ФГБОУ ВО «Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова»

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Кудрявцева Елена Александровна

Топология пространств функций Морса и инварианты бездивергентных полей

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва, 2016

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Официальные оппоненты:	**Ландо Сергей Константинович**, доктор физико-математических наук, НИУ «Высшая школа экономики», факультет математики, профессор
	Матвеев Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, член-корр. РАН, ФГБОУ ВПО «ЧелГУ», математический факультет, кафедра компьютерной топологии и алгебры, заведующий
	Щепин Евгений Витальевич, доктор физико-математических наук, член-корр. РАН, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, отдел геометрии и топологии, главный научный сотрудник
Ведущая организация:	**ФГАОУ ВПО «Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского»**

Защита диссертации состоится **21 октября 2016 г. в 16 ч. 45 м.** на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова, по адресу: г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8й этаж, и на сайте http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi, http://istina.msu.ru/dissertations/20806880.

Автореферат разослан 21 сентября 2016 г.

Зам. председателя
диссертационного совета
Д 501.001.84 на базе
ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор

Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена исследованию в области топологии функциональных пространств и топологических инвариантов 3-мерных несжимаемых течений и интегрируемых систем с 1 и 2 степенями свободы. В ней разрабатываются новые методы изучения глобального строения пространств морсовских функций и гамильтоновых систем на компактных поверхностях. Эти методы применяются для изучения топологии этих пространств, структуры разбиения пространств функций на классы топологической эквивалентности и структуры разбиения пространств гамильтоновых систем на классы C^0-сопряженности, а также для исследования непрерывных топологических инвариантов на пространствах 3-мерных несжимаемых течений и гамильтоновых систем с 2 степенями свободы.

Актуальность темы

Напомним определение морсовской функции. Пусть f — гладкая действительная функция на гладком многообразии M. Точка $p \in M$ называется *критической точкой* функции f, если $df(p) = 0$. Если мы выберем в окрестности U точки p локальную систему координат $(x^1, \dots, x^n)$, то это условие примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0,$$

где $n = \dim M$. Критическая точка p называется *невырожденной* или *морсовской*, если матрица вторых частных производных

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)$$

невырождена. Непосредственно проверяется, что это свойство не зависит от системы координат. Гладкая действительная функция f на многообразии M называется *морсовской*, если все ее критические точки невырождены. Согласно лемме Морса для любой невырожденной критической точки p функции f в некоторой окрестности U этой точки существует такая локальная система координат $(y^1, \dots, y^n)$, что $y^i(p) = 0$ при всех i и в U справедливо тождество

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2.$$

Число λ называется *индексом* функции f в критической точке p.

Хорошо известно, что геометрическое строение любого гладкого многообразия M определяется морсовскими функциями на нем. Дело в том, что (согласно теории Морса) любая функция Морса f на M определяет (неоднозначным образом) клеточное разбиение многообразия M, причем количество клеток размерности λ этого разбиения равно числу критических точек индекса λ функции f. Этот факт означает, что если у функции Морса на многообразии M "не слишком много" критических точек, то многообразие M устроено "не слишком сложно". Например, отсюда следует известная теорема Риба (см. теорему 4.1 работы[1]), согласно которой многообразие M^n, на котором существует функция Морса с ровно двумя критическими точками, обязательно гомеоморфно стандартной сфере S^n (в действительности, эта теорема остается справедливой и тогда, когда гладкая функция не является морсовской[2, 3]). Важным приложением указанного факта являются *слабые неравенства Морса*:

$$\beta_\lambda(M) \le \mu_\lambda(f), \quad 0 \le \lambda \le \dim M,$$

где $\beta_\lambda(M) := \dim H_\lambda(M;\mathbb{R})$ — λ-ое число Бетти многообразия M, $\mu_\lambda(f)$ — число критических точек индекса λ функции f. М. Морс[4] установил более сильные неравенства:

$$N_\lambda := \operatorname{rank}(H_\lambda(M)) + \operatorname{rank}(\operatorname{Tors}(H_{\lambda-1}(M))) \le \mu_\lambda(f), \quad 0 \le \lambda \le \dim M,$$

где ранг группы есть минимальное количество порождающих элементов.

Функции Морса, для которых сильные (соответственно слабые) неравенства Морса обращаются в равенства, называются *минимальными* (соответственно *совершенными*). С. Смейл[5] установил, что на любом односвязном многообразии размерности > 5 существует минимальная функция Морса. Функции Морса на заданном многообразии M, имеющие минимальное число $\min_f\{\mu_\lambda(f)\}$ критических точек каждого индекса λ, называются *точными*. В.В. Шарко[6] уточнил неравенства Морса и получил условия существования минимальных и точных функций Морса на неодносвязных многообразиях размерности > 5.

В данной работе исследуются следующие пять основных вопросов, каждому из которых посвящена отдельная глава.

I) Реализуема ли заданная гладкая функция f на компактном многообразии M в виде функции высоты при каком-либо погружении $\alpha : M \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$, где $n = \dim M$? Более общая проблема: описать связные компоненты пространства $\operatorname{Imm}_f(M, \mathbb{R}^{n+1})$ всех погружений, реализующих f в виде функции высоты.

[1] J. Milnor. Morse Theory // Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1963. Перевод с англ.: Дж. Милнор. Теория Морса. М.: Мир, 1971.

[2] J. Milnor. Sommes de variétés différentiables et structures différentiables des sphéres // Bull. Soc. Math. de France, **87** (1959), 439–444.

[3] R. Rosen. A weak form of the star conjecture for manifolds // Abstract 570–28, Notices Amer. Math. Soc., **7** (1960), p. 380.

[4] M. Morse. The calculus of variations in the large // N.Y., 1934 (352 p.).

[5] S. Smale. On structure of manifolds // Amer. J. Math. **84**:3 (1962), 387–399.

[6] В.В. Шарко. Функции на многообразиях // Киев, Наукова Думка, 1990.

II) Какие бывают гладкие функции на компактных многообразиях, как классифицировать такие функции с точностью до разных типов (топологической) эквивалентности? Когда две морсовские функции изотопны, т.е. когда их можно продеформировать друг в друга в пространстве морсовских функций?

III) Как описать структуру и топологию пространства $\mathcal{F}(M)$ гладких функций с заданными локальными особенностями на компактном многообразии M?

IV) Как описать *непрерывные* траекторные инварианты на пространстве $\mathbf{I}\mathcal{B}^{\mathrm{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых несжимаемых течений на компактном 3-мерном многообразии Q?

V) Описать *дифференцируемые* топологические инварианты на пространстве $\mathcal{B}^{\mathrm{exact}}(Q)$ точных несжимаемых течений на компактном 3-мерном многообразии Q, обладающие "достаточно хорошей" производной.

Исторический обзор

Перейдем к более подробному описанию истории вопросов, затронутых в диссертации.

I. Функции высоты на погруженных многообразиях в $\mathbb{R}^N$

Известно, что на любом гладком компактном многообразии M существует функция Морса (см. следствие 6.7 работы[1]). Более того, функции Морса образуют открытое и плотное подмножество в пространстве $C^\infty(M)$ всех гладких функций на M (см. следствие 6.8 работы[1], ср.[7]). Другими словами, "почти все" гладкие функции на гладком компактном многообразии M являются функциями Морса. Классический способ доказательства этого факта (и построения функций Морса) основан на понятии функции высоты и состоит в следующем. Рассмотрим произвольное гладкое компактное многообразие M и его произвольное погружение $\alpha : M \looparrowright \mathbb{R}^N$ в евклидово пространство (такое погружение существует при $N = 2n$ по теореме Уитни[8], где $n = \dim M$). На $\mathbb{R}^N$ рассмотрим семейство гладких функций L_q, являющихся квадратами расстояний до фиксированной точки $q \in \mathbb{R}^N$: $L_q(x) = |x - q|^2$. Оказывается, что (в силу теоремы Сарда) для точки q общего положения функция $L_q \circ \alpha$ будет морсовской функцией на M (см. теорему 6.6 работы[1]). Функции вида $L_q \circ \alpha$ при $|q| \to \infty$ тесно связаны с *функциями высоты* при погружении α, т.е. с функциями вида $p_e \circ \alpha$, где $p_e(x) = \langle x, e \rangle$, e — вектор единичной длины в $\mathbb{R}^N$. Из указанного наблюдения следует, что любая гладкая функция на многообразии M является

[7] M. Morse. The critical points of a function of n variables // Trans. Amer. Math. Soc., **33** (1931), 71–91.

[8] Х. Уитни. Геометрическая теория интегрирования // М.: ИЛ, 1960.

функцией высоты при некотором погружении $\alpha : M \looparrowright \mathbb{R}^{N+1}$ и может быть равномерно аппроксимирована морсовской функцией (теорема 6.8 работы[1]).

R. Bott и H. Samelson[9] обнаружили бесконечные серии подмногообразий евклидова пространства, на которых почти все функции высоты являются совершенными, например круглая сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и ее обобщения — орбиты присоединенного действия компактных алгебр Ли (см. работу[10] и ссылки в ней).

Возникает вопрос о реализуемости данной гладкой функции f на многообразии M в виде функции высоты при каком-либо погружении или вложении $\alpha : M \to \mathbb{R}^N$ в евклидово пространство наименьшей возможной размерности N. В случае $N = \dim M + 1$ векторы нормалей к данному погруженному многообразию $\alpha(M)$ во всех критических точках функции высоты $p_e \circ \alpha$ сонаправлены с вектором $\pm e$. Поэтому вопрос о реализуемости можно уточнить так: реализуема ли данная функция f на n-мерном многообразии M в виде функции высоты при погружении $\alpha : M \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ с заданными направлениями нормалей $\pm e$ в критических точках? Более общая проблема: описать связные компоненты пространства $\mathrm{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3) \subset \mathrm{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$ всех погружений, реализующих функцию f с заданными направлениями нормалей $\pm e$ в критических точках.

O. Burlet и V. Haab[11] показали, что любая функция Морса на любой замкнутой двумерной поверхности M реализуема в виде функции высоты для некоторого погружения поверхности в $\mathbb{R}^3$. Однако они обнаружили далеко не все искомые погружения, и уточненный вопрос о реализуемости функции с заданными направлениями нормалей в критических точках, а также вопрос описания связных компонент пространства всех реализаций оставались нерешенными.

Гладкие функции на компактной поверхности M, реализуемые в виде функции высоты $p_e \circ \alpha$ при некотором *вложении* $\alpha : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, называются *высотными*. Нетрудно показывается, что любая *типичная* функция Морса на любой замкнутой ориентируемой поверхности является высотной. Напомним, что *2-атомом* называется функция Морса $f : P \to \mathbb{R}$ с ровно одним критическим значением $c \in \mathbb{R}$ на компактной связной поверхности P, постоянная на каждой граничной окружности. В.О. Мантуров[12] получил критерий высотности 2-атома. Н.В. Волчанецкий и И.М. Никонов[13] классифицировали все высотные ориентируемые атомы в классе максимально-симметричных атомов, т.е. атомов, группа

[9] R. Bott, H. Samelson. Application of the theory of Morse to symmetric spaces // Amer. J. Math., **80** (1958), 964–1029.

[10] В.А. Шмаров. Минимальные линейные функции Морса на орбитах в алгебрах Ли // Вестн. Моск. ун-та, Сер.1, 2015, No. 2, 9–16.

[11] O. Burlet, V. Haab. Realisations de fonctions de Morse sur des surfaces, par des immersions et plongements dans l'espace $\mathbb{R}^3$ // C.R. Acad. Sc. Paris, **300**, Serie 1, No. 12 (1985), 401–406.

[12] V.O. Manturov. Chord diagrams, d-diagrams, and knots // Zap. Nauchn. Sem. POMI, **267** (2000), 170–194.

[13] Н.В. Волчанецкий, И.М. Никонов. Максимально симметричные высотные атомы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2013. No. 2. 3–6.

собственных симметрий которых действует транзитивно на ребрах графа $f^{-1}(c)$.

II. Топологическая классификация и изотопность функций Морса на поверхностях

Две гладкие вещественные функции на гладком многообразии M называют *эквивалентными*[14], если их можно получить друг из друга преобразованиями многообразия M и вещественной прямой $\mathbb{R}$. Если указанные преобразования изотопны тождественным, то функции называют *топологически эквивалентными*[14]. Две функции Морса на многообразии M назовем *изотопными*, если их можно продеформировать друг в друга в пространстве функций Морса.

Пусть $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ — пространство функций Морса, имеющих p, r, q критических точек локальных минимумов, максимумов и седел на замкнутой поверхности M. Ясно, что изотопные функции Морса принадлежат одному $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$.

Кроме эквивалентности естественно возникает похожее отношение — *послойная эквивалентность*. Послойную эквивалентность функций Морса на поверхностях изучал А.Т. Фоменко в связи с изучением лиувиллевой[15] и траекторной[16, 17] эквивалентностей интегрируемых гамильтоновых систем с 2 степенями свободы. А.Т. Фоменко описал[18, 19, 20, 15, 16, 21] полный инвариант послойной эквивалентности в пространстве $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ функций Морса на поверхностях в терминах комбинаторных объектов — "атомов" и "молекул" (см. теорему 2.16 работы[22]). Точнее, в работах[15, 16] были классифицированы особенности боттовских интегралов на изоэнергетических поверхностях интегрируемых гамильтоновых систем с 2 степенями свободы. Позже было дано достаточно удобное и формальное описание этой классификации в работе[21], где были введены понятия атомов и молекул.

---

[14] V.I. Arnold. Topological classification of Morse functions and generalisations of Hilbert's 16-th problem // Math. Phys. Anal. Geom. **10**:3 (2007), 227–236.

[15] А.Т. Фоменко, Х. Цишанг. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. **54**, No. 3. 546–575.

[16] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации, I // Матем. сб. 1994. **185**, No. 4. 27–80; II // Там же. 1994. **185**, No. 5. 27–78.

[17] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем // М.: Наука, 1997.

[18] А.Т. Фоменко. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Известия АН СССР, **50**, No. 6 (1986), 1276–1307.

[19] А.Т. Фоменко. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // ДАН СССР **287**, No. 5 (1986), 1071–1075.

[20] А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. Курс гомотопической топологии // М.: Наука, 1989.

[21] А.В. Болсинов, С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // Успехи матем. наук. 1990. **45**, No. 2. 49–77.

[22] A.V. Bolsinov, A.T. Fomenko. Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification // Boca Raton, London, NY, Washington, D.C.: Chapman & Hall/CRC, 2004.

В. И. Арнольд исследовал *количество классов* эквивалентности типичных функций Морса на прямой[23] и на поверхности[24, 25, 14, 26]. В частности, Арнольд[14] изучил *асимптотику количества классов* эквивалентности (= топологической эквивалентности) типичных функций Морса в пространствах $\mathcal{F}_{p,p+r-2,r}(S^2)$ функций Морса на сфере, в зависимости от количества $q = p + r - 2$ седел, при $q \to \infty$. Е.В. Кулинич[27] вычислил *количество классов* эквивалентности типичных функций Морса на замкнутой ориентируемой поверхности рода $g \le 6$, имеющих ровно две критические точки локальных экстремумов.

J. Harer и D. Zagier[28] вычислили производящую функцию для *количества* $\varepsilon_g(q)$ клеточных разбиений замкнутой связной ориентированной поверхности рода g с $r = q + 1 - 2g$ вершинами, r ребрами, одно из которых отмечено и ориентировано, и одной двумерной клеткой с точностью до сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов поверхности. С помощью этого комбинаторного результата они получили важный топологический результат (см. раздел III). Заметим, что число $\varepsilon_g(q)$ совпадает с *количеством классов* послойной эквивалентности правильных (т.е. имеющих лишь одно седловое критическое значение) функций Морса f на замкнутой поверхности M рода g, принадлежащих пространству $\mathcal{F}'_{1,q,r}(M)$ (т.е. имеющих ровно одну точку локального минимума и q седловых точек, причем одна седловая точка оснащена). Отсюда в следствии 3.3.6 (C) мы получаем еще одно топологическое применение формулы Харера–Загье.

Полный инвариант изотопности в пространстве гладких функций без критических точек на открытой поверхности (с краем) описан Ю.М. Бурманом[29, 30].

В 1997 г. А. Т. Фоменко поставил вопрос о линейной связности пространств $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)$. Положительный ответ был получен автором [1] для $M = S^2$ и $\mathbb{R}P^2$, а в общем случае С. В. Матвеевым [1, теоремы 8 и 8'] и Х. Цишангом в 1998 г., а также В.В. Шарко[31] и С.И. Максименко[32]. Более того, С. В. Матвеев доказал

---

[23] В.И. Арнольд. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера // УМН, **47**:1(283) (1992), 3–45.

[24] В.И. Арнольд. Топологическая классификация комплексных тригонометрических многочленов и комбинаторика графов с одинаковым числом вершин и ребер // Функц. Анал. Прил. **30**:1 (1996), 1–17.

[25] V.I. Arnold. Smooth functions statistics // Funct. Anal. Other Math. **1**:2 (2006), 111–118.

[26] В.И. Арнольд. Топологическая классификация многочленов Морса. Дифф. уравн. топол. I // Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН **268**, МАИК, М., 2010, 40–55.

[27] E.V. Kulinich. On topologically equivalent Morse functions on surfaces // Methods of Funct. Anal. Topology. 1998. **4**, N 1. 59–64.

[28] J. Harer, D. Zagier. The Euler characteristic of the moduli space of curves // Invent. Math. **85** (1986), 457–485.

[29] Ю.М. Бурман. Теория Морса для функций двух переменных без критических точек // Функц. дифф. ур. 1995. **3**, No. 1, 2. 31–31.

[30] Yu.M. Burman. Triangulation of surfaces with boundary and the homotopy principle for functions without critical points // Annals of Global Analysis and Geometry 1999. **17**, N 3. 221–238.

[31] В.В. Шарко. Функции на поверхностях. I // Некоторые проблемы современной математики: Тр. Матем. ин-та Укр. НАН / Под ред. В.В. Шарко. **25**. Киев: Наукова Думка, 1998. 408–434.

[32] S.I. Maksymenko. Path-components of Morse mappings spaces on surfaces // Comment. Math. Helv. 2005. **80**.

линейную связность пространств $\mathcal{F}_{p,q,r}(M)_{\mathrm{extr}} \subset \mathcal{F}_{p,q,r}(M)$ функций с фиксированными критическими точками локальных экстремумов на поверхности M.

III. Топология и стратификация пространств функций с заданными особенностями

Группы гомологий и гомотопий пространств функций с умеренными особенностями (с допущением не-морсовских особенностей) на окружности изучал В.И. Арнольд[33]. С помощью параметрического h-принципа В.А. Васильев[34] изучил кольца когомологий пространств $\mathbb{R}^n$-значных функций с умеренными особенностями (с допущением не-морсовских особенностей) на любом гладком многообразии. Однако 1-параметрический h-принцип невыполнен[35, 36] для пространств функций Морса на некоторых компактных многообразиях размерности > 5.

С.И. Максименко[37] изучал топологию отдельно взятого класса топологической сопряженности (т.е. страта Максвелла) из пространства функций Морса на замкнутой поверхности $M \neq S^2, T^2$. В частности, Максименко[37] доказал асферичность любого класса топологической сопряженности.

Как отмечено выше, J. Harer и D. Zagier[28] с помощью своего комбинаторного результата получили топологический результат — вычислили эйлерову характеристику "комплекса ленточных графов" G_g^s, и ввиду[38] получили формулу

$$\chi(\mathcal{M}_g^s) = \chi(G_g^s) = (-1)^s \frac{(2g+s-3)!}{2g(2g-2)!} B_{2g}, \qquad s > 2-2g,$$

где $\mathcal{M}_g^s$ — пространство модулей комплексных алгебраических кривых рода g с s пронумерованными проколами, а B_g есть g-ое число Бернулли, определяемое производящей функцией $\sum_{n\geq 0} B_n \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z-1}$. Позднее аналогичные формулы[39] и производящие функции для них[40, 41] были получены как для эйлеровой характеристики, так и для орбиобразной эйлеровой характеристики пространства $\mathcal{M}_g^s$ и его компактификации $\overline{\mathcal{M}_g^s}$ Деліня-Мамфорда[42].

655–690.

[33] В.И. Арнольд. Пространства функций с умеренными особенностями // Функ. Ан. Прил. **23**:3 (1989), 1–10.

[34] В.А. Васильев. Топология пространств функций без сложных особенностей // Функ. Ан. Прил. **23**:4 (1989), 24–36.

[35] A. Chenciner, F. Laudenbach. Morse 2-jet space and h-principle // Bull. Brazil. Math. Soc. **40**:4 (2009), 455–463.

[36] A. Hatcher. Higher simple homotopy theory // Annals of Math. (2) **102** (1975), 101–137.

[37] S.I. Maksymenko. Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces // Annals of Global Analysis and Geometry. 2006. **29**, N 3. 241–285. arXiv:math.GT/0310067.

[38] K. Strebel. Quadratic Differentials // Ergebnisse der Math. **3**:5, Springer-Verlag, Heidelberg (1984).

[39] I.P. Goulden, J.L. Harer, D.M. Jackson. A geometric parametrization for the virtual Euler characteristic for the moduli spaces of real and complex algebriac curves // arXiv:math/9902044.

[40] G. Bini, G. Gaiffi, M. Polito. A formula for the Euler characteristic of $\overline{\mathcal{M}}_{2,n}$ // Math. Z. **236** (2001), 491–523.

[41] G. Bini, J. Harer. Euler characteristics of moduli spaces of curves // arxiv:0506083 (2005, 2008).

[42] P. Deligne and D. Mumford. Irreducibility of the space of curves of a given genus // Publ. IHES **36** (1979),

IV. Топологические инварианты интегрируемых 3-мерных несжимаемых течений

Функции Морса на поверхностях изучали А.Т. Фоменко[18] и Фоменко с соавторами[43, 44, 45, 15, 16, 17] в связи с задачей классификации (лиувиллевой, траекторной) невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы на неособых компактных 3-мерных изоэнергетических многообразиях.

Фоменко и Цишанг[15] построили полный инвариант лиувиллевой эквивалентности таких систем. Фоменко и Болсинов[16, 17] построили полный инвариант траекторной эквивалентности таких систем. Важным инструментом обеих теорий является описание классов послойной эквивалентности функций Морса на замкнутых поверхностях, в терминах комбинаторного объекта — «молекулы» функции Морса. Из наших результатов главы 2 следует, что разбиение пространства $\mathcal{F}(M)$ функций Морса на поверхности M на классы топологической послойной эквивалентности является стратификацией, где страты (называемые *стратами Максвелла*) отвечают некоторым графам — «молекулам» Фоменко. Поэтому разбиение пространства $\mathbf{I}\mathcal{B}(Q)$ интегрируемых несжимаемых течений на 3-мерном многообразии Q на классы лиувиллевой эквивалентности тоже является стратификацией, где страты (тоже называемые *стратами Максвелла*) характеризуются некоторыми графами — «мечеными молекулами» Фоменко-Цишанга[15]. Траекторные инварианты Болсинова-Фоменко[16, 17] на пространстве $\mathbf{I}\mathcal{B}^{\mathrm{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых течений определялись по-разному на разных стратах Максвелла — классах лиувиллевой эквивалентности систем.

Возникает вопрос. Существуют ли «продолжимые» траекторные инварианты на том или ином страте Максвелла, т.е. (непостоянные) инварианты Болсинова-Фоменко, которые можно непрерывно продолжить в некоторую окрестность данного страта Максвелла до инварианта траекторной эквивалентности?

V. Топологические инварианты 3-мерных несжимаемых течений

В математической физике актуальным является изучение топологических инвариантов бездивергентных векторных полей (называемых также несжимаемыми течениями) на компактном 3-мерном многообразии Q. Интегральные линии такого поля попарно не пересекаются и заполняют всю область, касаясь ее грани-

75–110.

[43] С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко. Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий // Усп. Матем. Наук **43**, вып. 1 (259) (1988), 5–22.

[44] С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко. Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем с ручными интегралами // Матем. Зам. **43**, No. 5 (1988), 663–671.

[45] С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко, В.В. Шарко. Круглые функции Морса и изоэнергетические поверхности интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. Сб. **135(177)**, No. 3 (1988), 325–345.

цы, и тем самым образуют «распределенный узел» в данной области. Хорошо известен инвариант Хопфа — «спиральность» несжимаемого течения, равный усредненному коэффициенту зацепления интегральных траекторий[46].

Понятие спиральности восходит к Гельмгольцу и Кельвину[47]. Своим вторым рождением в магнитной гидродинамике это понятие обязано Волтьеру[48], а в идеальной гидродинамике — Моффату[49], который обнаружил его топологический характер (см. также[50]). Слово «спиральность» было впервые введено в[49] и с тех пор широко использовалось в механике жидкости и магнитной гидродинамике. Важнейшее свойство этой величины состоит в ее *топологической инвариантности*: спиральность

$$\mathcal{H}(\overline{B}) := \int\limits_Q B \wedge d^{-1} B$$

бездивергентного векторного поля $\overline{B}$ в односвязной области $Q \subset \mathbb{R}^3$, касающегося его границы, сохраняется при действии на $\overline{B}$ любого сохраняющего объемы диффеоморфизма области Q (см. теорему 1.4 работы[51]). Здесь $B := i_{\overline{B}}\mu$ — 2-форма, отвечающая векторному полю $\overline{B}$, μ — элемент объема.

Пусть $\mathscr{D}^0(Q)$ — группа изотопных тождественному диффеоморфизмов многообразия Q, $\mathscr{D}^0_\mu(Q)$ — подгруппа сохраняющих объемы диффеоморфизмов. Итак, спиральность является $\mathscr{D}^0(Q)$-инвариантным (а потому и $\mathscr{D}^0_\mu(Q)$-инвариантным) функционалом $\mathcal{H} : \mathcal{B}^{\mathrm{exact}}(Q) \to \mathbb{R}$ на пространстве

$$\mathcal{B}^{\mathrm{exact}}(Q) := \{B \in \Omega^2(Q) \mid B \text{ точна и не имеет нулей, } j^*_{\partial Q} B = 0\}$$

точных несжимаемых течений без нулей на односвязном компактном 3-мерном многообразии Q, где $j_{\partial Q} : \partial Q \hookrightarrow Q$ — отображение включения.

Возникают вопросы: существуют ли другие $\mathscr{D}^0(Q)$-инвариантные (соответственно $\mathscr{D}^0_\mu(Q)$-инвариантные) функционалы на пространстве $\mathcal{B}^{\mathrm{exact}}(Q)$, обладающие теми или иными дополнительными свойствами (например, представимые в интегральном виде или в виде асимптотического инварианта зацепления)?

Д. Серре[52] доказал, что любой инвариант "первого порядка" уравнения Эйле-

[46] В.И. Арнольд. Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения // В кн.: Материалы Всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и по динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы (Дилижан, 21 мая — 3 июня 1973 г.). Ереван: АН Арм. ССР, 1974. 229-255. [См. также В.И. Арнольд. Избранное-50. М.: Фазис, 1997. 215–235.]

[47] L. Kelvin. On vortex motion // Trans. Roy. Soc. Edin. 1869. **25**. 217–260; Maximum and minimum energy in vortex motion // Mathematical and Physical Papers, **4**. Cambridge Univ. Press. 172–183.

[48] L. Woltjer. A theorem on force-free magnetic fields // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1958. **44**. 489–491.

[49] H.K. Moffatt. The degree of knottedness of tangled vortex Iines // J. Fluid. Mech. 1969. **106**. 117–129.

[50] J.-J. Moreau. Constantes d'un îlot tourbillonnaire en fluid parfait barotrope // C.R. Acad. Sci. Paris. 1961. **252**. 2810–2812.

[51] В.И. Арнольд, Б. Хесин. Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО, 2007.

[52] D. Serre. Les invariants du premier ordre de l'équation d'Euler en dimension trois // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B. **289**:4 (1979), A267-A270. Physica D. **13**:1-2 (1984), 105–136.

ра идеальной несжимаемой жидкости в ограниченной области в $\mathbb{R}^3$ выражается через энергию и спиральность. П.М. Ахметьев[53] обнаружил несколько $\mathscr{D}^0_\mu(Q)$-инвариантных функционалов на множестве $\mathcal{B}^{\text{exact}}(Q)$ точных несжимаемых течений в Q, названные им *высшими моментами спиральности*, представимые в виде асимптотических инвариантов зацеплений. Моменты спиральности k-го порядка Ахметьева кодируются некоторыми графами с k вершинами.

Цель работы

Получение критерия реализуемости гладкой функции с конечным числом критических точек на замкнутой связной поверхности в виде функции высоты при некотором погружении этой поверхности в 3-мерное евклидово пространство. Нахождение и описание конечномерного полиэдра, имеющего гомотопический тип пространства функций Морса с заданным числом критических точек локальных минимумов, максимумов и седел на компактной связной ориентируемой поверхности. Выяснение существования относительно-продолжимых инвариантов C^0-сопряженности на заданном страте Максвелла в пространстве невырожденных гамильтоновых систем на компактной поверхности. Получение классификации дифференцируемых топологических инвариантов точных несжимаемых течений на компактном связном 3-мерном многообразии, имеющих регулярную и C^1-непрерывную производную.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

1) получен критерий того, когда гладкая функция f с конечным числом критических точек на связной замкнутой поверхности M реализуема в виде функции высоты при некотором погружении поверхности в 3-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$; описано множество связных компонент пространства всех погружений поверхности в $\mathbb{R}^3$ с данной функцией высоты; доказано, что для любого погружения замкнутой поверхности в $\mathbb{R}^3$, имеющего морсовскую функцию высоты, любая гладкая деформация этой функции в пространстве морсовских функций реализуется в виде деформации функции высоты при некоторой гладкой деформации заданного погружения, причем пространство всех таких деформаций в пространстве погружений линейно связно; получено новое доказательство известного “парадокса Смейла”, что двумерную сферу можно “вывернуть наизнанку” в $\mathbb{R}^3$;

[53] P.M. Akhmet'ev. Quadratic magnetic helicity and magnetic energy // Proc. Steklov Math. Inst. **278** (2012), 16–28.

2) введено понятие косого цилиндрически-полиэдрального комплекса; для пространств $\mathcal{F}$ функций Морса на компактной ориентируемой поверхности M, имеющих не менее $\chi(M)+1$ пронумерованных критических точек, описано построение косого цилиндрически-полиэдрального комплекса $\widetilde{\mathbb{K}}$ ("комплекса оснащенных функций Морса"), ассоциированного с пространством $\mathcal{F}$; доказана гомотопическая эквивалентность данного пространства $\mathcal{F}$ функций Морса прямому произведению $R\times\widetilde{\mathbb{K}}$, где R — одно из четырех многообразий: точка, окружность, двумерный тор и $\mathbb{R}P^3$; получены верхние оценки для гомологической размерности и чисел Бетти пространства $\mathcal{F}$; доказана бесконечность количества связных компонент любого пространства $\mathcal{F}^{\rm fix}$ функций Морса на компактной связной поверхности с закрепленными критическими точками, если число седел положительно;

3) обнаружены относительно-продолжимые инварианты C^0-сопряженности гамильтоновых систем на некоторых стратах Максвелла (называемых "бициклическими") в пространстве $\mathbf{H}^{\rm nondeg}(P)$ невырожденных гамильтоновых систем на компактных связных поверхностях P, по отношению к некоторым примыкающим открытым стратам Максвелла (состоящим из "бициклических возмущений"); бициклические страты Максвелла образуют бесконечную серию и состоят из гамильтоновых систем, гамильтонианы которых являются функциями Морса с ровно одним критическим значением, где род поверхности P не фиксирован; получены эффективные достаточные условия относительно-устойчивой C^0-несопряженности пары гамильтоновых систем из произвольного бициклического страта Максвелла по отношению к классу бициклических возмущений; этим условиям удовлетворяют почти все пары систем из этого страта; для бесконечной подсерии в серии бициклических стратов Максвелла (состоящей из "вполне бициклических" стратов Максвелла) получены эффективные достаточные условия устойчивой C^0-несопряженности пары гамильтоновых систем из такого страта Максвелла; этим условиям удовлетворяют почти все пары систем из такого страта;

4) доказано, что любой инвариант сопряженности на универсальной накрывающей $\widetilde{\mathscr{D}_\omega}(D^2)$ группы симплектоморфизмов круга, имеющий регулярную и непрерывную относительно C^1-топологии производную, выражается через инвариант Калаби; доказано, что любой $\mathscr{D}^0(Q)$–инвариантный функционал на пространстве $\mathcal{B}^{\rm exact}(Q)$ точных несжимаемых течений без нулей на компактном связном ориентируемом 3–мерном многообразии Q, имеющий регулярную и непрерывную относительно C^1-топологии производную, локально на $\mathcal{B}^{\rm exact}(Q)$ (а в случае $Q=M\times S^1$ с непустой границей — глобально на множестве всех 2–форм $B\in\mathcal{B}^{\rm exact}(Q)$, допускающих секущую поверхность, изотопную $M\times\{*\}$) выражается через функционал спиральности.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Методы и результаты диссертации могут быть использованы для исследования проблем теории погружений, теории особенностей, маломерной топологии и геометрической топологии, математической физики, теории гамильтоновых систем и теории несжимаемых течений.

Значение полученных соискателем результатов для практики подтверждается тем, что результаты диссертации цитируются и используются в научных статьях других авторов, а также обсуждаются на Международных конференциях и симпозиумах, как теоремы Кудрявцевой. В частности, теорема 5.3.9 из текста диссертации упоминалась как "теорема Кудрявцевой" в нескольких докладах на Международном симпозиуме в Венеции "IUTAM Symposium: Helicity, Structures and Singularity in Fluid and Plasma Dynamics" (11–15 апреля 2016 г.), и на Международной конференции в Москве "Knots and links in fluid flows: from helicity to knot energy" (апрель 2015 г.). Следующие авторы также цитируют результаты, полученные в диссертации: S.I. Maksymenko, L.I. Nicolaescu, Ya. Masumoto, O. Saeki, F. Morishita, B.G. Feshchenko, F. Cagliari, B. Di Fabio, C. Landi, A. Enciso, D. Peralta-Salas, F.T. de Lizaur, A. Rechtman, P. Dehornoy и другие.

Основные методы исследования

Используются классические методы и результаты дифференциальной геометрии, алгебраической топологии, маломерной топологии, симплектической геометрии, качественной теории интегрируемых и общих динамических систем. В частности, результаты диссертации опираются на результат C.J. Earle и J. Eells (мл.) о гомотопическом типе компоненты единицы группы диффеоморфизмов компактной связной поверхности, на результат C. Bonatti и S. Crovisier[54] о топологической транзитивности C^1-общих симплектоморфизмов компактной поверхности, и на аналогичный результат M. Bessa[55]. Также используется и развивается метод «меченой молекулы» Болсинова-Фоменко, с помощью которого Болсинов и Фоменко[18] получили полную траекторную классификацию невырожденных интегрируемых несжимаемых течений на 3-мерных многообразиях.

Наряду с классическими методами используются метод оснащенных функций Морса, ориентированный на изучение топологии пространств морсовских функций и введенный Д.А. Пермяковым и диссертантом, а также новое понятие косых цилиндрически-полиэдральных комплексов, введенное диссертантом и обобщающее понятие косых цилиндрически-полиэдральных комплексов. Особую роль играет новый метод комплексов функций Морса, разработанный

[54] C. Bonatti, S. Crovisier. Récurrence et généricité // Invent. Math. **158** (2004), 33–104.

[55] M. Bessa. A generic incompressible flow is topological mixing // C. R. Math. Sci. Paris **346** (2008), 1169–1174.

диссертантом и состоящий в сведении изучения топологии бесконечномерных пространств морсовских функций к изучению конечномерного комбинаторного объекта – комплекса оснащенных функций Морса (по сути являющегося «комплексом морсовских клеточных комплексов»), т.е. к комбинаторным проблемам косых цилиндрически-полиэдральных комплексов; этот метод позволил получить информацию о гомологиях изучаемых пространств морсовских функций.

Апробация результатов

Результаты диссертации неоднократно излагались на семинаре "Современные геометрические методы" и Кафедральном семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета МГУ (1997, 2001, 2012, 2015, 2016), на семинаре по геометрической топологии под руководством члена-корреспондента РАН Е.В. Щепина (1998, 2011 и 2012, МИАН им. В.А. Стеклова), на семинаре по алгебраической топологии под руководством М.М. Постникова (1998 и 2012, МГУ), на семинаре под руководством академика РАН В.И. Арнольда (2007, МГУ), на семинаре "Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика" под руководством С.М. Натанзона, О.В. Шварцмана и О.К. Шейнмана (2012 и 2016, НМУ), на семинаре "Характеристические классы и теория пересечений" под руководством М.Э. Казаряна и С.К. Ландо (2016, ВШЭ), на семинаре по динамическим системам под руководством академика РАН Д.В. Аносова и А.М. Степина (2003, МИАН им. В.А. Стеклова), на научных семинарах в университетах Германии (Бохум 1999, Дортмунд 2000, Фрайбург 2001). Результаты докладывались на международных конференциях:

- International conference "New Techniques in Topological Quantum Field Theory" (Calgary, Canada, 08.2001),
- International conference "Differential equations and related topics" dedicated to Ivan G. Petrovskii (Moscow, Russia, 05-06.2011),
- International conference "XVII Geometrical Seminar" (Serbia, Zlatibor, 09.2012),
- International conference "Analysis and singularities" dedicated to the 75th anniversary of Vladimir Igorevich Arnold (Moscow, Russia, 12.2012),
- International conference in honour of Lev Pontriagin (Moscow, Russia, 09.1998),
- International conference "Braid Groups and their Applications" (Banff International Research Station, Canada, 11.2004),
- International topological conference "Alexandroff readings — 2012" (MSU, Moscow, 05.2012),

- International conference “Knots and links in fluid flows: from helicity to knot energy” (IUM, Moscow, Russia, April 27–30, 2015),

- International topological conference “Alexandroff readings — 2016” (MSU, Moscow, 05.2016).

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы. Работа изложена на 341 странице и снабжена 38 рисунками. Общий список литературы включает 151 наименование.

Публикации

Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно и опубликованы в работах [1]—[12], список которых приведен в конце автореферата, включая 11 статей в журналах, рекомендованных ВАК РФ для публикации результатов докторских диссертаций.

Краткое содержание работы

Глава 1 посвящена вопросу о реализуемости данной гладкой функции f на двумерном многообразии M в виде функции высоты при каком-либо погружении $\alpha : M \looparrowright \mathbb{R}^3$ в 3-мерное евклидово пространство.

Теорема (1.1.4 [1, 2, 3]). (a) *Пусть f — гладкая (необязательно морсовская) функция, имеющая конечное число критических точек $x_1, \dots, x_N$ на связном замкнутом двумерном многообразии M. Если M ориентируемо, то равенство*

$$\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \mathrm{ind}_{x_k}(\mathrm{grad}\, f) = 0, \qquad \text{где } \varepsilon_k = \pm 1, \qquad 1 \le k \le N,$$

является необходимым и достаточным условием того, что функцию f можно реализовать как функцию высоты при некотором погружении поверхности M в $\mathbb{R}^3$, таком, что в каждой критической точке x_k (где $1 \le k \le N$) положительная нормаль к поверхности M имеет вид $\varepsilon_k e$, где e — единичный базисный вертикальный вектор евклидовой системы координат в $\mathbb{R}^3$. Если M неориентируемо, то любое вложение в $\mathbb{R}^3$ достаточно малых окрестностей критических точек, реализующее функцию f как функцию высоты (такие вложения всегда существуют), можно продолжить до погружения всей поверхности M в $\mathbb{R}^3$, реализующего функцию f как функцию высоты.

Если фиксировано погружение $\alpha_0 \in \mathrm{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, *реализующее* f *как функцию высоты с заданными направлениями нормалей в критических точках, то имеется естественная биекция* $\pi_0(\mathrm{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)) \cong H^1(M; \mathbb{Z})$.

(б) *Пусть* $f_t : M \to \mathbb{R}$, $0 \le t \le 1$, *— гладкий путь в пространстве всех функций Морса на замкнутой поверхности* M. *Пусть* $\alpha_0 \in \mathrm{Imm}_{f_0}(M, \mathbb{R}^3)$ *— некоторое погружение* M *в* $\mathbb{R}^3$, *реализующее простую функцию Морса* f_0 *как функцию высоты. Тогда существует гладкий путь* $\alpha_t \in \mathrm{Imm}_{f_t}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \le t \le 1$, *в пространстве всех погружений* M *в* $\mathbb{R}^3$. *Пространство всех таких путей* $\alpha_t \in \mathrm{Imm}_{f_t}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \le t \le 1$, *линейно связно.*

(в) *В случае двумерной сферы* $M = S^2$ *пространство* $\mathrm{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$ *связно. Более того, два стандартных вложения* α_0 *и* α_1 *сферы в* $\mathbb{R}^3$, *имеющие один и тот же образ, но противоположно направленные положительные нормали, можно соединить таким путем* α_t, $0 \le t \le 1$, *в пространстве погружений, что функции высоты* f_t *погружений* α_t *образуют путь общего положения, описанный в* §1.7.1 *и замечании* 1.7.11.

Глава 2 имеет вспомогательный характер. В ней получен критерий топологической эквивалентности функций Морса на произвольной компактной поверхности (теорема 2.3.4), доказана бесконечность количества связных компонент любого пространства $\mathcal{F}^{\mathrm{fix}}$ функций Морса на компактной поверхности с фиксированными критическими точками, если есть седла (теорема 2.7.2).

В **главе 3** дается ответ на следующий вопрос. Как описать структуру и топологию (связных компонент) пространств морсовских функций на двумерных компактных многообразиях? Уловить структуру пространства $\mathcal{F}(M)$ морсовских функций на поверхности M казалось задачей очень трудной, ибо это пространство бесконечномерно. Однако автору удалось придумать некий конечномерный геометрический объект с понятной структурой и доказать его гомотопическую эквивалентность пространству $\mathcal{F}(M)$, снабженному C^∞-топологией.

Теорема (3.1.2, [6, 7, 8]). *Пусть* M *— связная замкнутая ориентируемая поверхность с разбиением края* $\partial M = \partial^+ M \sqcup \partial^- M$ *на* d^+ *положительных и* d^- *отрицательных граничных окружностей,*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p,q,r;\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r};p^*,q^*,r^*}(M, \partial^+ M, \partial^- M)$$

— пространство функций Морса на M, *имеющих* p, q, r *критических точек локальных минимумов, седловых точек и точек локальных максимумов, в том числе* $\widehat{p}, \widehat{q}, \widehat{r}$ *пронумерованных критических точек, включая* p^*, q^*, r^* *закрепленных точек соответственно. Пусть* $\mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}$ *— множество функций, чьи локальные экстремумы равны* ± 1. *Пусть* $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}$ *— соответствующие пространства оснащенных функций Морса* (определение 3.2.2). *Предположим, что количество пронумерованных критических точек* $\widehat{p} + \widehat{q} + \widehat{r} > \chi(M)$. *Тогда:*

(A) *Существует косой цилиндрически-полиэдральный комплекс*

$$\widetilde{\mathbb{K}} = \widetilde{\mathbb{K}}_{p+d^-,q,r+d^+;\widehat{p}+d^-,\widehat{q},\widehat{r}+d^+;p^*+d^-,q^*,r^*+d^+}, \qquad \dim \widetilde{\mathbb{K}} = \begin{cases} 3q-2, & q \geq 2, \\ 0, & q = 1 \end{cases}$$

ранга $q-1$ *(называемый* комплексом оснащенных функций Морса*), косые цилиндрические ручки которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами топологической эквивалентности* $[f]_{\rm top}$ *функций Морса* $f \in \mathcal{F}^1$. *Индекс ручки* $\mathbb{D}_{[f]_{\rm top}} \subset \widetilde{\mathbb{K}}$, *отвечающей классу* $[f]_{\rm top} \subset \mathcal{F}^1$, *равен* $q-s(f)$, *где* $s(f)$ *— количество седловых значений функции* f. *Подошва* $\partial\mathbb{D}_{[f]_{\rm top}}$ *ручки* $\mathbb{D}_{[f]_{\rm top}}$ *содержится в объединении ручек* $\mathbb{D}_{[g]_{\rm top}}$, *таких что* $[f]_{\rm top} \prec [g]_{\rm top}$.

(B) *Группа классов отображений* $\mathscr{D}^\pm/\mathscr{D}^0$ *поверхности* M *с* $p^*+q^*+r^*$ *проколами кокомпактно действует на* $\widetilde{\mathbb{K}}$ *автоморфизмами косого цилиндрически-полиэдрального комплекса, причем индуцированное действие на множестве ручек согласовано с естественным действием на множестве* $\mathcal{F}^1/\sim_{\rm top}$ *классов топологической эквивалентности функций. В частности, для любого класса топологической эквивалентности* $[f]_{\rm top}$ *все ручки* $\mathbb{D}_{[fh]_{\rm top}}$, $h \in \mathscr{D}^\pm$, *гомеоморфны одной и той же стандартной косой цилиндрической ручке:*

$$\mathbb{D}_{[fh]_{\rm top}} \approx \left(D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]}\right)/\Gamma_{[f]} = \left(D_{[f]} \times \mathbb{R}^{c([f])} \times (S^1)^{d([f])} \times P_{[f]}\right)/\Gamma_{[f]} \sim (S^1)^{d([f])}/\Gamma_{[f]},$$

где $[f]$ *— класс эквивалентности функции* $f \in \mathcal{F}^1$, $D_{[f]}$ *и* $P_{[f]}$ *— выпуклые многогранники,* $\dim D_{[f]} = q-s(f)$, $\mathbb{S}_{[f]}$ *— стандартный утолщенный цилиндр,* $\Gamma_{[f]}$ *— конечная группа, действующая свободно на* $D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]}$, *причем эта группа действует на инвариантном торе* $(S^1)^{d([f])} \subseteq \mathbb{S}_{[f]} \subseteq D_{[f]} \times \mathbb{S}_{[f]}$ *композициями сдвигов и перестановок сомножителей* S^1 *в произведении* $(S^1)^{d([f])}$.

(C) *Существуют гомотопические эквивалентности*

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{F}^1 \sim \mathbb{F} \sim \mathbb{F}^1 \sim R_{\mathscr{D}^0} \times \widetilde{\mathbb{K}},$$

$$[f]_{\rm top} \sim \mathrm{Forg}_1^{-1}([f]_{\rm top}) \sim R_{\mathscr{D}^0} \times \mathbb{D}_{[f]_{\rm top}} \sim R_{\mathscr{D}^0} \times \left((S^1)^{d([f])}/\Gamma_{[f]}\right), \qquad f \in \mathcal{F}^1,$$

где $\mathrm{Forg}_1\colon \mathbb{F}^1 \to \mathcal{F}^1$ *— забывающее отображение,* $R_{\mathscr{D}^0}$ *– одно из многообразий* $\mathbb{R}P^3$, S^1, $S^1 \times S^1$ *и точка* (*см.* (3.2)), $\mathbb{D}_{[f]_{\rm top}}$ *— соответствующая ручка.*

(D) $\beta_j(\mathcal{F}) = 0$ *при любом* $j \geq 3q+2$; $\beta_j(\widetilde{\mathbb{K}}) = 0$ *при любом* $j \geq 3q-1$. *Пусть* $\bar{M} = S^2$ (обозначение 3.1.4) *и* $p^*+q^*+r^* \leq \chi(M)+1 \leq \widehat{p}+\widehat{q}+\widehat{r}$. *Тогда полиэдр* $\widetilde{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$ *компактен, связен и является конечным косым торически-полиэдральным комплексом; полином Пуанкаре полиэдра* $\mathbb{K}$ *имеет вид*

$$P(\mathbb{K};t) = \sum_{[f]\in\mathcal{F}^1/\sim} t^{q-s(f)} P(\mathbb{D}_{[f]};t) - (1+t)R_1(t) = \sum_{[f]\in\mathcal{F}^1/\sim} t^{q-s(f)}(1+t)^{d([f])} - (1+t)R(t)$$

для некоторых многочленов $R_1(t)$ *и* $R_2(t)$ *с целыми неотрицательными коэффициентами,* $R(t) = R_1(t)+R_2(t)$; $\chi(\mathbb{K}) = (-1)^{q-1}\#\left\{[f] \in \mathcal{F}^1/\sim \;|\; s(f)=1\right\}$.

В **главе 4** изучается следующий вопрос. Существуют ли *продолжимые траекторные инварианты* на заданном страте Максвелла в пространстве $\mathbf{I}\mathcal{B}^{\mathrm{nondeg}}(Q)$ невырожденных интегрируемых несжимаемых течений на компактном 3-мерном многообразии Q (т.е. инварианты Болсинова-Фоменко на пространстве систем на соответствующем 3-атоме, которые можно непрерывно продолжить в некоторую окрестность данного страта до инварианта траекторной эквивалентности)?

Пусть $\mathbf{H}(M)$ — пространство гамильтоновых систем на поверхности M, функции Гамильтона которых являются функциями Морса $F_1 \in \mathcal{F}^{\mathrm{num,fr}}(M)$ с оснащенно-нумерованными критическими точками (см. (4.10) и определение 2.2.2 (B)). Пусть $F \in \mathcal{F}^{\mathrm{num,fr}}(P)$ — функция Морса с ровно одним критическим значением $c \in \mathbb{R}$ на компактной поверхности P с краем, $K = F^{-1}(c)$. Пусть $\mathbf{H}(F) = \mathbf{H}(P, K) \subseteq \mathbf{H}(P)$ — пространство систем, функции Гамильтона которых топологически послойно эквивалентны функции F (определения 2.2.4 (C) и 4.1.18). Пусть n — число критических точек функции F и

$$\begin{aligned} \Lambda: \ & \mathbf{H}(F) \to C^0(K;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n, \quad && v \mapsto \Lambda(v) = (\Lambda_1(v), \dots, \Lambda_n(v)), \\ [m]: \ & \mathbf{H}(F) \to H^1(K;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1}, && v \mapsto [m(v)], \end{aligned}$$

— грубые Λ- и m-инварианты Болсинова-Фоменко (определение 4.2.9) симплектической сопряженности гамильтоновых систем $v \in \mathbf{H}(F)$ на данном атоме.

Теорема (4.1.2, [9, 12])**.** *Предположим, что род поверхности P положителен, а топологическая пара (P, K) имеет максимальную и абелеву дискретную группу симметрий, т.е. принадлежит серии $\mathcal{V}$ (определения* 4.5.11, 4.5.12 *и теорема* 4.5.13*), т.е. является вполне бициклическим атомом (см. теорему* 4.5.15*). Пусть $O_1, \dots, O_\nu$ — атомные окружности атома (P, K), т.е. регулярные погруженные замкнутые кривые в графе $K \subset P$, с произвольно фиксированной ориентацией. Тогда:*

(A) *Если пара гамильтоновых систем $v_1, v_2 \in \mathbf{H}(F)$ на этом атоме удовлетворяет условиям $\Lambda_j(v_1) : \Lambda_{j'}(v_1) \neq \Lambda_j(v_2) : \Lambda_{j'}(v_2)$ для любых $j \neq j'$ и $B(v_1) \neq B(v_2)$ для любого функционала $B = B(v)$ вида $B(v) = \langle [m(v)], [O_1] \pm \dots \pm [O_\nu] \rangle$ (для всевозможных знаков в сумме), то системы v_1 и v_2 устойчиво C^0-несопряжены (определение* 4.1.19*), т.е. они изначально не были C^0-сопряжены, и остаются C^0-несопряженными (в любых инвариантных связных окрестностях множеств критических точек гамильтонианов) при любых C^r-малых возмущениях этих систем, где $r \geq 5$.*

(B) *Пары $(v_1, v_2) \in \mathbf{H}(F) \times \mathbf{H}(F)$ устойчиво C^0-несопряженных гамильтоновых систем на этом атоме образуют множество полной меры в пространстве $\mathbf{H}(F) \times \mathbf{H}(F)$ (см. комментарий* 4.5.3*).*

Отметим, что обнаруженный нами относительно-продолжимый m-инвариант $B = B(v)$ на страте $\mathbf{H}(F)$ имеет простой геометрический смысл: его значение на любой системе $v \in \mathbf{H}(F)$ равно сумме $B(v) = A_1(v) + \ldots + A_\nu(v)$ главных значений $A_i(v) = \langle [m(v)], [O_i] \rangle$ (определение 4.3.7) периода системы v на атомных окружностях O_i данного атома, взятых с подходящими ориентациями.

В **главе 5** изучаются $\mathscr{D}^0(Q)$–инвариантные функционалы (т.е. топологические инварианты) на пространстве $\mathcal{B}^{\mathrm{exact}}(Q)$ точных несжимаемых течений без нулей на компактном 3-мерном многообразии Q. Хорошо известен инвариант Хопфа — функционал спиральности, где спиральность несжимаемого течения равна усредненному коэффициенту зацепления интегральных траекторий[46]. Казалось вполне правдоподобным, что могут существовать и другие (не сводящиеся к спиральности) инварианты на пространстве $\mathcal{B}^{\mathrm{exact}}(Q)$, которые бы отвечали каким-либо инвариантам узлов, отличным от коэффициента зацепления.

Теорема (5.1.1 (B), [11])**.** *Пусть Q — компактное гладкое 3-мерное многообразие, и $\varkappa^\perp \subseteq H_1(\partial Q; \mathbb{Q})$ — такое подпространство, что $H_1(\partial Q; \mathbb{Q}) = \varkappa^\perp \oplus \ker (j_{\partial Q})_*$ и $\varkappa^\perp$ является хорошим* (определение 5.3.1 (B))*. Пусть функционал $I : \mathcal{B}^{\mathrm{exact}}(Q) \to \mathbb{R}$ на пространстве $\mathcal{B}^{\mathrm{exact}}(Q)$ всех точных несжимаемых течений без нулей на Q является $\mathscr{D}^0(Q)$–инвариантным, дифференцируем (по отношению к $\mathcal{A}_{\varkappa^\perp}$-калибровке) на C^1–открытом подмножестве $U \subseteq \mathcal{B}^{\mathrm{exact}}(Q)$ и имеет регулярную и непрерывную относительно C^1–топологии производную на U.*

Тогда C^1-локально на $U \setminus \{\mathcal{H}_{\varkappa^\perp} = 0\}$ функционал I выражается через функционал спиральности $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}$. Более точно, функционал I выражается через функционал $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}$ на любом подмножестве $U' \subseteq U \setminus \{\mathcal{H}_{\varkappa^\perp} = 0\}$ таком, что для любой пары $B_0, B_1 \in U'$ со свойством $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}(B_0) = \mathcal{H}_{\varkappa^\perp}(B_1) =: c$ выполнено $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}((1-t)B_0 + tB_1) \neq 0$ и $\sqrt{c/\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}((1-t)B_0 + tB_1)}((1-t)B_0 + tB_1) \in U$ при всех $t \in [0,1]$, т.е. $I|_{U'} = h \circ \mathcal{H}_{\varkappa^\perp}|_{U'}$ для некоторой функции $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Если при этом $Q = M \times S^1$ и U состоит из всех точных 2–форм без нулей на Q, которые обладают сечением, изотопным поверхности $M \times \{0\}$ (т.е. имеют вид $\psi^* B$, где $\psi \in \mathscr{D}^0(Q)$, $B \in \mathcal{B}^{\mathrm{exact}}(Q)$ и $B|_{M \times \{0\}}$ задает положительную ориентацию), то функционал $I|_U$ выражается через функционал спиральности, т.е. $I|_U = h \circ \mathcal{H}_{\varkappa^\perp}|_U$ для некоторой функции $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Заключение

Диссертация вносит фундаментальный вклад в изучение топологии пространств гладких функций с заданными особенностями на поверхностях, а также топологических инвариантов 3-мерных несжимаемых течений и топологических инвариантов интегрируемых систем с 1 и 2 степенями свободы. В ней разрабатываются новые методы изучения глобального строения пространств морсовских функций и гамильтоновых систем на компактных поверхностях. Эти методы применяются для изучения топологии этих пространств, структуры разбиения пространств функций на классы топологической эквивалентности и структуры разбиения пространств гамильтоновых систем на классы C^0-сопряженности, а также для исследования непрерывных топологических инвариантов на пространствах (интегрируемых или произвольных) 3-мерных несжимаемых течений и гамильтоновых систем с 2 степенями свободы.

В качестве перспектив дальнейшей разработки темы диссертации (в части топологии пространств функций Морса на поверхностях) можно предложить дальнейшее изучение топологии и стратификации пространств гладких функций с заданными локальными особенностями на более общих многообразиях. Перспективы исследования топологических инвариантов бездивергентных полей состоят в дальнейшем изучении дифференцируемых топологических инвариантов при рассмотрении более широкого понятия дифференцируемости, а в интегрируемом случае — в получении эффективных условий существования относительно-продолжимых траекторных инвариантов на данном страте Максвелла.

Благодарности

Автор выражает благодарность академику РАН А.Т. Фоменко, д.ф.-м.н. А.В. Болсинову, Dr.Ph.D. G. Hornig, д.ф.-м.н. А.С. Мищенко и академику РАН $\boxed{\text{В.И. Арнольду}}$ за постановку вопросов и полезные обсуждения, Dr.Habil. $\boxed{\text{H. Zieschang}}$, Д.М. Афанасьеву, Д.А. Пермякову, М. Басмановой, к.ф.-м.н. Ю.А. Браилову, к.ф.-м.н. Е.Л. Лакштанову, к.ф.-м.н. Ю.М. Бурману, д.ф.-м.н. А.А. Ошемкову, члену-корреспонденту НАН Украины $\boxed{\text{В.В. Шарко}}$, д.ф.-м.н. А.В. Чернавскому, д.ф.-м.н. $\boxed{\text{Ю.П. Соловьеву}}$, д.ф.-м.н. П.М. Ахметьеву, к.ф.-м.н. С.А. Мелихову, д.ф.-м.н. С.М. Натанзону, д.ф.-м.н. О.В. Шварцману и д.ф.-м.н. О.К. Шейнману за полезные обсуждения, а также Dr.Ph.D. М.Л. Концевичу, Dr.Ph.D. Л.В. Полтеровичу, Dr.Ph.D. D. Peralta-Salas и члену-корреспонденту РАН С.Ю. Немировскому за ценные замечания. Автор благодарен всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за дружескую творческую атмосферу, способствующую успешной работе.

Публикации автора по теме диссертации в т.ч. статьи в журналах из перечня ВАК [1]—[11]

[1] Е.А. Кудрявцева. Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты // Матем. Сб. **190** (1999), No. 3, 29–88.

[2] E.A. Kudryavtseva. Reduction of Morse functions on surfaces to canonical form by smooth deformation // Regul. Chaotic Dyn. **4**:3 (1999), 53–60.

[3] E.A. Kudryavtseva. Canonical form of Reeb graph for Morse functions on surfaces. Inversion of 2-sphere in 3-space // Int. J. Shape Modeling **5**:1 (1999), 69–80.

[4] E.A. Kudryavtseva. Uniform Morse lemma and isotope Morse functions on surfaces // Moscow Univ. Math. Bull. **64**:4 (2009), 150–158.

[5] E.A. Kudryavtseva. Connected components of spaces of Morse functions with fixed critical points // Moscow Univ. Math. Bull. **67**:1 (2012), 1–10.

[6] Е.А. Кудрявцева. О гомотопическом типе пространств функций Морса на поверхностях // Матем. сб. **204**:1 (2013), 79–118.

[7] Е.А. Кудрявцева. Топология пространств функций Морса на поверхностях // Матем. заметки **92**:2 (2012), 241–261.

[8] E.A. Kudryavtseva. Special framed Morse functions on surfaces // Moscow Univ. Math. Bull. **67**:4 (2012), 151–157.

[9] Е.А. Кудрявцева. Устойчивые инварианты сопряженности гамильтоновых систем на двумерных поверхностях // Докл. Акад. Наук **361**:3 (1998), 314–317.

[10] Е.А. Кудрявцева. Об инвариантах сопряженности на группе сохраняющих площади диффеоморфизмов круга // Матем. заметки **95**:6 (2014), 951–954.

[11] Е.А. Кудрявцева. Спиральность — единственный инвариант несжимаемых течений с непрерывной в C^1-топологии производной // Матем. заметки **99**:4 (2016), 626–630.

[12] Е.А. Кудрявцева. Устойчивые топологические и гладкие инварианты сопряженности гамильтоновых систем на поверхностях // В кн.: Топологические методы в теории гамильтоновых систем / Под ред. А.Т. Фоменко и А.В. Болсинова. М.: Факториал, 1998. 147–202.

Прочие публикации автора

[13] E.A. Kudryavtseva. The topology of spaces of functions with prescribed singularities on surfaces // Proc. Int. Conf. “XVII Geometrical Seminar” (Zlatibor, Sept. 3–8, 2012). Beograd: Matematički fakultet. 2012. 45–47.

[14] E.A. Kudryavtseva. Topology and stratification of spaces of functions with prescribed singularities on surfaces // Proc. Int. Conf. “Analysis and singularities” (Moscow, Dec. 17–21, 2012). Moscow: Steklov Math. Inst. RAS. 2012. 141–143.

[15] E. Kudryavtseva. Topological invariants of ideal magnetic fields are functions in helicity or have no derivative with C^1-continuous density // Proc. Int. Conf. “Knots and links in fluid flows: from helicity to knot energy” (Moscow, April 27–30, 2015). Moscow: IUM Publications, 2015, 9–10.

[16] Е.А. Кудрявцева, Д.А. Пермяков. Оснащенные функции Морса на поверхностях // Матем. Сб. **201**:4 (2010), 501–567.

[17] Е.А. Кудрявцева. Топология пространств функций с заданными особенностями на поверхностях // Докл. Акад. Наук **468**:1 (2016), 139–142.

[18] Yu.A. Brailov, E.A. Kudryavtseva. Stable topological nonconjugacy of Hamiltonian systems on two-dimensional surfaces // Moscow Univ. Math. Bull. **54**:2 (1999), 20–27.

[19] Е.А. Кудрявцева, И.М. Никонов, А.Т. Фоменко. Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия // Матем. сб. **199**:9 (2008), 3–96.

[20] Е.А. Кудрявцева, И.М. Никонов, А.Т. Фоменко. Симметричные и неприводимые абстрактные многогранники // Соврем. Пробл. Матем. Механ., **III**, No. 2, 2009, 58–97.

[21] Е.А. Кудрявцева, А.Т. Фоменко. Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях // Докл. Акад. Наук, **446**:6 (2012), 615–617.

[22] A.T. Fomenko, E.A. Kudryavtseva. Each finite group is a symmetry group of some map (an “atom”–bifurcation) // Moscow Univ. Math. Bull. **68**:3 (2013), 148–155.

[23] E.A. Kudryavtseva, E.L. Lakshtanov. Classification of singularities and bifurcations of critical points of even functions // Topological Methods in the Theory of Integrable Systems, eds. A.V. Bolsinov, A.T. Fomenko, A.A. Oshemkov, Cambridge Sci. Publ., Cambridge, 2006, 173–214.