

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
на диссертацию Андросенко Валентины Александровны
“О линейных формах от значений дзета-функции Римана
и гипергеометрической функции Гаусса”,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Актуальность темы. Диссертация относится к одному из важнейших разделов теории чисел – теории диофантовых приближений и трансцендентных чисел.

В работе изучаются арифметические свойства значений некоторых действительных чисел. Это классическое направление в теории трансцендентных чисел: в конце 19-ого века был получен важный результат, который сейчас называется теоремой Линдемана-Вейерштрасса. Из него, в частности, следует, что π является трансцендентным числом. Таким же классическим вопросом является мера иррациональности действительного числа, которая показывает, насколько хорошо число может быть приближено рациональными дробями. Для алгебраических чисел по теореме Рота мера иррациональности равна 2, и такое же значение для почти всех трансцендентных чисел. Однако для многих трансцендентных констант мера иррациональности неизвестна, в лучшем случае известна некоторая оценка сверху.

В последние десятилетия возникли новые подходы к построению диофантовых приближений. Были доказаны многие арифметические результаты, в том числе усилены оценки сверху показателей иррациональностей таких классических чисел, как π и логарифмов рациональных чисел. Новые результаты продолжают появляться. Так, совсем недавно были зафиксированы рекорды оценок для чисел $\ln 3$ (В.Х. Салихов, 2007), π (В.Х. Салихов, 2008) и $\ln 2$ (Р. Марковеккио, 2009).

Новизна результатов. Все результаты диссертации В.А. Андросенко являются новыми и принадлежат автору. В работе получены новые оценки меры иррациональности числа $\pi/\sqrt{3}$ и специального значения гипергеометрической функции ${}_2F_1\left(1, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}; -\frac{1}{64}\right) = \log \frac{13}{5} + 2 \arctan \frac{4}{7}$. Также доказывается разложение четырехкратных интегралов специального вида в виде линейной формы от чисел 1, $\zeta(2)$ и $\zeta(4)$.

Методы доказательства. Все результаты диссертации строго доказаны и подробно проанализированы. Для доказательства использованы методы математического анализа, теории функций комплексного переменного и теории трансцендентных чисел.

Теоретическое и практическое значение результатов. Диссертация В.А. Андросенко носит теоретический характер. Полученные результаты, безусловно, представляют интерес для теории диофантовых приближений и трансцендентных чисел. Идеи и методы, развитые в диссертации, могут найти применение в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, в Математическом институте РАН им. В.А. Стеклова, в Институте математике АН Беларуси и в других научных центрах.

Краткий обзор содержания диссертации. Диссертационная работа состоит из 4 глав, первая из которых является введением, заключения, списка литературы и приложения. Общий объем диссертации – 123 страницы. Библиография содержит 57 наименований. Остановимся подробнее на содержании диссертации по главам.

В первой главе (введении) даётся обзор истории вопроса, вводятся обозначения, формулируются основные результаты диссертации. Также приводятся вспомогательные утверждения, используемые в работе.

Вторая глава посвящена оценке меры иррациональности числа $\pi/\sqrt{3}$. Вначале, по аналогии с работой Р. Марковеккио, используя двумерный комплексный интеграл от рациональных функций

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \int_{-\infty}^{i\infty} \frac{s^h t^j dt}{(1-s)^{l+k-j+1} (s-t)^{h+j-k+1} (t-x)^{k+m-h+1}}, \quad x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2},$$

доказывается оценка $\mu(\pi/\sqrt{3}) \leq 4,601057\dots$ (см. теорему 2.1). Это немного усиливает известную ранее оценку. Однако, рассмотрев интеграл с дополнительным множителем $\sqrt{s/(s-1)}$ в знаменателе подынтегральной функции и выбором $x = 3/4$, оценку удаётся значительно улучшить: $\mu(\pi/\sqrt{3}) \leq 4,230464\dots$ (см. теорему 2.2).

В третьей главе оценивается мера иррациональности значения гипергеометрической функции ${}_2F_1\left(1, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}; -\frac{1}{64}\right) = \log \frac{13}{5} + 2 \arctan \frac{4}{7}$. Для доказательства используется комплексный симметризованный интеграл; получена оценка $\mu(\pi/\sqrt{3}) \leq 7,448\dots$ (теорема 3.1).

В четвертой главе рассматриваются четырехмерные интегралы специального вида, которые являются обобщением интегралов Василенко и Сорокина. Исследуется их групповая структура, которая может быть полезна для арифметических приложений. Также при некоторых ограничениях на параметры интегралов, доказывается разложение в линейную форму от чисел 1, $\zeta(2)$ и $\zeta(4)$ с рациональными коэффициентами (теоремы 4.1 и 4.2).

В приложении даны графики линий уровня комплексной функции, используемые в доказательстве теоремы 3.1 из третьей главы.

Публикации и апробации результатов. Основные результаты опубликованы в 7 работах автора, четыре из которых написаны в соавторстве. Результаты диссертации докладывались на VII международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения", посвященной памяти профессора А. А. Карацубы (Россия, г. Тула, ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 11-16 мая 2010 года), на научно-исследовательском семинаре по теории чисел механико-математического факультета ФГБОУ ВО МГУ им. М.В. Ломоносова (26 сентября 2014), на заседаниях кафедры "Высшая математика" ФГБОУ ВО "Брянский государственный технический университет". Эти результаты хорошо известны специалистам. Автореферат диссертации полностью соответствует ее содержанию. Диссертация хорошо оформлена и написана грамотным математическим языком. Специальность, а именно "01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел", к которой относится работа, указана правильно и в диссертации и в автореферате.

Некоторые замечания. Есть небольшие замечания по оформлению:

- на стр. 21, 44, 88, 92 в конце строк имеются артефакты в виде чёрных прямоугольников;

- во многих местах для математических операций нужно использовать прямой шрифт вместо курсива, например, "ln" вместо "ln", "Res" вместо "Res" и т.п.

Также в диссертации имеется ряд опечаток:

- Страница 14, строка 5 сверху. Вместо " $m=2$ " должно быть " $m=3$ ".
- Страница 30, строка 4 сверху. Вместо " $\{p/n\}$ " должно быть " $\{n/p\}$ ".
- Страница 34, лемма 2.1. Нужны другие ограничения на параметры для того, чтобы обе части тождества существовали и при этом, чтобы равенство можно было использовать для преобразования целевого интеграла на странице 36.
- Страница 43, строка 11 сверху. Вместо " $I_n=I(h...)$ " должно быть " $I_n=J(h...)$ ".
- Страница 71, строка 5 сверху. Опечатка в ссылке: "(2.14)" вместо "(2.16)".
- На страницах 82 и 83 в вычислении пределов $1/n \cdot \log||$ и $1/n \cdot \log|a_1|$ допущены численные ошибки. К счастью, они не влияют на истинность итогового результата (оценки меры иррациональности).
- Страница 84. В определении интеграла I пропущена степень "с" в знаменателе подынтегрального выражения.
- Страница 85, строка 6 снизу. В знаменателе подынтегрального выражения вместо "с" должно быть " a_1 ".
- Страница 86, строка 5 сверху. Пропущена переменная "с" в выражении " a_2+b_1- ".
- Страница 95, строка 2 сверху. Вместо " a_1 " должно быть " a_1+l ".

Других замечаний по оформлению диссертации и по ее содержанию нет.

Общие выводы и оценки результатов диссертации.

1. В диссертации В.А. Андросенко получены новые результаты в актуальной области теории чисел.
2. При доказательстве основных результатов автор преодолевает значительные трудности и демонстрирует свободное владение методами анализа и теории трансцендентных чисел.
3. Используемые методы могут быть применены к решению многих актуальных задач теории диофантовых приближений и трансцендентных чисел.

Все вышеизложенное свидетельствует о том, что работа В.А. Андросенко "О линейных формах от значений дзета-функции Римана и гипергеометрической функции Гаусса" соответствует требованиям "Положения о порядке присуждения ученых степеней", утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 842, а автор работы, Андросенко Валентина Александровна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности "01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел".

Официальный оппонент,
руководитель группы разработки контроллера ООО "Аби Продакшн",
кандидат физико-математических наук

"15" сентября 2016г.

Зел

(С.А. Злобин)

ООО "Аби Продакшн", адрес: 127273, г. Москва, ул. Отрадная 2Б, стр. 6.
Тел.: +7 903 664 97 32; sirg_zlobin@mail.ru

Подпись С.А. Злобина заверяю

Ведущий инженер по работе с персоналом
А.В. Косенко

