

Решение диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», о приеме к защите диссертации Кудрявцевой Елены Александровны «Топология пространств функций Морса и инварианты бездивергентных полей» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология (физико-математические науки).

Диссертация Кудрявцевой Елены Александровны «Топология пространств функций Морса и инварианты бездивергентных полей» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология (физико-математические науки) поступила в совет 16 мая 2016 года и размещена на сайте <http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi>, <http://istina.msu.ru/dissertations/20806880/>.

Рассмотрев заявление Е.А. Кудрявцевой на имя председателя диссертационного совета Д.501.001.84 на базе ФГБОУ ВПО МГУ имени М.В.Ломоносова, д.ф.-м.н., профессора Чубарикова Владимира Николаевича, диссертационный совет 27 мая 2016 года протокол № 5(1к) назначил комиссию для подготовки заключения по диссертации в составе: д.ф.-м.н. профессор А.О. Иванов, д.ф.-м.н., профессор А.И. Шафаревич, д.ф.-м.н., профессор С.А. Богатый.

Соискателем были представлены следующие документы:

1. Заявление соискателя на имя председателя диссертационного совета Д.501.001.84 на базе ФГБОУ ВО МГУ имени М.В.Ломоносова, д.ф.-м.н., профессора Чубарикова Владимира Николаевича — 1 экз.
2. Анкета с фотокарточкой, заверенная в установленном порядке – 2 экз.
3. Заверенная в установленном порядке копия копия диплома кандидата наук – 2 экз.
4. Диссертация – 6 экз. (один экз. не переплетён).
5. Автореферат диссертации.
6. Заключение кафедры Дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» от 06 мая 2016 года протокол № 16-05/06 – 2 экз.
7. 4 маркированных почтовых карточки с указанием адреса соискателя и адреса диссертационного совета.

Заключение комиссии о диссертации

Представленная диссертация является самостоятельно выполненной научно-квалификационной работой, посвященной разработке новых методов изучения глобального строения пространств морсовских функций и гамильтоновых систем на компактных поверхностях, и применению этих методов для изучения топологии этих пространств, структуры разбиения пространств функций на классы топологической эквивалентности и структуры разбиения пространств гамильтоновых систем на классы C^0 -сопряженности, а также для исследования непрерывных топологических инвариантов на пространствах (интегрируемых или произвольных) 3-мерных несжимаемых течений и гамильтоновых систем с 2 степенями свободы. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Получен критерий того, когда гладкая функция с конечным числом критических точек на связной замкнутой поверхности реализуема в виде функции высоты при некотором погружении поверхности в 3-мерное евклидово пространство R^3 . Описано множество связных компонент пространства всех погружений поверхности в R^3 с данной функцией высоты. Доказано, что для любого погружения замкнутой поверхности в R^3 , имеющего морсовскую функцию высоты, любая гладкая деформация этой функции в пространстве морсовских функций реализуется в виде деформации функции высоты при некоторой гладкой деформации заданного погружения, причем пространство всех таких деформаций в пространстве погружений линейно связно. Получено новое доказательство известного «парадокса Смейла», что двумерную сферу можно «вывернуть наизнанку» в R^3 ;

2. Введено понятие косо цилиндрически-полиэдрального комплекса. Для пространства $F(M)$ функций Морса на компактной ориентируемой поверхности M , имеющих не менее $\chi(M)+1$ пронумерованных критических точек, описано построение косо цилиндрически-полиэдрального комплекса $K(M)$ («комплекса оснащенных функций Морса»), ассоциированного с пространством $F(M)$. Доказана гомотопическая эквивалентность данного пространства $F(M)$ функций Морса прямому произведению $R \times K(M)$, где R – одно из четырех многообразий: точка, окружность, двумерный тор и RP^3 . Получены верхние оценки для гомотопической размерности и чисел Бетти пространства $F(M)$. Доказана бесконечность количества связных компонент любого пространства функций Морса на компактной связной поверхности с закрепленными критическими точками, если число седел положительно;

3. Обнаружены относительно-продолжимые инварианты C^0 -сопряженности гамильтоновых систем на некоторых стратах Максвелла (называемых «бициклическими») в пространстве $N(P)$ невырожденных гамильтоновых систем на компактных связных поверхностях P , по отношению к некоторым примыкающим открытым стратам Максвелла (состоящим из «бициклических возмущений»). Бициклические страты Максвелла образуют бесконечную серию и состоят из гамильтоновых систем, гамильтонианы которых являются функциями Морса с ровно одним критическим значением, где род поверхности P не фиксирован. Получены эффективные достаточные условия относительно-устойчивой C^0 -несопряженности пары гамильтоновых систем из произвольного бициклического страта Максвелла по отношению к классу бициклических возмущений. Этим условиям удовлетворяют почти все пары систем из этого страта. Для бесконечной подсерии в серии бициклических стратов Максвелла (состоящей из «вполне бициклических» стратов Максвелла) получены эффективные достаточные условия устойчивой C^0 -несопряженности пары гамильтоновых систем из такого страта Максвелла. Этим условиям удовлетворяют почти все пары систем из такого страта;

4. Доказано, что любой инвариант сопряженности на универсальной накрывающей группы симплектоморфизмов круга, имеющий регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную, выражается через инвариант Калаби. Доказано, что любой $Diff^0(Q)$ -инвариантный функционал на пространстве $V(Q)$ точных несжимаемых течений без нулей на компактном связном ориентируемом 3-мерном многообразии Q , имеющий регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную, локально на $V(Q)$ (а в случае $Q = M \times S^1$ с непустой границей – глобально на множестве всех векторных полей из $V(Q)$, допускающих секущую поверхность, изотопную $M \times \{*\}$) выражается через функционал спиральности.

Методы исследования: в работе используются классические методы и результаты дифференциальной геометрии, алгебраической топологии, маломерной топологии, геометрической топологии, симплектической геометрии, качественной теории интегрируемых гамильтоновых систем и общих динамических систем. В частности, результаты диссертации опираются на результат С. J. Earle и J. Eells (мл.) о гомотопическом типе групп диффеоморфизмов компактных связных поверхностей, на результат С. Bonatti и S. Crovisier из консервативной динамики о топологической транзитивности C^1 -общих симплектоморфизмов компактной поверхности, а также на результат М. Bessa о топологической транзитивности C^1 -общих несжимаемых течений на компактных 3-мерных многообразиях. Также в диссертации используется и развивается метод «меченой молекулы» Болсинова-Фоменко, с помощью которого А. В. Болсинов и А. Т. Фоменко получили полную траекторную классификацию интегрируемых несжимаемых течений на 3-мерных многообразиях. Наряду с классическими методами используются метод оснащенных функций Морса, ориентированный на изучение топологии пространств морсовских функций и введенный Д. А. Пермяковым и диссертантом, а также новое понятие косых цилиндрически-полиэдральных комплексов, введенное диссертантом и обобщающее понятие косых цилиндрически-полиэдральных комплексов. Особую роль играет новый метод

комплексов функций Морса, разработанный диссертантом и состоящий в сведении изучения топологии бесконечномерных пространств морсовских функций к изучению конечномерного комбинаторного объекта – комплекса оснащенных функций Морса (по сути являющегося «комплексом морсовских клеточных комплексов»), т.е. к комбинаторным проблемам косых цилиндрически-полиэдральных комплексов; этот метод позволил получить информацию о гомологиях изучаемых пространств морсовских функций.

Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Все результаты изложены с полными математическими доказательствами.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах автора:

в изданиях, входящих в перечень ВАК:

1. Кудрявцева Е.А. Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты // Матем. Сб. — 1999. Т. 190. — № 3. — С. 29-88.
 2. Kudryavtseva E.A. Reduction of Morse functions on surfaces to canonical form by smooth deformation // Regul. Chaotic Dyn. — 1999. V. 4. — № 3. — P. 53-60.
 3. Kudryavtseva E.A. Canonical form of Reeb graph for Morse functions on surfaces. Inversion of 2-sphere in 3-space // International J. of Shape Modeling. — 1999. V. 5. — № 1. — P. 69-80.
 4. Кудрявцева Е.А. Равномерная лемма Морса и критерий изотопности функций Морса на поверхностях // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2009. — № 4. — С. 13-22. Transl. Kudryavtseva E.A. Uniform Morse lemma and isotope Morse functions on surfaces // Moscow Univ. Math. Bull. — 2009. V. 64. — № 4. — P. 150-158.
 5. Кудрявцева Е.А. Связные компоненты пространств функций Морса с фиксированными критическими точками // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2012. — № 1. — С. 3-12. Transl. Kudryavtseva E.A. Connected components of spaces of Morse functions with fixed critical points // Moscow Univ. Math. Bull. — 2012. V. 67. — № 1. — P. 1-10.
 6. Кудрявцева Е.А. О гомотопическом типе пространств функций Морса на поверхностях // Матем. Сб. — 2013. Т. 204. — № 1. — С. 79-118.
 7. Кудрявцева Е.А. Топология пространств функций Морса на поверхностях // Матем. заметки. — 2012. Т. 92. — № 2. — С. 241-261.
 8. Кудрявцева Е.А. Специальные оснащенные функции Морса на поверхностях // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2012. — № 4. — С. 14-20. Transl. Kudryavtseva E.A. Special framed Morse functions on surfaces // Moscow Univ. Math. Bull. — 2012. V. 67. — № 4. — P. 151-157.
 9. Кудрявцева Е.А. Устойчивые инварианты сопряженности гамильтоновых систем на двумерных поверхностях // Докл. Акад. Наук. — 1998. — Т. 361. — № 3. — С. 314-317.
 10. Кудрявцева Е.А. Об инвариантах сопряженности на группе сохраняющих площади диффеоморфизмов круга // Матем. заметки. — 2014. Т. 95. — № 6. — С. 951-954.
 11. Кудрявцева Е.А. Спиральность — единственный инвариант несжимаемых течений с непрерывной в C^1 -топологии производной // Матем. заметки. — 2016. Т. 99. — № 4. — С. 626-630.
- в прочих изданиях:
12. Кудрявцева Е.А. Устойчивые топологические и гладкие инварианты сопряженности гамильтоновых систем на поверхностях // В кн.: Топологические методы в теории гамильтоновых систем / Под ред. А.Т. Фоменко и А.В. Болсинова. — М.: Факториал. — 1998. — С. 147-202.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались автором на следующих международных конференциях:

1. Международная конференция «New Techniques in Topological Quantum Field Theory» в г. Калгари (Канада) в августе 2001 г.;
2. Международная конференция «Differential equations and related topics», посвященная Ивану Г. Петровскому, в г. Москве (Россия) в мае-июне 2011 г.;
3. Международная конференция «XVII Geometrical Seminar» в г. Златиборе (Сербия) с 3 по 8 сентября 2012 г.;
4. Международная конференция «Analysis and singularities», посвященная 75-летию Владимира Игоревича Арнольда, в г. Москве (Россия) с 17 по 21 декабря 2012 г.;
5. Международная конференция в честь Льва Семеновича Понтрягина в г. Москве (Россия) в сентябре 1998 г.;
6. Международная конференция «Braid Groups and their Applications» в международном научно-исследовательском центре «Banff International Research Station» в г. Банффе (Канада) в ноябре 2004 г.;
7. Международная топологическая конференция «Александровские Чтения – 2012» в г. Москве (Россия) в мае 2012 г.;
8. Международная конференция «Knots and links in fluid flows: from helicity to knot energy» в г. Москве (Россия) с 27 по 30 апреля 2015 г.;
9. Международная топологическая конференция «Александровские Чтения – 2016» в г. Москве (Россия) в мае 2016 г.

Также результаты неоднократно излагались на следующих научно-исследовательских семинарах механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»:

- научно-исследовательском семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений под руководством академика РАН А. Т. Фоменко (неоднократно в 1997, 2001, 2012, 2015, 2016 гг.);

- семинаре «Современные геометрические методы» кафедры дифференциальной геометрии и приложений под руководством академика РАН А. Т. Фоменко, профессора А. С. Мищенко, профессора А. В. Болсинова, профессора А. А. Ошемкова, доцента Е. А. Кудрявцевой, доцента И. М. Никонова, ассистента А. Ю. Коняева (неоднократно в 1997, 2001, 2012, 2015, 2016 гг.);

- семинаре по алгебраической топологии под руководством М. М. Постникова (в 1998 и 2012 гг.);

- семинаре под руководством академика РАН В. И. Арнольда (в 2007 г.);

и на следующих научно-исследовательских семинарах:

- семинаре по геометрической топологии под руководством члена-корреспондента РАН Е. В. Щепина (в 1998, 2011, 2012 гг.) в МИАН имени В. А. Стеклова;

- семинаре «Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика» под руководством С. М. Натансона, О. В. Шварцмана и О. К. Шейнмана (в 2012 г.) в НМУ;

- семинаре «Характеристические классы и теория пересечений» под руководством М. Э. Казаряна и С. К. Ландо (в 2016 г.) в НИУ «ВШЭ»;

- семинаре по динамическим системам под руководством академика РАН Д. В. Аносова и А. М. Степина (в 2003 г.) в МИАН имени В. А. Стеклова;

- научно-исследовательских семинарах в университетах г. Бохума (в 1999 г.), г. Дортмунда (в 2000 г.) и г. Фрайбурга (в 2001 г.) в Германии.

Диссертация соответствует профилю совета и специальности 01.01.04 – геометрия и топология по физико-математическим наукам.

Текст автореферата соответствует содержанию диссертации.

Диссертация к защите представляется впервые.

Вышесказанное даёт основание утверждать, что: диссертация удовлетворяет требованиям пункта 9 «Положения о порядке присуждения учёных степеней» ВАК РФ, а её автор заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология.

Рекомендуемые официальные оппоненты и ведущая организация:

Ведущая организация:

ФГАОУ ВПО «Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского»

Адрес: 603950, Россия, Нижний Новгород, Нижегородская область, проспект Гагарина, 23.

Ректор: д. ф.-м. н., профессор Чупрунов Евгений Владимирович.

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, ординарный профессор Ландо Сергей Константинович.

Место работы: Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет математики.

Специальность: 01.01.04.

Доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН Матвеев Сергей Владимирович.

Место работы: ФГБОУ ВПО «ЧелГУ», математический факультет, кафедра компьютерной топологии и алгебры.

Специальность: 01.01.04.

Доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН Щепин Евгений Витальевич.

Место работы: Математический институт имени В. А. Стеклова РАН, отдел геометрии и топологии.

Специальность: 01.01.04.

Выбор официальных оппонентов и ведущей организации обосновывается следующими обстоятельствами:

- ведущая организация «Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского» - один из ведущих вузов страны, в котором работают известные специалисты по теме диссертации;
- официальные оппоненты являются специалистами по дифференциальной геометрии и топологии, а также имеют работы, близкие к теме диссертации.

Следующие сотрудники ведущей организации ФГАОУ ВПО «Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского» имеют работы, близкие к теме диссертации:

д. ф.-м. н., профессор **Лерман Лев Михайлович**, который имеет следующие работы, близкие к теме диссертации:

1. Л. М. Лерман, Я. Л. Уманский, Изоэнергетическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем в окрестности простой эллиптической точки // Матем. заметки. – 1994. – Т. 55. – № 5. – С. 88-97.
2. Л. М. Лерман, Я. Л. Уманский, Классификация четырехмерных интегрируемых гамильтоновых систем и пуассоновских действий R^2 в расширенных окрестностях простых особых точек. II // Матем. сб. – 1993. – Т. 184. – № 4. – С. 105-138.
3. Л. М. Лерман, Я. Л. Уманский, Классификация четырехмерных интегрируемых гамильтоновых систем и пуассоновских действий R^2 в расширенных окрестностях простых особых точек. I // Матем. сб. – 1992. – Т. 183. – № 12. – С. 141-176.

д. ф.-м. н., профессор **Яковлев Евгений Иванович**, который имеет следующие работы, близкие к теме диссертации:

1. В. Ю. Зинченко, Е. И. Яковлев, Гладкие почти Δ -расслоения над полиэдрами // Изв. вузов. Матем. – 2010. – № 11. – с. 3-21.
2. Ю. В. Ершов, Е. И. Яковлев, Реализуемость функций H_k -расстояния гомологическими классами пространств путей // Изв. вузов. Матем. – 2010. – № 5. – С. 18-24.

д. ф.-м. н., профессор **Кузнецов Михаил Иванович**, который имеет следующие работы, близкие к теме диссертации:

1. М. И. Кузнецов, Распределения над алгеброй срезанных многочленов // Матем. сб. – 1988. Т. 136(178). – № 2(6). – С. 187-205.
2. М. И. Кузнецов, С. А. Кириллов, Гамильтоновы дифференциальные формы над алгеброй срезанных многочленов // УМН. – 1986. – Т. 41(248). – № 2. – С. 197-198.

Работы официальных оппонентов, близкие к теме диссертации:

доктор физико-математических наук, ординарный профессор **Ландо Сергей Константинович** имеет следующие работы, близкие к теме диссертации:

1. М. Э. Казарян, С. К. Ландо, Многочлены Тома для отображений кривых с изолированными особенностями // Тр. МИАН. – 2007. – Т. 258. – С. 93-106.
2. С. К. Ландо, Разветвленные накрытия двумерной сферы и теория пересечений в пространствах мероморфных функций на алгебраических кривых // УМН. – 2002. Т. 57(345). – № 3. – С. 29-98.
3. С. К. Ландо, Деформации дифференциальных форм // Тр. МИАН. – 1995. – Т. 209. – С. 167-199.
4. С. К. Ландо, Нормальные формы степеней форм объема // Функци. анализ и его прил. – 1985. – Т. 19. – № 2. – С. 78-79.

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор **Матвеев Сергей Владимирович** имеет следующие работы, близкие к теме диссертации:

1. А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. – 1990. – Т. 45(272). – № 2. – С. 49-77.
2. С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем с ручными интегралами // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43. – № 5. – С. 663-671.
3. С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, В. В. Шарко, Круглые функции Морса и изоэнергетические поверхности интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. –

1988. – Т. 135(177). – № 3. – С. 325-345.

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН **Щепин Евгений Витальевич** имеет следующие работы, близкие к теме диссертации:

1. А. Н. Дранишников, Е. В. Щепин, Об устойчивости пересечений компактов в евклидовом пространстве // УМН. – 1989. – Т. 44(269). - № 5. – С. 159-160.
2. N. V. Brodskij, E. V. Shchepin, Poincaré duality and Serre fibrations // Topology Appl. – 1997. – Т. 80. - № 1-2. – С. 55–61.
3. Е. В. Щепин, Накрывающие гомотопии и аналитические отображения // Труды Международной топологической конференции «Топология и ее приложения» (Баку, 3–8 октября 1987 г.). – Тр. МИАН СССР. – 1992. – Т. 193. – Наука, М. – С. 222–228. E. V. Shchepin, Covering homotopies and analytic mappings // Proc. Steklov Inst. Math. – 1993. – V. 193. – P. 245-250.
4. G. M. Nepomnyashchiy, E. V. Shchepin, Character recognition via critical points // Inter. J. of Imag. Systems and Technology. – 1991. – V. 3. – P. 213–221.
5. D. Dimovski, D. Repovs, E. V. Scepin, C^∞ -homogeneous curves on orientable closed surfaces // Geometry and topology. – World Sci. Publishing, Singapore. – 1989. – P. 100–104.
6. М. А. Штанько, Е. В. Щепин, Спектральный критерий вложимости компакта в евклидово пространство // Труды Ленинградской международной топологической конференции. – Наука, Ленинград. – 1983. – С. 135–142.

Диссертационный совет Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова, вынес **решение принять** диссертацию Кудрявцевой Е.А. «Топология пространств функций Морса и инварианты бездивергентных полей» **к защите (протокол № 8(п) от 03 июня 2016 года)**, а так же разместить текст диссертации и автореферата диссертации, данное **Решение совета на сайте ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносов** (<http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi>, <http://istina.msu.ru/dissertations/20806880/>) и объявление о защите диссертации и автореферат диссертации **на сайте ВАК Минобрнауки РФ**.

Постановили:

1. Новизна и актуальность темы диссертации не вызывают сомнений. Она подтверждается экспертизой. Основные результаты диссертации опубликованы в открытой печати, в том числе в центральных математических журналах. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками.
2. Назначить ведущую организацию — ФГАОУ ВПО «Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского»; официальными оппонентами: д. ф.-м. н., ординарного профессора Ландо С.К., Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет математики, д. ф.-м. н., члена-корреспондента РАН, профессора Матвеева С.В., ФГБОУ ВПО «ЧелГУ», математический факультет, кафедра компьютерной топологии и алгебры и д.ф.-м.н, члена-корреспондента РАН Щепина Е.В., Математический институт имени В. А. Стеклова РАН, отдел геометрии и топологии. Согласие оппонентов получено.
3. Назначить дату защиты — **21 октября 2016 года**.
4. Разрешить печатание автореферата диссертации на правах рукописи. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.
5. Разместить текст диссертации, автореферата диссертации, данное Решение совета на сайте **на сайте ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова** (<http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi>, <http://istina.msu.ru/dissertations/20806880/>);

объявление о защите диссертации и автореферат диссертации на сайте ВАК Минобрнауки РФ.

6. Рассылку авторефератов произвести по «списку рассылки авторефератов диссертации» без изменений.
7. Поручить комиссии в составе: д.ф.-м.н. профессор А.О. Иванов, д.ф.-м.н., профессор А.И. Шафаревич, д.ф.-м.н., профессор С.А. Богатый подготовку заключения совета по диссертации к защите по форме, рекомендуемой ВАК РФ.

Результаты голосования по вопросу принятия диссертации **Кудрявцевой Елены Александровны** «Топология пространств функций Морса и инварианты бездивергентных полей» на соискание ученой степени **доктора физико-математических наук** по специальности 01.01.02 – геометрия и топология (физико-математические науки) к защите: за — 19, против — нет, воздержавшихся — нет.

Председатель диссертационного совета
Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова,
профессор



В. Н. Чубариков

Учёный секретарь диссертационного совета
Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова,
д.ф.-м.н., доцент

 В. М. Мануйлов