ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации Кудрявцевой Елены Александровны

«Топология пространств функций Морса и
инварианты бездивергентных полей»,

представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.04 — геометрия и топология

Пространства гладких функций на данном многообразии принадлежат к числу объектов, привлекших в последние десятилетия наиболее пристальное внимание математического сообщества. Различные реинкарнации этих пространств, среди которых пространства узлов и зацеплений, пространства Гурвица рациональных функций на комплексных кривых заданного рода, пространства псевдоголоморфных кривых, имеют многочисленные глубокие приложения в алгебраической геометрии и математической физике.

Пространства функций наделены естественной топологией (в случае гладких вещественнозначных функций речь обычно идет о топологии Уитни). Наиболее интересными топологическими вопросами оказываются вопросы о структуре той части в пространствах функций, которые соответствуют функциям общего положения. Так, при изучении узлов нас интересуют в первую очередь гладкие *вложения* окружности в трехмерные многообразия, и мы ищем способы их различения. Неожиданным образом оказывается, что одним из наиболее эффективных методов изучения отображений общего положения оказывается выражение их свойств через свойства дополнения к множеству этих объектов – дискриминанта в пространстве отображений. Дискриминант состоит из отображений, имеющих некоторые вырождения. В случае вещественнозначных отображений вещественных многообразий – а именно об этом случае и идет речь в диссертации – дискриминант отделяет друг от друга открытые области, состоящие из отображений общего положения.

Дискриминант в пространстве отображений допускает стратификацию – он разбит на страты различной (ко)размерности; каждый страт состоит из отображений, имеющих определенный набор вырождений. В целом ряде важных ситуаций совокупность вырождений, определяющих страт, допускает комбинаторное описание. Как следствие, топология пространства отображений общего положения получает описание в комбинаторных терминах.

Центральная часть диссертации посвящена получению такого описания в важном случае гладких функций на двумерных многообразиях. Общее положение в пространствах таких функций имеют функции Морса – гладкие функции с конечным числом особых точек (т.е. точек, в которых дифференциал функции обращается в 0), причем особые точки невырождены (имеют невырожденный гессиан). В свою очередь, в пространствах функций Морса общее положение имеют *простые* функции Морса – функции Морса, принимающие попарно различные значения в своих особых точках. Каждая (простая) функция Морса при достаточно малой деформации остается (простой) функцией Морса. С другой стороны, пространство функций Морса на многообразии содержит также функции, не являющиеся простыми, – функции, принимающие совпадающие значения в различных особых точках. Эти функции и образуют дискриминант в пространстве функций Морса, стратификацию которого описывает соискатель.

Основной результат диссертации в этом направлении изложен в главе 3. Он состоит в построении конечномерного косого цилиндрически-полиэдрального комплекса, прямое произведение которого на группу изотопных тождественному диффеоморфизмов поверхности гомотопически эквивалентно пространству функций Морса на данной двумерной компактной поверхности, имеющих предписанные количества особых точек индексов 0, 1 и 2. Результат в указанной формулировке получен при следующем техническом предположении: либо эйлерова характеристика e данной поверхности отрицательна, либо изучаемое пространство состоит не из функций Морса, а из «меченых функций Морса» – функций Морса, у которых отмечено и упорядочено некоторое подмножество множества особых точек, содержащее как минимум $e+1$ точек для каждой меченой функции. Указанная группа диффеоморфизмов поверхности, как известно, имеет гомотопический тип конечномерного многообразия (точки в случае поверхности отрицательной эйлеровой характеристики, окружности или двумерного тора или группы $SO(3)$ в остальных случаях). Понятие косого цилиндрически-полиэдрального комплекса также введено соискателем. Одно из ключевых свойств построенного комплекса состоит в его в некотором смысле минимальности – косые ручки, отвечающие «почти всем» стратам дискриминанта (точнее стратам, образованным функциями Морса, принимающими хотя бы два различных значения в своих седловых особых точках), нестягиваемы. Построение такого комплекса потребовало постановки большого количества классификационных вопросов для функций Морса и близких к ним по поведению функций. Получению ответов на эти вопросы посвящены глава 2 и значительная часть главы 3. При этом соискателю пришлось проводить гораздо более тонкий анализ вырождений, чем ее предшественникам. Необходимость вышеуказанного технического предположения продемонстрирована соискателем на примерах нескольких пространств функций Морса на двумерной сфере. В общем случае (без указанного технического предположения) аналогичный результат тоже получен соискателем (хотя не вынесен на защиту), но в чуть менее наглядной формулировке – в терминах некоторого конечномерного стратифицированного многообразия (вместо прямого произведения конечномерного косого цилиндрически-полиэдрального комплекса на группу диффеоморфизмов поверхности).

В главе 1 функции с конечным числом особых точек на двумерных поверхностях изучаются с точки зрения их реализуемости как функции высоты при погружении поверхности в трехмерное пространство. Соискатель приводит эффективный критерий реализуемости функции, основанный на анализе ее поведения в малых окрестностях (конечного) набора особых точек.

В главе 4 результаты второй и третьей глав применяются для построения *непрерывных* топологических инвариантов *интегрируемых* гамильтоновых систем на изоэнергетических трехмерных многообразиях и *интегрируемых* трехмерных несжимаемых течений.

Глава 5 посвящена изучению топологических инвариантов *произвольных* (т.е. необязательно интегрируемых) трехмерных несжимаемых течений. Соискателем показано, что любой «регулярный» (точнее, имеющий непрерывную относительно C^1-топологии производную) топологический инвариант сводится к известному инварианту спиральности, где спиральность несжимаемого течения совпадает (согласно результату В.И.Арнольда 1973 г.) с усредненным коэффициентом зацепления пар фазовых траекторий.

Оценивая диссертацию в целом, можно сказать, что в ней даны окончательные ответы на целый ряд важных вопросов топологической классификации функций на поверхностях и связанных с ними динамических систем, а также предложен ряд конструкций, открывающих подходы к дальнейшему изучению топологии пространств гладких функций.

Укажу на (крайне немногочисленные) обнаруженные мной недостатки диссертации – все они носят характер неточностей.

В первом абзаце на странице 10 утверждается, что Харер и Загье вычислили эйлерову характеристику пространства модулей гладких комплексных кривых данного рода g с s выколотыми точками. Это не вполне так – их формула дает значение виртуальной, или орбифолдной, эйлеровой характеристики, учитывающей симметрии кривых. (В частности, виртуальная эйлерова характеристика может не быть целым числом.)

На странице 11, строка 3 сверху утверждается, что Штребель построил каноническое клеточное разбиение пространства модулей комплексных кривых рода g с s отмеченными точками; однако, как справедливо говорится тремя строчками ниже, конструкция Штребеля задает клеточное разбиение произведения указанного пространства на положительный октант размерности s, а не разбиение самого пространства.

В Обозначениях 2.3.1 (Б) на стр. 75 говорится о графе $f^{-1}(C_{f,1})$, тогда как скорей всего речь должна идти о графе $f^{-1}(f(C_{f,1}))$.

На странице 79, 7-8 строки снизу утверждается, что, поскольку граф Кронрода-Риба является инвариантом послойной эквивалентности функций Морса, он различает послойно неэквивалентные функции Морса, тогда как для этого необходимо иметь полный инвариант.

На странице 81 матрица Гессе названа матрицей Гесса.

На странице 86, 14-я строка снизу упоминается гамильтониан, хотя нигде вблизи речь о гамильтонианах не идет. Там же утверждается, что количество отношений частичного полупорядка на множестве из n элементов не превосходит $4^{n(n-1)/2}$. Эта оценка, однако, не обоснована.

В начале параграфа 2.6 на странице 95 соискатель ссылается на результат С.В.Матвеева, доказавшего линейную связность пространства функций Морса с фиксированным числом локальных минимумов и локальных максимумов на двумерной поверхности. Стоящая при этом ссылка на работу соискателя вызывает некоторое недоумение – следовало бы сослаться на замечание 2.1.2 на странице 70 в параграфе 2.1, поясняющее, что С.В.Матвеев не публиковал свою оригинальную работу по этой теме, а лишь передал ее в виде рукописи А.Т.Фоменко и соискателю — в качестве решения вопроса, поставленного в 1997 году А.Т.Фоменко.

В некоторых частях диссертации сохранились признаки того, что она составлена из текстов статей. Так, например, в середине страницы 232 встречается фраза «Системы со ``звездочками'' будут рассмотрены нами в отдельной работе.»

Впрочем, все эти мелкие недостатки носят несущественный характер и не влияют на полученные в диссертации результаты. Текст диссертации написан чрезвычайно тщательно, математически строго и прозрачно.

Результаты диссертации могут быть интересны для математических факультетов университетов, таких как Высшая школа экономики, Новосибирский, Московский, Челябинский, Санкт-Петербургский, а также для математических институтов РАН. Все результаты диссертации своевременно опубликованы и доложены на многочисленных конференциях и семинарах. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Содержание диссертационной работы, ее научные положения и выводы являются достоверными, обоснованными и актуальными. Диссертация Е.А.Кудрявцевой «Топология пространств функций Морса и инварианты бездивергентных полей» является законченным исследованием. Она полностью соответствует п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней» и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология.

Кудрявцева Елена Александровна, несомненно, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

Профессор факультета математики НИУ ВШЭ,
д.ф.-м.н. **С. К. Ландо**

06 октября 2016 г.

Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики, факультет математики.
Почтовый адрес: Россия, 119048, Москва, ул. Усачева, д. 6, каб. 412.
Тел.: +7(495) 772-9590 доб. 12744.
E-mail: lando@hse.ru

Подпись С. К. Ландо заверяю

ВЕРНО
Факультет математики ВШЭ
Секретарь декана
(должность)
Е.А. Климентова
(ФИО)
«06» октября 2016 г.