= (1+\frac{B}{A})^{b-c} F(b, a+b-c, a+b; -\frac{B}{A}) = \\ &= (1+\frac{B}{A})^{b-c} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)} \int_0^1 \frac{x^{a+b-c-1}(1-x)^{c-1}dx}{(1+\frac{B}{A}x)^b}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx}{(A+Bx)^c} &= \\ &= \frac{1}{A^c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} (1+\frac{B}{A})^{b-c} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)} \int_0^1 \frac{x^{a+b-c-1}(1-x)^{c-1}dx}{(1+\frac{B}{A}x)^b} = \\ &= \frac{1}{A^{c+b-c-b}} (A+B)^{b-c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)} \int_0^1 \frac{x^{a+b-c-1}(1-x)^{c-1}dx}{(A+Bx)^b} = \\ &= (A+B)^{b-c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)} J(a+b-c, c, b). \end{aligned}$$

Лемма 2. 1. доказана.

1) Применим лемму 2. 1. к интегралу в (2.7). Имеем

$$\int_0^1 \frac{u^{h-\frac{1}{2}}(1-u)^l du}{(t+(1-t)u)^{h+j-k+1}} = \frac{\Gamma(h+\frac{1}{2})\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+k-j+\frac{1}{2})\Gamma(h+j-k+1)} J_1, \text{ где}$$

$$J_1 = \int_0^1 \frac{u^{l+k-j-\frac{1}{2}}(1-u)^{h+j-k} du}{(t+(1-t)u)^{l+1}}.$$

Условия леммы 2.1. выполняются при всех $t \in (-i\infty; 0) \cup (0; i\infty)$.

В интеграле J_1 сделаем обратную замену $u = \frac{s}{s-1}$, $du = -\frac{ds}{(1-s)^2}$,
 $1-u = \frac{1}{1-s}$, $t+(1-t)u = \frac{s-t}{s-1}$.

Тогда

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} \frac{\frac{s^{l+k-j}}{(1-s)^{l+k-j}}(1-s)^{l+1} \frac{1}{(1-s)^{h+j-k}} \frac{ds}{(1-s)^2}}{\sqrt{\frac{s}{s-1}}(s-t)^{l+1}} = \\ &= (-1)^{k-j} \int_0^{-\infty} \frac{s^{l+k-j} ds}{\sqrt{\frac{s}{s-1}}(1-s)^{h+1}(s-t)^{l+1}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из (2.6), (2.7), (2.12) получаем

$$J \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s^{l+k-j} t^j dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}}(1-s)^{h+1}(s-t)^{l+1}(t-x)^{k+m-h+1}} \cdot \Lambda, \quad (2.13)$$

где $\Lambda = \frac{\Gamma(h+\frac{1}{2})l!}{\Gamma(l+k-j+\frac{1}{2})(h+j-k)!}$.

2) Проведём в интеграле J замену $t = \frac{xs_1}{t_1}$, $s = s_1$. Здесь $dt ds = -\frac{xs_1}{t_1^2} ds_1 dt_1$.

Очевидно, что путь интегрирования по t_1 при каждом фиксированном $s_1 = s = -k$, $k \in (0; +\infty)$ - прямая $(-i\infty; i\infty)$, проходящая сверху вниз.

Поэтому

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds_1 \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s_1^h \frac{x^j s_1^j}{t_1^j} \frac{x s_1}{t_1} dt_1}{\sqrt{\frac{s_1}{s_1-1}} (1-s_1)^{l+k-j+1} (s_1 - \frac{x s_1}{t_1})^{h+j-k+1} (\frac{x s_1}{t_1} - x)^{k+m-h+1}} = \\
&= x^{j+h-k-m} \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 ds \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s^k t^m dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{l+k-j+1} (s-t)^{k+m-h+1} (t-x)^{h+j-k+1}} = \\
&= x^{l-q} \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 ds \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s^k t^m dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{l+k-j+1} (s-t)^{k+m-h+1} (t-x)^{h+j-k+1}}. \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Преобразование (2.14) полностью совпадает с преобразованием, проведенным в работе [51; с. 154].

Стандартным путем (см., например, [51], [53], [54]) получим соответствующую группу преобразований, порожденную двумя элементами g_1, g_2 , связанными с преобразованиями (2.13) и (2.14) интеграла (2.5).

Обозначим

$$\omega_1 = h, \quad \omega_2 = j, \quad \omega_3 = k, \quad \omega_4 = m, \quad \omega_5 = l,$$

$$\omega_6 = q, \quad \omega_7 = h + j - k, \quad \omega_8 = k + m - h, \quad \omega_9 = l + k - j,$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_6 = \omega_3 + \omega_4 + \omega_5.$$

Рассмотрим первое преобразование g_1 (см.(2.13)):

$$g_1(\omega_1) = \omega_9 = \omega_5 + \omega_3 - \omega_2, \quad g_1(\omega_2) = \omega_2,$$

$$\begin{aligned}
g_1(\omega_7) &= g_1(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) = g_1(\omega_1) + g_1(\omega_2) - g_1(\omega_3) = \\
&= \omega_5 + \omega_3 - \omega_2 + \omega_2 - g_1(\omega_3) = \omega_5.
\end{aligned}$$

Откуда $g_1(\omega_3) = \omega_3$.

Далее,

$$g_1(\omega_9) = g_1((\omega_5 + \omega_3 - \omega_2)) = g_1(\omega_5) + g_1(\omega_3) - g_1(\omega_2) = g_1(\omega_5) + \omega_3 - \omega_2 = \omega_1.$$

Следовательно, $g_1(\omega_5) = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 = \omega_7$.

$$\begin{aligned} g_1(\omega_8) &= g_1(\omega_3 + \omega_4 - \omega_1) = g_1(\omega_3) + g_1(\omega_4) - g_1(\omega_1) = \\ &= \omega_3 + g_1(\omega_4) - \omega_5 - \omega_3 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 - \omega_1. \end{aligned}$$

Получаем

$$g_1(\omega_4) = \omega_5 + \omega_3 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_2 = \omega_6.$$

$$\begin{aligned} g_1(\omega_6) &= g_1(\omega_5 + \omega_3 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_2) = \\ &= g_1(\omega_5) + g_1(\omega_3) + g_1(\omega_4) - g_1(\omega_1) - g_1(\omega_2) = \\ &= \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_3 + \omega_6 - \omega_5 - \omega_3 + \omega_2 - \omega_2 = \omega_4. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &J(h, j, k, m, l, q; x) = \\ &= \frac{\Gamma(h + \frac{1}{2})l!}{\Gamma(l + k - j + \frac{1}{2})(h + j - k)!} J(l + k - j, j, k, q, h + j - k, m; x) \end{aligned}$$

или

$$J(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6; x) = \frac{\Gamma(\omega_1 + \frac{1}{2})(\omega_5)!}{\Gamma(\omega_9 + \frac{1}{2})(\omega_7)!} J(\omega_9, \omega_2, \omega_3, \omega_6, \omega_7, \omega_4; x).$$

Получили преобразование $g_1: (\omega_1, \omega_9)(\omega_4, \omega_6)(\omega_5, \omega_7)$.

Из второго преобразования g_2 (см.(2.14)) следует, что

$$J(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6; x) = x^{\omega_5 - \omega_6} J(\omega_3, \omega_4, \omega_1, \omega_2, \omega_6, \omega_5; x).$$

Поэтому

$$g_2: (\omega_1, \omega_3)(\omega_2, \omega_4)(\omega_5, \omega_6).$$

Покажем, что функция

$$\Phi(\bar{\omega}) = x^{\omega_3 - \omega_2} \frac{J(\bar{\omega})}{\Gamma(\omega_1 + \frac{1}{2})\Gamma(\omega_3 + \frac{1}{2})(\omega_2)!(\omega_4)!(\omega_5)!(\omega_6)!}$$

является инвариантной функцией относительно группы $G = \langle g_1, g_2 \rangle$.

Если функция $\Phi(\bar{\omega})$ инвариантна относительно преобразования g_1 , то

$$\frac{\Phi(g_1(\bar{\omega}))}{\Phi(\bar{\omega})} = 1. \text{ Действительно,}$$

$$\Phi(g_1(\bar{\omega})) = x^{\omega_3 - \omega_2} \frac{J(g_1(\bar{\omega}))}{\Gamma(\omega_9 + \frac{1}{2})\Gamma(\omega_3 + \frac{1}{2})(\omega_2)!(\omega_4)!(\omega_7)!(\omega_6)!}$$

Тогда

$$\frac{\Phi(g_1(\bar{\omega}))}{\Phi(\bar{\omega})} = \frac{x^{\omega_3 - \omega_2} J(g_1(\bar{\omega}))\Gamma(\omega_1 + \frac{1}{2})\Gamma(\omega_3 + \frac{1}{2})(\omega_2)!(\omega_4)!(\omega_5)!(\omega_6)!}{x^{\omega_3 - \omega_2} J(\bar{\omega})\Gamma(\omega_9 + \frac{1}{2})\Gamma(\omega_3 + \frac{1}{2})(\omega_2)!(\omega_4)!(\omega_7)!(\omega_6)!} = 1.$$

Так как ввиду равенства (2.13) $J(\bar{\omega}) = \frac{\Gamma(\omega_1 + \frac{1}{2})(\omega_5)!}{\Gamma(\omega_9 + \frac{1}{2})(\omega_7)!} J(g_1(\bar{\omega}))$.

Аналогично покажем, что функция $\Phi(\bar{\omega})$ инвариантна относительно преобразования g_2 . Имеем

$$\Phi(g_2(\bar{\omega})) = x^{\omega_1 - \omega_4} \frac{J(g_2(\bar{\omega}))}{\Gamma(\omega_3 + \frac{1}{2})(\omega_4)!\Gamma(\omega_1 + \frac{1}{2})(\omega_2)!(\omega_6)!(\omega_5)!}.$$

Тогда

$$\frac{\Phi(g_2(\bar{\omega}))}{\Phi(\bar{\omega})} = \frac{x^{\omega_1 - \omega_4} J(g_2(\bar{\omega}))\Gamma(\omega_1 + \frac{1}{2})\Gamma(\omega_3 + \frac{1}{2})(\omega_2)!(\omega_4)!(\omega_5)!(\omega_6)!}{x^{\omega_3 - \omega_2} J(\bar{\omega})\Gamma(\omega_3 + \frac{1}{2})(\omega_4)!\Gamma(\omega_1 + \frac{1}{2})(\omega_2)!(\omega_6)!(\omega_5)!} = 1.$$

Так как из равенства (2.14) $J(\bar{\omega}) = x^{\omega_1 - \omega_4 - \omega_3 + \omega_2} J(g_2(\bar{\omega})) = x^{\omega_5 - \omega_6} J(g_2(\bar{\omega}))$.

Значит, функция $\Phi(\bar{\omega})$ инвариантна относительно группы $G = \langle g_1, g_2 \rangle$.

Группа $G = \langle g_1, g_2 \rangle$ состоит из 12 элементов, а именно

$$g^{(1)} = e,$$

$$g^{(2)} \equiv \tau = g_1 g_2 = (\omega_1, \omega_3, \omega_9)(\omega_2, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_5, \omega_4),$$

$$g^{(3)} = \tau^2 = (\omega_1, \omega_9, \omega_3)(\omega_2, \omega_7, \omega_5)(\omega_4, \omega_6, \omega_8),$$

$$g^{(4)} = \tau^3 = (\omega_2, \omega_8)(\omega_4, \omega_7)(\omega_5, \omega_6),$$

$$g^{(5)} = \tau^4 = (\omega_1, \omega_3, \omega_9)(\omega_2, \omega_5, \omega_7)(\omega_4, \omega_8, \omega_6),$$

$$g^{(6)} = \tau^5 = (\omega_1, \omega_9, \omega_3)(\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_8, \omega_7, \omega_6),$$

$$g^{(7)} = g_2 = (\omega_1, \omega_3)(\omega_2, \omega_4)(\omega_5, \omega_6)(\omega_7, \omega_8),$$

$$g^{(8)} = g_2 \tau = (\omega_2, \omega_5)(\omega_3, \omega_9)(\omega_6, \omega_8),$$

$$g^{(9)} = g_2 \tau^2 = (\omega_1, \omega_9)(\omega_2, \omega_8)(\omega_4, \omega_5)(\omega_6, \omega_7),$$

$$g^{(10)} = g_2 \tau^3 = (\omega_1, \omega_3)(\omega_2, \omega_7)(\omega_4, \omega_8),$$

$$g^{(11)} = g_2 \tau^4 = (\omega_2, \omega_6)(\omega_3, \omega_9)(\omega_4, \omega_7)(\omega_5, \omega_8),$$

$$g^{(12)} = g_2 \tau^5 = g_1 = (\omega_1, \omega_9)(\omega_4, \omega_6)(\omega_5, \omega_7).$$

Для более точной оценки знаменателя коэффициентов линейной формы (2.11) рассмотрим 5 преобразований $g^{(3)}, g^{(5)}, g^{(8)}, g^{(10)}, g^{(12)}$ из выписанных 12 (см. аналогичный момент в работе [51, с. 171-173]).

Имеем

$$\begin{aligned} J(h, j, k, m, l, q; x) &= \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})m!l!}{\Gamma(l + k - j + \frac{1}{2})(h + j - k)!(k + m - h)!} \times \\ &\times J(l + k - j, h + j - k, h, q, j, k + m - h; x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(h, j, k, m, l, q; x) &= \frac{\Gamma(h + \frac{1}{2})j!q!}{\Gamma(l + k - j + \frac{1}{2})(h + j - k)!(k + m - h)!} \times \\
&\times J(k, l, l + k - j, k + m - h, h + j - k, m; x) = \\
&= \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})q!}{\Gamma(l + k - j + \frac{1}{2})(k + m - h)!} \times \\
&\times J(h, l, l + k - j, m, j, k + m - h; x) = \\
&= \frac{j!m!}{(h + j - k)!(k + m - h)!} \times \\
&\times J(k, h + j - k, h, k + m - h, l, q; x) = \\
&= \frac{\Gamma(h + \frac{1}{2})l!}{\Gamma(l + k - j + \frac{1}{2})(h + j - k)!} \times \\
&\times J(l + k - j, j, k, q, h + j - k, m; x).
\end{aligned}$$

Так как для $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$

$$\frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\Gamma(\beta + \frac{1}{2})} = \frac{\beta!(2\alpha)!}{\alpha!(2\beta)!} 2^{2(\beta-\alpha)},$$

то тогда

$$\begin{aligned}
J(h, j, k, m, l, q; x) &= \frac{(2k)!(l + k - j)!m!l!2^{2l-2j}}{(2l + 2k - 2j)!k!(h + j - k)!(k + m - h)!} \times \\
&\times J(l + k - j, h + j - k, h, q, j, k + m - h; x) = \\
&= \frac{(2h)!(l + k - j)!j!q!}{(2l + 2k - 2j)!h!(h + j - k)!(k + m - h)!} 2^{2q-2m} \times \\
&\times J(k, l, l + k - j, k + m - h, h + j - k, m; x) = \\
&= \frac{(2k)!(l + k - j)!q!}{(2l + 2k - 2j)!k!(k + m - h)!} 2^{2l-2j} \times \\
&\times J(h, l, l + k - j, m, j, k + m - h; x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(h, j, k, m, l, q; x) &= \frac{j!m!}{(h+j-k)!(k+m-h)!} \times \\
&\times J(k, h+j-k, h, k+m-h, l, q; x) = \\
&= \frac{(2h)!(l+k-j)!l!}{(2l+2k-2j)!h!(h+j-k)!} 2^{2q-2m} \times \\
&\times J(l+k-j, j, k, q, h+j-k, m; x). \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Дальнейшие рассмотрения во многом аналогичны работе [51]. Поэтому ограничимся краткой схемой и формулировками окончательных результатов.

Пусть далее $h = h' \cdot n$, $j = j' \cdot n$, $k = k' \cdot n$, $m = m' \cdot n$, $l = l' \cdot n$, $q = q' \cdot n$, где $h', j', k', m', l', q' \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \mathbb{N}$, $n \rightarrow \infty$.

Стандартным образом, например, как у Марковеккио (см. [51, с. 173]) получим для $\omega = \left\{ \frac{n}{p} \right\}$ неравенства:

$$\begin{aligned}
&[2k'\omega] + [(l' + k' - j')\omega] + [m'\omega] + [l'\omega] - [k'\omega] - [2(l' + k' - j')\omega] - \\
&\quad - [(h' + j' - k')\omega] - [(k' + m' - h')\omega] > 0, \\
&[2h'\omega] + [(l' + k' - j')\omega] + [j'\omega] + [q'\omega] - [h'\omega] - [2(l' + k' - j')\omega] - \\
&\quad - [(h' + j' - k')\omega] - [(k' + m' - h')\omega] > 0, \\
&[2k'\omega] + [(l' + k' - j')\omega] + [q'\omega] - [k'\omega] - [2(l' + k' - j')\omega] - [(k' + m' - h')\omega] > 0, \\
&[2h'\omega] + [(l' + k' - j')\omega] + [l'\omega] - [h'\omega] - [2(l' + k' - j')\omega] - [(h' + j' - k')\omega] > 0, \\
&[j'\omega] + [m'\omega] - [(h' + j' - k')\omega] - [(k' + m' - h')\omega] > 0. \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Запишем условия на параметры интеграла (2.5), отвечающие за его сходимость, а также позволяющие, не влияя на конечный результат, значительно сократить перебор параметров:

$$h + j + q = k + m + l, l + k - j \geq 0, h + j - k \geq 0, k + m - h \geq 0; \quad (2.17)$$

$$j \geq k, m \geq q, l \geq j. \quad (2.18)$$

В случае, когда $0 < x < 1$, интеграл (2.5) представим в виде (2.11)

Для того, чтобы получить линейную комбинацию вида $Q \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}} + R$, в интеграле (2.5) достаточно взять $x = \frac{3}{4}$. Далее рассматривается только эта конкретная ситуация.

Аналогично работе [51], полагая

$$I \equiv I_n = I(h, j, k, l, m, q; \frac{3}{4}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (h, j, k, l, m, q) = n \cdot (h', j', k', l', m', q'), \quad (2.19)$$

можно исследовать соответствующие линейные формы

$$Q_n \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}} + R_n \quad (2.20)$$

при $n \rightarrow \infty$, что позволяет получить новую оценку меры иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Теорема 2.2. *Справедлива следующая оценка:*

$$\mu \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) \leq 4.230464 \dots$$

Доказательство этой теоремы, как и многих других подобных результатов в последние 20 лет, основывается на лемме 1.1 [44, лемма 2.1].

Коэффициенты Q_n и R_n линейной формы (2.20) рациональные. Оценим их общий знаменатель.

Для уточнения оценки знаменателя коэффициентов линейных форм воспользуемся методом, который впервые наиболее полно был предложен в статье К. Виолы и Дж. Рина (см. [53]).

В лемме 1.2 были сформулированы результаты К. Виолы, Дж. Рина [53] и М. Хата [44], необходимые при доказательстве теоремы 2.2.

Обозначим для $N \in \mathbb{N}$ d_N - наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, N$. ■

Стандартным образом, например, как у Р. Марковеккио [51, с. 173 - 174] получим фрагмент общего знаменателя d_{Mn} коэффициентов линейной формы (2.20) и аналогичных линейных форм, представленных интегралами (2.15), где $Mn = \max\{2(l+k-j), 2h, 2k, h+j-k, k+m-h, l, m, j, q\}$.

Точный вид знаменателя будет указан чуть ниже в лемме 2.2. Для простых чисел $p > \sqrt{Mn}$, априори входящих в знаменатель коэффициентов линейной формы (2.20), из (2.15) для $\omega = \left\{ \frac{n}{p} \right\}$ были получены неравенства (2.16), аналогичные неравенствам, полученным в работе [51, неравенства (31)].

Если для простого числа $p > \sqrt{Mn}$ выполняется хотя бы одно из неравенств (2.16), то это число можно исключить из знаменателя, что позволяет значительно уменьшить оценку знаменателя.

Пусть Δ - произведение всех простых чисел $p > \sqrt{Mn}$ таких, что ω

удовлетворяет хотя бы одному из неравенств (2.16).

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо представление*

$$\frac{d_{Mn}}{\Delta} \cdot 3^{m-h+1} \cdot 2^{-2q+1} \cdot I_n = q_n \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}} + p_n, \quad (2.21)$$

где $q_n, p_n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Из формул (2.6) - (2.10) при $x = \frac{3}{4}$ имеем

$$I_n = \sum_{\substack{l_1+l_2=k+m-h \\ l_1, l_2 \in \mathbb{Z}^+, l_1 \leq j}} 2(-1)^{j-k+l_2+1} \binom{j}{l_1} \binom{h+j-k+l_2}{l_2} 3^{j-l_1} 2^{2m+2} I_n(l_1), \quad (2.22)$$

где

$$I_n(l_1) = \int_0^1 \frac{z^{2h}(1-z)^{l+l_2}(1+z)^{l+l_2} dz}{(3+z^2)^{h+j-k+l_2+1}}, \quad l_2 = k+m-h-l_1. \quad (2.23)$$

Обозначим $R(z)$ - подынтегральную функцию в (2.23). Из четности $R(z)$ следует, что разложение рациональной функции $R(z)$ в сумму простейших дробей имеет вид:

$$R(z) = P(z) + \sum_{\nu=1}^{h+j-k+l_2+1} \left(\frac{a_\nu}{(z + \sqrt{3}i)^\nu} + \frac{(-1)^\nu a_\nu}{(z - \sqrt{3}i)^\nu} \right), \quad (2.24)$$

где все $a_\nu \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$, $P(z) = \sum_{\theta=0}^{l+k-j-1} \beta_\theta z^{2\theta}$, все $\beta_\theta \in \mathbb{Z}$.

Из (2.23) и (2.24) следует, что интеграл $I_n(l_1)$ представим в виде

$$I_n(l_1) = I_n^{(1)}(l_1) + I_n^{(2)}(l_1) + I_n^{(3)}(l_1), \quad (2.25)$$

где

$$I_n^{(1)}(l_1) \equiv \int_0^1 P(z) dz = r_1, \quad r_1 \in \mathbb{Q}, \quad d_{2(l+k-j)} \cdot r_1 \in \mathbb{Z}; \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}
I_n^{(2)}(l_1) &\equiv \int_0^1 a_1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}i + z} + \frac{1}{\sqrt{3}i - z} \right) dz = a_1 \ln \left(\frac{\sqrt{3}i + 1}{\sqrt{3}i - 1} \right) = \\
&= -\frac{1}{3}(\sqrt{3}i)a_1 \frac{\pi}{\sqrt{3}},
\end{aligned} \tag{2.27}$$

для $z = |z|e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < \pi$, выбрана ветвь $\ln z = \ln |z| + i\varphi$;

$$\begin{aligned}
I_n^{(3)}(l_1) &\equiv \int_0^1 \left(\sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_2+1} \left(\frac{a_\nu}{(z + \sqrt{3}i)^\nu} + \frac{(-1)^\nu a_\nu}{(z - \sqrt{3}i)^\nu} \right) \right) dz = \\
&= \sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_2+1} \left(\frac{a_\nu}{1-\nu} \left(\frac{1}{(1 + \sqrt{3}i)^{\nu-1}} + \frac{(-1)^\nu}{(1 - \sqrt{3}i)^{\nu-1}} \right) \right) = \\
&= r_3, \quad r_3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}i).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Обозначим

$$D_\lambda(f(z)) = \frac{1}{\lambda!} \frac{d^\lambda}{dz^\lambda}(f(z))|_{z=\sqrt{3}i}, \quad \lambda \geq 0. \tag{2.29}$$

По формуле дифференцирования Лейбница для любых функций $u_1, u_2, \dots, u_r$, аналитических в точке $z = \sqrt{3}i$

$$D_\lambda(u_1 \cdot \dots \cdot u_r) = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_r = \lambda \\ m_j \geq 0}} D_{m_1}(u_1) \cdot \dots \cdot D_{m_r}(u_r). \tag{2.30}$$

Обозначим

$$M_\nu = \{\bar{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4) \in (\mathbb{Z}^+)^4 \mid m_1 \leq 2h, \quad m_2, m_3 \leq l + l_2\},$$

где $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = h + j - k + l_2 - \nu + 1$.

Тогда из (2.23), (2.24) и (2.30) получаем, что

$$a_\nu(-1)^\nu = D_{h+j-k+l_2+1-\nu} \left(R(z)(z - \sqrt{3}i)^{h+j-k+l_2+1} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\bar{m} \in M_\nu} D_{m_1}(z)^{2h} D_{m_2}(1-z)^{l+l_2} D_{m_3}(1+z)^{l+l_2} \times \\
&\times D_{m_4}(z + \sqrt{3}i)^{-(h+j-k+l_2+1)} = \\
&= \sum_{\bar{m} \in M_\nu} \gamma(\bar{m})(\sqrt{3}i)^{2h-m_1} (1 - \sqrt{3}i)^{l+l_2-m_2} (1 + \sqrt{3}i)^{l+l_2-m_3} \times \\
&\times (2\sqrt{3}i)^{-(h+j-k+l_2+1)-m_4}, \tag{2.31}
\end{aligned}$$

где $\gamma(\bar{m}) = \binom{2h}{m_1} \binom{l+l_2}{m_2} \binom{l+l_2}{m_3} \binom{h+j-k+l_2+m_4}{m_4} (-1)^{m_2+m_4} \in \mathbb{Z}$.

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3^{N_1} \cdot 2^{N_2} \cdot (\sqrt{3}i) \cdot A_1, \\
a_\nu &= 3^{N_1} \cdot 2^{N_2} \cdot A_\nu, \nu \geq 2, \tag{2.32}
\end{aligned}$$

где $A_\nu \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$, $N_1 = k - j - l_2 - 1$, $N_2 = 2(q - m - 2) + \nu$.

Действительно, ввиду того, что $m_1 + m_4 \leq h + j - k + l_2 - \nu + 1$, имеем из (2.32)

$$(\sqrt{3}i)^{2h-m_1} \cdot (\sqrt{3}i)^{-(h+j-k+l_2-1)-m_4} = (\sqrt{3}i)^{K_1}, \text{ где } K_1 \geq 2h - 2(h + j - k + l_2 + 1) + \nu = 2(k - j - l_2 - 1) + \nu.$$

Наконец, $1 - \sqrt{3}i = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $1 + \sqrt{3}i = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$, $m_2 + m_3 + m_4 \leq h + j - k + l_2 - \nu + 1$, поэтому

$$\begin{aligned}
&(1 - \sqrt{3}i)^{l+l_2-m_2} (1 + \sqrt{3}i)^{l+l_2-m_3} (2)^{-(h+j-k+l_2+1)-m_4} = \\
&= e^{i\frac{\pi}{3}(m_2-m_3)} \cdot 2^{2l+2l_2-(h+j-k+l_2+1)-m_2-m_3-m_4} = 2^{K_2} \cdot b_\nu,
\end{aligned}$$

где $b_\nu \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$, $K_2 \geq 2l + 2l_2 - 2(h + j - k + l_2 + 1) + \nu - 2 = N_2$, $2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}(m_2-m_3)} \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$.

Но тогда из (2.31) следует справедливость представления (2.32).

Из (2.28) следует, что

$$\begin{aligned}
 I_n^{(3)}(l_1) &= \sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_2+1} \frac{a_\nu}{1-\nu} \left(\frac{1}{(2e^{i\frac{\pi}{3}})^{\nu-1}} + \frac{(-1)^\nu}{(2e^{-i\frac{\pi}{3}})^{\nu-1}} \right) = \\
 &= \sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_2+1} \frac{a_\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{2^{\nu-1}} \left(e^{-i\frac{\pi}{3}(\nu-1)} + (-1)^\nu e^{i\frac{\pi}{3}(\nu-1)} \right) = \\
 &= \sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_2+1} \frac{a_\nu}{(1-\nu)2^\nu} \cdot A_\nu,
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

где $A_\nu \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$.

Из (2.22) и (2.25) получаем

$$I_n = \sum_{l_1=0}^{\min(j, k+m-h)} (\Lambda_{1,n}(l_1) + \Lambda_{2,n}(l_1) + \Lambda_{3,n}(l_1)),$$

где

$$\Lambda_{\nu,n}(l_1) = 2 \cdot (-1)^{j-k+l_2+1} \binom{j}{l_1} \binom{h+j-k+l_2}{l_2} \cdot 3^{j-l_1} \cdot 2^{2m+2} \cdot I_n^{(\nu)}(l_1), \tag{2.34}$$

$$\nu = 1, 2, 3, \quad l_1 = 0, 1, \dots, \min(j, k+m-h).$$

Покажем, что для всех l_1

$$3^{m-h+1} \cdot 2^{-2q+1} \cdot d_{Mn} \cdot \Lambda_{1,n}(l_1) \in \mathbb{Z}. \tag{2.35}$$

Действительно, из определения числа Mn и (2.26) следует, что

$$d_{Mn} \cdot I_n^{(1)}(l_1) \in \mathbb{Z}, \text{ т. е.}$$

$$\begin{aligned}
 3^{m-h+1} \cdot 2^{-2q+1} \cdot d_{Mn} \cdot \Lambda_{1,n}(l_1) &= \\
 &= 2 \cdot (-1)^{j-k+l_2+1} \binom{j}{l_1} \binom{h+j-k+l_2}{l_2} \cdot 3^{j-l_1+m-h+1} \times \\
 &\times 2^{2m+3-2q} \cdot d_{Mn} \cdot I_n^{(1)}(l_1) \in \mathbb{Z},
 \end{aligned}$$

т. к. $q \leq m$, $j - l_1 + m - h \geq j + m - h - (k + m - h) = j - k \geq 0$ (см. условия (2.18)).

Докажем теперь, что для всех l_1

$$3^{m-h+1} \cdot 2^{-2q+1} \cdot \Lambda_{2,n}(l_1) = A_n(l_1) \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}}, A_n(l_1) \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]. \quad (2.36)$$

Из (2.27) и (2.32) имеем

$$3^{j-l_1} \cdot 2^{2m+2} \cdot I_n^{(2)}(l_1) = 3^{j-l_1} \cdot 2^{2m+2} \cdot 3^{k-j-l_2-1} \cdot 2^{2q-2m-3} A_1 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

где $A_1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$.

Поэтому из (2.34) следует

$$3^{m-h+1} \cdot 2^{-2q+1} \cdot \Lambda_{2,n}(l_1) = 2 \cdot (-1)^{j-k+l_2+1} \binom{j}{l_1} \binom{h+j-k+l_2}{l_2} \cdot A_1 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

и представление (2.36) доказано.

Наконец, покажем, что для всех l_1

$$B_n(l_1) \equiv 3^{m-h+1} \cdot 2^{-2q+1} \cdot d_{Mn} \cdot \Lambda_{3,n}(l_1) \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]. \quad (2.37)$$

Из (2.32)-(2.34)

$$\begin{aligned} B_n(l_1) &= \sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_2+1} 3^{m-h+1} \cdot 2^{-2q+1} \cdot 2 \cdot (-1)^{j-k+l_2} \binom{j}{l_1} \cdot 3^{j-l_1} \cdot 2^{2m+2} \cdot \\ &\quad \cdot 3^{k-j-l_2-1} \cdot 2^{2q-2m-4} \cdot A_\nu \cdot d_{Mn} \cdot \binom{h+j-k+l_2}{l_2} \cdot \frac{1}{\nu-1} = \\ &= \sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_2+1} (-1)^{j-k+l_2} \cdot \binom{j}{l_1} \cdot A_\nu \cdot G(\nu, l_1), \end{aligned}$$

где

$$G(\nu, l_1) = d_{Mn} \cdot \binom{h+j-k+l_2}{l_2} \cdot \frac{1}{\nu-1}, \quad \nu-1 \in [1; h+j-k+l_2].$$

Для доказательства (2.37) достаточно доказать, что все

$$G(\nu, l_1) \in \mathbb{N}. \quad (2.38)$$

Если $\nu - 1 \leq Mn$, то (2.37) выполняется. Пусть $\nu - 1 > Mn$.

Обозначим $\{a, b\} = \{l_2, h + j - k\}$, где $a \leq b \leq Mn$, $b < \nu - 1 \leq a + b$.

Тогда

$$\binom{h + j - k + l_2}{l_2} = \frac{(a + b)!}{a! \cdot b!} = \frac{(b + 1) \cdot \dots \cdot (b + a)}{a!}.$$

Пусть $\nu - 1 = b + c$, $c \in \{1, \dots, a\}$. Достаточно показать, что

$$q_a \cdot \frac{(b + 1) \cdot \dots \cdot (b + a)}{a!} \cdot \frac{1}{b + c} \in \mathbb{Z}. \quad (2.39)$$

Обозначим

$$P_c(x) = q_a \cdot \frac{1}{a!} \prod_{\substack{\omega=1 \\ \omega \neq c}}^a (x + \omega), \quad P(x) = \frac{(x + 1) \cdot \dots \cdot (x + a)}{a!}.$$

Имеем $\deg P_c(x) = a - 1$, $P_c(-r) = 0$, $r = 1, \dots, a$, $r \neq c$, $P_c(-c) = P'(-c) \cdot q_a$.

По лемме 7 работы [18] $P'(-c) \cdot q_a \in \mathbb{Z}$, т. е. $P_c(-c) \in \mathbb{Z}$.

Следовательно, $P_c(x) \in \mathbb{Z}$, где $x = -1, \dots, -a$, и многочлен $P_c(x)$ - целозначный, в частности, $P_c(b) \in \mathbb{Z}$. Но тогда выполнено (2.39), а вместе с ним и (2.37).

Из (2.34) - (2.37) имеем окончательно

$$3^{m-h+1} \cdot 2^{-2q+1} \cdot d_{Mn} \cdot I_n = q_n \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}} + p_n, \quad q_n, p_n \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]. \quad (2.40)$$

С учетом доказательства (2.11) и равенства (2.40), можно сделать вывод, что $q_n, p_n \in \mathbb{Z}$.

В (2.40) d_{Mn} можно заменить на $\frac{d_{Mn}}{\Delta}$.

Тем самым получаем представление (2.21). Лемма 2.2 доказана.

Далее рассмотрим конструкцию, которая служит для того, чтобы избежать применения двойного метода перевала, так как он технически сложен и не является наглядным.

Пусть $x \in \mathbb{Q}, x \in (0; 1)$.

Рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \oint_{\tilde{l}} \frac{s^k t^{h-k} dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{l+k-j+1} (s-t)(t-x)}, \quad (2.41)$$

где контур $\tilde{l}$ по переменной t - окружность, проходящая в положительном направлении через точки $M_1(1)$, $M_2(xs)$, $M_3 = i\sqrt{-xs}$, $s < 0$. Очевидно, $xs < x < 1$, тогда для всех t , лежащих внутри контура $\tilde{l}$, будет выполняться $Re(t-s) \geq xs - s = s(x-1) > 0$, т. е. точка $t = x$ - единственная особая точка подынтегральной функции, лежащая внутри контура $\tilde{l}$.

Полагаем

$$D_\lambda(g(x)) = \frac{1}{\lambda!} \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}(g(x)).$$

Условие $l \geq j$ (см. (2.18)) обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость интеграла (2.41) по переменной s , и, следовательно, возможность дифференцирования по параметру x под знаком интеграла.

Поэтому

$$D_{h+j-k}(g(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \oint_{\tilde{l}} \frac{s^k t^{h-k} dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{l+k-j+1} (s-t)(t-x)^{h+j-k+1}}. \quad (2.42)$$

Пусть в (2.42) $t = \frac{xs_1}{t_1}$, $s = s_1$, $dt ds = \frac{-xs_1}{t_1^2} dt_1 ds_1$, $s - t = \frac{s_1}{t_1}(t_1 - x)$, $t - x = \frac{x}{t_1}(s_1 - t_1)$. Контур $\tilde{l}$ при этой замене переходит в аналогичный контур $\tilde{l}_1$ по переменной t_1 , где $s \rightarrow s_1$ и меняется направление обхода.

Тогда

$$\begin{aligned} D_{h+j-k}(g(x)) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds_1 \oint_{\tilde{l}_1} \frac{s_1^k \left(\frac{xs_1}{t_1}\right)^{h-k} \frac{xs_1}{t_1^2} t_1^{h+j-k+1} dt_1}{\sqrt{\frac{s_1}{s_1-1}} (1-s_1)^{l+k-j+1} \frac{s_1}{t_1} (t_1-x) x^{h+j-k+1} (s_1-t_1)^{h+j-k+1}} = \\ &= \frac{x^{-j}}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \oint_{\tilde{l}_1} \frac{s^h t^j dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{l+k-j+1} (s-t)^{h+j-k+1} (t-x)}. \end{aligned}$$

Домножая обе части последнего равенства на x^j и применяя оператор

D_{k+m-h} , получим

$$D_{k+m-h}(x^j(D_{h+j-k}(g(x)))) = I, \quad (2.43)$$

где мы заменили интегрирование по $\tilde{l}_1$ на интегрирование по прямой ($i\infty$; $-i\infty$). Это можно сделать, так как оба интеграла равны $2\pi i \cdot \text{Res}_{t=x}(G(s, t))$, $G(s, t)$ - подынтегральная функция интеграла (2.5).

Вычислим $g(x)$.

По теореме Коши о вычетах

$$g(x) = x^{h-k} \int_0^{-\infty} \frac{s^k ds}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{l+k-j+1} (s-x)}. \quad (2.44)$$

Сделаем в интеграле (2.44) следующую замену $s = \frac{u_1}{u_1 - 1}$; $\sqrt{\frac{s}{s-1}} = \sqrt{u_1}$, $u_1 \in [0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} g(x) &= x^{h-k} \int_0^1 \frac{(-1)^k \frac{u_1^k}{(1-u_1)^k} (1-u_1)^{l+k-j+2} \frac{du_1}{(1-u_1)^2}}{\sqrt{u_1} (u_1 - x(u_1 - 1))} = \\ &= x^{h-k} (-1)^k \int_0^1 \frac{u_1^k (1-u_1)^{l-j} du_1}{\sqrt{u_1} (x + (1-x)u_1)}. \end{aligned}$$

Обозначим $y = \frac{x}{1-x} \in \mathbb{Q}$, $y > 0$. Полагая $u_1 = z^2$, $z \in [0; 1)$, получаем

$$g(x) = \frac{2x^{h-k} (-1)^k}{1-x} \int_0^1 \frac{z^{2k} (1-z^2)^{l-j} dz}{z^2 + y}.$$

Пусть $w(v_1) = v_1^k (1-v_1)^{l-j}$, тогда

$$\int_0^1 \frac{z^{2k} (1-z^2)^{l-j} dz}{z^2 + y} = \int_0^1 \frac{w(z^2) - w(-y)}{z^2 - (-y)} dz + (-1)^k y^k (1+y)^{l-j} \int_0^1 \frac{dz}{z^2 + y}.$$

Очевидно, $\frac{w(z^2) - w(-y)}{z^2 - (-y)} \in \mathbb{Q}[z^2]$, т. е.

$$\int_0^1 \frac{w(z^{2k}) - w(-y)}{z^2 - (-y)} dz = r \in \mathbb{Q}(x), \quad \int_0^1 \frac{dz}{z^2 + y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Следовательно,

$$g(x) = \frac{2x^{h-k} (-1)^k}{1-x} \left(r + (-1)^k y^{k-\frac{1}{2}} (1+y)^{l-j} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{y}} \right). \quad (2.45)$$

Аналогично тому, как это было сделано в работе Р. Марковеккио

[см. 51, стр. 158-160] для $\alpha = \ln x$, если $I = Q\alpha + R$, где $Q, R \in \mathbb{Q}$,

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{y}} \arctg \frac{1}{\sqrt{y}}$, то из (2.43) и (2.45) получаем

$$Q = 2D_{k+m-h} \left(x^j \left(D_{h+j-k} \left(\frac{x^{h-k}}{1-x} y^{k-\frac{1}{2}} (1+y)^{l-j} \right) \right) \right) \sqrt{y},$$

так как

$$\sqrt{y} \frac{d}{dx} \left(\arctg \frac{1}{\sqrt{y}} \right) = \frac{-1}{2(1+y)} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \in \mathbb{Q}(x).$$

Имеем

$$\begin{aligned} 1+y &= \frac{1}{1-x}, \quad \frac{x^{h-k}}{1-x} y^{k-\frac{1}{2}} (1+y)^{l-j} = \frac{x^{h-\frac{1}{2}}}{(1-x)^{k+l-j+\frac{1}{2}}} = \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(k+l-j+\frac{1}{2}) \cdot \dots \cdot (k+l-j+s-\frac{1}{2})}{s!} \cdot x^{s+h-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} Q &\equiv Q_n = \frac{2}{\sqrt{1-x}} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(k+l-j+\frac{1}{2}) \cdot \dots \cdot (k+l-j+s-\frac{1}{2})}{s!} \times \\ &\times \frac{(k-j+s+\frac{1}{2}) \cdot \dots \cdot (h+s-\frac{1}{2})}{(h+j-k)!} \times \\ &\times \frac{(h-m+s+\frac{1}{2}) \cdot \dots \cdot (k+s-\frac{1}{2})}{(k+m-h)!} \cdot x^{s+h-m}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ряд (2.46) наряду с положительными слагаемыми содержит также отрицательные, но, начиная с $s \geq s_0 = \max\{j-k, m-h\}$ получаем положительный ряд. Подобные положительные ряды были рассмотрены в работах Ю. В. Нестеренко [22, с. 556-558] и Р. Марковеккио [51, с. 174-177],

Компьютерный перебор параметров позволил получить оптимальный набор, удовлетворяющий условиям (2.17), (2.18) и позволяющий доказать теорему 2.2.

Таким набором параметров является (см. (2.19))

$$h = 6n; \quad k = 3n; \quad m = 8n; \quad l = 4n; \quad j = 3n; \quad q = 6n. \quad (2.47)$$

Подставив эти параметры в интеграл (2.5), получаем

$$I \equiv I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \int_{+i\infty}^{-i\infty} \frac{s^{6n} t^{3n} dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{4n+1} (s-t)^{6n+1} (t-\frac{3}{4})^{5n+1}}. \quad (2.48)$$

В этом случае ряд (2.46) примет вид

$$\begin{aligned} Q \equiv Q_n &= 4 \cdot \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(4n + \frac{1}{2}) \cdot \dots \cdot (4n + s - \frac{1}{2})}{s!} \cdot \frac{(6n + s - \frac{1}{2}) \cdot \dots \cdot (s + \frac{1}{2})}{(6n)!} \times \\ &\times \frac{(3n + s - \frac{1}{2}) \cdot \dots \cdot (-2n + s + \frac{1}{2})}{(5n)!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{s-2n}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Докажем для ряда (2.49) лемму 2.3.

Лемма 2.3 *Справедливо равенство*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Q_n = 36.079 \dots \quad (2.50)$$

Доказательство.

Найдем асимптотику максимального слагаемого A_s ряда (2.49) при $s \in [2n; +\infty)$. Согласно работе [22, с. 557] решим уравнение

$$\frac{4 + s'}{s'} \cdot \frac{s' + 6}{s'} \cdot \frac{s' + 3}{s' - 2} \cdot \frac{3}{4} = 1. \quad (2.51)$$

Уравнение (2.51) имеет единственный действительный корень, а именно $s'_0 = 50.3057 \dots$

Тогда $s = s'_0 n (1 + o(1))$ и имеет место равенство (см. [22, с. 558])

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln A_s = \ln |\tilde{Q}| = 36.079 \dots, \quad (2.52)$$

где

$$\tilde{Q} = \frac{(4 + s'_0)^{(4+s'_0)}(6 + s'_0)^{(6+s'_0)}x^{-2+s'_0}}{4^4 6^6 (-2 + s'_0)^{(-2+s'_0)} 5^5}.$$

При $s \in [0; 2n-1]$ ряд (2.49) содержит отрицательные слагаемые. Покажем, что асимптотика модуля этой части слагаемых ряда (2.49) меньше асимптотики суммы положительных слагаемых.

Для $s \in [0; 2n-1]$ $\max |A_s|$ достигается при $s = 2n-1$,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |A_{2n-1}| = 12 \ln 2$, а тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left| \sum_{s=0}^{2n-1} A_s \right| \leq 12 \ln 2 < 36.079 \dots \quad (2.53)$$

В результате из (2.52) и (2.53) аналогично работе [22, с. 558] получаем равенство (2.50).

Лемма 2.3 доказана.

Получим оценку интеграла (2.5) при $n \rightarrow +\infty$. Для этого рассмотрим функцию

$$f(s, t) = \frac{s^{h'} t^{j'}}{(1-s)^{l'+k'-j'} (s-t)^{h'+j'-k'} (t-x)^{k'+m'-h'}}. \quad (2.54)$$

Точками перевала являются нули функций $f'_s(s, t)$ и $f'_t(s, t)$, отличные от нулей $f(s, t)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{f'_s(s, t)}{f(s, t)} &= \frac{h'}{s} + \frac{l' + k' - j'}{1-s} - \frac{h' + j' - k'}{s-t} = 0, \\ \frac{f'_t(s, t)}{f(s, t)} &= \frac{j'}{t} + \frac{h' + j' - k'}{s-t} - \frac{k' + m' - h'}{t-x} = 0, \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{cases} q'l's^3 - [l'(m' - h') + q'(j' - k') + x(m' - q')(j' - l')]s^2 - \\ - [(k' - j')(m' - h') + xh'(l' - j') + xk'(q' - m')]s - xh'k' = 0, \\ t = \frac{s(l's + k' - j')}{h' + (q' - m')s}. \end{cases} \quad (2.55)$$

Подынтегральная функция интеграла (2.48) имеет вид

$$F(s, t) = (f(s, t))^n \cdot \frac{1}{(1-s)(s-t)(t-x)\sqrt{\frac{s}{s-1}}}. \quad (2.56)$$

Для набора параметров (2.47) функция (2.54) равна

$$f(s, t) = \frac{s^6 t^3}{(1-s)^4 (s-t)^6 (t-x)^5}. \quad (2.57)$$

Тогда система уравнений (2.55) имеет вид

$$\begin{cases} 24s^3 - 6.5s^2 - 13.5 = 0, \\ t = \frac{4s^2}{6-2s}. \end{cases} \quad (2.58)$$

Решением системы уравнений (2.58) являются следующие пары чисел: $s_1 = 0.926\dots$, $t_1 = 0.828\dots$; $s_2 = -0.328\dots - i0.707\dots$, $t_2 = -0.169\dots + i0.314\dots$; $s_3 = -0.328\dots + i0.707\dots$, $t_3 = -0.169\dots - i0.314\dots$

Одним из решений системы уравнений (2.58) является пара действительных чисел $(s_1; t_1)$. Нетрудно показать, что значение $\ln|f(s_1; t_1)|$ совпадает со значением $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Q_n$, найденным в лемме 2.3. Таким образом, асимптотику коэффициента Q_n можно получить избежав метода перевала.

Пусть $s^* = s_2 = -0.328\dots - i0.707\dots$, $t^* = t_2 = -0.169\dots + i0.314\dots$

Лемма 2.4 *Справедлива следующая оценка:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |I_n| \leq \ln |f(s^*, t^*)| = -6.273079 \dots$$

Доказательство.

Возьмем два луча L_1 и L_2 , проходящие соответственно через точки 0 и s^* , 0 и t^* , а именно

$$L_1 = \{s = -x - axi, x \in [0, +\infty)\}, L_2 = \{t = -u + bui, u \in [0, +\infty)\}, \quad (2.59)$$

где

$$a = 2.157 \dots, b = 1.860 \dots \quad (2.60)$$

Подставив $s = -x - axi$ и $t = -u + bui$ в функцию $F(s, t)$, получаем

$$\begin{aligned} F(s, t) \equiv F_1(x, u) &= \frac{(-x - axi)^{6n}}{(1 + x + axi)^{4n}((-x + u) + (-ax - bu)i)^{6n}} \times \\ &\times \frac{(-u + bui)^{3n}}{((-u - \frac{3}{4}) + bui)^{5n}} \cdot \varphi(x, u) \equiv (\tilde{F}_1(x, u))^n \cdot \varphi(x, u), \end{aligned} \quad (2.61)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(x, u) &= \frac{-1}{(-x - axi)^{0.5}(-1 - x - axi)^{0.5}((-x + u) + (-ax - bu)i)} \times \\ &\times \frac{1}{((-u - \frac{3}{4}) + bui)}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Из (2.61) и (2.62) имеем

$$\begin{aligned} |F_1(x, u)| &= \frac{(x^2 + (ax)^2)^{3n}}{((1 + x)^2 + (ax)^2)^{2n}((-x + u)^2 + (ax + bu)^2)^{3n}} \times \\ &\times \frac{(u^2 + (bu)^2)^{1.5n}}{((u + \frac{3}{4})^2 + (bu)^2)^{2.5n}} \cdot |\varphi(x, u)|, \end{aligned} \quad (2.63)$$

где

$$|\varphi(x, u)| = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[4]{1+a^2}\sqrt[4]{(1+x)^2+(ax)^2}\sqrt{(-x+u)^2+(ax+bu)^2}} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{(u+\frac{3}{4})^2+(bu)^2}}.$$

Покажем, что

$$|I_n| \leq C_1 \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} |F_1(x, u)| du, \quad (2.64)$$

где здесь и далее $C_1, C_2, \dots$ - положительные постоянные.

Рассмотрим интеграл (см. (2.5) и (2.56))

$$J = \int_0^{-\infty} ds \int_{+i\infty}^{-i\infty} F(s, t) dt = - \int_0^{-\infty} ds \int_0^{+i\infty} F(s, t) dt + \int_0^{-\infty} ds \int_0^{-i\infty} F(s, t) dt \equiv \\ \equiv -J_1 + J_2. \quad (2.65)$$

Так как область интегрирования между контурами не содержит особых точек, то по теореме Коши о вычетах интегрирование в первом интеграле по переменной $s \in [0; -\infty)$ можно заменить на интегрирование по лучу L_1 .

Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что в интеграле J_1 интегрирование по переменной $t \in [0; +i\infty)$ можно заменить на интегрирование по лучу L_2 .

Таким образом,

$$J_1 = \int_{L_1} ds \int_{L_2} F(s, t) dt.$$

Пусть

$$J_1 = \int_0^{-\infty} ds \int_0^{+i\infty} F(s, t) dt \equiv A + Bi. \quad (2.66)$$

Тогда интеграл J_2 равен

$$J_2 = \int_0^{-\infty} ds \int_0^{-i\infty} F(s, t) dt \equiv A - Bi. \quad (2.67)$$

Из (2.65), (2.66) и (2.67) следует, что $J = -2Bi$. Следовательно,

$$|J| \leq 2|J_1| = 2 \left| \int_{L_1} ds \int_{L_2} F(s, t) dt \right|. \quad (2.68)$$

Из (2.48), (2.63) и (2.68) следует (2.64).

Выберем x_1, x_2, u_1, u_2 так, что $0 < x_1 < x_2 < +\infty$, $0 < u_1 < u_2 < +\infty$, причем $x^* = -Res^* = 0.328 \dots \in [x_1, x_2]$, $u^* = -Ret^* = 0.169 \dots \in [u_1, u_2]$.

В качестве точек разбиения выберем следующие:

$$x_1 = u_1 = 0.02; \quad x_2 = u_2 = 3. \quad (2.69)$$

Из (2.64) с учетом (2.69) имеем

$$|I_n| \leq C_1 \sum_{i=1}^9 I^{(i)},$$

где

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= \int_0^{0.02} dx \int_0^{0.02} |F_1(x, u)| du, \dots, \quad I^{(5)} = \int_{0.02}^3 dx \int_{0.02}^3 |F_1(x, u)| du, \dots, \\ I^{(9)} &= \int_3^{+\infty} dx \int_3^{+\infty} |F_1(x, u)| du. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения проведем аналогично работе Ю. В. Нестеренко [22, с.560]. Покажем, что для всех интегралов $I^{(i)}$, $i = \overline{1, 9}$, кроме центрального $I^{(5)}$, выполняется неравенство

$$I^{(i)} < e^{-6.273079...n}, \quad n \geq n_0. \quad (2.70)$$

Докажем неравенство (2.70) при $i = 1$. Имеем из (2.63)

$$I^{(1)} = \int_0^{0.02} dx \int_0^{0.02} \frac{[5.65x^2]^{3n} [4.46u^2]^{1.5n}}{[(1+x)^2 + (ax)^2]^{2n} [(-x+u)^2 + (ax+bu)^2]^{3n}} \cdot \frac{|\varphi(x, u)| du}{[(u + \frac{3}{4})^2 + (bu)^2]^{2.5n}}. \quad (2.71)$$

Сделаем в (2.71) следующую замену переменных: $x = \rho \cos \theta$, $u = \rho \sin \theta$, $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Из (2.63) следует, что $|\varphi(x, u)| < \frac{C_2}{\rho^{1.5} \sqrt{\cos \theta}}$. Тогда получаем

$$I^{(1)} < C_2 \cdot e^{8.88n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{0.02\sqrt{2}} \frac{(\rho \cos \theta)^{6n-0.5} (\rho \sin \theta)^{3n} d\rho}{(a\rho \cos \theta + b\rho \sin \theta)^{6n}}.$$

Для $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ $\rho \cos \theta \cdot a + \rho \sin \theta \cdot b \geq b\rho$. Тогда согласно (2.60) получаем

$$\begin{aligned} I^{(1)} &\leq C_2 \cdot e^{5.15n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{0.02\sqrt{2}} \frac{(\rho \cos \theta)^{6n-0.5} (\rho \sin \theta)^{3n} d\rho}{\rho^{6n}} = \\ &= C_2 \cdot e^{5.15n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{6n-0.5} (\sin \theta)^{3n} d\theta \int_0^{0.02\sqrt{2}} \rho^{3n-0.5} d\rho = \\ &= C_2 \cdot e^{5.15n} \frac{(0.02\sqrt{2})^{3n+0.5}}{3n+0.5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{6n-0.5} (\sin \theta)^{3n} d\theta, \end{aligned}$$

где

$$\frac{(0.02\sqrt{2})^{3n+0.5}}{3n+0.5} < (0.02\sqrt{2})^{3n} = e^{-10.696}.$$

Из [8, формула (19), с. 25] следует, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{6n-0.5} (\sin\theta)^{3n} d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(3n + \frac{1}{4})\Gamma(1.5n + \frac{1}{2})}{\Gamma(4.5n + \frac{3}{4})}.$$

Из формулы Стирлинга имеем

$$C_3\sqrt{n} \cdot e^{-cn} \cdot (cn)^{(cn)} < \Gamma(cn + a) < C_4\sqrt{n} \cdot e^{-cn} \cdot (cn)^{(cn)}, \quad a \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \quad n \geq n_0,$$

откуда

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(3n + \frac{1}{4})\Gamma(1.5n + \frac{1}{2})}{\Gamma(4.5n + \frac{3}{4})} < C_5\sqrt{n} \cdot (3n)^{(3n)} \cdot (1.5n)^{(1.5n)} \cdot (4.5n)^{(-4.5n)} = \\ & = C_5\sqrt{n} \cdot \left(\frac{3^3 \cdot 1.5^{1.5}}{4.5^{4.5}}\right)^n < e^{-2.864}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I^{(1)} < C_6 \cdot e^{-8.41n} < e^{-6.273079\dots n}.$$

Таким образом, для интеграла $I^{(1)}$ неравенство (2.70) доказано.

Рассмотрим следующий интеграл.

$$\begin{aligned} I^{(2)} &= \int_0^{0.02} dx \int_{0.02}^3 \frac{[5.65x^2]^{3n} [4.46u^2]^{1.5n}}{[(1+x)^2 + (2.157x)^2]^{2n} [(-x+u)^2 + (2.157x + 1.86u)^2]^{3n}} \cdot \\ &\cdot \frac{|\varphi(x, u)| du}{[(u + \frac{3}{4})^2 + (1.86u)^2]^{2.5n}}. \end{aligned}$$

Из (2.63) следует, что $|\varphi(x, u)| < \frac{C_7}{\sqrt{x}}$. Причем, для $0 \leq x \leq 0.02$,

$0.02 \leq u \leq 3$ выполняются следующие соотношения:

$$((1+x)^2 + 4.65x^2)^{2n} \geq 1;$$

$$((u-x)^2 + (2.157x + 1.86u)^2)^{3n} \geq (u^2 + (1.86u)^2)^{3n} = (4.46u^2)^{3n};$$

$$\left(\left(u + \frac{3}{4} \right)^2 + (1.86u)^2 \right)^{2.5n} > \left(\frac{3}{4} \right)^{5n}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I^{(2)} &< C_7 \cdot e^{4.4n} \int_0^{0.02} dx \int_{0.02}^3 \frac{[5.65]^{3n} [4.46]^{1.5n} x^{6n} u^{3n} du}{(4.46)^{3n} (0.75)^{5n} u^{6n} \sqrt{x}} = \\ &= C_7 \cdot \int_0^{0.02} x^{6n-0.5} dx \int_{0.02}^3 \frac{du}{u^{3n}}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Так как

$$\int_0^{0.02} x^{6n-0.5} dx = \frac{x^{6n+0.5}}{6n+0.5} \Big|_0^{0.02} < (0.02)^{6n}, \quad (2.73)$$

$$\int_{0.02}^3 \frac{du}{u^{3n}} < 3 \cdot (0.02)^{-3n}, \quad (2.74)$$

то, подставив (2.73) и (2.74) в (2.72), получаем

$$I^{(2)} < C_8 \cdot e^{4.4n} \cdot (0.02)^{3n} = C_8 \cdot e^{-7.34n} < e^{-6.273n}.$$

Тем самым неравенство (2.70) для интеграла $I^{(2)}$ доказано.

Для всех последующих интегралов, кроме центрального $I^{(5)}$, проведем аналогичные рассуждения.

Пусть

$$\begin{aligned} I^{(3)} &= \int_0^{0.02} dx \int_3^{+\infty} \frac{[5.65x^2]^{3n} [4.46u^2]^{1.5n}}{[(1+x)^2 + (2.157x)^2]^{2n} [(-x+u)^2 + (2.157x+1.86u)^2]^{3n}} \cdot \\ &\cdot \frac{|\varphi(x, u)| du}{[(u + \frac{3}{4})^2 + (1.86u)^2]^{2.5n}}. \end{aligned}$$

Для $0 \leq x \leq 0.02$, $u \geq 3$ имеем

$$((1+x)^2 + 4.65x^2)^{2n} \geq 1;$$

$$((u-x)^2 + (2.157x + 1.86u)^2)^{3n} \geq (u^2 + (1.86u)^2)^{3n} = (4.46u^2)^{3n};$$

$$\left(\left(u + \frac{3}{4} \right)^2 + (1.86u)^2 \right)^{2.5n} > (u^2 + 3.46u^2)^{2.5n} = (4.46u^2)^{2.5n};$$

$$|\varphi(x, u)| < \frac{C_9}{\sqrt{x}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I^{(3)} &< C_9 \cdot \int_0^{0.02} dx \int_3^{+\infty} \frac{[5.65]^{3n} [4.46]^{1.5n} x^{6n} u^{3n} du}{(4.46)^{3n} u^{6n} u^{5n} (4.46)^{2.5n} \sqrt{x}} = \\ &= C_9 \cdot e^{-0.786n} \int_0^{0.02} x^{6n-0.5} dx \int_3^{+\infty} \frac{du}{u^{8n}}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Как и в предыдущем интеграле

$$\int_0^{0.02} x^{6n-0.5} dx < (0.02)^{6n}, \quad (2.76)$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{du}{u^{8n}} = \frac{u^{-8n+1}}{-8n+1} \Big|_3^{+\infty} < C_{10} 3^{-8n}. \quad (2.77)$$

Тогда из (2.76) и (2.77) в (2.75) получаем

$$I^{(3)} < C_{11} \cdot e^{-0.786n} \cdot e^{-23.472n} \cdot e^{-8.79n} < e^{-6.273n}.$$

Неравенство (2.70) для интеграла $I^{(3)}$ доказано.

Для следующего интеграла

$$I^{(4)} = \int_{0.02}^3 dx \int_0^{0.02} \frac{[5.65x^2]^{3n} [4.46u^2]^{1.5n}}{[(1+x)^2 + (2.157x)^2]^{2n} [(-x+u)^2 + (2.157x + 1.86u)^2]^{3n}} \cdot \frac{|\varphi(x, u)| du}{[(u + \frac{3}{4})^2 + (1.86u)^2]^{2.5n}}.$$

при $0.02 \leq x \leq 3$, $0 \leq u \leq 0.02$ имеем

$$((1+x)^2 + 4.65x^2)^{2n} > 1;$$

$$((u-x)^2 + (2.157x + 1.86u)^2)^{3n} \geq (x^2 + (2.157x)^2)^{3n} = (5.65x^2)^{3n};$$

$$\left(\left(u + \frac{3}{4} \right)^2 + (1.86u)^2 \right)^{2.5n} \geq \left(\frac{3}{4} \right)^{5n};$$

$$|\varphi(x, u)| < C_{12}.$$

С учетом этого

$$\begin{aligned} I^{(4)} &< C_{12} \cdot \int_{0.02}^3 dx \int_0^{0.02} \frac{(5.65)^{3n} (4.46)^{1.5n} x^{6n} u^{3n} du}{(5.65)^{3n} x^{6n} (0.75)^{5n}} = \\ &= C_{12} \cdot e^{3.683n} \int_{0.02}^3 dx \int_0^{0.02} u^{3n} du = C_{13} \cdot e^{3.683n} \int_0^{0.02} u^{3n} du. \end{aligned}$$

Так как $\int_0^{0.02} u^{3n} du < (0.02)^{3n}$, то

$$I^{(4)} < C_{14} \cdot e^{3.683n} \cdot (0.02)^{3n} = C_{14} \cdot e^{-8.053n} < e^{-6.273n}.$$

Неравенство (2.70) для интеграла $I^{(4)}$ доказано.

Пусть

$$I^{(6)} = \int_{0.02}^3 dx \int_3^{+\infty} \frac{[5.65x^2]^{3n} [4.46u^2]^{1.5n}}{[(1+x)^2 + (2.157x)^2]^{2n} [(-x+u)^2 + (2.157x + 1.86u)^2]^{3n}} \cdot \frac{|\varphi(x, u)| du}{[(u + \frac{3}{4})^2 + (1.86u)^2]^{2.5n}}.$$

При $0.02 \leq x \leq 3$, $u \geq 3$ выполняются следующие соотношения:

$$((1+x)^2 + 4.65x^2)^{2n} > (x^2 + 4.65x^2)^{2n} = (5.65)^{2n} \cdot x^{4n};$$

$$((u-x)^2 + (2.157x + 1.86u)^2)^{3n} > (u^2 + (1.86u)^2)^{3n} = (4.46)^{3n} \cdot u^{6n};$$

$$\left(\left(u + \frac{3}{4} \right)^2 + (1.86u)^2 \right)^{2.5n} > (u^2 + (1.86u)^2)^{2.5n} = (4.46)^{2.5n} \cdot u^{5n};$$

$$|\varphi(x, u)| < C_{15}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} I^{(6)} &< C_{15} \int_{0.02}^3 dx \int_3^{+\infty} \frac{(5.65)^{3n} (4.46)^{1.5n} x^{6n} u^{3n} du}{(5.65)^{2n} u^{6n} u^{5n} x^{4n} (4.46)^{5.5n}} = \\ &= C_{15} \cdot e^{-4.249n} \int_{0.02}^3 x^{2n} dx \int_3^{+\infty} \frac{du}{u^{8n}}. \end{aligned}$$

$$\text{Из } \int_{0.02}^3 x^{2n} dx < C_{16} \cdot 3^{2n} \text{ и } \int_3^{+\infty} \frac{du}{u^{8n}} = \frac{u^{-8n+1}}{-8n+1} \Big|_3^{+\infty} < C_{10} \cdot (3)^{-8n} \text{ следует, что}$$

$$I^{(6)} < C_{17} \cdot e^{-4.249n} \cdot e^{-6.592n} < e^{-6.273n}.$$

Тем самым неравенство (2.70) для интеграла $I^{(6)}$ доказано.

Для интеграла

$$I^{(7)} = \int_3^{+\infty} dx \int_0^{0.02} \frac{[5.65x^2]^{3n} [4.46u^2]^{1.5n}}{[(1+x)^2 + (2.157x)^2]^{2n} [(-x+u)^2 + (2.157x + 1.86u)^2]^{3n}} \cdot \frac{|\varphi(x, u)| du}{[(u + \frac{3}{4})^2 + (1.86u)^2]^{2.5n}}. \quad (2.78)$$

при $x \geq 3$, $0 \leq u \leq 0.02$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} ((1+x)^2 + 4.65x^2)^{2n} &> (x^2 + 4.65x^2)^{2n} = (5.65)^{2n} \cdot x^{4n}; \\ ((u-x)^2 + (2.157x + 1.86u)^2)^{3n} &\geq (x^2 + (2.157x)^2)^{3n} = (5.65)^{3n} \cdot x^{6n}; \\ \left(\left(u + \frac{3}{4} \right)^2 + (1.86u)^2 \right)^{2.5n} &\geq \left(\frac{3}{4} \right)^{5n}; \\ |\varphi(x, u)| &< C_{18}. \end{aligned}$$

В результате для (2.78) получаем

$$\begin{aligned} I^{(7)} &< C_{18} \int_3^{+\infty} dx \int_0^{0.02} \frac{(5.65)^{3n} (4.46)^{1.5n} x^{6n} u^{3n} du}{(5.65)^{5n} x^{10n} (0.75)^{5n}} = \\ &= C_{18} \cdot e^{1.245n} \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^{2n}} \int_0^{0.02} u^{3n} du. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Получим оценку каждого из интегралов в (2.79).

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^{4n}} = \frac{x^{-4n+1}}{-4n+1} \Big|_3^{+\infty} < C_{19} \cdot (3)^{-4n} = C_{19} \cdot e^{-4.394n}. \quad (2.80)$$

$$\int_0^{0.02} u^{3n} du = \frac{u^{3n+1}}{3n+1} \Big|_0^{0.02} < (0.02)^{3n} = e^{-11.736n}. \quad (2.81)$$

Тогда из (2.80) и (2.81) в (2.79) получаем

$$I^{(7)} < C_{20} \cdot e^{1.245n} \cdot e^{-4.394n} \cdot e^{-11.736n} < e^{-6.273n}.$$

Неравенство (2.70) для интеграла $I^{(7)}$ доказано.

Пусть

$$I^{(8)} = \int_3^{+\infty} dx \int_{0.02}^3 \frac{[5.65x^2]^{3n} [4.46u^2]^{1.5n}}{[(1+x)^2 + (2.157x)^2]^{2n} [(-x+u)^2 + (2.157x+1.86u)^2]^{3n}} \cdot \frac{|\varphi(x, u)| du}{[(u + \frac{3}{4})^2 + (1.86u)^2]^{2.5n}}. \quad (2.82)$$

Оценим знаменатели подынтегральной функции интеграла $I^{(8)}$:

$$((1+x)^2 + 4.65x^2)^{2n} > (x^2 + 4.65x^2)^{2n} = (5.65)^{2n} \cdot x^{4n};$$

$$((u-x)^2 + (2.157x+1.86u)^2)^{3n} > (x^2 + (2.157x)^2)^{3n} = (5.65)^{3n} \cdot x^{6n};$$

$$|\varphi(x, u)| < C_{21}.$$

Несложно проверить, что для всех $u \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\left(u + \frac{3}{4}\right)^2 + (1.86u)^2 > 4.5u. \text{ Тогда}$$

$$\left(\left(u + \frac{3}{4}\right)^2 + (1.86u)^2\right)^{2.5n} > (4.5u)^{2.5n}.$$

В результате для (2.82) получаем

$$\begin{aligned} I^{(8)} &< C_{21} \int_3^{+\infty} dx \int_{0.02}^3 \frac{(5.65)^{3n} (4.46)^{1.5n} x^{6n} u^{3n} du}{(5.65)^{5n} x^{10n} (4.5)^{2.5n} u^{2.5n}} = \\ &= C_{21} \cdot e^{-4.98n} \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^{4n}} \int_{0.02}^3 u^{0.5n} du. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^{4n}} = \frac{x^{-4n+1}}{-4n+1} \Big|_3^{+\infty} < C_{19} \cdot (3)^{-4n} = C_{19} \cdot e^{-4.394n},$$

$$\int_{0.02}^3 u^{0.5n} du < C_{22} \cdot (3)^{0.5n} = C_{22} \cdot e^{0.55n},$$

тогда

$$I^{(8)} < C_{23} \cdot e^{0.55n} \cdot e^{-4.394n} \cdot e^{-4.98n} < e^{-6.273n}.$$

Для интеграла $I^{(8)}$ неравенство (2.70) доказано.

Для интеграла

$$I^{(9)} = \int_3^{+\infty} dx \int_3^{+\infty} \frac{[5.65x^2]^{3n} [4.46u^2]^{1.5n}}{[(1+x)^2 + (2.157x)^2]^{2n} [(-x+u)^2 + (2.157x + 1.86u)^2]^{3n}} \cdot \frac{|\varphi(x, u)| du}{[(u + \frac{3}{4})^2 + (1.86u)^2]^{2.5n}}.$$

проведем аналогичные рассуждения. Знаменатели подынтегральной функции интеграла $I^{(9)}$ можно оценить следующим образом:

$$((1+x)^2 + 4.65x^2)^{2n} > (x^2 + 4.65x^2)^{2n} = (5.65)^{2n} \cdot x^{4n};$$

$$((u-x)^2 + (2.157x + 1.86u)^2)^{3n} > (x^2 + (2.157x)^2)^{3n} = (5.65)^{3n} \cdot x^{6n};$$

$$\left(\left(u + \frac{3}{4} \right)^2 + (1.86u)^2 \right)^{2.5n} > (4.46u^2)^{2.5n}.$$

$$|\varphi(x, u)| < C_{24}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I^{(9)} &< C_{24} \int_3^{+\infty} dx \int_3^{+\infty} \frac{(5.65)^{3n} (4.46)^{1.5n} x^{6n} u^{3n} du}{(5.65)^{5n} x^{10n} (4.46)^{2.5n} u^{5n}} = \\ &= C_{24} \cdot e^{-4.958n} \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^{4n}} \int_3^{+\infty} \frac{du}{u^{2n}}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Оценим интегралы в (2.83)

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^{4n}} = \frac{x^{-4n+1}}{-4n+1} \Big|_3^{+\infty} < C_{19} \cdot (3)^{-4n} = C_{19} \cdot e^{-4.394n},$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{du}{u^{2n}} = \frac{u^{-2n+1}}{-2n+1} \Big|_3^{+\infty} < C_{25} \cdot (3)^{-2n} = C_{25} \cdot e^{-2.197n}.$$

Имеем

$$I^{(9)} < C_{26} \cdot e^{-4.958n} \cdot e^{-4.394n} \cdot e^{-2.197n} < e^{-6.273n}.$$

Тем самым неравенство (2.70) доказано для все интегралов, кроме $I^{(5)}$.

Исследовав функцию $|\tilde{F}_1(x, u)|$ (см. (2.61)) на экстремум в замкнутой области $0.02 \leq x \leq 3; 0.02 \leq u \leq 3$, получим, что в точке (x^*, u^*) достигается ее максимум, равный $e^{-6.273079...} = e^{|f(s^*, t^*)|}$.

Но тогда

$$I^{(5)} < C_{27} e^{-6.273079...n}.$$

Из (2.64) и (2.70) следует утверждение леммы 2.4.

Следует заметить, что эту же оценку интеграла (2.5) для набора параметров (2.47) можно получить с помощью двойного метода перевала по формуле (1.20) предложения 1.1.

Завершим доказательство теоремы 2.2.

Для линейной формы $q_n \frac{\pi}{\sqrt{3}} + p_n$, определенной равенством (2.21) леммы 2.2, применим лемму 1.1.

Вычислим σ .

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln q_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{d_{12n}}{\Delta} \cdot 3^{2n+1} \cdot 2^{-12n+1} Q_n \right).$$

По лемме 2.3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Q_n = 36.079 \dots$$

Рассмотрим неравенства (2.14) при значениях параметров (2.47). Тогда для $\omega = \left\{ \frac{n}{p} \right\}$ имеем

$$[4\omega] + [4\omega] - [3\omega] - [5\omega] > 0,$$

$$[6\omega] + [4\omega] + [6\omega] - [3\omega] - [8\omega] - [5\omega] > 0,$$

$$[12\omega] + [4\omega] + [3\omega] - [6\omega] - [8\omega] - [5\omega] > 0, \quad (2.84)$$

$$[3\omega] + [8\omega] - [6\omega] - [5\omega] > 0,$$

$$[12\omega] + [4\omega] + [4\omega] - [6\omega] - [8\omega] - [6\omega] > 0.$$

Применим лемму 1.2. Функция $\varphi(\omega) \leq 1$ для всех неравенств (2.84).

Соответствующее множество E имеет вид

$$E = \left[\frac{1}{12}; \frac{1}{5} \right) \cup \left[\frac{1}{4}; \frac{2}{5} \right) \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{8} \right) \cup \left[\frac{3}{4}; \frac{7}{8} \right).$$

По лемме 1.2 для всех простых чисел $p > \sqrt{12n}$, удовлетворяющих хотя бы одному из неравенств (2.84) имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \Delta = \psi \left(\frac{1}{5} \right) - \psi \left(\frac{1}{12} \right) + \psi \left(\frac{2}{5} \right) - \psi \left(\frac{1}{4} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& +\psi\left(\frac{5}{8}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \psi\left(\frac{7}{8}\right) - \psi\left(\frac{3}{4}\right) = \\
& = 9.618\dots
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sigma = 12 - 9.618\dots + 2\ln 3 - 12\ln 2 + 36.079\dots = 32.34\dots$$

Аналогично, но применив лемму 2.4 вместо леммы 2.3, получим

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{n} \ln |q_n \alpha + p_n| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{n} \ln \left| \frac{d_{12n}}{\Delta} \cdot 3^{2n+1} \cdot 2^{-12n+1} I_n \right| = \\
&= 12 - 9.618\dots + 2\ln 3 - 12\ln 2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{n} \ln |I_n| \leq \\
&\leq 12 - 9.618\dots + 2\ln 3 - 12\ln 2 + \ln |f(s^*, t^*)| = -10.012\dots,
\end{aligned}$$

т. е. $\tau = 10.012\dots$

По лемме 1.1 находим

$$\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leq 1 + \frac{32.34\dots}{10.012\dots} = 4.230464\dots$$

Тем самым доказательство теоремы 2.2 завершено.

Глава 3

Оценка меры иррациональности числа

$$\log \frac{13}{5} + 2 \arctan \frac{4}{7}$$

Используя идею комплексного симметризованного интеграла удалось доказать следующую теорему.

Теорема 3.1. *Справедлива оценка*

$$\mu(\log \frac{13}{5} + 2 \arctan \frac{4}{7}) \leq 7,448 \dots$$

Доказательство. Для доказательства теоремы рассмотрим интеграл вида:

$$\begin{aligned} J &\equiv \int_l \frac{(x-2-2i)^{6n}(x-2-3i)^n(x-2-i)^n(x-1-2i)^n(x-3-2i)^n dx}{x^{n+1}(4+4i-x)^{n+1}(4+ix)^{n+1}(4i-ix)^{n+1}} \equiv \\ &\equiv \int_l R(x) dx, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где n – четно, $n \rightarrow +\infty$, l – отрезок $[2+2i, 3+2i]$.

Подынтегральная функция $R(x)$ в (3.1) обладает свойством симметрии, а

именно $R(\theta(x - 2 - 2i)) = R(x - 2 - 2i)$, где $\theta \in \{\pm 1, \pm i\}$.

Разложение рациональной функции $R(x)$ в сумму простейших дробей имеет вид

$$R(x) = P_{6n-4}(x) + \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{a_j}{x^j} + \frac{a_j}{(4 + 4i - x)^j} + \frac{a_j}{(4 + ix)^j} + \frac{a_j}{(4i - ix)^j} \right), \quad (3.2)$$

где все $a_i \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$, $j = 1, \dots, n + 1$.

$$P_{6n-4}(x) = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}(6n-4)} b_\nu (x - 2 - 2i)^{4\nu}, \quad b_\nu \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Из (3.1) и (3.2) имеем

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \quad (3.4)$$

где

$$I_1 = \int_{2+2i}^{3+2i} P_{6n-4}(x) dx, \quad r_1 = I_1 \in \mathbb{Q}, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{2+2i}^{3+2i} \left(\sum_{j=2}^{n+1} \left(\frac{a_j}{x^j} + \frac{a_j}{(4 + 4i - x)^j} + \frac{a_j}{(4 + ix)^j} + \frac{a_j}{(4i - ix)^j} \right) \right) dx, \\ r_2 &= I_2 \in \mathbb{Q}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

Выберем ветвь логарифма таким образом, что $\ln z = \ln|z| + i\varphi$, $z = |z|e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < \pi$.

$$I_3 = \int_{2+2i}^{3+2i} \left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_1}{4 + 4i - x} + \frac{a_1}{4 + ix} + \frac{a_1}{4i - ix} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= a_1 \left(\log x - \log(4 + 4i - x) + \frac{1}{i} (\log(4 + ix) - \log(4i - ix)) \right) \Big|_{2+2i}^{3+2i} = \\
&= a_1 \left(\log \left(\frac{3+2i}{1+2i} \right) + \frac{1}{i} \log \left(\frac{2+3i}{2+i} \right) \right) = \\
&= a_1 \log \left(\sqrt{\frac{13}{5}} e^{i(\operatorname{arctg} \frac{2}{3} - \operatorname{arctg} 2)} \right) + \frac{a_1}{i} \log \left(\sqrt{\frac{13}{5}} e^{i(\operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2})} \right) = \\
&= \frac{1}{2}(1-i)a_1 \left(\log \frac{13}{5} + 2 \operatorname{arctg} \frac{4}{7} \right),
\end{aligned}$$

где $\operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \operatorname{arctg} a$, $a = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{7}$.

$$I_3 = \frac{1}{2} a_1' \left(\log \frac{13}{5} + 2 \operatorname{arctg} \frac{4}{7} \right), \quad a_1' = a_1(1-i). \quad (3.7)$$

Тогда

$$\varepsilon_n = I = \frac{1}{2} a_1' \left(\log \frac{13}{5} + 2 \operatorname{arctg} \frac{4}{7} \right) + r_1 + r_2. \quad (3.8)$$

Вычислим коэффициенты a_j в разложении (3.2).

Обозначим $K = \{x + yi | x, y \in \mathbb{Z}\}$ – кольцо гауссовых чисел, пусть

$\theta_N = \{N/2\}$ – дробная доля числа $N/2$ для $N \in \mathbb{Z}^+$.

Лемма 3.1. Для всех $j = 1, \dots, n+1$ справедливо представление

$$a_j = 2^{-7} (1+3i)^{j-1} (1+2i)^{j-1} (3+2i)^{j-1} (2+i)^{j-1} \cdot A_j, \quad (3.9)$$

где $A_j \in \mathbb{K}$.

Доказательство. Пусть в данной главе

$$D_k(f(x)) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} (f(x)) \Big|_{x=0}, \quad k \geq 0. \quad (3.10)$$

По формуле дифференцирования Лейбница

$$D_k(u_1 \cdot \dots \cdot u_r) = \sum_{k_1 + \dots + k_r = \bar{k}} D_{k_1}(u_1) \cdot \dots \cdot D_{k_r}(u_r)$$

и учитывая, что

$$a_j = \frac{1}{(n+1-j)!} \cdot \frac{d^{n+1-j}}{dx^{n+1-j}} (R(x) \cdot x^{n+1}) \Big|_{x=0} = D_{n+1-j} (R(x)x^{n+1}),$$

получаем

$$\begin{aligned} a_j &= \sum_{\bar{k}=n+1-j} D_{k_1}(x-2-2i)^{6n} D_{k_2}(x-2-3i)^n \times \\ &\times D_{k_3}(x-2-i)^n D_{k_4}(x-1-2i)^n D_{k_5}(x-3-2i)^n \times \\ &\times D_{k_6}(4+4i-x)^{-n-1} D_{k_7}(4+ix)^{-n-1} D_{k_8}(4i-ix)^{-n-1}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $k_1 \leq 6n$; $k_r \leq n$; $r = 2, \dots, 8$.

Равенство (3.10) можно записать в виде

$$a_j = \sum_{\bar{k}=n+1-j} \beta(\bar{k}) A(\bar{k}) B(\bar{k}) C(\bar{k}), \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} \beta(\bar{k}) &= \frac{6n \cdot \dots \cdot (6n - k_1 + 1)}{k_1!} \prod_{m=2}^5 \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n - k_m + 1)}{k_m!} \times \\ &\times \prod_{m=6}^8 \frac{(n+1) \cdot \dots \cdot (n + k_m)}{k_m!}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

коэффициенты $\beta(\bar{k}) \in \mathbb{Z}$.

$$A(\bar{k}) = (2+3i)^{n-k_2} (2+i)^{n-k_3} (1+2i)^{n-k_4} (3+2i)^{n-k_5}, \quad (3.14)$$

$$B(\bar{k}) = 2^{6n-k_1} 2^{-2n-2k_6-2} 2^{-2n-2k_7-2} 2^{-2n-2k_8-2} (1+i)^{6n-k_1} (1+i)^{-n-1-k_6}, \quad (3.15)$$

$$C(\bar{k}) = (-1)^{7n-(k_1+\dots+k_8)}(i)^{-n-k_7-1}. \quad (3.16)$$

Очевидно, что для $k \in \mathbb{N}$

$$(1+i)^{2k} = 2^k i^k, \quad (1+i)^{2k+1} = 2^k i^k (1+i) = 2^{0.5(2k+1)-0.5} i^k (1+i),$$

то есть

$$(1+i)^N = 2^{0.5N-\theta_N} \lambda_N, \quad \lambda_N \in K.$$

Поэтому,

$$B(\bar{m}) = 2^{-k_1-2k_6-2k_7-2k_8-6} 2^{2.5n-0.5(k_1+k_6+1)-\theta_{k_1+k_6-1}}. \quad (3.17)$$

Так как $-2.5k_6 - 1.5k_1 - 2k_7 - 2k_8 \geq -2.5(k_1 + k_6 + k_7 + k_8)$, то

$$A = 2.5n - 1.5k_1 - 2.5k_6 - 2k_7 - 2k_8 - 6.5 - \theta_{k_1+k_6+1} \geq -6.5 - \theta_{k_1+k_6+1}.$$

Из (3.11)—(3.17) следует искомое представление (3.9).

Лемма доказана.

Вычислим знаменатель Q_n рациональных чисел a_1, r_1, r_2 и к полученной линейной форме $\varepsilon_n Q_n$ применим лемму 1.1.

В лемме 3.2 вычислим знаменатель $Q_n \in \mathbb{N}$ рациональных чисел a_1, r_1, r_2 .

Обозначим

$$\Lambda_1 = \prod_{2 \leq p \leq \sqrt{6n}} p^{\left\lfloor \frac{\log 6n}{\log p} \right\rfloor}, \quad \Lambda_2 = \prod_{\substack{p \equiv 3 \pmod{4} \\ \sqrt{6n} < p \leq 2n-1}} p, \quad \Lambda_3 = \prod_{\substack{p \equiv 1 \pmod{4} \\ \sqrt{6n} < p \leq 6n-4}} p,$$

где p — простое число.

Лемма 3.2. Пусть $Q_n = 2^7 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3$. Тогда справедливо представление вида

$$Q_n I = A \left(\log \frac{13}{5} + 2 \operatorname{arctg} \frac{4}{7} \right) + B, \text{ где } A, B \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство.

1) По лемме 3.1 при $j = 1$ имеем

$$a_1 = 2^{-7} A_1, \text{ где } A_1 \in \mathbb{K}.$$

Поэтому

$$Q_n a_1 = A_1 \cdot \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \in \mathbb{K}. \quad (3.18)$$

В интеграле (3.1) сделаем замену $s = x - 2 - 2i$. Получаем

$$J = - \int_0^1 \frac{(s^4)^{\frac{3n}{2}} (1 - s^4)^n ds}{(64 + s^4)^{n+1}}. \quad (3.19)$$

Покажем, что все интегралы в (3.19) представимы в виде

$$Q \cdot \alpha + R, \quad (3.20)$$

где $\alpha = \log \frac{13}{5} + 2 \arctan \frac{4}{7}$, $Q, R \in \mathbb{Q}$.

Разлагая подынтегральную функцию в сумму простейших дробей по переменной s^4 , получим

$$\frac{(s^4)^{\frac{3n}{2}} (1 - s^4)^n}{(64 + s^4)^{n+1}} = P + \sum_{\epsilon=1}^{n+1} \frac{\gamma_{\epsilon}}{(s^4 + 64)^{\epsilon}},$$

где $P \in \mathbb{Q}[s^4]$, все $\gamma_{\epsilon} \in \mathbb{Q}$.

Для доказательства (3.20) достаточно показать, что все интегралы

$$\int_0^1 \frac{ds}{(s^4 + 64)^\epsilon} \in \mathbb{Q} + \alpha \cdot \mathbb{Q}. \quad (3.21)$$

Имеем, при $\epsilon = 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{ds}{s^4 + 64} &= \left(\frac{1}{64} \arctan \left(\frac{-2+s}{2} \right) + \frac{1}{64} \arctan \left(\frac{2+s}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{128} \log(8 - 4s + s^2) + \frac{1}{128} \log(8 + 4s + s^2) \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{64} \left(\arctan \frac{3}{2} - \arctan \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 13 - \frac{1}{2} \log 5 \right) = \\ &= \frac{1}{128} \left(\log \frac{13}{5} + 2 \arctan \frac{4}{7} \right) = \frac{1}{128} \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Рассмотрим интегралы (3.21) при $\epsilon > 1$.

$$\int_0^1 \frac{ds}{(s^4 + 64)^\epsilon} = \frac{1}{64} \int_0^1 \frac{(s^4 + 64 - s^4)ds}{(s^4 + 64)^\epsilon} = \frac{1}{64} \int_0^1 \frac{ds}{(s^4 + 64)^{\epsilon-1}} - \frac{1}{64} I_1,$$

где

$$I_1 = \int_0^1 \frac{s^4 ds}{(s^4 + 64)^\epsilon} = \frac{1}{(4 - 4\epsilon)64^{\epsilon-1}} + \frac{1}{4\epsilon - 4} \int_0^1 \frac{ds}{(s^4 + 64)^{\epsilon-1}}.$$

Тогда

$$\int_0^1 \frac{ds}{(s^4 + 64)^\epsilon} = -\frac{1}{(4 - 4\epsilon)64^\epsilon} + \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{64(4\epsilon - 4)} \right) \int_0^1 \frac{ds}{(s^4 + 64)^{\epsilon-1}}.$$

Таким образом, интеграл J представляет собой линейную форму от 1 и α с рациональными коэффициентами.

Из (3.18) и (3.20) следует, что

$$Q_n a_1 \in \mathbb{Z}. \quad (3.22)$$

2) Покажем, что $Q_n r_2 \in \mathbb{Z}$.

Из (3.6) имеем

$$r_2 = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{a_j}{j-1} \left(\frac{1}{(3+2i)^{j-1}} - \frac{1}{(1+2i)^{j-1}} + \frac{1}{i(2+3i)^{j-1}} - \frac{1}{i(i+2)^{j-1}} \right).$$

Так как все $\frac{\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3}{j-1} \in \mathbb{N}$, то по лемме 3.1

$$Q_n r_2 \in \mathbb{K}. \quad (3.23)$$

Тогда из (3.23) и (3.20) следует, что

$$Q_n r_2 \in \mathbb{Z}. \quad (3.24)$$

3) Покажем, что $Q_n r_1 \in \mathbb{Z}$.

Из (3.3) имеем

$$P_{6n-4}(x) = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}(6n-4)} b_\nu (x-2-2i)^{4\nu}, \quad b_\nu \in \mathbb{Z}$$

Тогда по формуле (3.5)

$$\begin{aligned} r_1 &= \int_{2+2i}^{3+2i\frac{1}{4}(6n-4)} \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}(6n-4)} b_\nu (x-2-2i)^{4\nu} dx = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}(6n-4)} \frac{b_\nu}{4\nu+1} (x-2-2i)^{4\nu+1} \Big|_{2+2i}^{3+2i} = \\ &= \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}(6n-4)} \frac{b_\nu}{4\nu+1}. \end{aligned}$$

Все простые числа вида $p \equiv 3 \pmod{4}$ в разложении чисел $4\nu+1$ на простые множители не превосходят величину $\frac{1}{3}(6n-4+1) = \frac{1}{3}(6n-3) = 2n-1$.

Поэтому все $\frac{\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3}{4\nu + 1} \in \mathbb{N}$,

$$Q_n r_1 \in \mathbb{Z}. \quad (3.25)$$

Из (3.22), (3.24) и (3.25) следует, что лемма доказана.

Для линейной формы $Q_n \varepsilon_n$ вычислим константы σ и τ и с помощью леммы 1.1 завершим доказательство теоремы 3.1.

В интеграле (3.1) сделаем замену переменной $t = (x - 2 - 2i)^4$.

Имеем

$$J = -\frac{1}{4} \int_0^1 \frac{t^{\frac{3n}{2} - \frac{3}{4}} (1-t)^n dt}{(64+t)^{n+1}}. \quad (3.26)$$

Получим асимптотическое разложение интеграла (3.26) с помощью метода Лапласа.

Рассмотрим функцию

$$g(t) = \frac{(1-t)t^{1.5}}{64+t}.$$

Далее действуем так, как в работе М. Хата [44]. Точки перевала — нули функции $g'(t)$, отличные от нулей функции $g(t)$.

Для функции $\log g(t)$ на отрезке $[\xi_1, \xi_2]$ ($\xi_1 \rightarrow 0^+$, $\xi_2 \rightarrow 1^-$) выполняются следующие условия теоремы 1.1, необходимые для получения (1.14):

$$1^0 : \log g(t) \in C[I];$$

$$2^0 : \max_{t \in I} \log g(t) \text{ достигается только в точке } t_1 = 0.598512\dots, \xi_1 <$$

$t_1 < \xi_2$, так как t_1 является единственным корнем уравнения

$$\frac{d}{dt} \log g(t) = \frac{1.5}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{64+t} = 0 \quad (3.27)$$

на интервале $(0, 1)$ и $\frac{d^2}{dt^2} \log g(t_1) = -10.375 \dots < 0$;

$3^0 : \log g(t) \in C^2$ при t , близких к t_1 , и $\frac{d^2}{dt^2} \log g(t_1) \neq 0$.

Ввиду того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \Lambda_1 = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \Lambda_2 = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \Lambda_3 = 3$,
имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Q_n = 4$.

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |I| = \log |g(t_1)| = -5.4997 \dots,$$

а значит

$$\tau = - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Q_n + \log |g(t_1)| \right) = -(4 - 5.4997 \dots) = 1.4997 \dots$$

Отметим, что на рисунке 1 (см. Приложение) изображены линии уровня функции $|g(t)|$ ($t = x + yi$). Интегрирование проводится по отрезку $0 \leq x \leq 1$, $y = 0$. Как видно из рисунка 1 линия уровня $|g(t)| = |g(t_1)| = 0.002878 \dots$ в малой окрестности точки $t_1 = 0.598512 \dots$ состоит из двух аналитических кривых, которые пересекаются в этой точке.

Вычислим σ .

$$\begin{aligned} \sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |Q_n a_1| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |Q_n| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |a_1| = \\ &= 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |a_1|. \end{aligned}$$

Последний предел можно вычислить с помощью метода перевала, исполь-

зую второй корень $t_2 = -106.931833 \dots$ уравнения (3.27).

При $t = x + yi$ выберем контур γ :

$$\frac{\sqrt{(1-x)^2 + y^2} \sqrt[4]{(x^2 + y^2)^3}}{\sqrt{(64+x)^2 + y^2}} = 2779.909 \dots$$

Замкнутый контур γ удовлетворяет условию A_0 теоремы 1.3. Он принадлежит окрестности изолированной точки $t = -64$, охватывает её, проходя через точку перевала $t_2 = -106.931833 \dots$

На рисунке 2 (см. Приложение) изображены линии уровня функции $|g(t)|$ ($t = x + yi$) и выбранный путь интегрирования γ . Как видно из рисунка 2 линия уровня $|g(t)| = |g(t_2)| = 0.002878 \dots$ в малой окрестности точки $t_2 = -106.931833 \dots$ состоит из двух аналитических кривых, которые пересекаются в точке t_2 и разбивают эту окрестность на 4 сектора, что соответствует лемме 1.4 при $n = 1$.

По теореме 1.3 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |a_1| = \log |g(t_2)| = 6.531 \dots$$

Тогда

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |Q_n a_1| = 4 + 6.531 \dots = 10.531 \dots$$

По лемме 1.1 для линейной формы $Q_n \varepsilon_n$ имеем

$$\mu \left(\log \frac{13}{5} + 2 \arctan \frac{4}{7} \right) \leq 1 + \frac{\sigma}{\tau} = 1 + \frac{10.531}{1.5} = 7.448 \dots,$$

и требуемая оценка доказана.

Глава 4

Линейные формы от чисел $1, \zeta(2), \zeta(4)$

4.1 Групповая структура четырехкратных интегралов

Пусть для параметров интеграла (1.11) выполнены следующие условия:

$$a_1 + b_1 = a_4 + b_2, \quad a_2 + b_2 = b_3 + b_4.$$

Получим групповую структуру интеграла (1.11). Для этого рассмотрим следующую лемму.

Лемма 4.1 Пусть в интеграле

$$I = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx}{(A+Bx)}$$

выполнены условия: $A > 0, A+B > 0; a, b, c \in \mathbb{N}$.

Тогда для него справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} 1) \quad I &= A^{a-c}(A+B)^{b-c} \int_0^1 \frac{x^{b-1}(1-x)^{a-1}dx}{(A+Bx)^{a+b-c}} = \\ &= A^{a-c}(A+B)^{b-c} I(b, a, a+b-c); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad I &= A^{a-c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)} \int_0^1 \frac{x^{c-1}(1-x)^{a+b-c-1}dx}{(A+Bx)^a} = \\
&= A^{a-c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)} I(c, a+b-c, a);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad I &= (A+B)^{b-c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)} \int_0^1 \frac{x^{a+b-c-1}(1-x)^{c-1}dx}{(A+Bx)^b} = \\
&= (A+B)^{b-c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)} I(a+b-c, c, b).
\end{aligned}$$

Доказательство данной леммы аналогично доказательству леммы 2.1.

Выполним преобразования в интеграле (1.11).

1) Применим к интегралу сначала формулу 2) леммы 4.1 по переменной $x = x_4$. В результате получаем

$$I = \int_{[0,1]^4} \frac{\prod_{i=1}^3 x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-1} (1-x_1+x_1x_2)^{a_4-c} x_4^{c-1} (1-x_4)^{a_4+b_4-c-1} dx_i}{(1-x_1+x_1x_2(1-x_3x_4))^c} R_1,$$

$$\text{где } R_1 = \frac{\Gamma(a_2+b_1-c)\Gamma(a_1)\Gamma(b_4)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)\Gamma(a_4+b_4-c)}.$$

Для преобразований интеграла Рин и Виола [54] использовали замену переменных. Проведем в данном интеграле аналогичную замену:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{X_2}{1-X_1+X_1X_2}; & X_1 &= \frac{x_2}{1-x_1+x_1x_2}; & 1-x_1 &= \frac{(1-X_1)(1-X_2)}{1-X_1+X_1X_2}; \\
x_2 &= (1-X_2)X_1; & X_2 &= x_1(1-x_2); & dx_1dx_2 &= \frac{1-X_2}{1-X_1+X_1X_2} dX_1dX_2.
\end{aligned}$$

В результате преобразований интеграл имеет вид

$$I^* = R_1 \int_{[0,1]^4} \frac{X_1^{a_2-1}(1-X_1)^{b_1-1}X_2^{a_1-1}(1-X_2)^{a_2+b_1-c-1}X_3^{a_3-1}(1-X_3)^{b_3-1}}{(1-X_1(1-X_2(1-X_3X_4)))^{a_4}} \times \\ \times X_4^{c-1}(1-X_4)^{a_4+b_4-c-1} \overline{dX_i}.$$

Таким образом, получили преобразование g_1 :

$$I^* = R_1 \cdot I(a_2, b_1, a_1, a_2 + b_1 - c, a_3, b_3, c, a_4 + b_4 - c, a_4).$$

2) Проведя в исходном интеграле I преобразование по формуле 2)

леммы 4.1 по переменной x_1 , получаем g_2 , такое, что

$$I^* = \frac{\Gamma(a_2 + b_2 - c)\Gamma(b_1)}{\Gamma(a_2 + b_1 - a_4)\Gamma(a_1 + b_1 - c)} \cdot I(c, a_1 + b_1 - c, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, a_1).$$

3) Применим формулу 2) леммы 4.1 по переменной x_2 .

Тогда g_3 :

$$I^* = \frac{\Gamma(a_2 + b_2 - c)\Gamma(c)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)} \cdot I(a_1, b_1 + a_2 - c, c, a_2 + b_2 - c, a_3, b_3, a_4, b_4, a_2).$$

4) В интеграле $I = I(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, c)$ сделаем сначала замену $x_3 = 1 - t_3 t_4$; $x_4 = \frac{1 - t_3}{1 - t_3 t_4}$, а затем $t_3 = 1 - t_5 t_6$; $x_2 = \frac{1 - t_5}{1 - t_5 t_6}$. В результате преобразование g_4 имеет вид

$$I^* = \frac{\Gamma(a_2 + b_2 - c)\Gamma(a_4)\Gamma(c)}{\Gamma(a_4 + b_4 - a_3)\Gamma(a_3 + b_3 - a_2)\Gamma(a_2)} \times \\ \times I(b_3, b_4, a_4, b_2, a_2 + b_1 - c, a_1, a_2, b_1, a_4 + b_4 - a_3).$$

Получены четыре преобразования интеграла (1.11), которые лежат в основе групповой структуры.

Сделаем замену интеграла (1.11) на интеграл вида

$$I = \frac{\Gamma(\omega_9)\Gamma(\omega_{14})}{\Gamma(\omega_3)\Gamma(\omega_4)} \int_{[0,1]^4} \frac{x_1^{\omega_1-1}(1-x_1)^{\omega_2-1}x_2^{\omega_3-1}(1-x_2)^{\omega_4-1}}{(1-x_1+x_1x_2(1-x_3x_4))^{\omega_9}} \times \\ \times x_3^{\omega_5-1}(1-x_3)^{\omega_6-1}x_4^{\omega_7-1}(1-x_4)^{\omega_8-1} \overline{dx_i},$$

где $a_1 = \omega_1, b_1 = \omega_2, a_2 = \omega_3, b_2 = \omega_4, a_3 = \omega_5, b_3 = \omega_6, a_4 = \omega_7, b_4 = \omega_8, c = \omega_9$.

Введем следующие параметры:

$$\omega_{10} = \omega_3 + \omega_2 - \omega_9, \omega_{11} = \omega_7 + \omega_8 - \omega_9, \omega_{12} = \omega_1 + \omega_2 - \omega_9, \omega_{13} = \omega_7 + \omega_8 - \omega_1,$$

$$\omega_{14} = \omega_3 + \omega_4 - \omega_9, \omega_{15} = \omega_7 + \omega_8 - \omega_3, \omega_{16} = \omega_7 + \omega_8 - \omega_5, \omega_{17} = \omega_5 + \omega_6 - \omega_1,$$

$$\omega_{18} = \omega_5 + \omega_6 - \omega_7, \omega_{19} = \omega_5 + \omega_6 - \omega_3, \omega_{20} = \omega_2 + \omega_3 - \omega_7, \omega_{21} = \omega_5 + \omega_6 - \omega_9.$$

Для этих параметров выполнены условия

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_4 + \omega_7, \omega_3 + \omega_4 = \omega_6 + \omega_8.$$

Рассмотрим каждое из преобразований интеграла относительно параметров $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{21}$.

Преобразование g_1 :

$$\omega'_1 = \omega_3, \omega'_2 = \omega_2, \omega'_3 = \omega_1, \omega'_4 = \omega_3 + \omega_2 - \omega_9 = \omega_{10},$$

$$\omega'_5 = \omega_5, \omega'_6 = \omega_6, \omega'_7 = \omega_9, \omega'_8 = \omega_{11}, \omega'_9 = \omega_7,$$

$$\omega'_{10} = \omega'_3 + \omega'_2 - \omega'_9 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_7 = \omega_4, \omega'_{11} = \omega'_7 + \omega'_8 - \omega'_9 = \omega_9 + \omega_{11} - \omega_7 = \omega_8,$$

$$\begin{aligned}
\omega'_{12} &= \omega'_1 + \omega'_2 - \omega'_9 = \omega_2 + \omega_3 - \omega_7 = \omega_{20}, \omega'_{13} = \omega'_7 + \omega'_8 - \omega'_1 = \omega_9 + \omega_{11} - \omega_3 = \omega_{15}, \\
\omega'_{14} &= \omega'_3 + \omega'_4 - \omega'_9 = \omega_3 + \omega_4 - \omega_9 = \omega_{14}, \omega'_{15} = \omega'_7 + \omega'_8 - \omega'_3 = \omega_9 + \omega_{11} - \omega_1 = \omega_{13}, \\
\omega'_{16} &= \omega'_7 + \omega'_8 - \omega'_5 = \omega_9 + \omega_{11} - \omega_5 = \omega_{16}, \omega'_{17} = \omega'_5 + \omega'_6 - \omega'_1 = \omega_5 + \omega_6 - \omega_3 = \omega_{19}, \\
\omega'_{18} &= \omega'_5 + \omega'_6 - \omega'_7 = \omega_5 + \omega_6 - \omega_9 = \omega_{21}, \omega'_{19} = \omega'_5 + \omega'_6 - \omega'_3 = \omega_5 + \omega_6 - \omega_1 = \omega_{17}, \\
\omega'_{20} &= \omega'_2 + \omega'_3 - \omega'_7 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_9 = \omega_{12}, \omega'_{21} = \omega'_5 + \omega'_6 - \omega'_9 = \omega_5 + \omega_6 - \omega_7 = \omega_{18}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$g_1 : (\omega_1, \omega_3)(\omega_4, \omega_{10})(\omega_7, \omega_9)(\omega_8, \omega_{11})(\omega_{12}, \omega_{20})(\omega_{13}, \omega_{15})(\omega_{17}, \omega_{19})(\omega_{18}, \omega_{21}).$$

Рассмотрев аналогично преобразования g_2, g_3, g_4 , получаем

$$g_2 : (\omega_1, \omega_9)(\omega_2, \omega_{12})(\omega_{11}, \omega_{13})(\omega_{14}, \omega_{20})(\omega_{17}, \omega_{21});$$

$$g_3 : (\omega_2, \omega_{10})(\omega_3, \omega_9)(\omega_4, \omega_{14})(\omega_{11}, \omega_{15})(\omega_{19}, \omega_{21});$$

$$g_4 : (\omega_1, \omega_6)(\omega_2, \omega_8)(\omega_3, \omega_7)(\omega_5, \omega_{10})(\omega_9, \omega_{16})(\omega_{11}, \omega_{17})(\omega_{12}, \omega_{20})(\omega_{14}, \omega_{19})(\omega_{15}, \omega_{20}). \blacksquare$$

Всевозможные комбинации этих преобразований образуют группу G , состоящую из 720 элементов.

Функция

$$\Pi(\bar{\omega}) = \frac{I(\bar{\omega})}{\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2)\Gamma(\omega_5)\Gamma(\omega_6)\Gamma(\omega_7)\Gamma(\omega_8)\Gamma(\omega_9)\Gamma(\omega_{10})\Gamma(\omega_{14})}$$

является инвариантной относительно всех преобразований этой группы.

Таким образом, для $g \in G$

$$\Pi(\bar{\omega}^g) = I(\bar{\omega}) \frac{\Gamma(\omega_1^g)\Gamma(\omega_2^g)\Gamma(\omega_5^g)\Gamma(\omega_6^g)\Gamma(\omega_7^g)\Gamma(\omega_8^g)\Gamma(\omega_9^g)\Gamma(\omega_{10}^g)\Gamma(\omega_{14}^g)}{\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2)\Gamma(\omega_5)\Gamma(\omega_6)\Gamma(\omega_7)\Gamma(\omega_8)\Gamma(\omega_9)\Gamma(\omega_{10})\Gamma(\omega_{14})},$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1^g + \omega_2^g + \omega_5^g + \omega_6^g + \omega_7^g + \omega_8^g + \omega_9^g + \omega_{10}^g + \omega_{14}^g = \\ = \omega_1 + \omega_2 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_7 + \omega_8 + \omega_9 + \omega_{10} + \omega_{14}. \end{aligned}$$

В основе групповой структуры интеграла (1.12) лежат пять преобразований: g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 . Рассмотрим каждое из них.

1. Преобразование (1) может быть получено применением к интегралу (1.12) формулы 2) леммы 4.1 по переменной $x = x_4$. Она позволяет получить интеграл вида

$$\begin{aligned} I = \int_{[0,1]^4} \frac{x_1^{a_1-1}(1-x_1)^{b_1-1}x_2^{a_2-1}(1-x_2)^{b_2-1}}{(1-x_3x_4)^{\alpha_2}(1-x_1(1-x_2x_3))^{\alpha_1}} \times \\ \times x_3^{a_2+b_2-1}(1-x_3)^{a_4-1}x_4^{\alpha_2-1}(1-x_4)^{b_3+b_4-\alpha_2-1} \overline{dx} R_1, \end{aligned}$$

где $R_1 = \frac{\Gamma(b_3)\Gamma(b_4)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(b_3+b_4-\alpha_2)}.$

Таким образом, получили преобразование $\tilde{g}_1$:

$$I^* = R_1 \cdot I(a_1, b_1, a_2, b_2, a_4, \alpha_2, b_3 + b_4 - \alpha_2, b_3, \alpha_1).$$

2. Проведя в исходном интеграле I преобразование по формуле 2) леммы 4.1 по переменной x_1 , получаем $\tilde{g}_2$, такое, что

$$I^* = R_2 \cdot I(\alpha_1, a_1 + b_1 - \alpha_1, a_2, b_2, a_4, b_3, b_4, \alpha_2, a_1),$$

где $R_2 = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(a_1+b_1-\alpha_1)}.$

3. В интеграле (1.12) сделаем замену переменных Рина и Виолы [54]:

$$\begin{aligned} u &= 1 - x_2 x_3; & x_3 &= 1 - uv; & 1 - x_3 &= uv; \\ v &= \frac{1 - x_3}{1 - x_2 x_3}; & x_2 &= \frac{1 - u}{1 - uv}; & 1 - x_2 &= \frac{u(1 - v)}{1 - uv}. \end{aligned}$$

В результате интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0,1]^4} \frac{x_1^{a_1-1}(1-x_1)^{b_1-1}u^{b_2+a_4-1}(1-u)^{a_2-1}}{(1-x_1u)^{\alpha_1}(1-x_4(1-uv))^{\alpha_2}} \times \\ &\times v^{a_4-1}(1-v)^{b_2-1}x_4^{b_3-1}(1-x_4)^{b_4-1}dx_1dudvdx_4, \end{aligned} \quad (4.1)$$

Выполнив преобразование симметрии между интегралами (1.12) и (4.1), которое переводит переменные $x_4 \leftrightarrow x_1, x_3 \leftrightarrow u, x_2 \leftrightarrow v, x_1 \leftrightarrow x_4$ получаем преобразование $\tilde{g}_3$:

$$I^* = I(b_3, b_4, a_4, b_2, a_2, a_1, b_1, \alpha_1, \alpha_2).$$

4. Применяя к интегралу (1.12) формулу 2) леммы 4.1 по переменной x_2 , получаем преобразование $\tilde{g}_4$:

$$I^* = R_3 \cdot I(a_1, a_2 + b_1 - \alpha_1, \alpha_1, a_2 + b_2 - \alpha_1, a_4, b_3, b_4, \alpha_2, a_2),$$

где

$$R_3 = \frac{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(a_2 + b_2 - \alpha_1)}.$$

5. И, наконец, применяя к интегралу (1.12) формулу 1) леммы 4.1 по переменной $x = x_4$, получаем преобразование $\tilde{g}_5$ такое, что

$$I^* = I(a_1, b_1, a_2, b_2, a_4 + b_4 - \alpha_2, b_4, b_3, b_3 + b_4 - \alpha_2, \alpha_1).$$

Таким образом, получены пять преобразований исходного интеграла, которые лежат в основе групповой структуры.

Представим интеграл (1.12) в виде интеграла от переменных $\omega_i, \omega_i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, 9$:

$$I = \int_{[0,1]^4} \frac{x_1^{\omega_1-1}(1-x_1)^{\omega_2-1}x_2^{\omega_3-1}(1-x_2)^{\omega_4-1}}{(1-x_3x_4)^{\omega_8}(1-x_1(1-x_2x_3))^{\omega_9}} \times \\ \times x_3^{\omega_3+\omega_4-1}(1-x_3)^{\omega_5-1}x_4^{\omega_6-1}(1-x_4)^{\omega_7-1} \overline{dx},$$

где $a_1 = \omega_1, b_1 = \omega_2, a_2 = \omega_3, b_2 = \omega_4, a_4 = \omega_5, b_3 = \omega_6, b_4 = \omega_7, \alpha_2 = \omega_8, \alpha_1 = \omega_9$.

Введем следующие параметры:

$$\omega_{10} = \omega_6 + \omega_7 - \omega_8, \omega_{11} = \omega_1 + \omega_2 - \omega_9, \omega_{12} = \omega_3 + \omega_2 - \omega_9, \omega_{13} = \omega_3 + \omega_4 - \omega_9,$$

$$\omega_{14} = \omega_3 + \omega_4 - \omega_1, \omega_{15} = \omega_7 + \omega_5 - \omega_8, \omega_{16} = \omega_5 + \omega_4 - \omega_8, \omega_{17} = \omega_5 + \omega_4 - \omega_6,$$

$$\omega_{18} = \omega_5 + \omega_4 + \omega_3 - \omega_8 - \omega_9, \omega_{19} = \omega_5 + \omega_3 + \omega_4 - \omega_6 - \omega_9,$$

$$\omega_{20} = \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 - \omega_1 - \omega_8, \omega_{21} = \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 - \omega_1 - \omega_6.$$

Рассмотрим каждое из преобразований интеграла относительно параметров $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{21}$.

Преобразование $\tilde{g}_1$:

$$\omega'_1 = \omega_1, \omega'_2 = \omega_2, \omega'_3 = \omega_3, \omega'_4 = \omega_4, \omega'_5 = \omega_5, \omega'_6 = \omega_8, \omega'_7 = \omega_6 + \omega_7 - \omega_8 = \omega_{10},$$

$$\omega'_8 = \omega_6, \omega'_9 = \omega_9, \omega'_{10} = \omega_6 + \omega_7 + \omega_8 - \omega_8 - \omega_6 = \omega_7, \omega'_{11} = \omega_{11},$$

$$\omega'_{12} = \omega_2 + \omega_3 - \omega_9 = \omega_{12}, \omega'_{13} = \omega_3 + \omega_4 - \omega_9 = \omega_{13}, \omega'_{14} = \omega_{14}, \omega'_{15} = \omega_{15},$$

$$\omega'_{16} = \omega_4 + \omega_5 - \omega_6 = \omega_{17}, \omega'_{17} = \omega_4 + \omega_6 - \omega_8 = \omega_{16},$$

$$\omega'_{18} = \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 - \omega_6 - \omega_9 = \omega_{19}, \omega'_{19} = \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 - \omega_8 - \omega_9 = \omega_{18},$$

$$\omega'_{20} = \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 - \omega_1 - \omega_6 = \omega_{21}, \omega'_{21} = \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 - \omega_1 - \omega_8 = \omega_{20}.$$

Таким образом,

$$\tilde{g}_1 : (\omega_6, \omega_8)(\omega_7, \omega_{10})(\omega_{16}, \omega_{17})(\omega_{18}, \omega_{19})(\omega_{20}, \omega_{21}).$$

Рассмотрев аналогично преобразования $\tilde{g}_2, \tilde{g}_3, \tilde{g}_4, \tilde{g}_5$, получаем:

$$\tilde{g}_2 : (\omega_1, \omega_9)(\omega_2, \omega_{11})(\omega_{13}, \omega_{14})(\omega_{18}, \omega_{20})(\omega_{19}, \omega_{21});$$

$$\tilde{g}_3 : (\omega_1, \omega_6)(\omega_2, \omega_7)(\omega_3, \omega_5)(\omega_8, \omega_9)(\omega_{10}, \omega_{11})(\omega_{12}, \omega_{15})(\omega_{13}, \omega_{16})(\omega_{14}, \omega_{17})(\omega_{19}, \omega_{20});$$

$$\tilde{g}_4 : (\omega_2, \omega_{12})(\omega_3, \omega_9)(\omega_4, \omega_{13})(\omega_{16}, \omega_{18})(\omega_{17}, \omega_{19});$$

$$\tilde{g}_5 : (\omega_5, \omega_{15})(\omega_6, \omega_7)(\omega_8, \omega_{10})(\omega_{16}, \omega_{17})(\omega_{18}, \omega_{19})(\omega_{20}, \omega_{21}).$$

Всевозможные комбинации этих преобразований образуют группу $\tilde{G}$, состоящую из 288 элементов.

Функция

$$\Pi(\bar{\omega}) = \frac{I(\bar{\omega})}{\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2)\Gamma(\omega_3)\Gamma(\omega_4)\Gamma(\omega_5)\Gamma(\omega_6)\Gamma(\omega_7)\Gamma(\omega_{12})\Gamma(\omega_{15})}$$

является инвариантной относительно всех преобразований этой группы.

Таким образом, для $\tilde{g} \in \tilde{G}$

$$\Pi(\bar{\omega}^{\tilde{g}}) = I(\bar{\omega}) \frac{\Gamma(\omega_1^{\tilde{g}})\Gamma(\omega_2^{\tilde{g}})\Gamma(\omega_3^{\tilde{g}})\Gamma(\omega_4^{\tilde{g}})\Gamma(\omega_5^{\tilde{g}})\Gamma(\omega_6^{\tilde{g}})\Gamma(\omega_7^{\tilde{g}})\Gamma(\omega_{12}^{\tilde{g}})\Gamma(\omega_{15}^{\tilde{g}})}{\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2)\Gamma(\omega_3)\Gamma(\omega_4)\Gamma(\omega_5)\Gamma(\omega_6)\Gamma(\omega_7)\Gamma(\omega_{12})\Gamma(\omega_{15})},$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1^{\tilde{g}} + \omega_2^{\tilde{g}} + \omega_3^{\tilde{g}} + \omega_4^{\tilde{g}} + \omega_5^{\tilde{g}} + \omega_6^{\tilde{g}} + \omega_7^{\tilde{g}} + \omega_{12}^{\tilde{g}} + \omega_{15}^{\tilde{g}} = \\ = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_7 + \omega_{12} + \omega_{15}. \end{aligned}$$

4.2 О линейных формах от чисел 1, $\zeta(2)$, $\zeta(4)$

Покажем, что интегралы (1.11) и (1.12) представим в виде линейной формы от чисел 1, $\zeta(2)$, $\zeta(4)$.

Теорема 4.1 Пусть для параметров интеграла (1.11) выполняются следующие условия:

$$1) c \leq a_2 + b_2 + 1; \quad 2) a_2 + b_2 \leq b_4 + b_3; \quad 3) c \leq a_2 + b_1;$$

$$4) \min(a_3, a_4) + b_2 \geq \min(a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$5) \max(a_3, a_4) + b_2 \geq \max(a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

Тогда интеграл (1.11) можно представить в виде линейной формы (1.7).

Для доказательства теоремы 4.1 сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма 4.2 Интеграл (1.11) представим в виде

$$\begin{aligned} I = I(a, b) = \Lambda \cdot \sum_{t=0}^{\infty} (R(t) \left(\sum_{s=0}^{\infty} G(s-t) Q(s) - \right. \\ \left. - \sum_{s=0}^{\infty} G(s+\gamma) Q(s+t+\gamma) \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$${}_2d e \gamma = b_2 + 1, \Lambda = \frac{\Gamma(a_2 + b_2 - c)\Gamma(c)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)},$$

$$R(t) = \frac{1}{(t + c + 1) \cdots (t + a_2 + b_2 + 1)(t + a_1 + 1) \cdots (t + a_1 + b_1 + 1)},$$

$$Q(s) = \frac{(s + 1) \cdots (s + a_2)}{(s + a_4 + 1) \cdots (s + a_4 + b_4 + 1)(s + a_3 + 1) \cdots (s + a_3 + b_3 + 1)},$$

$$G(s - t) = (s - t - \gamma) \cdots (s - t - 1),$$

$$G(s + \gamma) = (s + 1) \cdots (s + \gamma).$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{[0,1]^4} \frac{\prod_{j=1}^4 x_j^{a_j} (1 - x_j)^{b_j} dx_1 \cdots dx_4}{(1 - x_1 Q_2)^{c+1}} = \\ &= \int_{[0,1]^3} \prod_{j=2}^4 x_j^{a_j} (1 - x_j)^{b_j} dx_2 dx_3 dx_4 \left(\int_0^1 x_1^{a_1} (1 - x_1)^{b_1} (1 - x_1 Q_2)^{-c-1} dx_1 \right), \end{aligned}$$

где $Q_2 = 1 - x_2(1 - x_3 x_4)$.

Пусть $I_2 = \int_0^1 x_1^{a_1} (1 - x_1)^{b_1} (1 - x_1 Q_2)^{-c-1} dx_1$.

Разлагая $(1 - x_1 Q_2)^{-c-1}$ в ряд Тейлора, получаем

$$(1 - x_1 Q_2)^{-c-1} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(c+1) \cdots (c+t)}{t!} x_1^t Q_2^t. \quad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в I_2 , получаем

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 x_1^{a_1} (1 - x_1)^{b_1} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(c+1) \cdots (c+t)}{t!} x_1^t Q_2^t dx_1 = \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(c+1) \cdots (c+t)}{t!} (Q_2(x))^t \int_0^1 x_1^{a_1+t} (1 - x_1)^{b_1} dx_1. \end{aligned}$$

Так как $\frac{(c+1) \cdots (c+t)}{t!} = \frac{(c+1) \cdots (c+t)\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+1)t!} = \frac{(t+1) \cdots (t+c)}{c!}$ и

$$\int_0^1 x_1^{a_1} (1-x_1)^{b_1} dx_1 = \frac{\Gamma(t+a_1+1)\Gamma(b_1+1)}{\Gamma(t+a_1+b_1+2)}, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(t+1) \cdots (t+c)}{c!} (Q_2(x))^t = \frac{\Gamma(t+a_1+1)\Gamma(b_1+1)}{\Gamma(t+a_1+b_1+2)} = \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(t+1) \cdots (t+c)}{c!} (Q_2(x))^t \frac{b_1!}{(t+a_1+1) \cdots (t+a_1+b_1+1)}. \end{aligned}$$

Подставляя I_2 в I_1 , получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{b_1!(t+1) \cdots (t+c)}{c!(t+a_1+1) \cdots (t+a_1+b_1+1)} \times \\ &\times \int_{[0,1]^3} \prod_{j=2}^4 x_j^{a_j} (1-x_j)^{b_j} (Q_2(x))^t dx_2 dx_3 dx_4. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Для дальнейшего доказательства сформулируем следующую лемму [25, лемма 6].

Лемма 4.3 Пусть

$$I_{\mu, \nu, t} = \int_0^1 (1-zx)^{t-1} (1-x)^{\mu} x^{\nu} dx,$$

где $\mu, \nu \in \mathbb{Z}^+, t \in \mathbb{R}, t \neq -1, -2, \dots; z \in (0, 1)$.

Тогда

$$\begin{aligned} I_{\mu, \nu, t} &= \frac{(-1)^{\mu}}{(t+1) \cdots (t+\mu+\nu+1)} \times \\ &\times \left(\sum_{s=0}^{\infty} (s-t-\mu) \cdots (s-t-1)(s+1) \cdots (s+\nu)(1-z)^s - \right. \\ &- \sum_{s=0}^{\infty} (s+t+\mu+2) \cdots (s+t+\mu+\nu+1)(s+1) \cdots (s+\mu) \times \\ &\times (1-z)^{s+t+\mu+1} \Big). \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл из (4.4)

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{[0,1]^3} \prod_{j=2}^4 x_j^{a_j} (1-x_j)^{b_j} (Q_2(x))^t dx_2 dx_3 dx_4 = \\ &= \int_{[0,1]^2} \prod_{j=3}^4 x_j^{a_j} (1-x_j)^{b_j} \left(\int_0^1 x_2^{a_2} (1-x_2)^{b_2} (Q_2(x))^{(t+1)-1} dx_2 \right) dx_3 dx_4. \end{aligned}$$

По лемме 4.3 имеем

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 x_2^{a_2} (1-x_2)^{b_2} (1-x_2(1-x_3x_4))^{(t+1)-1} dx_2 = \\ &= \frac{(-1)^{b_2}}{(t+1) \dots (t+a_2+b_2+1)} \times \\ &\times \left(\sum_{s=0}^{\infty} (s-t-b_2) \dots (s-t-1)(s+1) \dots (s+a_2)(x_3x_4)^s - \right. \\ &- \sum_{s=0}^{\infty} (s+t+b_2+2) \dots (s+t+a_2+b_2+1)(s+1) \dots (s+b_2) \times \\ &\times (x_3x_4)^{s+t+b_2+1} \Big), \end{aligned}$$

где $\mu = b_2, \nu = a_2, z = 1 - x_3x_4$.

Подставив выражение для I_4 в I_3 , получаем

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{(-1)^{b_2}}{(t+1) \dots (t+a_2+b_2+1)} \times \\ &\times \left(\sum_{s=0}^{\infty} (s-t-b_2) \dots (s-t-1)(s+1) \dots (s+a_2) \times \right. \\ &\times \int_0^1 x_3^{a_3+s} (1-x_3)^{b_3} dx_3 \int_0^1 x_4^{a_4+s} (1-x_4)^{b_4} dx_4 - \\ &- \sum_{s=0}^{\infty} (s+t+b_2+2) \dots (s+t+a_2+b_2+1)(s+1) \dots (s+b_2) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^1 x_3^{a_3+s+t+b_2+1} (1-x_3)^{b_3} dx_3 \int_0^1 x_4^{a_4+s+t+b_2+1} (1-x_4)^{b_4} dx_4 = \\
& = \frac{(-1)^{b_2}}{(t+1) \dots (t+a_2+b_2+1)} \times \\
& \times \left(\sum_{s=0}^{\infty} (s-t-b_2) \dots (s-t-1)(s+1) \dots (s+a_2) \times \right. \\
& \times \frac{\Gamma(a_4+s+1)\Gamma(b_4+1)\Gamma(a_3+s+1)\Gamma(b_3+1)}{\Gamma(a_4+b_4+s+2)\Gamma(a_3+b_3+s+2)} - \\
& - \sum_{s=0}^{\infty} (s+t+b_2+2) \dots (s+t+a_2+b_2+1)(s+1) \dots (s+b_2) \times \\
& \times \frac{\Gamma(b_4+1)\Gamma(a_3+s+t+b_2+2)\Gamma(b_3+1)}{\Gamma(a_3+b_3+s+t+b_2+3)} \times \\
& \times \left. \frac{\Gamma(a_4+s+t+b_2+2)}{\Gamma(a_4+b_4+s+t+b_2+3)} \right). \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Преобразуем (4.5) и подставим в (4.2):

$$\begin{aligned}
I &= \Lambda_1 \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(t+1) \dots (t+c)}{(t+a_1+1) \dots (t+a_1+b_1+1)(t+1) \dots (t+a_2+b_2+1)} \times \\
& \times \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s-t-b_2) \dots (s-t-1)(s+1) \dots (s+a_2)}{(s+a_3+1) \dots (s+a_3+b_3+1)(s+a_4+1) \dots (s+a_4+b_4+1)} - \right. \\
& - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+t+b_2+2) \dots (s+t+a_2+b_2+1)}{(s+t+a_4+b_2+2) \dots (s+t+a_4+b_4+b_2+2)} \times \\
& \times \left. \frac{(s+1) \dots (s+b_2)}{(s+t+a_3+b_2+2) \dots (s+t+a_3+b_3+b_2+2)} \right), \tag{4.6}
\end{aligned}$$

где $\Lambda_1 = \Lambda \cdot \frac{(-1)^{b_2} b_1! b_3! b_4!}{c!}$.

Если в (4.6) выполняется условие $c \leq a_2 + b_2 + 1$, то I имеет вид

$$\begin{aligned}
I &= \Lambda_1 \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+a_1+1) \dots (t+a_1+b_1+1)(t+c+1) \dots (t+a_2+b_2+1)} \times \\
& \times \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s-t-b_2) \dots (s-t-1)(s+1) \dots (s+a_2)}{(s+a_3+1) \dots (s+a_3+b_3+1)(s+a_4+1) \dots (s+a_4+b_4+1)} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+t+b_2+2) \dots (s+t+a_2+b_2+1)}{(s+t+a_4+b_2+2) \dots (s+t+a_4+b_4+b_2+2)} \times \\
& \times \frac{(s+1) \dots (s+b_2)}{(s+t+a_3+b_2+2) \dots (s+t+a_3+b_3+b_2+2)}.
\end{aligned}$$

В результате получаем представление (4.2) и тем самым лемма 4.3 доказана.

Доказательство теоремы 4.1 В (4.2) введем следующие обозначения:

$$h = \min(a_1, c) + 1; \quad H = \max(a_1, c) + 1;$$

$$D = \min(a_1 + b_1, a_2 + b_2) + 1; \quad d = \max(a_1 + b_1, a_2 + b_2) + 1;$$

$$e = \min(a_3, a_4) + 1; \quad E = \max(a_3, a_4) + 1;$$

$$F = \min(a_3 + b_3, a_4 + b_4) + 1; \quad f = \max(a_3 + b_3, a_4 + b_4) + 1.$$

Разложив $G(s-t)Q(s)$ в (4.2) на сумму простейших дробей, получим

$$G(s-t)Q(s) = \sum_{j=0}^{F-E} \frac{A_j(t)}{(s+E+j)^2} + \sum_{j=0}^{f-e} \frac{B_j(t)}{(s+e+j)},$$

где

$$A_j(t) = [G(s-t)Q(s)(s+E+j)^2]_{s=-E-j}, \quad j = 0, \dots, F-E;$$

$$B_j(t) = \frac{d}{ds} [G(s-t)Q(s)(s+e+j)^2]_{s=-e-j}, \quad j \in [E-e, F-e];$$

$$B_j(t) = [G(s-t)Q(s)(s+e+j)]_{s=-e-j}, \quad j \in [0, E-e-1] \cup [F-e+1, f-e];$$

$$A_j(t) \in \mathbb{Q}(t); \deg A_j(t) = -b_2;$$

$$B_j(t) \in \mathbb{Q}(t); \deg B_j(t) \leq -b_2;$$

$$\begin{aligned}
A_j(t) \cdot R(t) &= \sum_{i=0}^{D-H} \frac{a_{ij_2}}{(t+H+i)^2} + \sum_{i=0}^{d-h} \frac{a_{ij_1}}{(t+h+i)}, \quad a_{ij_1}, a_{ij_2} \in \mathbb{Q}; \\
B_j(t) \cdot R(t) &= \sum_{i=0}^{D-H} \frac{b_{ij_2}}{(t+H+i)^2} + \sum_{i=0}^{d-h} \frac{b_{ij_1}}{(t+h+i)}, \quad b_{ij_1}, b_{ij_2} \in \mathbb{Q}; \\
\sum_{j=0}^{f-e} B_j(t) &= 0, \quad t \in \mathbb{R}; \\
\sum_{i=0}^{d-h} a_{ij_1} &= 0, \quad j \in [0, F-E].
\end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению интеграла (4.2).

Так как

$$G(s-t)Q(s) = \sum_{j=0}^{F-E} \frac{A_j(t)}{(s+E+j)^2} + \sum_{j=0}^{f-e} \frac{B_j(t)}{(s+e+j)},$$

то

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{\infty} R(t) \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{F-E} \frac{A_j(t)}{(s+E+j)^2} + \sum_{j=0}^{f-e} \frac{B_j(t)}{(s+e+j)} \right) = \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{F-E} \frac{1}{(s+E+j)^2} \left(\sum_{i=0}^{D-H} \frac{a_{ij_2}}{(t+H+i)^2} + \sum_{i=0}^{d-h} \frac{a_{ij_1}}{(t+h+i)} \right) + \\
&+ \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{f-e} \frac{1}{s+e+j} \left(\sum_{i=0}^{D-H} \frac{b_{ij_2}}{(t+H+i)^2} + \sum_{i=0}^{d-h} \frac{b_{ij_1}}{(t+h+i)} \right). \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Рассмотрим каждую из четырех сумм в (4.7).

$$\begin{aligned}
\Sigma_{1,1} &= \sum_{t,s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{F-E} \frac{1}{(s+E+j)^2} \sum_{i=0}^{D-H} \frac{a_{ij_2}}{(t+H+i)^2} = \\
&= \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+H+i)^2} \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s+E+j)^2} \right). \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Так как $\zeta(2) = \sum_{t=1-H-i}^{\infty} \frac{1}{(t+H+i)^2}$, то

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+H+i)^2} = \zeta(2) - \sum_{l_1=1}^{H+i-1} \frac{1}{l_1^2}, \quad (4.9)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s+E+j)^2} = \zeta(2) - \sum_{l_2=1}^{E+j-1} \frac{1}{l_2^2}. \quad (4.10)$$

Подставляя (4.9), (4.10) в (4.8), получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,1} &= \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \left(\zeta(2) - \sum_{l_1=1}^{H+i-1} \frac{1}{l_1^2} \right) \left(\zeta(2) - \sum_{l_2=1}^{E+j-1} \frac{1}{l_2^2} \right) = \\ &= \zeta^2(2) \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} - \zeta(2) \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \left(\sum_{l_1=1}^{H+i-1} \frac{1}{l_1^2} + \sum_{l_2=1}^{E+j-1} \frac{1}{l_2^2} \right) + \\ &+ \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} \sum_{l_1=1}^{H+i-1} \sum_{l_2=1}^{E+j-1} \frac{a_{ij_2}}{l_1^2 \cdot l_2^2} = p_1 \zeta(4) + p_2 \zeta(2) + p_3, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $\zeta^2(2) = \frac{5}{2} \zeta(4)$, $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,2} &= \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{d-h} \frac{a_{ij_1}}{t+h+i} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s+E+j)^2} \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{d-h} \frac{a_{ij_1}}{t+h+i} \left(\zeta(2) - \sum_{l_2=1}^{E+j-1} \frac{1}{l_2^2} \right). \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{d-h} \frac{a_{ij_1}}{t+h+i} = \sum_{m_1=0}^{d-h-1} \left(\sum_{i=0}^{m_1} \frac{a_{ij_1}}{m_1+h} \right),$$

то сумма $\Sigma_{1,2}$ равна

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,2} &= \zeta(2) \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{m_1=0}^{d-h-1} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{a_{ij_1}}{m_1+h} - \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{m_1=0}^{d-h-1} \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{l_2=1}^{E+j-1} \frac{a_{ij_1}}{l_2^2 \cdot (m_1+h)} = \\ &= p_4 \zeta(2) + p_5, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где $p_4, p_5 \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}\Sigma_{1,3} &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{f-e} \frac{b_{ij_2}}{s+e+j} \sum_{i=0}^{D-H} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+H+i)^2} \right) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{f-e} \frac{b_{ij_2}}{s+e+j} \sum_{i=0}^{D-H} \left(\zeta(2) - \sum_{l_1=1}^{H+i-1} \frac{1}{l_1^2} \right).\end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{f-e} \frac{b_{ij_2}}{s+e+j} = \sum_{m_2=0}^{f-e-1} \left(\sum_{j=0}^{m_2} \frac{b_{ij_2}}{m_2+e} \right),$$

то сумма $\Sigma_{1,3}$ равна

$$\begin{aligned}\Sigma_{1,3} &= \sum_{m_2=0}^{f-e-1} \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{i=0}^{D-H} \frac{b_{ij_2}}{m_2+e} \left(\zeta(2) - \sum_{l_1=1}^{H+i-1} \frac{1}{l_1^2} \right) = \\ &= \zeta(2) \sum_{m_2=0}^{f-e-1} \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{i=0}^{D-H} \frac{b_{ij_2}}{m_2+e} - \sum_{m_2=0}^{f-e-1} \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{i=0}^{D-H} \sum_{l_1=1}^{H+i-1} \frac{b_{ij_2}}{l_1^2 \cdot (m_2+e)} = \\ &= p_6 \zeta(2) + p_7,\end{aligned}\tag{4.13}$$

где $p_6, p_7 \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}\Sigma_{1,4} &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{f-e} \sum_{i=0}^{d-h} \frac{b_{ij_1}}{(t+h+i)(s+e+j)} = \\ &= \sum_{m_2=0}^{f-e-1} \sum_{j=0}^{m_2} \left(\sum_{m_1=0}^{d-h-1} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{b_{ij_1}}{(m_1+h)(m_2+e)} \right) = p_8,\end{aligned}\tag{4.14}$$

где $p_8 \in \mathbb{Q}$.

Далее рассмотрим

$$G(s+b_2)Q(s+t+b_2) = \sum_{j=0}^{F-E} \frac{A_j(t)}{(s+t+E+j+b_2)^2} + \sum_{j=0}^{f-e} \frac{B_j(t)}{(s+t+e+j+b_2)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=0}^{\infty} R(t) \sum_{s=0}^{\infty} G(s+b_2) Q(s+t+b_2) = \\
& = \sum_{t=0}^{\infty} R(t) \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{F-E} \frac{A_j(t)}{(s+t+E+j+b_2)^2} + \sum_{j=0}^{f-e} \frac{B_j(t)}{(s+t+e+j+b_2)} \right) = \\
& = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} \frac{a_{ij_2}}{(s+t+E+j+b_2)^2 (t+H+i)^2} + \\
& + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{d-h} \frac{a_{ij_1}}{(s+t+E+j+b_2)^2 (t+h+i)} + \\
& + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{f-e} \sum_{i=0}^{D-H} \frac{b_{ij_2}}{(s+t+e+j+b_2)(t+H+i)^2} + \\
& + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{f-e} \sum_{i=0}^{d-h} \frac{b_{ij_1}}{(s+t+e+j+b_2)(t+h+i)}. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Рассмотрим каждую из четырех сумм в (4.15).

$$\begin{aligned}
\Sigma_{2,1} &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} \frac{a_{ij_2}}{(s+t+E+j+b_2)^2 (t+H+i)^2} = \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} \frac{a_{ij_2}}{(t+t_3)^2 (s+t+t_4)^2},
\end{aligned}$$

где $t_3 = H+i$, $t_4 = E+b_2+j$. Из условия 5) теоремы следует, что $E+b_2 >$

D , а значит $t_4 > t_3$. Пусть $M = t+s$, $M+t_3 = M_1$, $M_1 \geq t+t_3$, $M > t$.

Имеем

$$\begin{aligned}
\Sigma_{2,1} &= \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{M=t}^{\infty} \frac{1}{(t+t_3)^2 (M+t_4)^2} = \\
&= \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{a_{ij_2}}{(t+t_3)^2} \left(\sum_{M>t}^{\infty} \frac{1}{(M+t_3)^2} - \sum_{l_3=1}^{t_4-t_3-1} \frac{1}{(t+t_3+l_3)^2} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \sum_{t \geq t_3} \frac{1}{(t+t_3)^2 \cdot M_1^2} - \\
&- \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{l_3=1}^{t_4-t_3-1} \frac{1}{(t+t_3)^2 (t+t_3+l_3)^2} = \\
&= \Sigma_{2,1,1} + \Sigma_{2,1,2}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Так как

$$\sum_{t \geq t_3} \frac{1}{(t+t_3)^2 \cdot M_1^2} = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{t \geq t_3} \frac{1}{t^2} \right)^2 - \sum_{t \geq t_3} \frac{1}{t^4} \right),$$

то

$$\begin{aligned}
\Sigma_{2,1,1} &= \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \sum_{t \geq t_3} \frac{1}{(t+t_3)^2 \cdot M_1^2} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \left(\left(\sum_{t \geq t_3} \frac{1}{t^2} \right)^2 - \sum_{t \geq t_3} \frac{1}{t^4} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \left(\left(\zeta(2) - \sum_{l_4=1}^{t_3-1} \frac{1}{l_4^2} \right)^2 - \left(\zeta(4) - \sum_{l_4=1}^{t_3-1} \frac{1}{l_4^4} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \zeta^2(2) \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} - \zeta(2) \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \sum_{l_4=1}^{t_3-1} \frac{1}{l_4^2} + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \left(\sum_{l_4=1}^{t_3-1} \frac{1}{l_4^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \zeta(4) \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \sum_{l_4=1}^{t_3-1} \frac{1}{l_4^4} = p_9 \zeta(4) + p_{10} \zeta(2) + p_{11},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

где $p_9, p_{10}, p_{11} \in \mathbb{Q}$.

Рассмотрим $\Sigma_{2,1,2}$.

$$\Sigma_{2,1,2} = \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{l_3=1}^{t_4-t_3-1} \left(\frac{1}{(t+t_3)^2 \cdot l_3^2} + \frac{1}{(t+t_3+l_3)^2 \cdot l_3^2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{l_3=1}^{t_4-t_3-1} \frac{2}{l_3^3} \left(\frac{1}{t+t_3+l_3} - \frac{1}{t+t_3} \right) = \\
& = \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \sum_{l_3=1}^{t_4-t_3-1} \frac{1}{l_3^2} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{t+t_3} \right) + \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \sum_{l_3=1}^{t_4-t_3-1} \frac{1}{l_3^2} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{t+t_3} \right) + \\
& + \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \sum_{l_3=1}^{t_4-t_3-1} \frac{2}{l_3^3} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{t+t_3+l_3} - \frac{1}{t+t_3} \right) \right) = \\
& = \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \sum_{l_3=1}^{t_4-t_3-1} \frac{1}{l_3^2} \left(\left(\zeta(2) - \sum_{l_5=1}^{t_3-1} \frac{1}{l_5^2} \right) + \left(\zeta(2) - \sum_{l_6=1}^{t_3+l_3-1} \frac{1}{l_6^2} \right) \right) - \\
& - 2 \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{D-H} a_{ij_2} \sum_{l_3=1}^{t_4-t_3-1} \frac{1}{l_3^3} \sum_{l_6=t_3}^{t_3+l_3-1} \frac{1}{l_6} = p_{12}\zeta(2) + p_{13}, \tag{4.18}
\end{aligned}$$

где $p_{12}, p_{13} \in \mathbb{Q}$.

Подставим (4.17) и (4.18) в (4.16). Имеем

$$\Sigma_{2,1} = p_1 4\zeta(4) + p_{15}\zeta(2) + p_{16}, \tag{4.19}$$

где $p_{14}, p_{15}, p_{16} \in \mathbb{Q}$.

Рассмотрим следующую сумму

$$\Sigma_{2,2} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{d-h} \frac{a_{ij_2}}{(s+t+j+E+b_2)^2(t+h+i)}.$$

Пусть $M = s+t$, $t_1 = b_2 + E + j$, $t_2 = h + \nu$. Так как $b_2 + E > d$, то $t_1 > t_2$.

Из того, что

$$\sum_{t=0}^M \sum_{i=0}^{d-h} \frac{a_{ij_1}}{t+h+i} = - \sum_{i=1}^{d-h} \sum_{\nu=0}^{i-1} \frac{a_{ij_1}}{h+\nu} - \sum_{i=0}^{d-h-1} \sum_{\nu=i+1}^{d-h} \frac{a_{ij_1}}{M+h+\nu},$$

получаем

$$\Sigma_{2,2} = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{F-E} \left(- \sum_{i=1}^{d-h} \sum_{\nu=0}^{i-1} \frac{a_{ij_1}}{h+\nu} - \sum_{i=0}^{d-h-1} \sum_{\nu=i+1}^{d-h} \frac{a_{ij_1}}{M+t_2} \right) \cdot \frac{1}{(M+t_1)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=1}^{d-h} \sum_{\nu=0}^{i-1} \frac{a_{ij_1}}{(h+\nu)(M+t_1)^2} - \\
&- \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{d-h-1} \sum_{\nu=i+1}^{d-h} \frac{a_{ij_1}}{(M+t_2)(M+t_1)^2} = \tilde{\Sigma}_1 + \tilde{\Sigma}_2. \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Рассмотрим каждую из сумм в (4.20).

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}_1 &= - \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=1}^{d-h} \sum_{\nu=0}^{i-1} \frac{a_{ij_1}}{(h+\nu)} \left(\sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{(M+t_1)^2} \right) = \\
&= - \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=1}^{d-h} \sum_{\nu=0}^{i-1} \frac{a_{ij_1}}{(h+\nu)} \left(\zeta(2) - \sum_{l_7=0}^{t_1-1} \frac{1}{l_1^2} \right) = p_{17}\zeta(2) + p_{18}, \quad (4.21)
\end{aligned}$$

где $p_{17}, p_{18} \in \mathbb{Q}$.

Так как

$$\frac{1}{(M+t_1)^2(M+t_2)} = \frac{1}{t_2-t_1} \cdot \frac{1}{(M+t_1)^2} - \frac{1}{(t_2-t_1)^2} \left(\frac{1}{M+t_1} - \frac{1}{M+t_2} \right),$$

то

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}_2 &= \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{d-h-1} \sum_{\nu=i+1}^{d-h} \frac{a_{ij_1}}{t_2-t_1} \left(\sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{(M+t_1)^2} \right) - \\
&- \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{d-h-1} \sum_{\nu=i+1}^{d-h} \frac{a_{ij_1}}{(t_2-t_1)^2} \left(\sum_{M=0}^{\infty} \left(\frac{1}{M+t_1} - \frac{1}{M+t_2} \right) \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{d-h-1} \sum_{\nu=i+1}^{d-h} \frac{a_{ij_1}}{t_2-t_1} \left(\zeta(2) - \sum_{l_7=0}^{t_1-1} \frac{1}{l_1^2} \right) + \\
&+ \sum_{j=0}^{F-E} \sum_{i=0}^{d-h-1} \sum_{\nu=i+1}^{d-h} \frac{a_{ij_1}}{(t_2-t_1)^2} \sum_{l_8=t_2}^{t_1-1} \frac{1}{l_8} = p_{19}\zeta(2) + p_{20}, \quad (4.22)
\end{aligned}$$

где $p_{19}, p_{20} \in \mathbb{Q}$.

Так как $t_1 > t_2$, то в (4.22) будет отсутствовать $\zeta(3)$.

Подставляя (4.21) и (4.22) в (4.20), имеем

$$\Sigma_{2,2} = p_{21}\zeta(2) + p_{22}, \quad (4.23)$$

где $p_{21}, p_{22} \in \mathbb{Q}$.

Рассмотрим сумму $\Sigma_{2,3}$.

$$\Sigma_{2,3} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{f-e} \sum_{i=0}^{D-H} \frac{b_{ij_2}}{(s+t+e+j+b_2)(t+H+i)^2}.$$

Так как

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{f-e} \frac{b_{ij_2}}{s+t+e+j+b_2} = \sum_{u=0}^{f-e-1} \left(\sum_{j=0}^u b_{ij_2} \right) \frac{1}{t+u+e+b_2}, \quad (4.24)$$

то

$$\Sigma_{2,3} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{f-e-1} \sum_{j=0}^u \sum_{i=0}^{D-H} \frac{b_{ij_2}}{(t+t_5)^2(t+t_6)},$$

где $t_5 = H+i$, $t_6 = b_2+e+u$. Условие $t_6 > t_5$ исключает $\zeta(3)$ в $\Sigma_{2,3}$.

Аналогично $\Sigma_{2,2}$, получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_{2,3} &= \sum_{u=0}^{f-e-1} \sum_{j=0}^u \sum_{i=0}^{D-H} \frac{b_{ij_2}}{t_6 - t_5} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+t_5)^2} \right) - \\ &- \sum_{u=0}^{f-e-1} \sum_{j=0}^u \sum_{i=0}^{D-H} \frac{b_{ij_2}}{(t_6 - t_5)^2} \sum_{l_9=t_5}^{t_6-1} \frac{1}{l_9} = \\ &= \sum_{u=0}^{f-e-1} \sum_{j=0}^u \sum_{i=0}^{D-H} \frac{b_{ij_2}}{t_6 - t_5} \left(\zeta(2) - \sum_{l_{10}=1}^{t_5-1} \frac{1}{l_{10}^2} \right) - \\ &- \sum_{u=0}^{f-e-1} \sum_{j=0}^u \sum_{i=0}^{D-H} \frac{b_{ij_2}}{(t_6 - t_5)^2} \sum_{l_9=t_5}^{t_6-1} \frac{1}{l_9} = p_{23}\zeta(2) + p_{24}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где $p_{23}, p_{24} \in \mathbb{Q}$.

Пусть $t_7 = h + i$. Тогда применяя (4.24) имеем

$$\begin{aligned}\Sigma_{2,4} &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{f-e} \sum_{i=0}^{d-h} \frac{b_{ij_1}}{(s+t+e+j+b_2)(t+h+i)} = \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{f-e-1} \sum_{j=0}^u \sum_{i=0}^{d-h} \frac{b_{ij_1}}{(t+t_6)(t+t_7)}.\end{aligned}$$

Если $t_6 = t_7$, то $\Sigma_{2,4} = 0$ при условии, что $t_6 > d$. Если $t_6 \neq t_7$, то

$$\Sigma_{2,4} = \sum_{u=0}^{f-e-1} \sum_{j=0}^u \sum_{i=0}^{d-h} \frac{b_{ij_1}}{(t_6 - t_7)} \sum_{l_{10}=t_7}^{t_6-1} \frac{1}{l_{10}} = p_{25}, \quad (4.26)$$

где $p_{25} \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{(t+t_6)(t+t_7)} = \frac{1}{t_6 - t_7} \left(\frac{1}{t+t_7} - \frac{1}{t+t_6} \right)$.

Таким образом, из (4.11)–(4.14), (4.19), (4.23), (4.25) и (4.26) следует необходимое представление интеграла (1.11) в виде линейной формы (1.7).

Тем самым теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.2 *Интеграл (1.12) представим в виде линейной формы (1.7), если для его параметров справедливы следующие условия:*

$$1) b_4 > \alpha_2, \alpha_2 \geq a_1^* - \alpha_1^*, a_2 \geq \alpha_1^*; 2) a_1 + b_1 \leq a_4 + b_2;$$

$$3) \alpha_1 < b_1, a_2 + b_2 \geq b_3 + b_4; 4) a_2 + b_2 + b_1 = \alpha_1 + b_3 + b_4,$$

где $\alpha_1^* = \min(a_1, \alpha_1)$, $a_1^* = \max(a_1, \alpha_1)$, $\alpha_2^* = \min(\alpha_2, b_3)$.

Для доказательства теоремы 4.2 применим следующую лемму [25, лемма 5].

Лемма 4.4 *Пусть $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, $a + b \geq c$, $z \in (0, 1)$.*

Оператор D_σ определяется формулой $D_\sigma(f(\sigma)) = f'(0)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^a(1-x)^b dx}{(1-xz)^{c+1}} &= \frac{(-1)^{b+c+1}}{\Gamma(c+1)\Gamma(a+b-c+1)} \times \\ &\times D_\sigma \sum_{t=\min(n,l)} (t-l+1+\sigma) \cdot \dots \cdot (t+\sigma) \times \\ &\times (t-n+1+\sigma) \cdot \dots \cdot (t+m+\sigma)(1-z)^{t-n+\sigma}, \end{aligned}$$

где $n = \min(a, c)$, $l = a + b - \max(a, c)$, $m = \max(a, c) - \min(a, c)$.

Доказательство теоремы 4.2 Пусть $x = x_1, z = 1 - x_2, a = a_1 - 1, b = b_1 - 1, c = \alpha_1 - 1$. Тогда $n - l = \alpha_1 - b_1 < 0, n = \alpha_1^*, m = a_1^* - \alpha_1^*, l = a_1 + b_1 - a_1^*, t = n + s_1, s_1 \geq 0$.

Применив к интегралу (1.12) лемму 4.4 и проинтегрировав, получаем

$$\begin{aligned} I &= \frac{(-1)^{\alpha_1+b_1-1} b_2! a_4! b_4!}{\alpha_2! \alpha_1! (a_1 + b_1 - \alpha_1)} D_\sigma \sum_{s_1 \geq 0} \sum_{s_2 \geq 0} \frac{(s_1 + \sigma - l + n + 1) \cdot \dots \cdot (s_1 + \sigma + n)}{(s_1 + \sigma + a_2) \cdot \dots \cdot (s_1 + \sigma + a_2 + b_2 - 1)} \times \\ &\times \frac{(s_1 + \sigma + 1) \cdot \dots \cdot (s_1 + \sigma + m + n)}{(s_1 + s_2 + \sigma + a_2 + b_2) \cdot \dots \cdot (s_1 + s_2 + \sigma + a_2 + b_2 + a_4 - 1)} \times \\ &\times \frac{(s_2 + 1) \cdot \dots \cdot (s_2 + \alpha_2 - 1)}{(s_2 + b_3) \cdot \dots \cdot (s_2 + b_3 + b_4 - 1)}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Дробь по переменной s_2 правильная, так как $b_4 > \alpha_2$. Ряд по переменной s_2 сходится, так как $a_1 + b_1 \leq a_4 + b_2$.

Выполним в (4.27) стандартные преобразования:

$$1) \frac{(s_2 + 1) \cdot \dots \cdot (s_2 + \alpha_2 - 1)}{\alpha_2!} \cdot \frac{b_4!}{(s_2 + b_3) \cdot \dots \cdot (s_2 + b_3 + b_4 - 1)} = \sum_{j=b_3}^{b_3+b_4-1} \frac{\gamma_j}{s_2 + j};$$

$$\begin{aligned}
2) \frac{(s_1 + \sigma - l + n + 1) \cdot \dots \cdot (s_1 + \sigma + n)(s_1 + \sigma + 1) \cdot \dots \cdot (s_1 + \sigma + n + m) \cdot b_2!}{(s_1 + \sigma + a_2) \cdot \dots \cdot (s_1 + \sigma + a_2 + b_2 - 1)(a_1 + b_1 - \alpha_1)! \cdot \alpha_1!} = \\
= \sum_{i=a_2}^{a_2+b_2-1} \frac{\lambda_i}{s_1 + \sigma + i} + P(s_1 + \sigma).
\end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
I &= (-1)^{\alpha_1+b_1-1} D_\sigma \sum_{s_1 \geq 0} \sum_{s_2 \geq 0} \left(\sum_{j=b_3}^{b_3+b_4-1} \frac{\gamma_j}{s_2 + j} \left(\sum_{i=a_2}^{a_2+b_2-1} \frac{\lambda_i}{s_1 + \sigma + i} + P(s_1 + \sigma) \right) \times \right. \\
&\times \left. \sum_{k=a_2+b_2}^{a_2+b_2+a_4-1} \frac{\mu_k}{s_1 + s_2 + \sigma + k} \right) = \\
&= (-1)^{\alpha_1+b_1-1} D_\sigma \sum_{s_1, s_2 \geq 0} \left(\sum_{j=b_3}^{b_3+b_4-1} \frac{\gamma_j}{s_2 + j} P(s_1 + \sigma) \cdot R(s_1 + s_2 + \sigma) + \right. \\
&+ \left. \sum_{i=a_2}^{a_2+b_2-1} \sum_{j=b_3}^{b_3+b_4-1} \sum_{k=a_2+b_2}^{a_2+b_2+a_4-1} \frac{A_{i,j,k}}{(s_1 + \sigma + i)(s_2 + j)(s_1 + s_2 + \sigma + k)} \right). \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Пусть в первом слагаемом j фиксировано, тогда $s_1 + \sigma = s_1 + s_2 + \sigma - s_2$.

$$P(s_1 + \sigma) = P_{1,j}(s_1 + s_2 + \sigma) + (s_2 + j)P_{2,j}(s_1 + s_2 + \sigma, s_2).$$

Так как степени $\deg P_{2,j}(s_1 + s_2 + \sigma, s_2) \leq a_4 - 3$, $\deg P_{1,j}(s_1 + s_2 + \sigma) \leq a_4 - 2$,

поэтому верно следующее разложение

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=b_3}^{b_3+b_4-1} \frac{\gamma_j}{s_2 + j} P(s_1 + \sigma) \cdot R(s_1 + s_2 + \sigma) = \\
&= \sum_{j=b_3}^{b_3+b_4-1} \left(\frac{\gamma_j}{s_2 + j} \cdot \frac{P_{1,j}(s_1 + s_2 + \sigma) \cdot \Gamma(a_4)}{(s_1 + s_2 + \sigma + a_2 + b_2) \cdot \dots \cdot (s_1 + s_2 + \sigma + a_2 + b_2 + a_4)} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\gamma_j} \cdot \frac{P_{2,j}(s_1 + s_2 + \sigma) \cdot \Gamma(a_4)}{(s_1 + s_2 + \sigma + a_2 + b_2) \cdot \dots \cdot (s_1 + s_2 + \sigma + a_2 + b_2 + a_4)} \right) = \Sigma_1 + \Sigma_2.
\end{aligned}$$

Рассмотрим каждую из этих сумм.

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sum_{j=b_3}^{b_3+b_4-1} \frac{\gamma_j}{s_2+j} \cdot \frac{P_{1,j}(s_1+s_2+\sigma) \cdot \Gamma(a_4)}{(s_1+s_2+\sigma+a_2+b_2) \cdot \dots \cdot (s_1+s_2+\sigma+a_2+b_2+a_4)} = \\ &= \sum_{j=b_3}^{b_3+b_4-1} \sum_{k=a_2+b_2}^{a_2+b_2+a_4} \frac{A_{j,k}}{(s_2+j)(s_1+s_2+\sigma+k)}.\end{aligned}$$

Так как $\sum_{k=a_2+b_2}^{a_2+b_2+a_4} A_{j,k} = 0$, то после суммирования по переменной s_1 , получаем

$$\Sigma_1 = \sum_{j=b_3}^{b_3+b_4-1} \sum_{k=a_2+b_2}^{a_2+b_2+a_4} \frac{\tilde{A}_{j,k}}{(s_2+j)(s_2+\sigma+k)},$$

где $j < k$ (условие 3). Применим оператор D_σ к Σ_1 :

$$\Sigma_1 = - \sum_{j=b_3}^{b_3+b_4-1} \sum_{k=a_2+b_2}^{a_2+b_2+a_4} \frac{\tilde{A}_{j,k}}{(s_2+j)(s_2+k)^2}.$$

Проведя суммирование по переменной s_2 , получаем $\Sigma_1 = r_1\zeta(2) + r_2$, где $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$.

$$\Sigma_2 = \sum_{j=b_3}^{b_3+b_4-1} \frac{1}{\gamma_j} \cdot \frac{P_{2,j}(s_1+s_2+\sigma) \cdot \Gamma(a_4)}{(s_1+s_2+\sigma+a_2+b_2) \cdot \dots \cdot (s_1+s_2+\sigma+a_2+b_2+a_4)}.$$

В результате суммирования по переменной s_2 , получаем, что

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \sum_{M \geq 0} \frac{Q_\sigma(M)}{(M+\sigma+a_2+b_2) \cdot \dots \cdot (M+\sigma+a_2+b_2+a_4-1)} = \\ &= \sum_{M \geq 0} \sum_{k=a_2+b_2}^{a_2+b_2+a_4} \frac{\mu_k(\sigma)}{(M+\sigma+k)}.\end{aligned}$$

Так как $\sum_{k=a_2+b_2}^{a_2+b_2+a_4} \mu_k(\sigma) = 0$, то после суммирования по переменной M и применения оператора D_σ , получаем рациональное число, т. е. $\Sigma_2 = r_3$, где $r_3 \in \mathbb{Q}$.

Рассмотрим второе слагаемое в (4.28). Для i, j, k возможны два случая:

1) $k \neq i + j$. Пусть $a_2 + b_2 = c_1, b_3 + b_4 = c_2$. Тогда

$$\begin{aligned} & D_\sigma \sum_{s_1, s_2 \geq 0} \sum_{i=a_2}^{c_1-1} \sum_{j=b_3}^{c_2-1} \sum_{k=c_1}^{c_1+a_4-1} \frac{A_{i,j,k}}{(s_1 + i + \sigma)(s_2 + j)(s_1 + s_2 + \sigma + k)} = \\ & = D_\sigma \sum_{s_1, s_2 \geq 0} \sum_{i=a_2}^{c_1-1} \sum_{j=b_3}^{c_2-1} \sum_{k=c_1}^{c_1+a_4-1} \frac{A_{i,j,k}}{(s_2 + j)(s_1 + s_2 + i + \sigma)(s_1 + s_2 + \sigma + k)} + \\ & + D_\sigma \sum_{s_1, s_2 \geq 0} \sum_{i=a_2}^{c_1-1} \sum_{j=b_3}^{c_2-1} \sum_{k=c_1}^{c_1+a_4-1} \frac{A_{i,j,k}}{(s_1 + i + \sigma)(s_1 + s_2 + \sigma + i + j)(s_1 + s_2 + \sigma + k)}. \end{aligned}$$

Проведя в первом слагаемом суммирование по переменной s_1 , а во втором по переменной s_2 ,

$$\begin{aligned} & D_\sigma \sum_{s_1, s_2 \geq 0} \sum_{i=a_2}^{c_1-1} \sum_{j=b_3}^{c_2-1} \sum_{k=c_1}^{c_1+a_4-1} \frac{A_{i,j,k}}{(s_1 + i + \sigma)(s_2 + j)(s_1 + s_2 + \sigma + k)} = \\ & = D_\sigma \sum_{s_2 \geq 0} \sum_{g=g_1}^{g_2-1} \sum_{j=b_3}^{c_2-1} \frac{A_{j,r}}{(s_2 + j)(s_2 + \sigma + g)} + \\ & + D_\sigma \sum_{s_1 \geq 0} \sum_{g=g_1}^{g_2-1} \sum_{i=a_2}^{c_1-1} \frac{A_{i,r}}{(s_1 + \sigma + j)(s_1 + \sigma + g)} = \Sigma'_1 + \Sigma'_2, \end{aligned}$$

где $g_1 = \min(k, i + j)$, $g_2 = \max(k, i + j)$, $g > i$.

Применив оператор D_σ и просуммировав каждое слагаемое по соответствующей переменной s_1 или s_2 , получаем $\Sigma'_1 = r_4 \zeta(2) + r_5$, $\Sigma'_2 = r_6$, где $r_4, r_5, r_6 \in \mathbb{Q}$.

2) $k = i + j$. Тогда

$$\begin{aligned}
& D_\sigma \sum_{s_1, s_2 \geq 0} \sum_{i=a_2}^{c_1-1} \sum_{j=b_3}^{c_2-1} \sum_{k=c_1}^{c_1+a_4-1} \frac{A_{i,j,k}}{(s_1 + i + \sigma)(s_2 + j)(s_1 + s_2 + \sigma + k)} = \\
& = -D_\sigma \left(\sum_{i=a_2}^{c_1-1} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{A_{i,j,k}}{(\sigma + k)} \sum_{s_2 \geq 0} \frac{A_{i,j,k}}{(s_2 + j)(s_1 + s_2 + i + \sigma)(s_1 + s_2 + \sigma + k)} + \right. \\
& \quad \left. - \sum_{s_1, s_2 \geq 0} \sum_{j=b_3}^{c_2-1} \frac{A_{i,j,k}}{(s_1 + \sigma + 1)(s_2 + j)(s_1 + s_2 + \sigma + j + 1)} \right) = \Sigma_1'' + \Sigma_2''.
\end{aligned}$$

Применив оператор D_σ к сумме Σ_1'' и просуммировав по переменной s_2 , получаем $\Sigma_1'' = r_7 \zeta(2) + r_8$, где $r_7, r_8 \in \mathbb{Q}$. В свою очередь, $\Sigma_2'' = \tilde{\Sigma}_1 + \tilde{\Sigma}_2$. $\tilde{\Sigma}_1 = -D_\sigma \sum_{s_1 \geq 0} \sum_{j=b_3}^{c_2-1} \sum_{l=1}^{j-1} \frac{A_j}{l} \cdot \frac{1}{(s_1 + \sigma + 1)(s_1 + \sigma + l + 1)}$. Применив оператор D_σ к сумме $\tilde{\Sigma}_1$, и просуммировав по переменной s_1 , получаем $\tilde{\Sigma}_1 = r_9$, где $r_9 \in \mathbb{Q}$. $\tilde{\Sigma}_2 = -D_\sigma \sum_{s_1, s_2 \geq 0} \frac{A_j}{(s_2 + 1)(s_1 + \sigma + 1)(s_1 + s_2 + \sigma + 1)}$. Применив оператор D_σ к сумме $\tilde{\Sigma}_2$, и просуммировав по переменной s_1 , получаем $\tilde{\Sigma}_2 = r_{10} \zeta(4) + r_{11} \zeta(2) + r_{12}$, где $r_{10}, r_{11}, r_{12} \in \mathbb{Q}$.

Таким образом, получаем (1.7), где $p = r_{10}, q = r_1 + r_4 + r_7 + r_{11}, r = r_2 + r_3 + r_5 + r_6 + r_8 + r_9 + r_{12}$.

Тем самым теорема 4.2 доказана.

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Рассмотрена новая интегральная конструкция, объединяющая идею симметрии, предложенную Салиховым в 2007 г., и интеграл, введенный Марковеккио в 2009 г., которая позволила значительно улучшить оценку меры иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

2. Используя идею комплексного симметризованного интеграла, удалось улучшить оценку одного из значений гипергеометрической функции Гаусса, а именно, числа $\tau = {}_2F_1(1, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}; -\frac{1}{64}) = \log \frac{13}{5} + 2 \arctan \frac{4}{7}$.

3. Исследованы четырехкратные интегралы вида

$$I = \frac{\Gamma(a_2 + b_2 - c)\Gamma(c)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)} \int_{[0,1]^4} \frac{\prod_{i=1}^4 x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-1} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4}{(1-x_1+x_1x_2(1-x_3x_4))^c}$$

и

$$I = \int_{[0,1]^4} \frac{x_1^{a_1-1} (1-x_1)^{b_1-1} x_2^{a_2-1} (1-x_2)^{b_2-1} x_3^{a_2+b_2-1} (1-x_3)^{a_4-1} x_4^{b_3-1}}{(1-x_3x_4)^{\alpha_2}} \times \frac{(1-x_4)^{b_4-1} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4}{(1-x_1(1-x_2x_3))^{\alpha_1}},$$

а также получена их линейная форма от чисел $1, \zeta(2), \zeta(4)$.

Литература

- [1] В. А. Андросенко, В. Х. Салихов, Групповая структура четырехкратного интеграла, *Вестник БГТУ*, **12:4** (2006), 122-125.
- [2] В. А. Андросенко, Е. В. Квитко, Четырехкратные интегралы, представимые в виде линейных форм от значений дзета-функции Римана, *Вестник БГТУ*, **18:2** (2008), 155-158.
- [3] В. А. Андросенко, Оценка меры иррациональности значений гипергеометрической функции Гаусса, *Чебышевский сборник*, **11:1** (2010), 7-14.
- [4] В. А. Андросенко, В. Х. Салихов, Интеграл Марковеккио и мера иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, *Вестник БГТУ*, **32:4** (2011), 129-132.
- [5] В. А. Андросенко, Об оценках линейных форм от чисел $1, \zeta(2), \zeta(4)$, *Вестник Брянского государственного университета*, **4** (2012), 20-27.
- [6] В. А. Андросенко, Мера иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, *Изв. РАН. Серия математическая*, **79:1** (2015), 3-20.

- [7] В. А. Андросенко, В. Х. Салихов, Симметризованная версия интеграла Марковеккио в теории диофантовых приближений, *Матем. заметки*, **97:4** (2015), 483-492.
- [8] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т.1: *Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*. 2-е изд., Наука, М., 1973, 294 с.
- [9] О. Н. Василенко, Об иррациональности значений гипергеометрической функции Гаусса, *Вестник МГУ. Сер 1. Математика, механика*, **3** (1985), 15-18.
- [10] О. Н. Василенко, Некоторые формулы для значений дзета-функции Римана в целых точках, *Республ. науч. - теорет. конф. "Теория чисел и её приложения"* . Тез. докл. Ташкентский гос. пед. инс-т, (1990), 27.
- [11] Д. В. Васильев, Некоторые формулы для значений дзета - функции Римана в целых точках, *Вестник МГУ. Сер 1. Математика, механика*, **1** (1996), 81-84.
- [12] Д. В. Васильев, О малых линейных формах от значений дзета-функции Римана, *Препринт/ Минск: НАН Беларуси. Институт математики*, **1(558)** (2000), 17.

- [13] Л. В. Данилов, Рациональные приближения некоторых функций в рациональных точках, *Матем. заметки*, **24:4** (1978), 449-458.
- [14] А. К. Дубицкас, Приближение $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ рациональными дробями, *Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика*, **6** (1987), 73-76.
- [15] С. А. Злобин, Интегралы, представляемые в виде линейных форм от обобщенных полилогарифмов, *Матем. заметки*, **71:5** (2002), 782-787.
- [16] С. А. Злобин, О некоторых интегральных тождествах, *Успехи матем. наук*, **53:3** (2002), 153-154.
- [17] С. А. Злобин, Разложение кратных интегралов в линейные формы, *Матем. заметки*, **77:5** (2005), 683-706.
- [18] В. В. Зудилин, Сокращение факториалов, *Матем. сборник*, **192:8** (2001), 95-122.
- [19] В. В. Зудилин, Совершенно уравновешенные гипергеометрические ряды и кратные интегралы, *Успехи матем. наук*, **57:4** (2002), 177-178.
- [20] В. В. Зудилин, Эссе о мере иррациональности π и других логарифмов, *Чебышевский сборник*, **5:2** (2004), 49-65.
- [21] Ю. В. Нестеренко, Об одном тождестве Малера, *Матем. заметки*, **79:1** (2006), 107-119.

- [22] Ю. В. Нестеренко, О показателе иррациональности числа $\log 2$, *Матем. заметки*, **88:4** (2010), 549-564.
- [23] Б. Риман, О числе простых чисел, не превышающих данной величины, *Сочинения. ОГИЗ. Москва*, (1948), 216 - 224.
- [24] Е. А. Рухадзе, Оценка снизу приближения $\ln 2$ рациональными числами, *Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика*, **6** (1987), 25-29.
- [25] В. Х. Салихов, А. И. Фроловичев, О кратных интегралах, представимых в виде линейной формы от $1, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(2k-1)$, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11:6** (2005), 143-178.
- [26] В. Х. Салихов, О мере иррациональности $\log 3$, *Докл. РАН*, **417:6** (2007), 753-755.
- [27] В. Х. Салихов, О мере иррациональности числа π , *Успехи матем. наук*, **63:3** (2008), 163-164.
- [28] Е. С. Сальникова, Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов, *Матем. заметки*, **83:3** (2008), 428-438.
- [29] В. Н. Сорокин, Теорема Апери, *Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика*, **3** (1998), 48-52.
- [30] Е. Б. Томашевская, О диофантовых приближениях числа π числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, *Матем. заметки*, **83:6** (2008), 912-922.

- [31] М. В. Федорюк, *Метод перевала*. Наука, М., 1977, 368 с.
- [32] К. Aladi, M. Robinson, Legendre polynomials and irrationality, *J.Reine Angew. Math*, **318** (1980), 137-155.
- [33] F. Amoroso, C. Viola, Approximation measures for logarithms of algebraic numbers, *Ann. Scuola normale superiore (Pisa)*, **XXX** (2001), 225-249.
- [34] R. Apéry, Irrationalite de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, *Asterisque*, **61** (1979), 11-13.
- [35] R. Apéry, Interpolation de fractions continues et irrationalite de certaines constants, *Bulletin de la section des sciences du C. T. H. S III*, (1981), 37-53.
- [36] F. Beukers, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, *Bull. Lond. Math.Soc. 11*, **33** (1978), 268-279.
- [37] F. Beukers, T. Matala-Aho, K. Väänänen, Remarks on the arithmetic properties of the values of hypergeometric functions, *Acta Arith*, **XLII** (1983), 281-289.
- [38] G. V. Chudnovsky, Recurrences Pade approximations and their applications, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 92. New York*, (1984), 215-238.
- [39] N. I. Feldman, Yu. V. Nesterenko, Transcendental numbers, *Number Theory IV. Encyclopaedia Math. Sci. Springer Berlin*, **44** (1998), 1-345.

- [40] S. R. Finch, Mathematical constants, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press.*, **94** (2003).
- [41] S. Fischler, Formes lineairesen polyzetas et integrals multiples, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. 1. Math.*, **335** (2002), 1-4.
- [42] M. Hata, Legendre type polynomials and irrationality measures, *J. Reine Angew. Math.*, **407** (1990), 99-125.
- [43] M. Hata, Irrationality measures of the values of hypergeometric functions, *Acta Arith.*, **LX** (1992), 335-347.
- [44] M. Hata, Rational approximations to π and some other numbers, *Acta Arith.*, **63:4** (1993), 335-349.
- [45] A. Heimonen, T. Matala-Aho, K. Väänänen, On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function, *Manuscripta Math.*, **81:1** (1993), 183-202.
- [46] A. Heimonen, T. Matala-Aho, K. Väänänen, An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **50:2** (1994), 225-243.
- [47] M. Huttner, Problème de Riemann et irrationalité d'un quotient de deux fonctions hypergéométriques de Gauss, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **302**, (1986), 603-606.

- [48] M. Huttner, Irrationalité de certaines integrales hypergéométriques, *J. Number Theory*, **26** (1987), 166-178.
- [49] F. Lindemann, Über die Zahl π , *Math. Annalen*, **20** (1882), 269-293.
- [50] K. Mahler, Ein Beweis des Thue-Siegelschen Satzes über die Approximation algebraischer Zahlen für binomische Gleichungen, *Math. Ann.*, **105** (1931), 267-276.
- [51] R. Marcovecchio, The Rhin - Viola method for $\log 2$, *Acta Arith.*, **139:2** (2009), 147-184.
- [52] G. Rhin, Approximants de Pade et mesures effectives d'irrationalité, *Progr. in Math.*, **71** (1987), 155-164.
- [53] G. Rhin, C. Viola, On a permutation group related to $\zeta(2)$, *Acta Arith.*, **77:1** (1996), 23-56.
- [54] G. Rhin, C. Viola, The group structure for $\zeta(3)$, *Acta Arith.*, **97** (2001), 269-293.
- [55] C. L. Siegel, Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen, *Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys., Math. Kl.*, **1**, (1929—1930), 1-70.
- [56] C. Viola, Hypergeometric functions and irrationality measures, *Analytic number theory (Kyoto). 1996. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambridge Univ. Press. Cambridge*, (1997), 353-360.

- [57] W. Zudilin, Well-poised hypergeometric transformations of Euler-type multiple-integrals, *J. London Math. Soc.*(2), **70** (2004), 215-230.

Приложение

Рисунок 1. Линии уровня функции $|g(t)|$

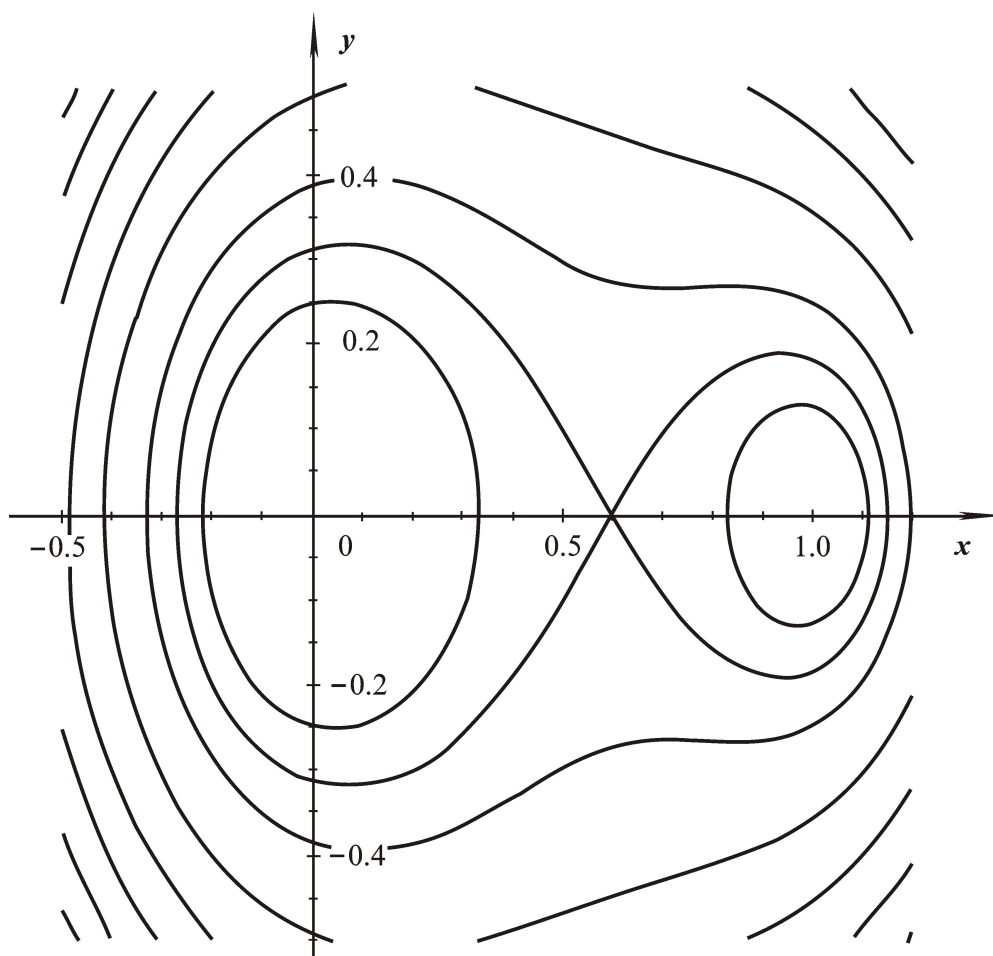


Рисунок 2. Линии уровня функции $|g(t)|$

