

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА  
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Шалимова Екатерина Сергеевна

**Некоторые задачи динамики точки,  
соприкасающейся с подвижной поверхностью**

Специальность 01.02.01 — теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва, 2016

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

**Научный руководитель:** Буров Александр Анатольевич,  
доктор физико-математических наук,  
доцент

**Официальные оппоненты:** Иванов Александр Павлович,  
доктор физико-математических наук,  
профессор,  
заведующий кафедрой теоретической  
механики Московского  
физико-технического института  
(государственного университета)

Полехин Иван Юрьевич,  
кандидат физико-математических наук,  
научный сотрудник  
Математического института  
имени В.А. Стеклова  
Российской академии наук

**Ведущая организация:** Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский  
университет)

Защита диссертации состоится 23 сентября 2016 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22, созданного на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, по адресу: 119234, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Ломоносовский проспект, д. 27, и на сайте <http://mech.math.msu.su/~snark/files/diss/0128diss.pdf>

Автореферат разослан 2016 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Прошкин Владимир Александрович

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Задачи о движении материальных точек и твердых тел по подвижным поверхностям при наличии трения возникают в ряде классических прикладных задач о движении систем с качением и скольжением (например, динамика содержимого в стиральных машинах, сепараторах, дробилках, и т.д.), а также при исследовании современных систем, таких как, например, сферические роботы. Возникающие уравнения движения имеют, как правило, переменную структуру и зачастую обладают множествами неизоллированных установившихся движений, зависящих от параметров. Такие зависимости мало изучены и, как правило, сложны для исследования и описания. Необходимость изучения таких зависимостей, в частности, бифуркации и устойчивость множеств установившихся движений и обуславливают выбранную тему исследований.

Исследование движения тел, соприкасающихся с поверхностями, имеет давнюю историю. Такими задачами занимался, например, Э.Дж. Раус<sup>1</sup> в своей монографии. Общим вопросам динамики и современному состоянию исследований движения тел, соприкасающихся с поверхностью, посвящена монография А.П. Маркеева<sup>2</sup>, где, в частности, рассматриваются предельные случаи отсутствия трения между соприкасающимися поверхностями и наличия неголономной связи, препятствующей проскальзыванию. В случае, когда в точке соприкосновения присутствует трение, задачи зачастую становятся гораздо более сложным в частности - из-за переменной структуры уравнений движения, как в случае сухого трения. Исследованием случаев неточечного контакта занимались В.Ф. Журавлев, А.П. Иванов, А.В. Карапетян, А.А. Киреенков, В.А. Самсонов и др. Сложное нелинейное поведение в системах

---

<sup>1</sup>Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т. I, II. М., Наука, 1983.

<sup>2</sup>Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. — М.: Наука, 1992.— 336 с.

со скольжением и остановками (stick-slip motions) изучалось также в работах Х.Трогера, А.Штайндля, С.Я. Степанова и др.

В простейшем случае вместо твердого тела, соприкасающегося с неподвижной поверхностью, можно рассматривать материальную точку. Такие задачи возникают при изучении динамики механических систем с вращающимися элементами, ориентированных на различные операции типа перемешивания, помола, сушки и т.д. различных веществ, а также автобалансирующих систем. В теоретическом плане задача о движении материальной точки по вращающейся поверхности при наличии сухого трения исследовалась еще в работах Брауэра.

Современные средства математического моделирования позволяют сделать детальные количественные выводы о движении таких систем в случае большого числа движущихся частиц. Вместе с тем, как оказалось, уже в случае одной частицы имеют место достаточно непростые качественные эффекты, создающие предпосылки для исследования более сложных динамических эффектов, таких, как, например, бифуркация Андронова-Хопфа. Описание таких эффектов имеет самостоятельный интерес.

В одномерном случае динамика таких систем достаточно подробно изучена начиная, вероятно, с исследований Л.И.Мандельштама. В них идет речь о различных версиях так называемого маятника Фроуда. Как правило, при исследовании маятника Фроуда предполагается, что сила сопротивления не зависит от нормальной реакции. В случае, когда речь идет о движении системы с сухим трением, это, вообще говоря, не так. Общие методы исследования предельных циклов систем типа маятника Фроуда были развиты в достаточно общих предположениях.

Общий подход к исследованию устойчивости равновесий в системах с сухим трением был развит Г.К.Пожарицким (1962 г.). Методы исследования устойчивости и притяжения таких равновесий, опирающиеся на общую тео-

рию систем с разрывными правыми частями, были предложены Р.И. Ляйне (R.I. Leine) и Н. ван де Воувом (N. van de Wouw)<sup>3</sup>, Дж. Биёмондом (J.J.V. Biemond)<sup>4</sup>. В ряде работ также исследуются притягивающие множества в системах с сухим трением.

Ранее исследовались бифуркации равновесий в системах с трением, а также бифуркации фазовых портретов таких систем. Общий подход к исследованию зависимости семейств неизолированных равновесий от параметров в двумерных и трехмерных случаях был предложен А.П.Ивановым<sup>5</sup>. Пример бифуркационного множества типа «симметричная жирная вилка» в задаче о движении тяжелой бусинки на круговом обруче, вращающемся вокруг своего вертикального диаметра был изучен А.А.Буровым. Как известно, при отсутствии трения эта задача дает классический пример бифуркации типа «вилка» (см., например, книгу В.Н.Рубановского, В.А.Самсонова<sup>6</sup>). Потеря симметрии бифуркационного множества в задаче о движении тяжелой бусинки на круговом обруче, вращающемся вокруг вертикали, не совпадающей с его вертикальным диаметром, исследована А.А.Буровым и И.А.Якушевым.

В диссертации изучается естественный трехмерный аналог такой задачи.

**Цель работы.** Диссертация посвящена исследованию множеств равновесий, в том числе неизолированных, в задачах динамики точки на подвижной поверхности. Изучается влияние параметров задачи на перестройки множества абсолютных и относительных равновесий при различном характере движения поверхности, при различном характере силы трения, а также исследуются во-

---

<sup>3</sup>Leine R.I., van de Wouw N. Stability and convergence of mechanical systems with unilateral constraints // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer, 2008. V.36. 236 p.

<sup>4</sup>Biemond J.J.V., van de Wouw N., Nijmeijer H. Bifurcations of equilibrium sets in mechanical systems with dry friction //Physica D: Nonlinear Phenomena. 2012. Vol.241. № 22. P.1882 – 1894

<sup>5</sup>Иванов А.П. Основы теории систем с трением. Ижевск: РХД, 2011. 302 с.

<sup>6</sup>Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.

просы устойчивости абсолютных равновесий точки на поверхности.

**Методы исследования.** Исследование выполнено с использованием известных аналитических и численных методов аналитической механики, теории устойчивости движения и дифференциальных уравнений. Проверка аналитических результатов и численные построения производились с использованием системы символьных вычислений.

**Достоверность результатов.** Основные результаты диссертации получены аналитически, в работе приведены их подробные доказательства. Некоторые вспомогательные гипотезы проверены при помощи численного анализа. Во всех случаях заимствования научных результатов приведены соответствующие ссылки.

**Научная новизна.** Основные результаты диссертации являются новыми.

**Теоретическая и практическая ценность.** Диссертация в целом носит теоретический характер. Для изученных задач аналитически выявлены структуры кривых и областей, заполненных установившимися движениями, в зависимости от параметров. Вместе с тем, ее результаты позволяют дать некоторые конкретные рекомендации по конструированию механизмов, содержащих равномерно вращающиеся части, взаимодействующие с подвижными элементами пренебрежимо малых размеров, производящих операции типа перемешивания или разделения твердых частиц, а также по предотвращению в различных механизмах нежелательных эффектов, связанных со взаимодействием точки с подвижной поверхностью.

**Личный вклад.** Научный руководитель предложил постановку задачи и методы ее исследования, а также консультировал соискателя в процессе выполнения работы. Все представленные в диссертации результаты получены лично соискателем.

**Апробация работы.** Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих конференциях и научных семинарах:

- 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC-2014). Austria, Vienna, July 6 –11, 2014;
- XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014), Москва, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Россия, 16–19 июня 2014;
- IX Всероссийская научная конференция имени Ю.И.Неймарка «Нелинейные колебания механических систем», Россия, Нижний Новгород, 24–29 сентября 2012;
- Научная конференция "Ломоносовские чтения Россия, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова (2013, 2014 гг.);
- Семинар "Математические методы технической механики" под руководством проф. И.И.Косенко, проф.С.Я.Степанова, доц. А.А.Бурова;
- Семинар по аналитической механике и теории устойчивости (имени В.В.Румянцева) под руководством чл.-корр. РАН, проф. В.В.Белецкого; проф. А.В.Карапетяна (2015);

**Публикации.** Основные результаты диссертации изложены в пяти печатных работах, 4 из них – в журналах, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ ([2–5]). 3 из них ([2–4]) опубликованы в журналах из перечня Web Of Science. Список работ приведен в конце автореферата.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации — **88** страниц

текста. Список литературы содержит **71** наименование. В диссертации приведено **39** рисунков.

## Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность диссертационной работы, дан обзор литературы, посвященной задачам о движении материальных точек или твердых тел по подвижным поверхностям, а также изучению неизолированных областей равновесия, возникающих в случае наличия в системе сухого трения. Приведены основное содержание работы, представлены сведения о ее апробации и публикациях.

**В первой главе** диссертации рассматривается задача о движении тяжелой точки по поверхности сферы, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной наклонной оси, проходящей через ее центр, в предположении, что взаимодействие точки и сферы происходит по закону вязкого трения. Отдельно рассматриваются случаи горизонтальной и негоризонтальной оси вращения. Показано, что у такой системы всегда есть два (возможно – совпадающих) положения абсолютного равновесия, построены кривые зависимости этих положений равновесия от коэффициента трения. Показано, что в случае негоризонтальной оси вращения сферы верхнее из этих положений неустойчиво, а нижнее в зависимости от значений параметров может быть как устойчивым асимптотически, так и неустойчивым.

В случае горизонтальной оси вращения в зависимости от параметров системы наблюдается два типа положений равновесия. Существует критическое значение параметра  $c$ , пропорционального угловой скорости вращения  $c_*$  такое, что при  $c \in (0, c_*)$  два положения равновесия располагаются на вертикальном большом круге, перпендикулярном оси вращения, причем при  $c \mapsto c_*$  они стремятся к горизонтальной плоскости, проходящей через ось



вращения. Верхнее положение равновесия при этом неустойчиво, а нижнее устойчиво асимптотически. При  $c = c_*$  они совпадают в точке пересечения вертикального и горизонтального большого круга. При дальнейшем увеличении параметра  $c$  эти положения равновесия смещаются по горизонтальному большому кругу к точкам пересечения сферы и оси вращения, оба они при этом неустойчивы (см. рис. 1).

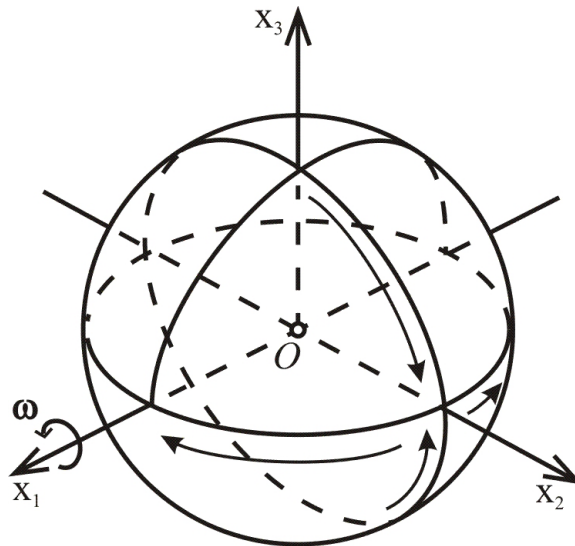


Рис. 1: Изменение положений равновесия при возрастании параметра  $c$  в случае горизонтальной оси вращения

Предлагается также восходящий в идейном плане к исследованиям Пуанкаре и Понтрягина подход к поиску периодических решений системы для случая малой величины безразмерного коэффициента вязкости  $c$ , основанный на предварительном отыскании начальных условий для их численного построения. Для начальных условий, удовлетворяющих полученному необходимому условию, были численно найдены соответствующие им периодические решения.

**Во второй главе** аналогичная задача рассмотрена для случая, когда взаимодействие точки и сферы происходит по закону сухого трения. Показано, что в такой системе есть два положения абсолютного равновесия при

$|\mu \operatorname{ctg} \alpha| \leq 1$ , где  $\mu$  – коэффициент сухого трения,  $\alpha$  – угол наклона оси вращения, отсчитываемый от восходящей вертикали. Показано, что верхнее из положений равновесия неустойчиво, а нижнее – устойчиво в первом приближении. Исследуется существование в такой системе множеств неизолированных относительных равновесий, изучается изменение этих множеств в зависимости от параметров системы. Результаты этого исследования представлены в виде бифуркационных диаграмм, построенных при разных значениях угла наклона оси  $\alpha$ . (см.рис.2).

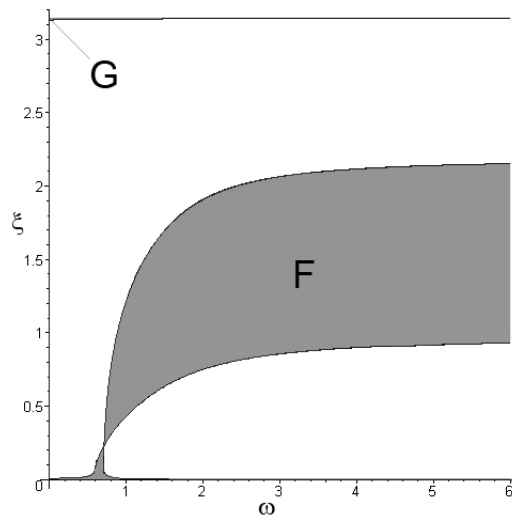


Рис. 2: Бифуркационная диаграмма при значении угла наклона оси вращения  $\alpha = 0.6077$  и коэффициенте трения  $\mu = 0.7$ .

**В третьей главе** работы рассматривается задача о движении тяжелой бусинки, нанизанной на тонкий обруч, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг наклонной оси, лежащей в его плоскости и проходящей через его центр. Предполагается, что взаимодействие бусинки и окружности происходит по закону сухого трения. В задаче получено и исследовано условие существования множеств неизолированных положений равновесия, при разных значениях угла наклона  $\alpha$  построены бифуркационные диаграммы, демонстрирующие зависимость этих множеств от угловой скорости вращения окружности (см. рис. 3).

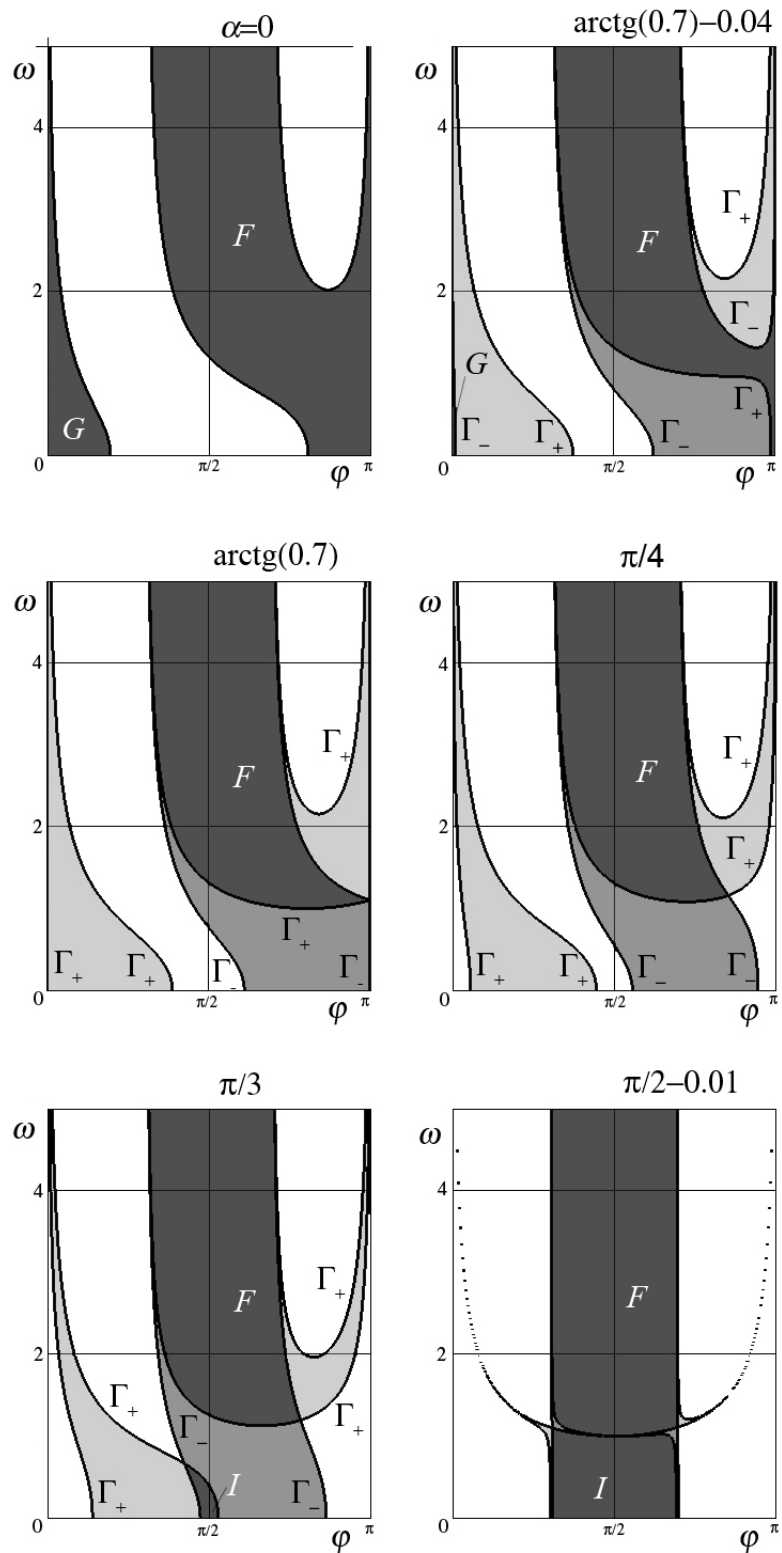


Рис. 3: Бифуркационные диаграммы при различных значениях угла наклона оси вращения  $\alpha$  и коэффициенте трения  $\mu = 0.7$ . Относительным равновесиям отвечают точки области, выделенные самым темным цветом. Угол  $\varphi$  задает положение бусинки на окружности.

**Четвертая глава** посвящена задаче о движении тяжелой точки в параболоидальной чаше, вращающейся вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью. Взаимодействие точки и чаши происходит по закону сухого трения. Получено условие существования множеств неизолированных положений равновесия. В случае, когда параболоид представляет собой параболоид вращения, исследована зависимость топологической структуры этих множеств от параметров системы. (см. рис.4) На основании полученных в этом случае результатов построены плоские сечения этих множеств, дающие представление о характере бифуркаций при различных соотношениях параметров в несимметричном случае.

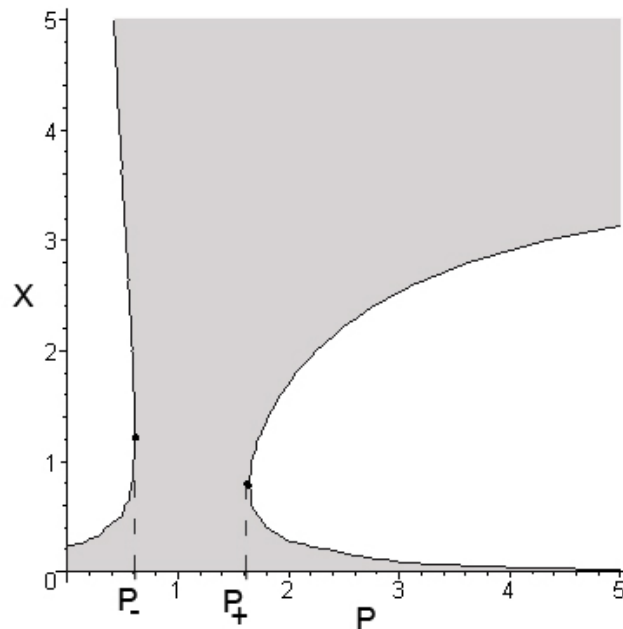


Рис. 4: Бифуркационная диаграмма в случае параболоида вращения при коэффициенте трения  $\mu = 0.25$ ,  $p$  – параметр, пропорциональный квадрату угловой скорости вращения

**В пятой главе** изучается движение точки по поверхности сферы, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, не совпадающей с ее диаметром. Предполагается, что взаимодействие точки

и сферы происходит по закону сухого трения. Выписываются уравнения с множителями Лагранжа, находится условие существования в такой системе неизоллированных положений относительного равновесия. Сначала условие исследуется в двух предельных случаях, когда расстояние от центра сферы до оси вращения велико, и когда велика угловая скорость вращения сферы. Затем это условие изучается в общем случае. Результаты исследования представлены графически в виде серии разверток на цилиндре, построенных при различных значениях угловой скорости вращения и различных значениях параметра  $a$ , задающего расстояние от оси вращения до вертикального диаметра сферы (см. рис.5). На этих же рисунках отмечены границы, на которых нормальная реакция меняет знак. В данной задаче также произведена попытка исследовать устойчивость граничных точек областей равновесия (устойчивость по Ляпунову внутренних точек следует из результатов Г.К.Пожарицкого). Получено выражение, знак которого определяет устойчивость точек границы в “статическом” смысле, а именно направление движения точки, запущенной без начальной скорости с границы области равновесия в отсутствие трения. Границы, на которых происходит смена направления движения, также изображены на развертках.

**В заключении** сформулированы основные результаты работы.

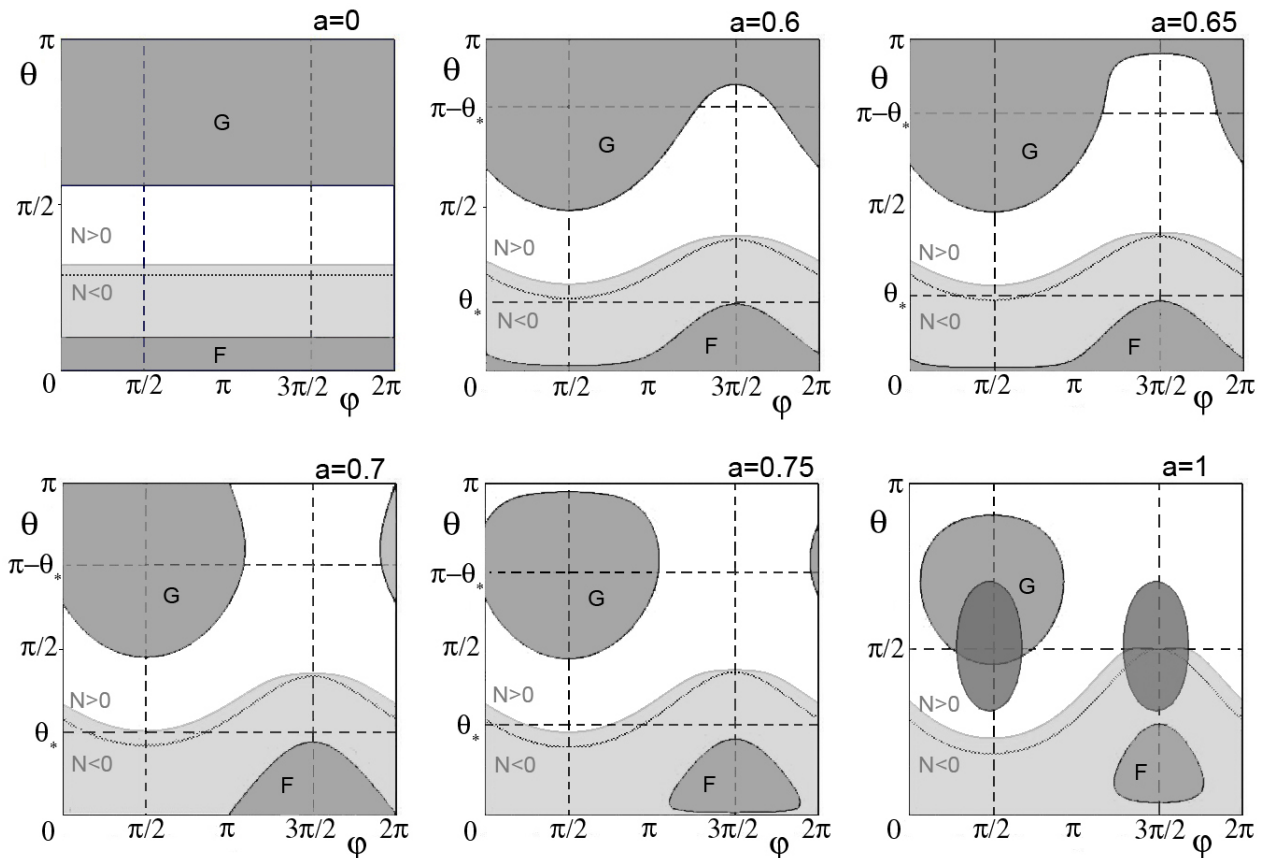


Рис. 5: Бифуркационные диаграммы при  $\omega = 1$ , коэффициенте трения  $\mu = 0.7$ . Здесь  $a$  – расстояние от центра сферы до оси вращения, сферические углы  $\theta$  и  $\varphi$  задают положение точки на сфере

## Основные результаты

- В задаче о движении тяжелой точки по поверхности вращающейся сферы при наличии вязкого трения найдены положения абсолютного равновесия, исследована их устойчивость и зависимость от параметров. Предложен и апробирован в ходе численного эксперимента восходящий в идейном плане к исследованиям Пуанкаре и Понтрягина подход к отысканию начальных условий существования периодического решения изучаемой системы в предположении о малости коэффициента трения.
- В задаче о движении точки по поверхности сферы, вращающейся вокруг наклонной оси, при наличии сухого трения найдены положения абсолют-

ного равновесия, исследована их устойчивость в первом приближении. Рассмотрен вопрос о существовании в данной задаче относительных равновесий, их зависимость от параметров задачи проиллюстрирована в виде бифуркационных диаграмм.

- В задаче о движении бусинки, надетой на тонкий обруч, вращающийся с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной наклонной оси, лежащей в его плоскости, в предположении, что на бусинку действует сила сухого трения найдены условия существования относительных положений равновесия. Построены бифуркационные диаграммы при разных значениях угла наклона оси вращения.
- В задаче о движении точки в параболоидальной чаше, вращающейся вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью, при наличии сухого трения получены условия существования относительных равновесий. Изучены и проиллюстрированы с помощью численного счёта зависимости от параметров и топологические перестройки областей, заполненных неизоллированными относительными равновесиями.
- В задаче о движении тяжелой точки по поверхности сферы, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, не совпадающей с ее диаметром найдены множества неизоллированных положений равновесия. Результаты представлены графически в виде разверток на цилиндре.

## Публикации автора по теме диссертации

1. Шалимова Е.С. О движении точки по вращающейся сфере при наличии вязкого трения // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. — 2013. — № 1(3). — С. 241–243.
2. Шалимова Е.С. Стационарные и периодические режимы в задаче о движении тяжелой точки по вращающейся сфере при наличии вязкого трения // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2014. — № 4. — С. 43–50.
3. Баландин Д.В., Шалимова Е.С. Бифуркации относительных равновесий тяжелой бусинки на обруче, равномерно вращающемся вокруг наклонной оси, при наличии сухого трения // Прикладная математика и механика. — 2015. — Т. 79, Вып. 5. — С. 627–634.
4. Burov A.A., Shalimova E.S. On the motion of a heavy material point on a rotating sphere (dry friction case) // Regular and Chaotic Dynamics. — 2015. — Vol. 20, no. 3. — P. 225–233.
5. Буров А.А., Шалимова Е.С. Бифуркации относительных равновесий тяжелой бусинки на вращающейся параболической чаше с сухим трением // Известия РАН. Механика твёрдого тела. — 2016. — № 4.