«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по научной работе ФГАОУ ВО
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет
имени Н.И. Лобачевского»,
д.ф.-м.н., доцент В.Б. Казанцев

«28» 09 2016 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского»
о диссертационной работе Кудрявцевой Елены Александровны
«Топология пространств функций Морса и инварианты бездивергентных полей»,
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология

Диссертационная работа Е.А. Кудрявцевой посвящена изучению топологии пространств гладких функций на многообразиях и топологических инвариантов консервативных динамических систем.

Тема исследования актуальна и соответствует следующим пунктам паспорта специальности 01.01.04 - геометрия и топология: п.3 – Дифференциальная геометрия и её приложения, п.8 – Топология гладких многообразий и п.11 – Теория пространств отображений и пространств модулей различных геометрических структур.

Содержание диссертации и научная новизна ее результатов

Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы из 151 наименования, включающего в себя список публикаций автора по теме диссертации. Работа изложена на 341 странице и снабжена 38 рисунками.

Во введении описывается актуальность темы и история рассматриваемых вопросов, обосновывается научная новизна полученных результатов, сформулированы основные результаты диссертации.

Глава 1 посвящена вопросу о реализуемости данной гладкой функции на замкнутой связной поверхности в виде функции высоты при каком-либо погружении этой поверхности в 3-мерное евклидово пространство. Проблема решена для произвольной (необязательно морсовской) гладкой функция f с конечным числом критических точек. Критерий сформулирован в виде условия на индексы критических точек функции f. Описаны связные компоненты пространства всех погружений поверхности в $\mathbb{R}^3$, реализующих такую функцию f в виде функции высоты. Получено новое доказательство хорошо известного факта о том, что пространство всех гладких погружений сферы S^2 в $\mathbb{R}^3$ линейно связно; в частности, получено новое и простое доказательство известного парадокса Смейла, что двумерную сферу можно «вывернуть наизнанку» в $\mathbb{R}^3$. Это выворачивание описывается последовательностью графов Кронрода–Риба с метками ± 1 в вершинах и элементарных перестроек этих графов.

Глава 2 имеет вспомогательный характер. В ней изучаются проблема классификации морсовских функций на компактных многообразиях по отношению к разным типам (топологической) эквивалентности, а также условия изотопности двух таких функций. В частности, получен критерий топологической эквивалентности функций Морса на произвольной компактной поверхности, доказана бесконечность количества связных компонент любого пространства функций Морса на компактной связной поверхности с закрепленными критическими точками, если число седел положительно.

Глава 3 посвящена описанию топологической структуры пространств морсовских функций на двумерных компактных многообразиях. Как известно, пространство $F(M)$ морсовских функций на замкнутой поверхности M, снабженное C^∞-топологией, бесконечномерно. Поэтому задача является очень трудной. Тем не менее диссертанту удалось придумать конечномерный геометрический объект с понятной структурой и доказать его гомотопическую эквивалентность пространству $F(M)$ при условии, что поверхность M ориентируема, у функций из пространства $F(M)$ фиксировано количество критических точек и не менее чем $\chi(M) + 1$ критических точек помечены разными метками (пронумерованы). Если говорить более подробно, то построены косой цилиндрически-полиэдральный комплекс $\widetilde{\mathbb{K}}$ и стратифицированное многообразие $\widetilde{\mathcal{M}}$ (универсальное пространство модулей оснащенных функций Морса), ассоциированные с пространством $F(M)$. Доказано, что данное пространство $F(M)$ морсовских функций гомотопически эквивалентно прямым произведениям $R \times \widetilde{\mathbb{K}} \sim R \times \widetilde{\mathcal{M}}$, где R — точка, двумерный тор или $SO(3)$ в зависимости от знака эйлеровой характеристики поверхности M. Доказано, что классы топологической эквивалентности функций из пространства $F(M)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии со стратами многообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$ и гомотопически эквивалентны соответствующим стратам. Получены верхние оценки для гомологической размерности пространства $F(M)$; а также для чисел Бетти пространства $F(S^2)$ морсовских функций на сфере.

В главе 4 исследуется проблема существования непрерывных инвариантов C^0-сопряженности на пространстве $H(P)$ невырожденных гамильтоновых систем на компактной ориентированной поверхности P. Более точно, изучается следующий вопрос: существуют ли продолжимые инварианты C^0-сопряженности на том или ином страте Максвелла в пространстве $H(P)$, т.е. инварианты Болсинова-Фоменко на пространстве систем на соответствующем 2-мерном атоме, которые можно непрерывно продолжить в некоторую окрестность данного страта Максвелла до инварианта C^0-сопряженности? Изучаются также аналогичные вопросы о существовании относительно-продолжимых инвариантов по отношению к фиксированному классу простых возмущенных систем на атоме. Как показано в главе, эти вопросы тесно связаны с аналогичными вопросами о существовании продолжимых и относительно-продолжимых траекторных инвариантов на пространстве невырожденных интегрируемых несжимаемых течений на компактном 3-мерном многообразии $Q = P \times S^1$. В главе показано, что ответ существенно зависит от рода поверхности P. Так, если род поверхности равен нулю, то не существует продолжимых инвариантов на соответствующем страте Максвелла. Более того, для любой пары невозмущенных гамильтоновых систем на заданном страте Максвелла и для любого класса простых возмущений, существует пара C^0-сопряженных возмущенных систем, принадлежащих данному классу возмущений. С другой стороны, в главе введены бесконечная серия (неплоских) бициклических 2-атомов и ее бесконечная подсерия вполне бициклических 2-атомов. Обнаружены относительно-продолжимые инварианты гамильтоновых систем на бициклических атомах (точнее, на отвечающих им стратах Максвелла) по отношению к соответствующим открытым классам бициклических возмущений. Получены эффективные достаточные условия устойчивой (соответственно относительно-устойчивой) C^0-несопряженности пары гамильтоновых систем на вполне бициклическом атоме (соответственно на бициклическом атоме по отношению к классу бициклических возмущений); этим условиям удовлетворяют почти все пары систем на атоме.

В главе 5 изучаются топологические инварианты на пространстве $B(Q)$ точных (необязательно интегрируемых) бездивергентных векторных полей без нулей на компактном 3-мерном многообразии Q. В главе доказано, что любой топологический инвариант бездивергентных полей, имеющий регулярную и непрерывную относительно C^1-топологии производную, локально (а в некоторых случаях и глобально) на $B(Q)$ выражается через известный функционал спиральности, где спиральность бездивергентного поля равна усредненному коэффициенту зацепления интегральных траекторий.

В заключении подведены итоги диссертационной работы: перечислены основные результаты, полученные в диссертации, а также приведен список нерешенных проблем, возникших в процессе работы.

Значимость результатов для науки

В качестве наиболее важных отметим следующие научные результаты диссертации: решена проблема реализуемости гладкой функции на компактной поверхности в виде функции высоты при погружении этой поверхности в 3-мерное евклидово пространство, решена проблема гомотопического типа пространств морсовских функций на компактной поверхности, решена проблема существования непрерывных траекторных инвариантов 3-мерных интегрируемых бездивергентных полей, решена проблема классификации дифференцируемых топологических инвариантов 3-мерных точных бездивергентных полей. Совокупность этих результатов можно квалифицировать как крупное научное достижение в области топологии и топологических инвариантов динамических систем.

Методы и результаты диссертации могут быть использованы для решения задач теории погружений, теории особенностей, маломерной топологии и геометрической топологии, математической физики, теории интегрируемых гамильтоновых систем и теории несжимаемых течений. Результаты работы могут быть использованы в фундаментальных и прикладных исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В. Ломоносова, Математическом институте имени В.А. Стеклова, Московском энергетическом институте, Воронежском государственном университете, в Нижегородском государственном университете и других.

Общая оценка диссертационной работы

Представленная диссертация является самостоятельно выполненной, законченной научно-исследовательской работой, посвященной исследованию актуальных проблем в области топологии и ее приложений. Работа логично построена, содержит обширный тщательно проработанный список литературы и ряд важных примеров, иллюстрирующих как полученные результаты, так и возможность их дальнейшего расширения. Структура и содержание работы соответствуют поставленным целям и задачам исследования. Полученные результаты являются новыми и вносят важный вклад в развитие современной топологии и теории топологических инвариантов динамических систем, все они снабжены полными и строгими математическими доказательствами.

Основные результаты диссертации опубликованы в 12 научных статьях, написанных автором самостоятельно, из которых 11 — статьи из журналов перечня ВАК. Результаты также доложены на различных международных конференциях и научных семинарах. Автореферат написан четко и информативно, полностью и точно отражает содержание диссертации.

Содержание и результаты диссертации так же, как и ее тема, соответствуют паспорту специальности 01.01.04 — геометрия и топология.

По диссертационной работе Е.А. Кудрявцевой можно сделать следующие замечания:

1. На стр 32 написано: «... в случае замкнутой поверхности рода g пространство всех ее погружений в $\mathbb{R}^3$ не является связным, а состоит из 2^{2g} связных компонент в ориентируемом случае, и из 2^{μ} компонент в неориентируемом случае». Здесь число μ должно либо совпадать с g, либо определено как род неориентируемой поверхности.

2. В теореме 3.1.2 на стр. 122 многообразие M имеет край, но называется замкнутым.

3. В доказательстве предложения 3.3.17 на стр. 183 короткая точная последовательность модулей не дописана до конца, а в треугольной диаграмме пропущены индексы.

4. В примере 3.6.2 на стр. 211 и 212 речь идет о функциях Морса на торе. Но в п. (B) упоминаются $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}^0(S^2)$-орбиты. По-видимому, здесь S^2 появилось вместо $T^2 = (S^1)^2$.

Отмеченные недостатки носят редакционных характер и не влияют на научную ценность данной работы и её положительную оценку.

Все изложенное позволяет сделать вывод, что диссертация представляет собой завершенную научно-квалификационную работу на актуальную тему, полностью отвечает требованиям пп. 9, 10, 11, 13, 14 «Положения о порядке присуждения учёных степеней» ВАК Минобрнауки РФ от 24.09.2013 г. № 842, предъявляемым ВАК к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор, Кудрявцева Елена Александровна, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология.

Отзыв подготовлен Яковлевым Евгением Ивановичем, профессором кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий математики и механики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского», доктором физико-математических наук (специальность 01.01.04 — геометрия и топология).

Отзыв обсужден и единогласно принят на заседании кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики ННГУ (протокол №2 от 26.09.2016).

И.О. Зав. кафедрой алгебры, геометрии
и дискретной математики
ННГУ имени Н.И. Лобачевского
д.ф.-м.н., профессор М.И. Кузнецов

Контактные данные:
Кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий математики и механики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского»
Почтовый адрес:
Россия, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д.23, корпус VI, к.406.
Тел.: (831) 462-33-20, (831) 462-33-61.
Адреса электронной почты: agdm@itmm.unn.ru, director@itmm.unn.ru