

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации Андросенко Валентины Александровны  
«О линейных формах от значений дзета-функции Римана  
и гипергеометрической функции Гаусса»,

представленной на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

### Актуальность темы

Тема диссертации относится к теории чисел, раздел «теория диофантовых приближений», той его части, которая относится к получению меры иррациональности значений специальных функций. Объектом изучения являются не линейные формы от чисел довольно общего вида, а некоторые вполне конкретные числа, являющиеся значениями гипергеометрической функции Гаусса или дзета-функции Римана. Такое сужение предмета изучения позволяет применять методы, наиболее подходящие именно для этого случая и поэтому дающие наилучшие результаты.

Обычно получение подобного рода результатов является побочным эффектом разработки какой-либо аналитической конструкции и наблюдения относительно ее арифметических свойств. Именно так, например, в свое время Эрмитом было получено доказательство трансцендентности числа  $e$ . Более подробная детализация доказательства позволяет при этом получать не только иррациональность или трансцендентность, но также и меру иррациональности/трансцендентности изучаемого числа. В современных работах обычно так и делается. При этом применяемые аналитические конструкции постоянно усложняются и совершенствуются. Очень продуктивным оказался переход от криволинейных комплексных интегралов к кратным. Это сразу позволило как усиливать ранее полученные результаты, так и расширить область их применения, например, перейти к изучению значений дзета-функции Римана.

Кроме разработки новых аналитических конструкций, эффект приносит и нахождение новых свойств ранее полученных объектов. Особенно полезным в свое время оказалось обнаружение свойства так называемого «сокращения факториалов» или аналогичных свойств. В работах, на которые опирается автор, существенным образом используется частичный эффект, который можно назвать «сокращением простых делителей», когда не удается сократить целые факториалы, но это получается для части их делителей. Такого рода свойства очень неочевидны, требуют трудоемкой проверки, выполняются весьма нечасто и поэтому частично являются результатом везения.

Обстоятельством, способствующим построению вспомогательных функций, обладающих такими улучшенными характеристиками, служит нахождение здесь различного рода групповых симметрий, в чем особенно преуспел на-

учный руководитель соискателя профессор Салихов В.Х. Автор работы также получил свои результаты именно за счет использования соображений симметрии рассматриваемых конструкций.

Следует отметить, что выбранная автором область исследования относительно недавняя и активно развивающаяся. Здесь работают многие сильные математики, как российские, так и зарубежные. Так что получение здесь новых результатов приходится делать в обстановке конкуренции.

### Результаты диссертации

Диссертация состоит из четырех глав, заключения, списка литературы из 57 наименований, включая семь статей автора, а также приложения на двух страницах, иллюстрирующего линии уровня вспомогательной функции.

В первой главе, являющейся введением, автор излагает историю вопроса, современное положение дел и приводит основные результаты диссертации и их сравнение с предшествующими работами. Отдельный раздел посвящен описанию используемого аналитического аппарата. Это, в первую очередь, комплексный анализ, в основном, метод перевала, а также свойства функций, описывающих распределение простых чисел.

Во второй главе автор получает усиленную оценку меры иррациональности числа  $\pi/\sqrt{3}$ . Это удалось сделать за счет усовершенствования подходящей интегральной конструкции, восходящей к Р. Марковеккио, и привнесения в рассуждения соображений симметрии.

В третьей главе автор улучшает оценку меры иррациональности числа  $\alpha = \ln(13/6) + 2\arctg(4/7)$ . Это число является значением гипергеометрической функции Гаусса  ${}_2F_1(1, 1/4, 5/4, -1/64)$  и весьма популярно у математиков как объект приложения различных методов доказательства. Автору удалось усилить предыдущие оценки за счет использования идей симметрии в рассматриваемых интегральных конструкциях.

В четвертой главе автор изучает некоторый четырехкратный интеграл. Интегралы такого типа обычно применяют при исследовании арифметических свойств значений дзета-функции Римана. Была подробно исследована структура группы преобразований этого интеграла, что позволяет представлять его в виде рациональной линейной комбинации чисел  $1, \zeta(2), \zeta(4)$ . В дальнейшем ожидается приложение этого факта к оценкам соответствующих линейных форм.

В заключении автор подытоживает полученные результаты.

Работа носит теоретический характер. Соискателю удалось получить заметное усиление результатов в области, где до нее успели поработать весьма сильные математики. Использованные при доказательстве усиления технического аппарата, несомненно, будут приняты на вооружение дальнейшими исследователями в этой области. Выносимые на защиту результаты являются новыми, требующими для их получения достаточно высокой квалификации и значительных усилий и даже некоторого везения.

### Степень обоснованности положений, выносимых на защиту

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно, опубликованы в семи статьях (три из них без соавторов), все в журналах из перечня ВАК, прошли достаточную апробацию. Теоремы четко сформулированы, снабжены подробными доказательствами.

### Замечания

Получению автором таких усиленных результатов способствовало не только улучшение применяемых конструкций и новых соображений, но и серьезные вычисления, что видно по приложению. К сожалению, в работе об этом практически ничего не сказано.

В работе упомянута статья Линдемманна о числе  $\pi$ , но, на мой взгляд, следовало бы указать и исходную работу Эрмита о числе  $e$ .

Хотя в работе и упомянуты формулы Эйлера для значений  $\zeta(2k)$ , но, поскольку столько внимания уделяется числам  $\zeta(2), \zeta(4)$ , можно было бы и явно написать, чему же они все-таки равны.

По части верстки текста следует указать, что в формулах «именные» функции принято набирать прямым шрифтом ( $\max$ ,  $\log$ ,  $Re$ , и т.д.), а не курсивом (*max*, *log*, *Re*), из-за чего они сливаются с переменными. Кроме того, в русскоязычных текстах принято писать  $\arctg$ ,  $\ln$ , а не  $Arctan$ ,  $\log$ .

### Заключение

Данная диссертация представляет собой законченную научно-квалификационную работу, характеризующуюся внутренним единством, в которой были получены существенно новые результаты, имеющие теоретическое значение.

Содержание диссертации соответствует специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел, а ее оформление соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям.

Автореферат соответствует содержанию диссертации.

Представленная работа соответствует требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Андросенко Валентина Александровна, заслуживает присуждения ей учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Профессор кафедры математического анализа федерального государственного бюджетного учреждения высшего образования «Московский педагогический государственный университет»,

доктор физико-математических наук

по специальности 01.01.06 *Е.М. Матвеев*



Е.М. Матвеев

*Матвеев*  
16.09.16