Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 531.36

Шалимова Екатерина Сергеевна

Некоторые задачи динамики точки, соприкасающейся с подвижной поверхностью

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.02.01 "Теоретическая механика"

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук Буров А.А.

Москва 2016 год

Оглавление

Введение

Диссертация посвящена задачам динамики тел, соприкасающихся с подвижными поверхностями в предположении о наличии трения между телом и поверхностью. В работе рассматриваются несколько задач подобного типа: точка на вращающейся вокруг наклонной оси сфере при наличии вязкого трения, точка на вращающейся вокруг наклонной или вертикальной, но не совпадающей с ее диаметром, оси сфере при наличии сухого трения, бусинка на окружности, вращающейся вокруг наклонной оси, лежащей в ее плоскости, и точка в параболоидальной чаше, вращающейся вокруг ее вертикального диаметра.

Задачи о движении материальных точек и твердых тел по подвижным поверхностям при наличии трения возникают как в ряде классических прикладных задач о движении систем с качением и скольжением (например, динамика содержимого в стиральных машинах, сепараторах, дробилках, и т.д.), а также при исследовании современных систем, таких как, например, сферические роботы [3, 4, 5, 6, 7, 45]. Возникающие уравнения движения имеют, как правило, переменную структуру, и для их исследования зачастую требуется “индивидуальный” подход. При этом, выявленные особенности динамики достаточно сложны как для исследования, так и для описания. К таким особенностям, относятся, в частности, бифуркации и устойчивость установившихся движений, чем и обусловлена актуальность темы исследования.

Исследование движения тел, соприкасающихся с поверхностями имеет давнюю историю, см., например, монографию Рауса [30]. Общим вопросам динамики и современному состоянию исследований движе-

ния тел, соприкасающихся с поверхностью, посвящена монография А.П.Маркеева [25].

Задачи о движении материальных точек и твердых тел по подвижным кривым и поверхностям рассматривались в различных предположениях о характере наложенных на систему связей, о природе силы трения, а также о форме тел и подвижного основания. Задачи о движении тел сложнее и встречаются несколько реже. Так в работе [65] был предложен геометрический подход к исследованию динамики тела на подвижной поверхности при наличии сухого трения в случае, когда связи в системе односторонние. В работе [11] было рассмотрено качение с трением цилиндра (катка) по цилиндрической поверхности (опоре), была предложена гипотеза о возможности замены местного проскальзывания элементов поверхности катка относительным микроперемещением этих элементов в пределах площадки смятия. Движение цилиндра и сферы по вязкоупругой поверхности было рассмотрено в [63]. В работе [61] в качестве примера системы со связями, методы получения уравнений движения для которых предлагались в этой работе, было рассмотрено качения шара по подвижной поверхности без проскальзывания. Ряд работ посвящён различным аспектам численного моделирования данного класса задач. Так в работе [67] был предложен подход к численному исследованию, а также представлены результаты моделирования движения сферы по подвижной поверхности без проскальзывания. Модель движения шара по поверхности вращающегося диска рассматривалась в работе [52].

В простейшем случае вместо твердого тела, соприкасающегося с неподвижной поверхностью, можно рассматривать материальную точку. Такие задачи возникают при изучении динамики механических систем с вращающимися элементами, ориентированных на различные операции типа перемешивания, помола, сушки и т.д. различных веществ (см.,например, [13, 46, 39, 62, 53]), а также автобалансировочных систем (см., например, [70]). В теоретическом плане задача о движении материальной точки по вращающейся поверхности при наличии

сухого трения исследовалась еще в работах Брауэра [47]. В работе [12] было рассмотрено движение точки на вращающемся диске.

Современные средства математического моделирования (см., например, [50, 40]) позволяют сделать детальные количественные выводы о движении таких систем в случае большого числа движущихся частиц. Вместе с тем, как оказалось, уже в случае одной частицы имеют место достаточно непростые качественные эффекты, создающие предпосылки для исследования более сложных динамических эффектов, таких, как, например, бифуркация Андронова-Хопфа. Описание таких эффектов имеет самостоятельный интерес.

В одномерном случае динамика таких систем достаточно подробно изучена начиная, вероятно, с исследований Мандельштама [24]. В них идет речь о различных версиях так называемого маятника Фроуда. Как правило, при исследовании маятника Фроуда предполагается, что сила сопротивления не зависит от нормальной реакции. В случае, когда речь идет о движении системы с сухим трением, это, вообще говоря, не так. Общие методы исследования предельных циклов систем типа маятника Фроуда в достаточно общих предположениях были развиты в работах [33, 2, 34, 35], были изучены траектории таких систем, а также находились условия существования периодических движений.

В работе [55] проводилось численное исследование вынужденных колебаний математического маятника при наличии вязкого и сухого трения. В работе [68] при численном исследовании устойчивых и неустойчивых периодических режимов системы разрывные функции сухого трения приближались гладкими. Другой, основанный на переключении между системами уравнений, подход к численному изучению подобных систем был предложен в работе [56].

Исследования существования и устойчивости неизолированных равновесий в системах с трением восходит, вероятно, к работам В.В.Крементуло [21, 22]. Общий подход к исследованию устойчивости равновесий в системах с сухим трением вскоре был развит Г.К.Пожарицким [28]. Методы исследования устойчивости и притяжения таких равно-

весий, опирающиеся на общую теорию систем с разрывными правыми частями, были предложены в [71, 57, 58]. В ряде работ (см., например, [69]) также исследуются притягивающие множества в системах с сухим трением.

Бифуркации равновесий в системах с трением, а также бифуркации фазовых портретов таких систем исследовались в [41, 42, 43, 44, 54, 59, 60, 36]. Общий подход к исследованию зависимости семейств неизолированных равновесий от параметров в двумерных и трехмерных случаях предложен А.П.Ивановым [15, 16]. Пример бифуркационного множества типа «симметричная жирная вилка» в задаче о движении тяжелой бусинки на круговом обруче, вращающемся вокруг своего вертикального диаметра был изучен в [48]. Как известно, в отсутствие трения эта задача дает классический пример бифуркации типа «вилка» (см., например, [31]). Потеря симметрии бифуркационного множества в задаче о движении тяжелой бусинки на круговом обруче, вращающемся вокруг вертикали, не совпадающей с его вертикальным диаметром, исследована в [9].

Структура работы

Диссертация состоит из пяти глав, введения, заключения и списка литературы, содержащего 71 наименование.

В **первой главе** настоящей работы рассматривается задача о движении тяжелой точки по поверхности сферы, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной наклонной оси, проходящей через ее центр, в предположении, что взаимодействие точки и сферы происходит по закону вязкого трения. Существование таких положений равновесия следует из того, что поле касательных составляющих сил, действующих на материальную точку, на сфере обязательно обращается в ноль. Показано, что у такой системы всегда есть два (возможно, совпадающих) положения абсолютного равновесия, построены кривые зависимости этих положений равновесия от коэффициента трения. В случае негоризонтальной оси вращения сферы верхнее из этих положений неустойчиво, а нижнее в зависимости от значений па-

раметров может быть как устойчивым, так и неустойчивым. В случае горизонтальной оси вращения в зависимости от параметров системы наблюдается два типа положений равновесия. Равновесия могут располагаться либо на горизонтальном большом круге, и тогда оба они неустойчивы, либо на вертикально большом круге, перпендикулярном оси вращения, и в этом случае нижнее положение устойчиво, а верхнее неустойчиво. Предлагается также подход к поиску периодических решений системы для случая малой величины коэффициента вязкости, основанный на предварительном отыскании начальных условий для их численного построения (см. [29, 18, 19])

Во **второй главе** аналогичная задача рассмотрена для случая сухого трения. В зависимости от параметров системы, в абсолютном пространстве имеются или два положения равновесия, или их нет вообще. Существенным отличием от предыдущего случая является то, что положения равновесия не зависят от величины угловой скорости вращения сферы. Положение равновесия, находящееся на верхней полусфере, неустойчиво, а нижнее положение равновесия устойчиво в первом приближении. Показано существование в такой системе множеств неизолированных относительных равновесий, изучается изменение этих множеств в зависимости от параметров системы. Результаты этого исследования представлены в виде бифуркационных диаграмм.

В **третьей главе** работы рассматривается задача о движении бусинки, нанизанной на тонкий обруч, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг наклонной оси, лежащей в его плоскости и проходящей через его центр. Предполагается, что взаимодействие бусинки и окружности происходит по закону сухого трения. Найдены положения относительного равновесия такой системы, построены бифуркационные диаграммы, показывающие изменение множеств таких равновесий в зависимости от угловой скорости вращения окружности.

Четвертая глава посвящена задаче о движении тяжелой точки в параболоидальной чаше, вращающейся вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью. Взаимодействие точки и чаши проис-

ходит по закону вязкого трения. В отличие от работ [48, 9], где рассматривалась система с одной степенью свободы, на данном примере удалось исследовать трехмерное бифуркационное множество системы с двумя степенями свободы, зависящей от одного бифуркационного параметра. Построены плоские сечения этого множества, дающие представление о характере бифуркаций. Другой пример системы с двумя степенями свободы и одним бифуркационным параметром, возникающий в системах автобалансировки, рассматривался в [70].

В **пятой главе** изучается другой аналог задачи, рассмотренной в [48, 9] — движение точки по поверхности сферы, вращающейся с постоянной угловой скоростью вертикальной оси, не совпадающей с ее диаметром. Предполагается, что взаимодействие точки и сферы происходит по закону сухого трения. Выписываются уравнения с множителями Лагранжа; в предельных случаях большой по величине угловой скорости и большого расстояния от центра сферы до оси вращения находятся множества неизолированных положений относительного равновесия точки на сфере, исследуется их зависимость от параметров задачи. Результаты представлены графически в виде разверток на цилиндре. Для общего случая также построены серии аналогичных рисунков, иллюстрирующие возможные типы и перестройки областей относительного равновесия в зависимости от параметров системы.

В заключении сформулированы основные полученные результаты.

По теме диссертации опубликовано 5 работ [37, 38, 1, 49, 10]

Основные результаты были доложены на семинаре по теоретической механики и устойчивости движения им.В.В.Румянцева (руководители: чл.корр. РАН В.В.Белецкий, проф. А.В.Карапетян), на семинаре по технической механике МГУ им.М.В.Ломоносова (руководители: проф. И.И.Косенко, проф.С.Я.Степанов, доц. А.А.Буров), на конференции Ломоносовские Чтения (Москва, 2012г, 2013 г.), IX Всероссийской научной конференции имени Ю.И.Неймарка «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 24-29 сентября 2012 г.), Всероссийском совещании по проблемам управления (Москва, 16-19 июня

2014 г.) и конференции 8-th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC) (Вена, Австрия, 6-11 июля 2014 г.).

Глава 1

Точка на сфере при наличии вязкого трения

1.1 Постановка задачи

Пусть P — тяжелая материальная точка массы m, совершающая движение по поверхности двумерной сферы радиуса ℓ с центром в точке O под действием силы вязкого трения. Введем абсолютную систему координат $Ox_1x_2x_3$, плоскость Ox_1x_2 которой горизонтальна, а третья ось $\mathbf{Ox_3} = \mathbf{e_3}$ направлена вертикально вверх. Если $\boldsymbol{\omega}$ — постоянный вектор угловой скорости сферы, $\mathbf{r}$ — вектор $\mathbf{OP}$, то движение можно описать с помощью системы уравнений (рис. 1.1)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{e}_3 + c(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} - \dot{\mathbf{r}}) + \lambda\mathbf{r}, \tag{1.1}$$

где c — коэффициент вязкого трения, λ — множитель Лагранжа. Систему (1.1) следует рассматривать совместно с уравнением сферы, определяющим связь вида

$$f = \frac{1}{2}((\mathbf{r}, \mathbf{r}) - \ell^2) = 0. \tag{1.2}$$

Пусть $\mathbf{e}$ — единичный вектор, задающий ось вращения, т.е. $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}$. Тогда можно ввести безразмерные координаты и параметры, опираясь на соотношения

$$r = \ell\tilde{r}, \quad \tilde{t} = \omega t, \quad c = m\ell\omega\tilde{c}, \quad \lambda = m\omega^2\tilde{\lambda}, \quad g = \ell\omega^2\tilde{g}. \tag{1.3}$$

Подставляя соотношения (1.3) в (1.1) и (1.2), сокращая общие множители в левых и правых частях и отбрасывая волнистые линии над

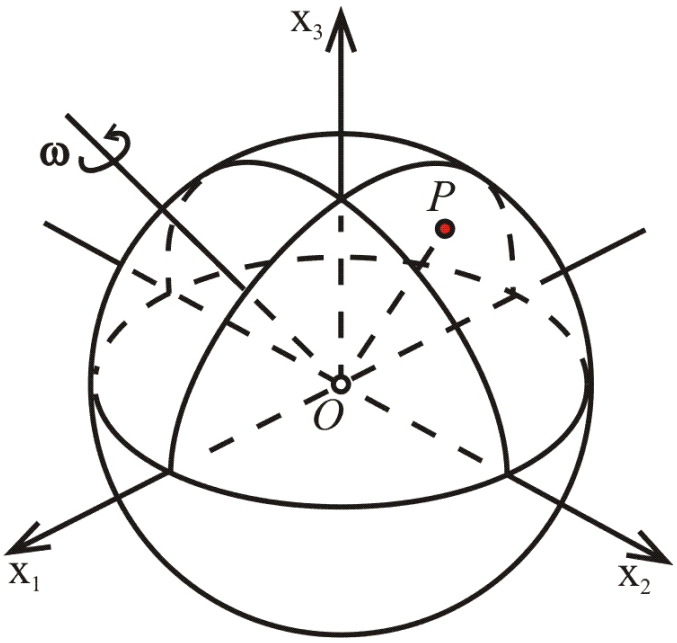

Рис. 1.1. *Расположение вращающейся сферы относительно неподвижной системы координат* $Ox_1x_2x_3$

символами, имеем

$$\mathbf{r}'' = -g\mathbf{e}_3 + c(\mathbf{e} \times \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \lambda\mathbf{r}, \tag{1.4}$$

$$f = \frac{1}{2}((\mathbf{r}, \mathbf{r}) - 1) = 0, \tag{1.5}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по новому времени. Эти уравнения составят предмет дальнейших исследований.

1.2 Уравнения равновесий и их решение

В силу уравнений (1.4) равновесия точки определяются из линейной относительно $\mathbf{r}$ системы уравнений

$$-g\mathbf{e}_3 + c\mathbf{e} \times \mathbf{r} + \lambda\mathbf{r} = 0, \tag{1.6}$$

дополненной уравнением (1.5).

Пусть $\lambda = 0$, тогда уравнения равновесий принимают вид $-g\mathbf{e}_3 + c\mathbf{e} \times \mathbf{r} = 0$. Отсюда $(\mathbf{e}, \mathbf{e}_3) = e_3 = 0$, т.е. ось вращения горизонтальна, и равновесия могут иметь место только в горизонтальной плоскости, проходящей через ось вращения. Такие решения существуют при $c - g \geq 0$ и имеют вид

$$r_1 = \chi e_1 - \frac{ge_2}{c}, \quad r_2 = \chi e_2 + \frac{ge_1}{c}, \quad r_3 = 0, \quad \chi = \pm\frac{\sqrt{c^2 - g^2}}{c}. \tag{1.7}$$

Эти решения составляют первый класс решений для горизонтальной оси вращения.

Пусть теперь $\lambda \neq 0$. Решение системы (1.6) относительно компонент вектора $\mathbf{r}$ имеет вид

$$r_1 = \frac{cg(-e_2\lambda + ce_1e_3)}{\lambda(\lambda^2 + c^2)}, \quad r_2 = \frac{cg(e_1\lambda + ce_2e_3)}{\lambda(\lambda^2 + c^2)}, \quad r_3 = \frac{g(\lambda^2 + c^2e_3^2)}{\lambda(\lambda^2 + c^2)}. \tag{1.8}$$

Подставляя решения (1.8) в уравнение связи (1.5), получаем уравнение на λ в виде

$$\left(\frac{cg(-e_2\lambda + ce_1e_3)}{\lambda(\lambda^2 + c^2)}\right)^2 + \left(\frac{cg(e_1\lambda + ce_2e_3)}{\lambda(\lambda^2 + c^2)}\right)^2 + \left(\frac{g(\lambda^2 + c^2e_3^2)}{\lambda(\lambda^2 + c^2)}\right)^2 - 1 = 0.$$

Вещественные корни $\lambda_\pm$ этой функции определяются из биквадратного относительно λ уравнения

$$\mu^2 + \left(c^2 - g^2\right)\mu - g^2c^2e_3^2 = 0, \quad \mu = \lambda^2.$$

Для положительного корня этого уравнения

$$\lambda_\pm = \pm\sqrt{\frac{g^2 - c^2 + \sqrt{\left(c^2 - g^2\right)^2 + 4g^2c^2e_3^2}}{2}}. \tag{1.9}$$

Этим значениям отвечают два равновесия изучаемой системы (рис. 1.2). Заметим также, что поскольку $ge_3 = \lambda(\mathbf{e}, \mathbf{r})$, $\quad e_3 = (\mathbf{e}_3, \mathbf{e})$, то имеет место соотношение

$$(\mathbf{e}, \mathbf{r}) = \frac{ge_3}{\lambda}, \tag{1.10}$$

которое понадобится в дальнейшем.

В частном случае при $e_3 = 0$ ось вращения горизонтальна, и в силу (1.8) и (1.5) условие на множитель Лагранжа примет вид $\dfrac{g^2}{\lambda^2 + c^2} - 1 = 0$, откуда два различных корня записываются как $\lambda_\pm = \pm\sqrt{g^2 - c^2}$. Они существуют лишь при $g \geq c$, причем решения имеют вид

$$r_1 = -\frac{ce_2}{g}, \quad r_2 = \frac{ce_1}{g}, \quad r_3 = \pm\frac{\sqrt{g^2 - c^2}}{g}. \tag{1.11}$$

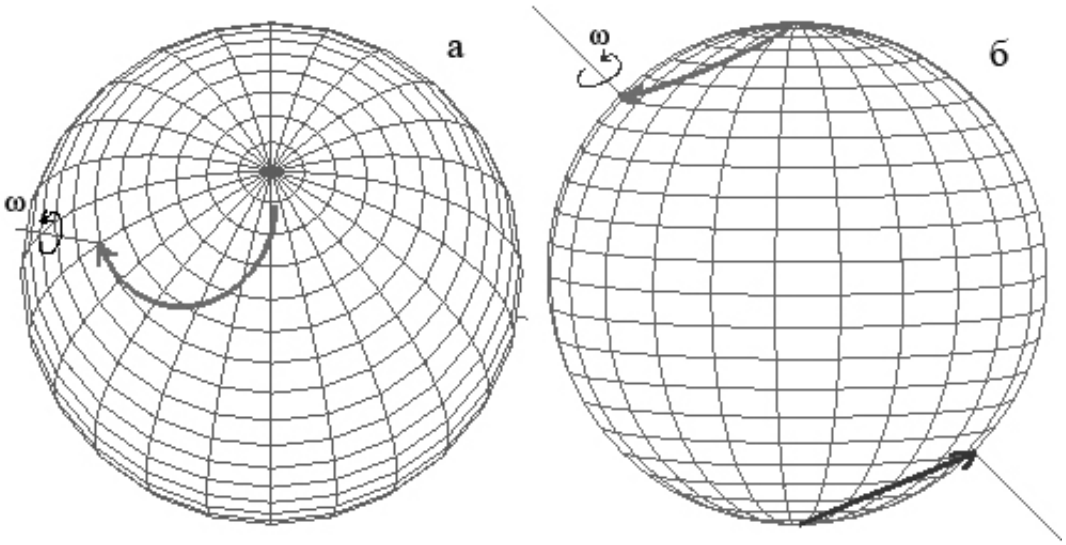

Рис. 1.2. *Изменение положений равновесия при возрастании параметра c в случае негоризонтальной оси вращения: а – вид сверху, б – вид сбоку*

Этим решениям отвечает второй класс равновесий, для которых точка P располагается на окружности большого круга, перпендикулярной оси вращения, причем при $c \mapsto g$ соответствующие равновесия стремятся вдоль этой окружности к горизонтальной плоскости, проходящей через ось вращения (рис. 1.3).

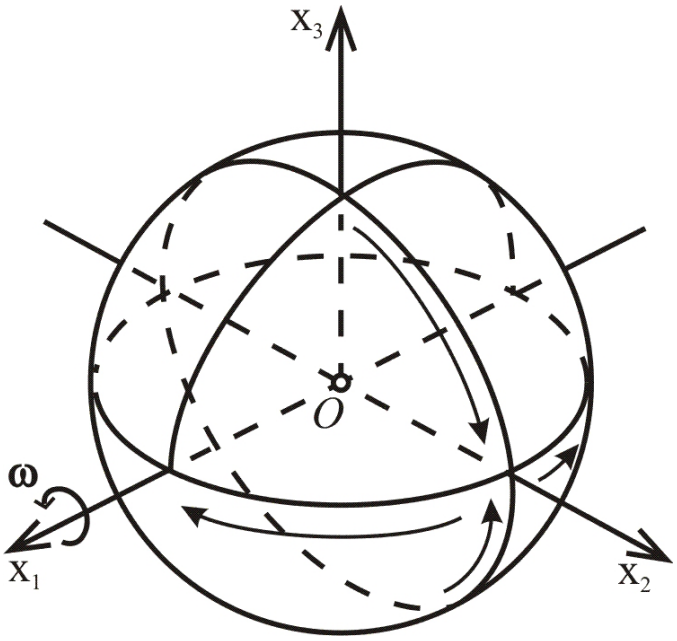

Рис. 1.3. *Изменение положений равновесия при возрастании параметра c в случае горизонтальной оси вращения*

1.3 Линеаризованные уравнения движения и необходимые условия устойчивости

Линеаризация уравнений (1.4), (1.5) в окрестности найденных равновесий дает

$$\delta\mathbf{r}'' = c(\mathbf{e}\times\delta\mathbf{r} - \delta\mathbf{r}') + \lambda\delta\mathbf{r} + \delta\lambda\mathbf{r}, \quad (\mathbf{r},\delta\mathbf{r}) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$P(\sigma) = \begin{vmatrix} 0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & -\sigma^2 - c\sigma + \lambda & -ce_3 & ce_2 \\ r_2 & ce_3 & -\sigma^2 - c\sigma + \lambda & -ce_1 \\ r_3 & -c\omega_2 & ce_1 & -\sigma^2 - c\sigma + \lambda \end{vmatrix}.$$

Принимая во внимание соотношения на параметры задачи, возникшие после введения безразмерных переменных, заключаем, что

$$P(\sigma) = -\sigma^4 - 2c\sigma^3 - \left(c^2 - 2\lambda\right)\sigma^2 + 2c\lambda\sigma - \lambda^2 - c^2(\mathbf{e},\mathbf{r})^2.$$

Заметим, что характеристическое уравнение приводится к виду

$$(\sigma^2 + c\sigma - \lambda)^2 + c^2(\mathbf{e},\mathbf{r})^2 = 0;$$

тогда решения можно найти из квадратных уравнений с комплексными коэффициентами $\sigma^2 + c\sigma - \lambda = \varepsilon i c(\mathbf{e},\mathbf{r})$, $\varepsilon = \pm 1$.

Пусть сначала $\lambda \neq 0$, $e_3 \neq 0$. С помощью критерия Гурвица получим условия устойчивости

$$2c > 0, \quad 2c\left(c^2 - \lambda\right) > 0, \quad -4c^4\left((\mathbf{e},\mathbf{r})^2 + \lambda\right) > 0,$$

$$-4c^4\left(\lambda^2 + c^2(\mathbf{e},\mathbf{r})^{\mathbf{2}}\right)\left((\mathbf{e},\mathbf{r})^2 + \lambda\right) > 0.$$

Так как $c > 0$, то в силу этих неравенств соответствующее решение устойчиво при выполнении условия

$$\lambda + (\mathbf{e},\mathbf{r})^2 < 0, \tag{1.12}$$

принимающего ввиду соотношения (1.10) вид

$$\lambda^3 + g^2 e_3^2 < 0, \quad \lambda \neq 0. \tag{1.13}$$

Для отрицательного корня из выражения (1.9) условие (1.13) преобразуется к виду

$$g^2 e_3^2 < \left(\frac{g^2 - c^2 + \sqrt{\left(c^2 - g^2\right)^2 + 4g^2c^2e_3^2}}{2} \right)^{3/2}.$$

В первом квадранте плоскости (c, g) значения параметров, при которых движение устойчиво, располагаются под некоторой кривой Γ (на рис. 1.4) такие кривые *1*, *2* и *3* построены для значений параметра $e_3 = 1/10, 1/2, \sqrt{3}/2$ соответственно).

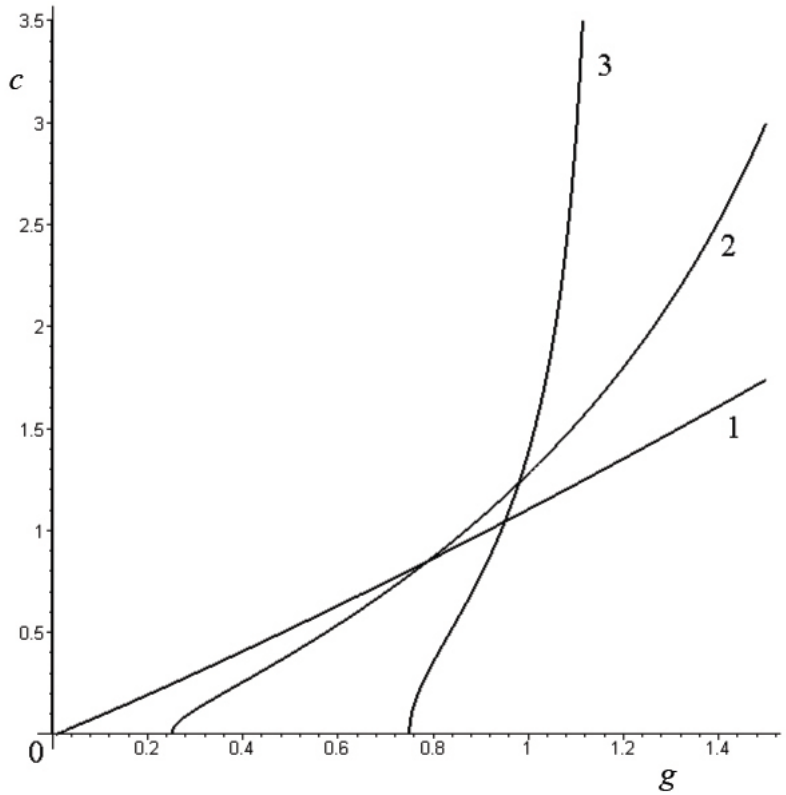

Рис. 1.4. *Области устойчивости: 1 – при* $e_3 = 1/10$, *2* – $1/2$, *3* – $\sqrt{3}/2$

Для положительного корня из выражения (1.9) условие устойчивости (1.12) не выполнено. На рис. 1.5 и 1.6 изображены траектории движения точки по сфере вблизи нижнего положения равновесия для таких значений параметров c и g, для которых оно устойчиво и неустойчиво соответственно. Для удобства они представлены в сферических координатах θ и φ, где угол θ – это угол между радиус-вектором точки

и восходящей вертикалью, а угол φ – угол между проекцией радиус-вектора точки на плоскость Ox_1x_2 и осью Ox_1. Угол наклона оси вращения сферы при этом составляет $\pi/4$.

Пусть теперь $\lambda = 0$. Тогда условия критерия Гурвица принимают вид

$$2c > 0, \quad 2c^3 > 0, \quad -4c^4(\mathbf{e}, \mathbf{r})^2 > 0, \quad -4c^6(\mathbf{e}, \mathbf{r})^4 > 0,$$

и равновесия (1.7) неустойчивы.

Наконец, исследуем устойчивость равновесий (1.11). Так как для них $e_3 = 0$, $(\mathbf{e}, \mathbf{r}) = 0$ и $\lambda_\pm = \pm\sqrt{g^2 - c^2}$, то условия критерия Гурвица принимают вид

$$2c > 0, \quad 2c\left(c^2 \mp \left(g^2 - c^2\right)^{1/2}\right) > 0, \quad \mp 4c^4\left(g^2 - c^2\right)^{1/2} > 0, \quad \mp 4c^4\left(g^2 - c^2\right)^{3/2} > 0.$$

При этом устойчивы равновесия, отвечающие нижнему знаку, и неустойчивы, отвечающие верхнему.

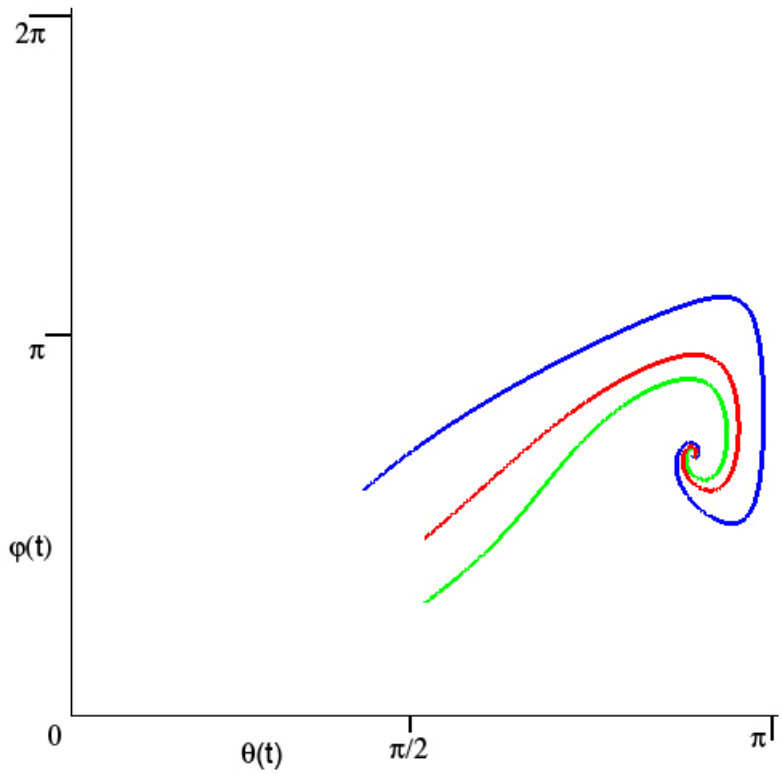

Рис. 1.5. *Траектории движения точки вблизи нижнего положения равновесия при $c = 4$, $g = 4$, $\alpha = \pi/4$*

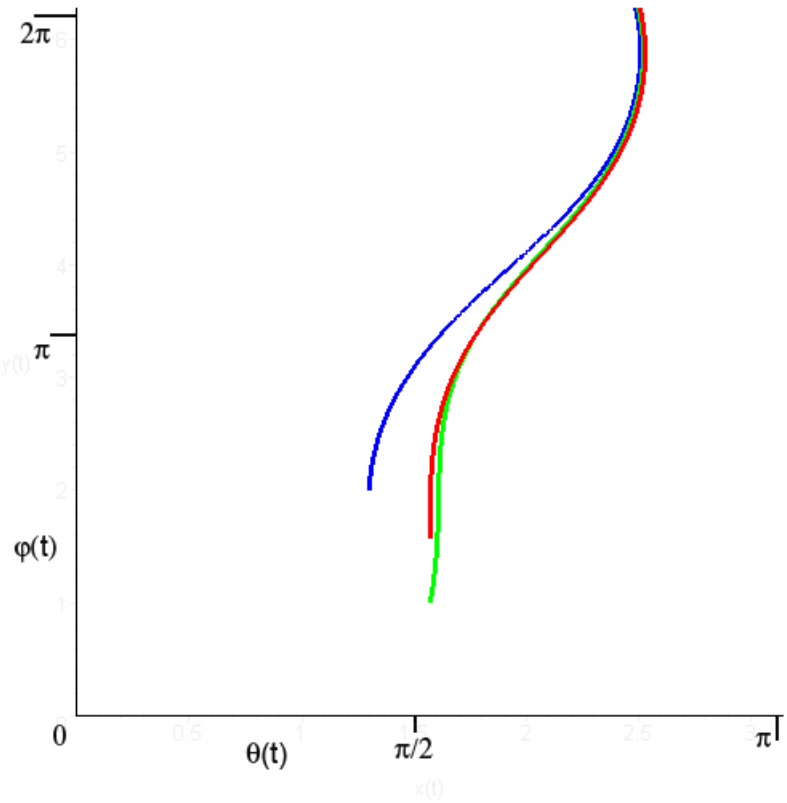

Рис. 1.6. *Траектории движения точки вблизи нижнего положения равновесия при* $c = 1$, $g = 0.5$, $\alpha = \pi/4$

1.4 Необходимое условие существования периодических движений при условии малости параметра возмущенной системы

Пусть

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{M}^n, \tag{1.14}$$

— система дифференциальных уравнений на гладком n-мерном многообразии $\mathbf{M}^n$, обладающая периодическим решением $\mathbf{x}(t) : \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+T)$ с периодом $T > 0$. Тогда для любой однозначной скалярной функции $F = F(\mathbf{x})$ на $\mathbf{M}^n$ имеет место равенство

$$F(\mathbf{x}(t)) = F(\mathbf{x}(t+T)), \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Если функция F дифференцируема, то вдоль траекторий системы (1.14) имеет место равенство

$$\frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\right),$$

которое представимо в виде

$$F\left(\mathbf{x}(t+T)\right) - F\left(\mathbf{x}(t)\right) = \int\limits_{t}^{t+T} \left(\frac{\partial F\left(\mathbf{x}(\tau)\right)}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(\tau)\right)\right) d\tau = 0. \quad (1.15)$$

Пусть теперь правая часть уравнений (1.14) гладким образом зависит от параметра ε, который будем считать малым. Тогда $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + \ldots$.

Предположим, что при $\varepsilon = 0$ невозмущенная система обладает первым интегралом $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(\mathbf{x})$, т.е.

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}_0\right) \equiv 0.$$

Тогда, выбирая функцию $\mathfrak{J}$ в качестве функции F, из (1.15) имеем

$$\varepsilon \int\limits_{t}^{t+T} \left(\frac{\partial \mathfrak{J}\left(\mathbf{x}(\tau)\right)}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}_1\left(\mathbf{x}(\tau)\right)\right) d\tau + \ldots = 0. \quad (1.16)$$

Пусть

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \varepsilon \mathbf{x}_1(t) + \ldots \quad (1.17)$$

— периодическое решение возмущенной системы с периодом T, порожденное периодическим решением $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t)$ невозмущенной системы с тем же периодом. Подстановка решения (1.17) в (1.16) и разложение правой части полученного выражения в ряд по степеням ε дает необходимое условие существования периодического решения (1.17) в виде

$$\int\limits_{t}^{t+T} \left(\frac{\partial \mathfrak{J}\left(\mathbf{x}_0(\tau)\right)}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}_1\left(\mathbf{x}_0(\tau)\right)\right) d\tau = 0.$$

Аналогичные условия оказываются верными и при отыскании двоякоасимптотических решений возмущенной задачи. Для произвольных t_1 и t_2 представим соотношение, аналогичное (1.15), в виде

$$F\left(\mathbf{x}(t_2)\right) - F\left(\mathbf{x}(t_1)\right) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F\left(\mathbf{x}(\tau)\right)}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(\tau)\right)\right) d\tau \quad (1.18)$$

и предположим, что невозмущенная система обладает двоякоасимптотическим движением

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t): \quad \mathbf{x}_0(\infty) = \mathbf{x}_0^+, \quad \mathbf{x}_0(-\infty) = \mathbf{x}_0^-,$$

неограниченно приближающимся к гиперболическим, быть может совпадающим положениям равновесия $\mathbf{x}_0^+$ и $\mathbf{x}_0^-$ при $t \mapsto \infty$ и $t \mapsto -\infty$ соответственно. Если $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(\mathbf{x})$ — первый интеграл невозмущенной системы, то $\mathfrak{J}(\mathbf{x}_0^+) = \mathfrak{J}(\mathbf{x}_0^-)$. Опираясь на рассуждения, аналогичные предыдущим и примененные к равенству (1.18), находим, что для существования решения

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_\varepsilon(t): \quad \mathbf{x}_\varepsilon(t) = \mathbf{x}_\varepsilon^+, \quad \mathbf{x}_\varepsilon(-t) = \mathbf{x}_\varepsilon^-,$$

двоякоасимптотического к гиперболическим периодическим решениям $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\varepsilon^+(t)$ и $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\varepsilon^-(t)$, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\mathfrak{J}(\mathbf{x}_\varepsilon^+) - \mathfrak{J}(\mathbf{x}_\varepsilon^-) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \mathfrak{J}\left(\mathbf{x}_0(\tau)\right)}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}_1\left(\mathbf{x}_0(\tau)\right) \right) d\tau = 0,$$

что верно, в частности, в случае, когда $\mathbf{x}_0^+$ и $\mathbf{x}_0^-$ совпадают.

Примечание. Применение метода, несомненно восходящего к Пуанкаре, в рамках рассматриваемой задачи обусловлено желанием предварительного отыскания начальных условий для численного построения периодических решений (см. [29], а также [18], [19]).

1.5 Периодические движения в случае малости приведенной вязкости

Пусть в рассматриваемой системе приведенная вязкость c мала. В пределе, при $c = 0$, имеем вполне интегрируемую задачу о движении сферического маятника. При этом уравнения движения допускают два первых интеграла — интеграл энергии $\mathfrak{J}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{r}', \mathbf{r}') + g(\mathbf{r}, \mathbf{e}_3)$ и интеграл площадей $\mathfrak{J}_1 = (\mathbf{r} \times \mathbf{r}', \mathbf{e}_3)$. Их производные в силу уравнений возмущенного движения имеют вид

$$\mathfrak{J}_0' = (\mathbf{r}', \mathbf{r}'') + g(\mathbf{r}', \mathbf{e}_3) = (\mathbf{r}', -g\mathbf{e}_3 + c(\mathbf{e} \times \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \lambda \mathbf{r}) + g(\mathbf{r}', \mathbf{e}_3) =$$

$$= c\left(\mathbf{r}', \mathbf{e} \times \mathbf{r} - \mathbf{r}'\right),$$

$$\mathfrak{J}_1' = (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}', \mathbf{e}_3) + (\mathbf{r} \times \mathbf{r}'', \mathbf{e}_3) = (\mathbf{r} \times (-g\mathbf{e}_3 + c(\mathbf{e} \times \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \lambda\mathbf{r}), \mathbf{e}_3) =$$
$$= c\,(\mathbf{r} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r} - \mathbf{r}'), \mathbf{e}_3)\,.$$

Так как невозмущенная задача представляет собой вполне интегрируемую систему с двумя степенями свободы, то в качестве "порождающих" периодических решений можно взять любые решения с соизмеримыми частотами. Ограничимся рассмотрением одночастотных прецессионных движений I и расположенных на нулевом уровне интеграла площадей плоских движений, двоякоасимптотических к верхнему положению равновесия II.

Так, прецессионные движения I имеют вид

$$r_1 = R\cos(\hat{\omega}t), \quad r_2 = R\sin(\hat{\omega}t), \quad r_3 = -\sqrt{1-R^2},$$

где $\hat{\omega} = const, \quad R = \sin\hat{\theta}$, при этом $\hat{\theta} = const$ — угол, который составляет радиус-вектор точки с вертикалью Ox_3, и $\hat{\theta} > \dfrac{\pi}{2}$.

На движениях в фиксированной вертикальной плоскости II

$$r_1 = f(t)\cos\beta, \quad r_2 = f(t)\sin\beta, \quad r_3 = g(t),$$

где β — угол между плоскостью движения и плоскостью Ox_1x_3.

1.6 Случай одночастотных прецессионных движений

Рассмотрим сначала одночастотные прецессионные невозмущенные движения I. Для них

$$\begin{cases} r_{01} = R\cos(\hat{\omega}t), \\ r_{02} = R\sin(\hat{\omega}t), \\ r_{03} = -\sqrt{1-R^2}, \\ \upsilon_{01} = -R\omega\sin(\hat{\omega}t), \\ \upsilon_{02} = R\omega\cos(\hat{\omega}t), \\ \upsilon_{03} = 0, \end{cases}$$

где $R = \sin\hat{\theta}, \quad \hat{\theta} = const, \quad \hat{\theta} > \frac{\pi}{2}, \quad \hat{\omega} = const.$

Система $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \boldsymbol{\upsilon})$ запишется следующим образом:

$$\begin{cases} r_1' = \upsilon_1, \\ r_2' = \upsilon_2, \\ r_3' = \upsilon_3, \\ \upsilon_1' = -c\cos\alpha r_2 - c\upsilon_1 + \lambda r_1, \\ \upsilon_2' = c\cos\alpha r_1 - c\sin\alpha r_3 - c\upsilon_2 + \lambda r_2, \\ \upsilon_3' = -g + c\sin\alpha r_2 - c\upsilon_3 + \lambda r_3, \end{cases}$$

где α — угол между осью вращения и осью Ox_3. Тогда условие существования периодического решения с периодом T

$$\int\limits_t^{t+T} \left(\frac{\partial \mathfrak{J}_0(\mathbf{x}_0(\tau))}{\partial x}, f(\mathbf{x}_0(\tau)) \right) d\tau = 0$$

примет вид

$$\int\limits_t^{t+T} (cR^2\cos\alpha - cR^2\hat{\omega} + cR\cos\hat{\omega}t\sqrt{1-R^2}\sin\alpha)d\tau = cR^2\cos\alpha T - cR^2 2\pi = 0$$

(здесь мы учли, что $\hat{\omega}T = 2\pi$). Тогда $T = \dfrac{2\pi}{\cos\alpha}$ при $\cos\alpha \neq 0$. Так как периодическое решение должно иметь тот же период, что и порождающее его движение невозмущенной системы, то условия для него следуют из равенства:

$$\frac{2\pi}{\cos\alpha} = \frac{2\pi}{\omega_\star}, \quad \omega_\star = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{1-R^2}}},$$

откуда получаем

$$\sqrt{1-R^2} = -\cos\hat{\theta} = \frac{g}{\cos^2\alpha}. \tag{1.19}$$

Рассмотрим теперь интеграл площадей $\mathfrak{J}_1 = r_2'r_1 - r_2r_1' = \upsilon_2 r_1 - \upsilon_1 r_2$. Аналогично, выписывая условие существования периодического решения с периодом T, получим

$$\int\limits_t^{t+T} (cR^2\hat{\omega}\cos\alpha - cR^2\hat{\omega}^2 + cR\cos\hat{\omega}t\sqrt{1-R^2}\hat{\omega}\sin\alpha)d\tau = 0. \tag{1.20}$$

На рассматриваемых невозмущенных движениях $\tilde{\omega} = \omega_\star$, поэтому условие (1.20) примет вид

$$2\pi cR^2\cos\alpha - cR^2\frac{gT}{\sqrt{1-R^2}} = 0,$$

откуда $T = \dfrac{2\pi}{g}\sqrt{1-R^2}\cos\alpha$. Приравнивая полученное выражение к периоду невозмущенного движения, вновь приходим к условию (1.19), полученному для интеграла площадей.

Таким образом, если периодическое решение, близкое к одночастотному прецессионному движению невозмущенной системы существует, то его период составляет $T = \dfrac{2\pi}{\cos\alpha}$ и выполнено условие (1.19). В частности, при $\cos\alpha = 0$, т. е. для горизонтальной оси вращения, таких решений не существует.

На рис. 1.7 периодическое решение возмущенной системы при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $\hat{\theta} = \dfrac{3\pi}{4}$, $g = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\hat{\omega} = \sqrt{2}$ изображено для наглядности на периоде в сферических координатах θ, φ.

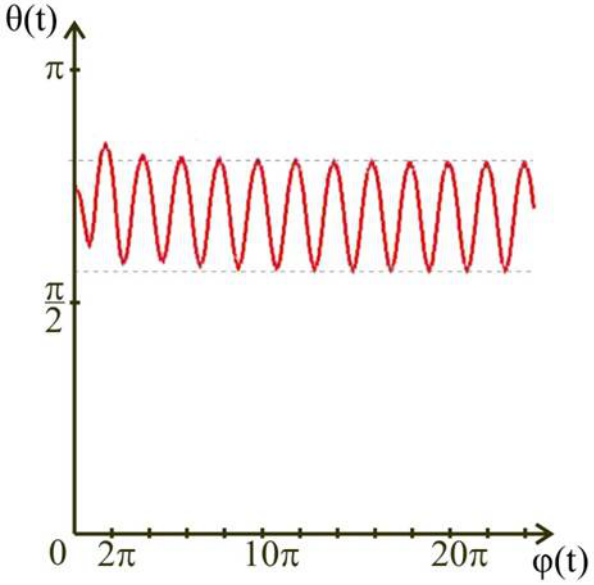

Рис. 1.7. *Периодическое решение при* $\alpha = \pi/4$, $\hat{\theta} = 3\pi/4$, $g = \sqrt{2}/4$, $\hat{\omega} = \sqrt{2}$

1.7 Случай двоякоасимптотических движений

Для того, чтобы перейти к случаю решений, порожденных двоякоасимптотическим движением, рассмотрим плоский аналог изучаемой задачи. Это система, состоящая из тяжелой точки и неподвижной окружности, которая расположена в вертикальной плоскости, и по которой эта точка может двигаться. В отсутствие трения уравнения движения этой системы интегрируются в эллиптических функци-

ях. Исключение составляет случай двоякоасимптотических движений. Пусть угол q отмеряется от нисходящей вертикали. Тогда из интеграла энергии

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - \Omega^2 \cos q = h$$

при константе $h = \Omega^2$, отвечающей двоякоасимптотическим, гомоклиническим движениям находим

$$\cos\frac{q}{2} = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\Omega(t-t_0)\right)}, \quad \frac{dq}{dt} = 2\frac{\varepsilon\Omega}{\operatorname{ch}\left(\Omega(t-t_0)\right)}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Возвращаясь к трехмерной задаче, получим:

$$r_3 = -\cos q = g(t) = -\left(\cos^2\frac{q}{2} - \sin^2\frac{q}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2\left(\Omega(t-t_0)\right)},$$

$$f(t) = \sin q = 2\sin\frac{q}{2}\cos\frac{q}{2} = 2\varepsilon\frac{\operatorname{sh}\left(\Omega(t-t_0)\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\Omega(t-t_0)\right)}.$$

Таким образом, в невозмущенной задаче имеется семейство двоякоасимптотических движений, параметризованное углом β поворота плоскости вокруг вертикального диаметра сферы. На этих движениях

$$r_1 = 2\varepsilon\frac{\operatorname{sh}\left(\Omega(t-t_0)\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\Omega(t-t_0)\right)}\cos\beta, \quad r_2 = 2\varepsilon\frac{\operatorname{sh}\left(\Omega(t-t_0)\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\Omega(t-t_0)\right)}\sin\beta,$$

$$r_3 = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2\left(\Omega(t-t_0)\right)}.$$

Запишем интеграл энергии для этой задачи

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{1}{2}(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2) + g r_3.$$

Тогда необходимое условие существования двоякоасимптотического решения возмущенной задачи

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\mathfrak{J}_2(\mathbf{x}_0(\tau))}{\partial x}, f(\mathbf{x}_0(\tau))\right)d\tau = 0$$

запишется так:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\varepsilon\Omega}{\operatorname{ch}(\Omega(t-t_0))}\sin\alpha\sin\beta - \frac{4\Omega^2}{\operatorname{ch}^2(\Omega(t-t_0))}\right)d\tau = \varepsilon\pi\sin\alpha\sin\beta - 8\Omega = 0.$$

Таким образом, если решение, близкое к двоякоасимптотическому верхнему положению равновесия невозмущенной задачи, существует, то выполнено условие $\Omega = (\pi/8)\sin\alpha\sin\beta$. В частности, если ось вращения вертикальна, то это условие не может быть выполнено. На рис.1.8 изображено периодическое решение, порожденное двоякоасимптотическим решением невозмущенной задачи при $\alpha = \pi/4$, $g = \pi^2/256$, $c = 0.2$, $\sin\beta = 1/\sqrt{2}$.

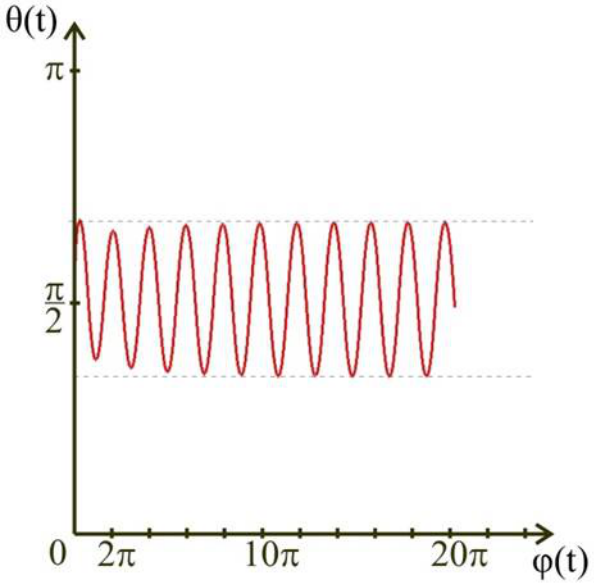

Рис. 1.8. *Периодическое решение при* $\alpha = \pi/4$, $g = \pi^2/256$, $c = 0.2$, $\sin\beta = 1/\sqrt{2}$

Глава 2

Точка на сфере при наличии сухого трения

2.1 Постановка задачи

Рассматривается задача о движении тяжелой бусинки массы m по сферической поверхности, совершающей вращение в абсолютном пространстве вокруг оси $\vec{e}$, проходящей через центр сферы. Предполагается, что ось вращения составляет с восходящей вертикалью угол $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, вращение происходит с постоянной угловой скоростью ω. Считаем, что взаимодействие точки и сферы осуществляется по закону сухого трения, коэффициент трения равен μ.

Пусть центр сферы совпадает с центром неподвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$, ось вращения лежит в плоскости Ox_1x_3. Будем задавать положение точки на сфере при помощи сферических углов θ и φ: $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < \pi$. (см. рис.2.1).

Абсолютная скорость точки P в сферических координатах записывается как

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_\theta \vec{e}_\theta + \upsilon_\varphi \vec{e}_\varphi,$$

где $\upsilon_\theta = \ell\dot{\theta}, \quad \upsilon_\varphi = \ell \sin\theta\dot{\varphi}$. Тогда скорость точки P относительно вращающейся сферы принимает вид

$$\vec{\upsilon'} = \upsilon'_\theta \vec{e}_\theta + \upsilon'_\varphi \vec{e}_\varphi,$$

где $\upsilon'_\theta = \ell\dot{\theta} + \ell\omega \sin\alpha \sin\varphi, \quad \upsilon'_\varphi = \ell \sin\theta\dot{\varphi} + \ell\omega \sin\alpha \cos\theta \cos\varphi - \ell\omega \sin\theta \cos\alpha$.

В координатах (θ, φ) уравнения скольжения точки по сфере запи-

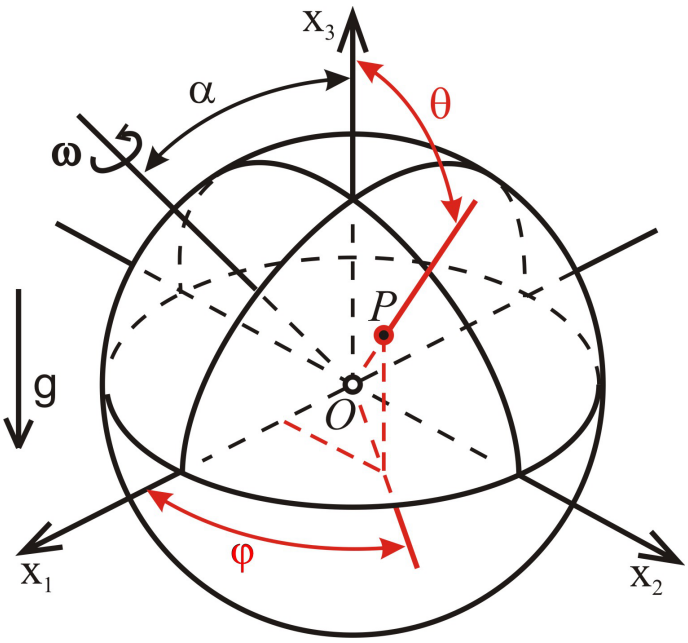

Рис. 2.1. *Положение точки на сфере задается сферическими углами θ и φ*

шутся следующим образом:

$$\begin{cases} m\ell(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2) = mg\sin\theta - F\dfrac{v'_\theta}{|\vec{v'}|} \\ m\ell(\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta) = -F\dfrac{v'_\varphi}{|\vec{v'}|}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где F — сила трения.

Уравнения (2.1) задают движение в проекции на оси с единичными векторами $\vec{e_\theta}$ и $\vec{e_\varphi}$. Так как предполагается скольжение точки по сфере, то сила трения находится из выражения

$$F = \mu|N|, \quad N = m\ell(-\sin^2\theta\ddot{\varphi} - \dot{\theta}^2) + mg\cos\theta. \tag{2.2}$$

где N – нормальная реакция. Здесь и далее связь предполагается удерживающей.

Рассмотрим различные случаи положения оси вращения.

2.2 Случай наклонной оси вращения. Положения абсолютного равновесия

Рассмотрим сначала случай наклонной оси вращения. Чтобы найти положения абсолютного равновесия, положим в (2.1) $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$,

$\ddot{\theta} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$:

$$\begin{cases} 0 = mg\sin\theta - \mu|N|\dfrac{\sin\alpha\sin\varphi}{R(\theta,\varphi,\alpha)} \\ 0 = -\mu|N|\dfrac{\sin\alpha\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\cos\alpha}{R(\theta,\varphi,\alpha)} \end{cases} \tag{2.3}$$

где $R(\theta,\varphi,\alpha) = \sqrt{(\sin\alpha\sin\varphi)^2 + (\sin\alpha\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\cos\alpha)^2}$.

Имеются две возможности для расположения точки на сфере.

Случай 1. Пусть точка находится в верхней полусфере. Тогда $\cos\theta > 0$ и в силу 2.3 в области $\sin\varphi > 0$ решение имеет вид:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \mu\operatorname{ctg}\alpha, \\ \operatorname{tg}\theta = \mu. \end{cases} \tag{2.4}$$

Пусть μ фиксировано, а α меняется от $\pi/2$ до 0. При всех допустимых значениях α частица располагается на «параллели», отвечающей углу $\theta = \operatorname{arctg}\mu$. При $\alpha = \pi/2$, т.е. в случае горизонтальной оси вращения, из (2.4) имеем $\varphi = \pi/2$, и частица располагается на пересечении указанной параллели и большого круга – «меридиана», перпендикулярного оси вращения. Если значение α убывает от $\pi/2$ до $\alpha_* = \operatorname{arctg}\mu$, то положение равновесия перемещается вдоль указанной параллели и при $\alpha = \alpha_*$ оказывается в точке, отвечающей $\varphi = 0$. При $\alpha < \alpha_*$ этого положения равновесия не существует. В области $\sin\varphi < 0$ для верхней полусферы решений нет.

Случай 2. Пусть точка находится в нижней полусфере, тогда $\cos\theta < 0$, и в области $\sin\varphi > 0$ решение имеет вид:

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\mu\operatorname{ctg}\alpha \\ \operatorname{tg}\theta = -\mu, \end{cases} \tag{2.5}$$

в то время как в области $\sin\varphi < 0$ решений нет.

Таким образом, аналогично случаю 1, при изменении α от $\pi/2$ до $\alpha_* = \operatorname{arctg}\mu$ при фиксированном μ, положение равновесия будет смещаться вдоль параллели $\theta = \pi - \operatorname{arctg}\mu$. В случае горизонтальной оси вращения $\cos\varphi = 0$, то есть $\varphi = \pi/2$, и частица располагается на большом круге, ей перпендикулярном. Далее положение равновесия

перемещается вдоль указанной параллели и при $\alpha = \alpha_*$ оказывается в точке, отвечающей $\varphi = \pi$. Как и в предыдущем случае, при $\alpha < \alpha_*$ этого положения равновесия не существует.

Таким образом, получаем, что при выполнении условия $|\mu \operatorname{ctg} \alpha| \leq 1$ всегда есть два положения равновесия в абсолютном пространстве. Эти равновесия зависят от коэффициента трения μ и угла наклона оси вращения сферы α, и не зависят от угловой скорости вращения сферы ω.

На рис.2.2 показано изменение положений равновесия в при увеличении коэффициента трения μ от 0 до 1 для различных значений угла наклона оси вращения α. На рис.2.3 изображено изменение координаты φ положений равновесия в зависимости от угла наклона α для различных значений коэффициента трения μ. Координата θ на каждой из этих кривых остается постоянной. На рис.2.4 кривые изменения положений равновесия при увеличении коэффициента трения от 0 до 1 показаны на сфере, угол наклона оси при этом составляет $\pi/4$.

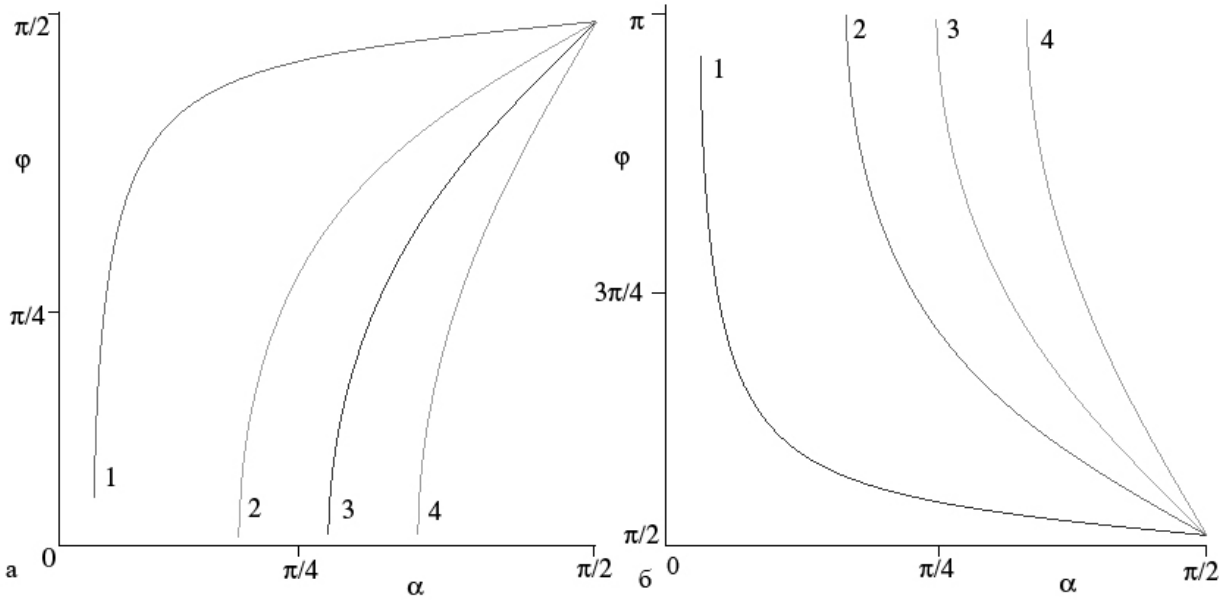

Рис. 2.2. *Изменение верхнего (а) и нижнего (б) положений равновесия при увеличении коэффициента трения μ от 0 до 1: 1 – при* $\operatorname{ctg} \alpha = 0.1$, *2* – $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, *3* – $\operatorname{ctg} \alpha = 1$, *4* – $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$

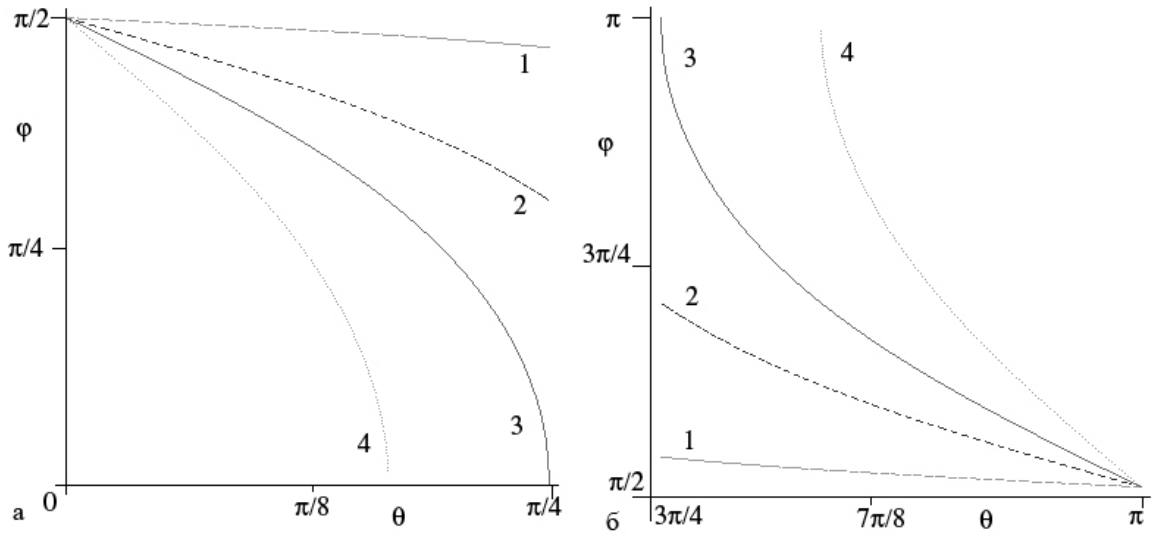

Рис. 2.3. *Изменение координаты φ верхнего (а) и нижнего (б) положений равновесия при увеличении угла наклона оси вращения α от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$: 1 – при $\mu = 0.1$, 2 – $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, 3 – $\mu = 1$, 4 – $\mu = \sqrt{3}$*

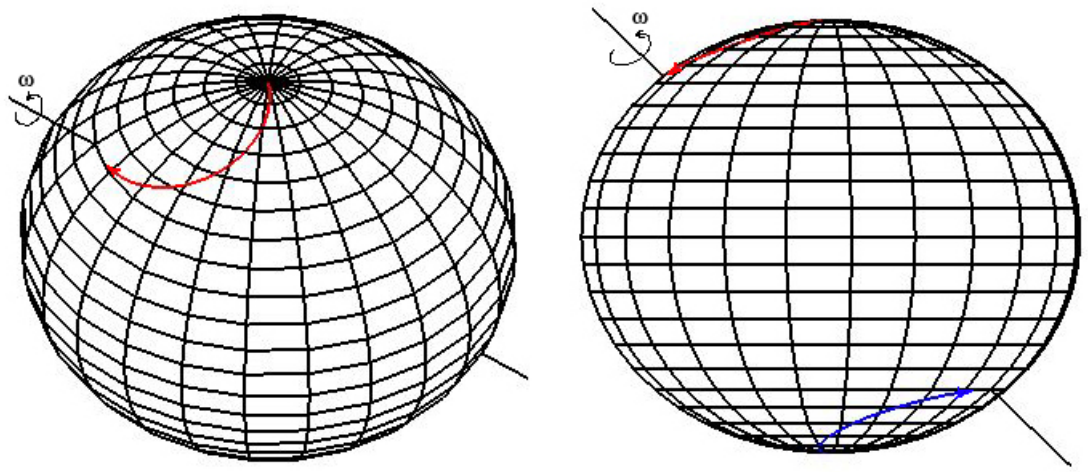

Рис. 2.4. *Изменение положений равновесия на сфере при увеличении коэффициента μ от 0 до 1 при угле наклона $\alpha = \pi/4$*

2.3 Случай наклонной оси вращения. Исследование устойчивости в первом приближении

Для исследования условий устойчивости линеаризуем уравнения в окрестности полученных положений равновесия, введя малые возмущения $\theta = \theta_0 + \hat{\theta}$, $\varphi = \varphi_0 + \hat{\varphi}$. Можно считать, что возмущения настолько малы, что нормальная реакция $\hat{N} = g\cos\theta_0 - g\hat{\theta}\sin\theta_0$, присут-

ствующая под знаком модуля, имеет тот же знак, что и для соответствующего положения равновесия. Пусть $\varepsilon = \pm 1$ – знак, определяющий рассматриваемое положение равновесия, тогда линеаризованные уравнения на решениях (2.4) и (2.5) соответственно примут вид:

$$\begin{cases} \ell\ddot{\hat{\theta}} - g\cos\theta_0\hat{\theta} - \varepsilon\mu g\sin\theta_0\hat{\theta} = 0, \\ \ell\omega\sin\theta_0\sin\varphi_0\sin\alpha\ddot{\hat{\varphi}} + \varepsilon\mu g\cos\theta_0\sin\theta_0\dot{\hat{\varphi}} - \varepsilon\mu g\omega\cos^2\theta_0\sin\varphi_0\sin\alpha\hat{\varphi} - \\ -\varepsilon\mu g\omega(\sin\theta_0\cos\theta_0\cos\varphi_0\sin\alpha + \cos^2\theta_0\cos\alpha)\hat{\theta} = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Характеристическое уравнение для этой системы запишется как:

$$\ell^2\omega\sin\theta_0\sin\varphi_0\sin\alpha P_1(\sigma) = (\ell\sigma^2 - g\cos\theta_0 - \varepsilon\mu g\sin\theta_0)\cdot \\ \cdot(\ell\omega\sin\theta_0\sin\varphi_0\sin\alpha\sigma^2 + \varepsilon\mu g\cos\theta_0\sin\theta_0\sigma - \varepsilon\mu g\omega\sin\varphi_0\cos^2\theta_0\sin\alpha), \tag{2.7}$$

где значения θ_0 и φ_0 взяты из (2.4) или (2.5).

Первый сомножитель (2.7) обращается в нуль при

$$\sigma_{1,2} = \sqrt{\frac{\varepsilon g}{\ell}\sqrt{1+\mu^2}}.$$

При $\varepsilon = 1$ характеристическое уравнение имеет корень с положительной действительной частью, что означает, что верхнее положение равновесия неустойчиво. Второй сомножитель обращается в нуль при:

$$\sigma_{3,4} = \frac{-\mu^2 g \pm \sqrt{\mu^4 g^2 + 4\varepsilon\mu^2\sqrt{1+\mu^2}g\ell\omega^2(1-\mu^2\operatorname{ctg}^2\alpha)\sin^2\alpha}}{2\ell\omega\mu\sin\alpha\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{1-\mu^2\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

При $\varepsilon = -1$, то есть для нижнего положения равновесия, имеются два чисто мнимых корня и два корня с отрицательной действительной частью, поэтому нижнее положение устойчиво в первом приближении.

2.4 Случай вертикальной оси вращения

Рассмотрим теперь случай, когда ось вращения сферы вертикальна. В этом случае в положениях равновесия сферические координаты вырождаются, поэтому будем использовать декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$. Пусть радиус-вектор $\mathbf{r}$ задает положение точки, $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_3$

— угловая скорость вращения сферы. Уравнения скольжения в этой системе выглядят как:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{e}_3 - \mu|\lambda\mathbf{r}|\frac{\dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}}{|\dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}|} + \lambda\mathbf{r}, \tag{2.8}$$

где λ — множитель Лагранжа. Эти уравнения необходимо рассматривать совместно с уравнением сферы

$$\frac{1}{2}((\mathbf{r},\mathbf{r}) - \ell^2) = 0. \tag{2.9}$$

Несложно показать, что положения равновесия в этом случае задаются как:

$$r_{10} = 0, \quad r_{20} = 0, \quad r_{30} = \pm\ell, \quad \lambda_0 = \pm\frac{mg}{\ell}.$$

то есть они являются полюсами сферы. Эти точки являются положениями равновесия не только в абсолютном пространстве, но также в системе отсчета, связанной со сферой. Множество относительных равновесий будет исследовано в следующем разделе.

2.5 Относительные равновесия. Бифуркационные диаграммы

Введем подвижную систему координат, связанную с вращающейся сферой $Oy_1y_2y_3$, ось Oy_3 которой совпадает с осью вращения. Положение точки в ней будет задаваться сферическими углами – углом ξ между осью Oy_3 и вектором $\mathbf{OP}$ и углом η между осью Oy_1 и вектором OP' , где P' – проекция точки на плоскость Oy_1y_2.

Перейдем к безразмерному времени $t \mapsto \sqrt{\frac{\ell}{g}}t$ и введем безразмерный параметр $\Omega^2 \mapsto \frac{\ell}{g}\omega^2$. Дифференцирование по новому времени обозначим штрихом. Тогда система уравнений движения в подвижной

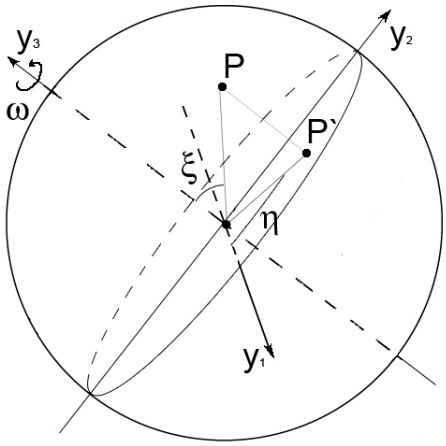

Рис. 2.5. *Изменение положений равновесия на сфере при увеличении коэффициента μ от 0 до 1 при угле наклона $\alpha = \pi/4$*

системе координат запишется как:

$$\begin{cases} (-\sin^2\xi\eta'^2 - \xi'^2) = -(\sin\xi\cos\eta\sin\omega t\sin\alpha + \sin\xi\sin\eta\cos\omega t\sin\alpha + \\ +\cos\xi\cos\alpha) + \tilde{N}_r + \Omega^2\sin^2\xi + 2\Omega\sin^2\xi\eta', \\ (\xi'' - \sin\xi\cos\xi\eta'^2) = -(\cos\xi\cos\eta\sin\omega t\sin\alpha + \cos\xi\sin\eta\cos\omega t\sin\alpha - \\ -\sin\xi\cos\alpha) - \tilde{F}_\xi + \Omega^2\cos\xi\sin\xi + 2\Omega\sin\xi\cos\xi\eta', \\ (\sin\xi\eta'' + 2\xi'\eta'\cos\xi) = (\sin\omega t\sin\eta\sin\alpha - \cos\omega t\cos\eta\sin\alpha) - \tilde{F}_\eta - \\ -2\Omega\cos\xi\xi', \end{cases} \tag{2.10}$$

где $\tilde{F}_\xi = F_\xi/mg$, $\tilde{F}_\eta = F_\eta/mg$ – безразмерные компоненты силы трения в подвижной сферической системе координат, $\tilde{N}_r = N_r/mg$ – обезразмеренная нормальная реакция. Вводя угол $\gamma = \eta - \dfrac{\pi}{2} + \omega t$ и отбрасывая тильды, перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases} (-\sin^2\xi\gamma'^2 - \xi'^2) = -(\sin\xi\sin\alpha\cos\gamma + \cos\xi\cos\alpha) + N_r + \Omega^2\sin^2\xi + \\ +2\Omega\sin^2\xi\gamma', \\ (\xi'' - \sin\xi\cos\xi\gamma'^2) = -(\cos\xi\sin\alpha\cos\gamma - \sin\xi\cos\alpha) - F_\xi + \\ +\Omega^2\cos\xi\sin\xi + 2\Omega\sin\xi\cos\xi\gamma', \\ (\sin\xi\gamma'' + 2\xi'\gamma'\cos\xi) = \sin\alpha\sin\gamma - F_\eta - 2\Omega\cos\xi\xi'. \end{cases} \tag{2.11}$$

Положения равновесия задаются соотношениям $\xi' = 0$, $\gamma' = 0$, $\xi'' =$

0, $\gamma'' = 0$. На них выполнено соотношение:

$$\sqrt{F_\xi^2 + F_\eta^2} \leq \mu N_r,$$

или

$$F_\xi^2 + F_\eta^2 \leq \mu^2 N_r^2, \tag{2.12}$$

где

$$F_\xi = -\cos\xi\sin\alpha\cos\gamma + \sin\xi\cos\alpha + \Omega^2\cos\xi\sin\xi, \quad F_\eta = \sin\alpha\sin\gamma,$$

$$N_r = \sin\xi\sin\alpha\cos\gamma - \cos\xi\cos\alpha - \Omega^2\sin^2\xi.$$

Подставляя эти выражения в неравенство (2.12), получим:

$$\begin{gathered}(-\cos\xi\sin\alpha\cos\gamma + \sin\xi\cos\alpha + \Omega^2\cos\xi\sin\xi)^2 + \sin^2\alpha\sin^2\gamma \leq \\ \leq \mu^2(\sin\xi\sin\alpha\cos\gamma - \cos\xi\cos\alpha - \Omega^2\sin^2\xi)^2.\end{gathered} \tag{2.13}$$

Пусть

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad x = \cos\gamma,$$

где

$$a = -(\mu^2+1)\sin^2\xi\sin^2\alpha,$$

$$b = 2\sin\xi\sin\alpha(g\cos\xi\cos\alpha(1-\mu^2) - \Omega^2(\cos^2\xi - \mu^2\sin^2\xi)),$$

$$\begin{gathered}c = \cos^2\alpha(\sin^2\xi - \mu^2\cos^2\xi) + \sin^2\alpha + \Omega^4\sin^2\xi(\cos^2\xi - \mu^2\sin^2\xi) - \\ -2\Omega^2\sin^2\xi\cos\xi\cos\alpha(1+\mu^2),\end{gathered}$$

причем $a < 0$ при $\alpha \neq 0, \pi$. Тогда при выполнении этого условия справедливость неравенства (2.13) эквивалентна справедливости неравенства:

$$P(x) \leq 0 \tag{2.14}$$

на отрезке $x \in [-1, 1]$.

Координаты вершины A параболы $y = ax^2 + bx + c$, являющейся границей области равновесий, записываются как:

$$x_A = -\frac{b}{2a} = \frac{\cos\xi\cos\alpha(1-\mu^2) - \Omega^2(\cos^2\xi - \mu^2\sin^2\xi)}{(\mu^2+1)\sin\xi\sin\alpha},$$

$$y_A = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{(\cos\xi\cos\alpha(1-\mu^2) - \Omega^2(\cos^2\xi - \mu^2\sin^2\xi))^2}{\mu^2+1} +$$
$$+\cos^2\alpha(\sin^2\xi - \mu^2\cos^2\xi) + \sin^2\alpha + \Omega^4\sin^2\xi(\cos^2\xi - \mu^2\sin^2\xi) -$$
$$-2\Omega^2\sin^2\xi\cos\xi\cos\alpha(1+\mu^2).$$

При $y_A \leq 0$ неравенство (2.14) выполнено. При $y_A > 0$ для выполнения условия достаточен один из двух вариантов: 1) Условие выполнено для правой границы $x = 1$, то есть $P(1) = a + b + c \leq 0$ и вершина находится правее, то есть $x_A \geq 1$; 2) Условие выполнено для левой границы $x = -1$, то есть $P(-1) = a - b + c \leq 0$ и вершина находится левее, то есть $x_A \leq -1$.

Таким образом, бифуркационные диаграммы можно построить как объединение этих трех областей. На рис. 2.6–2.10 представлены бифуркационные диаграммы при разных значениях угла α и $\mu = 0.7$. Множества относительных равновесий получаются из них поворотом на 2π вокруг оси, совпадающей с осью вращения. При $\alpha = 0$ (рис. 2.6) диаграмма представляет собой половину «жирной вилки» F, дополненную областью равновесий в виде «иглы» G, вытянутой вдоль оси $\xi = \pi$, сужающейся при $\Omega \to \infty$, что аналогично результату, полученному в [48]. При увеличении угла наклона α область G и перемычка между зубцами «вилки» уменьшаются (рис.2.7), затем «вилка» распадается (рис.2.8), а при $\alpha > \arctan\mu$ остается только больший зубец (рис.2.9), который распрямляется при дальнейшем увеличении α (рис.2.10). Для всех значений α в пределе при $\Omega \to \infty$ область равновесия представляет собой полосу, ограниченную $\xi = \arctan(1/\mu)$ и $\xi = \pi - \arctan(1/\mu)$.

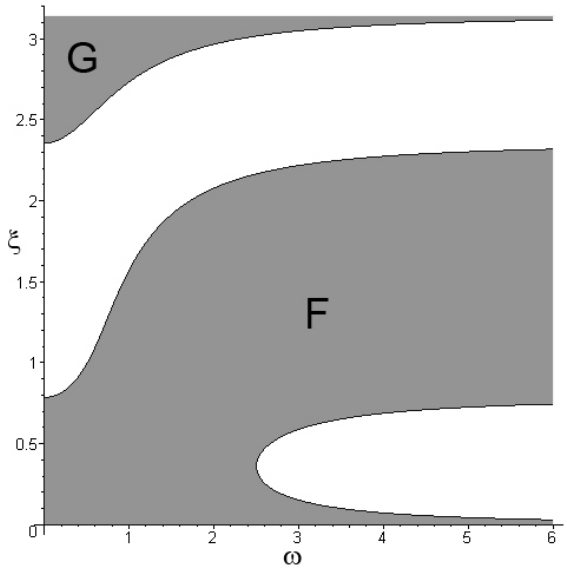

Рис. 2.6. Бифуркационная диаграмма при $\alpha = 0$

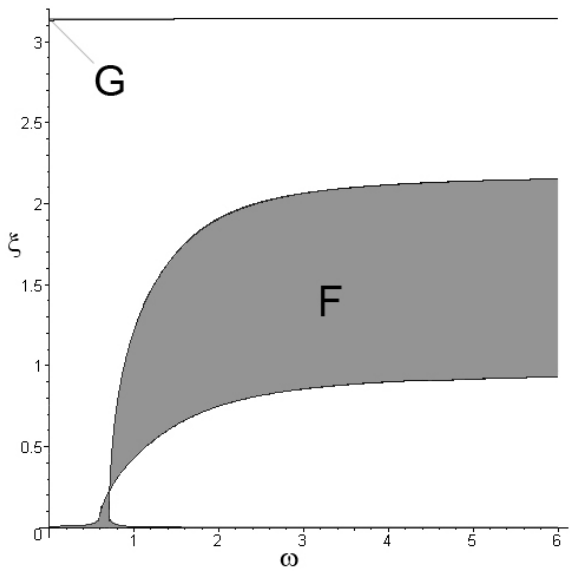

Рис. 2.7. Бифуркационная диаграмма при $\alpha = 0.6077$

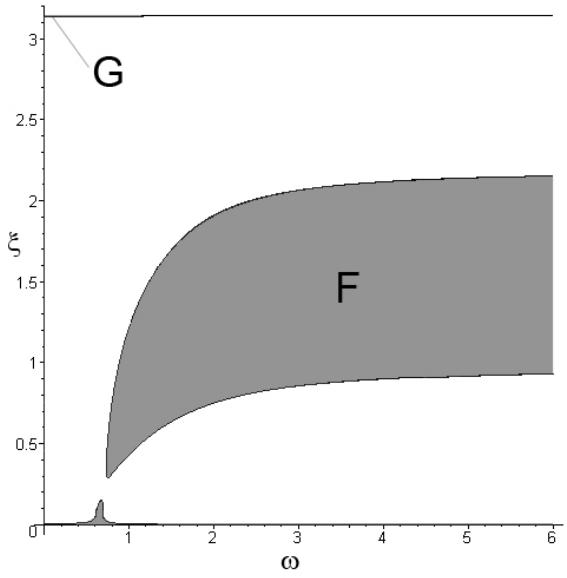

Рис. 2.8. Бифуркационная диаграмма при $\alpha = 0.6087$

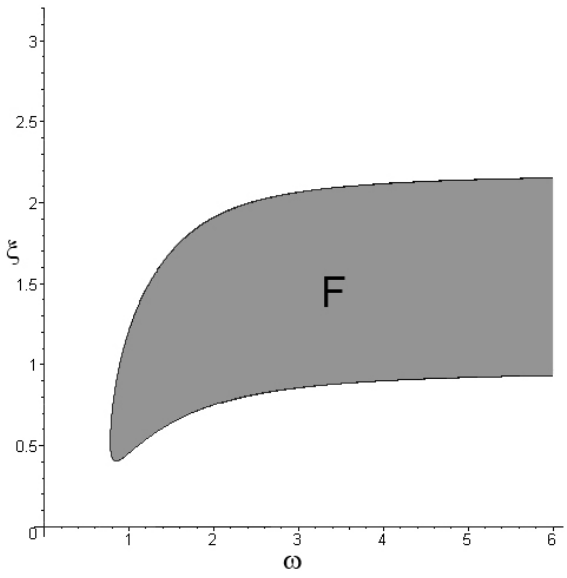

Рис. 2.9. Бифуркационная диаграмма при $\alpha = \arctan(0.7) + 0.01$

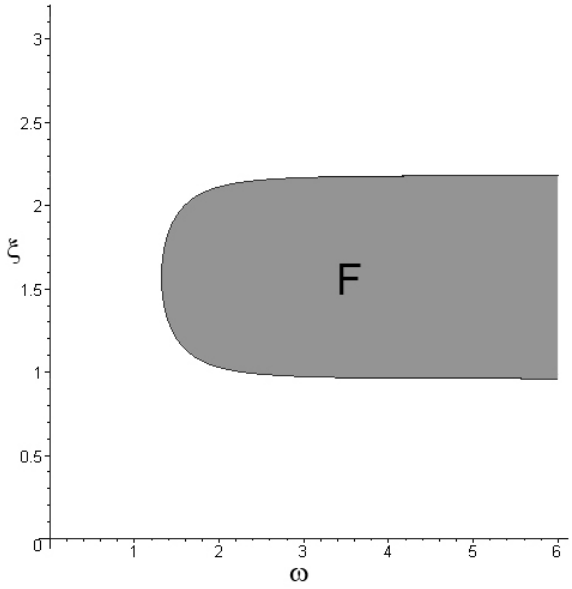

Рис. 2.10. Бифуркационная диаграмма при $\alpha = \pi/2$

Глава 3

Точка на окружности, вращающейся вокруг наклонной оси

3.1 Постановка задачи и уравнения движения в избыточных координатах

Рассматривается движение тяжелой материальной точки – бусинки P массы m, нанизанной на круговой обруч радиуса ℓ с центром в точке O, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω вокруг наклонной оси, лежащей в его плоскости и проходящей через его центр. Предполагается, что между бусинкой и обручем действует сила сухого трения с коэффициентом трения μ.

Движение бусинки можно описать с помощью уравнений Лагранжа первого рода в связанной с обручем подвижной системе координат (ПСК). Пусть $Oxyz$ – такая система координат с началом в центре обруча, ось z которой направлена по оси вращения обруча, ось y располагается в плоскости обруча, ось x перпендикулярна плоскости обруча, при этом тройка x, y и z — правая (см.рис.3.1).

В ПСК положение бусинки P будет задаваться координатами (x, y, z), а связи, стесняющие ее движение, будут определяться соотношениями

$$f_1 = \frac{1}{2}\left(y^2 + z^2 - \ell^2\right) = 0, \quad f_2 = x = 0 \tag{3.1}$$

Пусть $\mathbf{v}_r = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ – скорость бусинки в ПСК, $v_r = (\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_r)^{1/2}$. Так как ее переносная скорость $\mathbf{v}_e = (-\omega y, \omega x, 0)$, то кинетическая энергия

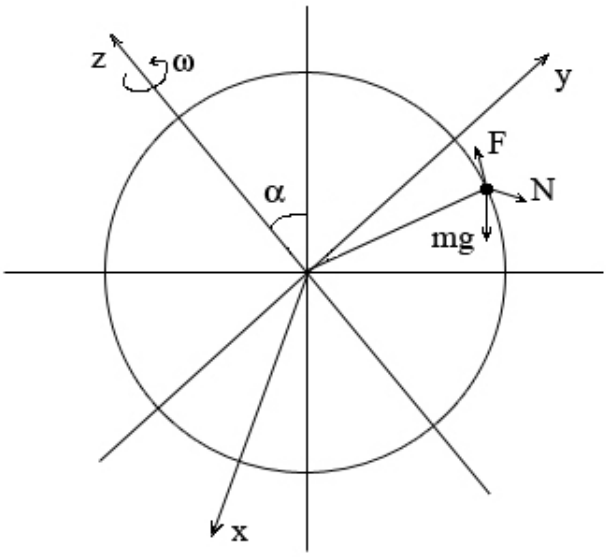

Рис. 3.1. *Бусинка, надетая на вращающуюся вокруг наклонной оси окружность*

системы, освобожденной от связей имеет вид

$$T = \frac{m}{2}((\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + \dot{z}^2).$$

Потенциальная энергия в подвижной системе координат определяется соотношением

$$U = mg(x \sin \omega t \sin \alpha + y \cos \omega t \sin \alpha + z \cos \alpha),$$

где g – ускорение свободного падения. Тогда уравнения Лагранжа записываются следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial y} + F_y, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial z} + F_z \tag{3.2}$$

$$L_\lambda = L + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \quad L = T - U \tag{3.3}$$

Уравнения (5.2) можно представить как

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_N + \mathbf{N} + \mathbf{F}$$

где $\mathbf{a}$ – ускорение бусинки в ПСК, $\mathbf{F}_C$ и $\mathbf{F}_c$ – кориолисова и центробежная силы, $\mathbf{F}_N$ – сила тяжести, $\mathbf{N}$ – нормальная реакция обруча, $\mathbf{F}$

– сила трения. Единичные векторы

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z/\ell \\ y/\ell \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y/\ell \\ -z/\ell \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

определяют соответственно касательную, внутреннюю нормаль и бинормаль к окружности в точке P. Тогда выражения для сил имеют вид:

$$\mathbf{F}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -2m\omega\dot{y} \\ 2m\omega\dot{x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ m\omega^2 y \\ m\omega^2 z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N} = -\lambda_1 \ell \mathbf{n} + \lambda_2 \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 y \\ \lambda_1 z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} || \boldsymbol{\tau}$$

причем в случае скольжения ($\mathbf{v}_r \neq 0$)

$$\mathbf{F} = -\mu \frac{\mathbf{v}_r}{v_r} N, \quad N = (\mathbf{N}, \mathbf{N})^{1/2} \tag{3.4}$$

Введем безразмерные параметры при помощи соотношений:

$$x \mapsto x\ell, \quad y \mapsto y\ell, \quad z \mapsto z\ell, \quad a \mapsto a\ell, \quad t \mapsto t\sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad \omega \mapsto \omega\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$
$$\lambda_1 \mapsto \lambda_1 m\frac{g}{\ell}, \quad \lambda_2 \mapsto \lambda_2 mg, \quad L \mapsto Lmg\ell, \quad F_x \mapsto mgF_x, \quad F_y \mapsto mgF_y \tag{3.5}$$

Сохраняя точку над символом как обозначение производной по новому времени, учитывая выражения (5.5) уравнения связей (5.1) и функцию Лагранжа (5.3) получим

$$f_1 = \frac{1}{2}\left(y^2 + z^2 - 1\right) = 0, \quad f_2 = x = 0,$$
$$L_\lambda = \frac{1}{2}((\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + \dot{z}^2) - x\sin\omega t\sin\alpha - y\cos\omega t\sin\alpha -$$
$$-z\cos\alpha + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2. \tag{3.6}$$

Для определения множителей Лагранжа λ_1 и λ_2 необходимо вычислить первые и вторые производные по времени от тождеств, задающих

связи. Они имеют вид

$$y\dot{y} + z\dot{z} = 0, \quad \dot{x} = 0 \tag{3.7}$$

$$y\ddot{y} + z\ddot{z} + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0, \quad \ddot{x} = 0. \tag{3.8}$$

Кроме того, так как вектор силы трения касается окружности в точке P, то

$$yF_y + zF_z = 0$$

и подстановка в тождества (5.7) и (5.8) выражений для вторых производных из уравнений (5.2) позволяет представить λ_1 и λ_2, а также уравнения движения в виде

$$\lambda_1 = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \omega^2 y^2 + y\cos\omega t\sin\alpha + z\cos\alpha, \quad \lambda_2 = -2\omega\dot{y} + \sin\omega t\sin\alpha$$
$$\ddot{y} = \omega^2 y - \cos\omega t\sin\alpha + \lambda_1 y + F_y, \quad \ddot{z} = -\cos\alpha + \lambda_1 z + F_z \tag{3.9}$$

Согласно закону Амонтона – Кулона, для величины силы трения выполнено соотношение

$$F^2 = F_y^2 + F_z^2 \le \mu^2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) \tag{3.10}$$

Подстановка выражений (5.9) для λ_1 и λ_2 в неравенство (5.10) дает условие

$$F^2 \le \mu^2\left[\left(-(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \omega^2 y^2 + y\cos\omega t\sin\alpha + z\cos\alpha\right)^2 + \left(-2\omega\dot{y} + \sin\omega t\sin\alpha\right)^2\right]$$

которое в случае скольжения обращается в равенство, причем, согласно соотношению (5.4),

$$F_y = -F\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \quad F_z = -F\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

$$F = \mu\sqrt{\left(y\cos\omega t\sin\alpha + z\cos\alpha - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \omega^2 y^2\right)^2 + \left(\sin\omega t\sin\alpha - 2\omega\dot{y}\right)^2}$$

так как направление силы трения противоположно направлению скольжения.

В случае равновесия бусинки относительно обруча выполняется неравенство

$$F^2 \le \mu^2(y\cos\omega t\sin\alpha + z\cos\alpha - \omega^2 y^2)^2 + \mu^2\sin^2\omega t\sin^2\alpha \tag{3.11}$$

3.2 Уравнения относительных равновесий

Если бусинка находится в равновесии относительно обруча, то ее относительная скорость, а вместе с ней и кориолисова сила, равны нулю. Тогда действующая вдоль касательной к обручу сила трения компенсирует сумму касательных составляющих силы тяжести и центробежной силы, т.е.

$$-z(\omega^2 y - \cos\omega t \sin\alpha - Fz) + y(-\cos\alpha + Fy) = 0 \tag{3.12}$$

Введем обозначения

$$\xi(y,z) = \omega^2 yz - z\cos\omega t\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

$$\eta(y,z) = (y\cos\omega t\sin\alpha + z\cos\alpha - \omega^2 y^2)^2 + \sin^2\omega t\sin^2\alpha.$$

С помощью первого из равенств (5.6) уравнение (3.12) приводится к виду

$$F = \omega^2 yz - z\cos\omega t\sin\alpha + y\cos\alpha \tag{3.13}$$

Оно совместно с первым равенством (5.6) и неравенством (5.11) образует систему для определения относительных равновесий, после подстановки выражения (3.13) для F принимающую вид

$$\xi^2(y,z) \le \mu^2\eta(y,z), \quad y^2 + z^2 = 1 \tag{3.14}$$

3.3 Уравнения движения и бифуркационные диаграммы с использованием угловой переменной

Множества относительных равновесий, определяемые системой (5.12), а вместе с ними и фазовые портреты исследуемой системы зависят от двух параметров (α, ω). Случай $\alpha = 0$ был изучен в работе [48]. Мы будем рассматривать случаи $0 < \alpha < \pi/2$ Для их рассмотрения удобно воспользоваться угловой переменной.

Конфигурационное многообразие рассматриваемой механической системы с одной степенью свободы – окружность. На ней естественно ввести угловую координату φ, отсчитываемую по часовой стрелки от оси Oz ПСК. (Рис.3.2) Тогда

$$y = \sin\varphi, \quad z = \cos\varphi,$$

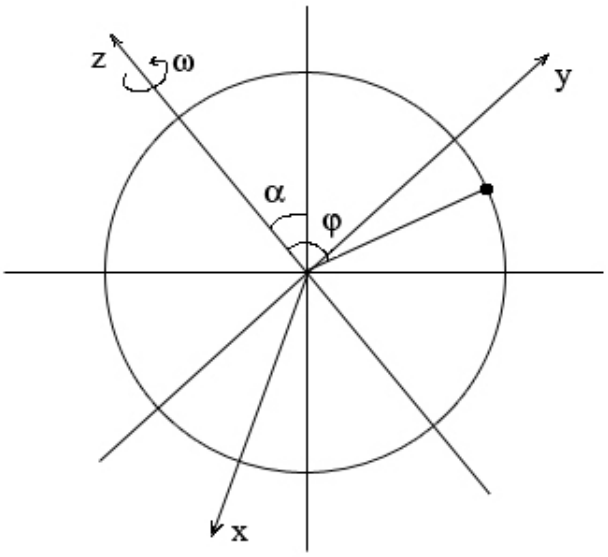

Рис. 3.2. *Угловая координата φ, задающая положение бусинки в подвижной системе координат*

и условие существования относительных равновесий запишется в виде

$$(\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\cos\omega t\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha)^2 \leq$$
$$\leq \mu^2(\sin\varphi\sin\alpha\cos\omega t + \cos\varphi\cos\alpha - \omega^2\sin^2\varphi)^2 + +\mu^2\sin^2\omega t\sin^2\alpha$$

Это условие представимо в виде

$$P(\chi) \leq 0, \quad P(\chi) = A\chi^2 + B\chi + C, \quad \chi = \cos\omega t, \tag{3.15}$$

$$A(\varphi) = (1+\mu^2)\cos^2\varphi\sin^2\alpha,$$
$$B(\varphi) = 2\sin\varphi\sin\alpha(\omega^2(\mu^2\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) - (1+\mu^2)\cos\varphi\cos\alpha),$$
$$C(\varphi) = \sin^2\varphi(\omega^2\cos\varphi + \cos\alpha)^2 - \mu^2(\cos\varphi\cos\alpha - \omega^2\sin^2\varphi)^2 - \mu^2\sin^2\alpha.$$

Заметим, что $A \geq 0$ при $\alpha \neq 0$, поэтому условие существования относительных равновесий задается двумя неравенствами для $\chi = 1$ и $\chi = -1$, которые должны выполняться одновременно:

$$\begin{gathered} P(1) = (\omega^2\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha)^2 - \\ -\mu^2(\sin\varphi\sin\alpha + \cos\varphi\cos\alpha - \omega^2\sin^2\varphi)^2 \leq 0, \end{gathered} \tag{3.16}$$

$$P(-1) = (\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi + \cos\varphi \sin\alpha + \sin\varphi \cos\alpha)^2 - \\ -\mu^2(-\sin\varphi \sin\alpha + \cos\varphi \cos\alpha - \omega^2 \sin^2\varphi)^2 \leq 0. \tag{3.17}$$

В случае, когда $\cos\varphi = 0$, коэффициент при χ^2 в условии (3.15) обращается в нуль, и условие существования относительных равновесий представляет собой линейное по χ неравенство. Таким образом, для случая $\varphi = \pi/2$ также достаточно выполнения неравенства (3.15) при $\chi = \pm 1$.

Неравенства (3.16) задают области Σ_+ и Σ_- на плоскости (φ, ω), ограниченные кривыми Γ_+ и Γ_- соответственно. Эти области получаются друг из друга отражением относительно прямой $\varphi = \pi$, а искомое множество положений относительного равновесия будет их пересечением. На рис.3.3 представлена часть плоскости (φ, ω), заключенная между прямыми $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. На ней изображена зависимость положений равновесия от угловой скорости вращения сферы ω для разных значений угла наклона оси вращения при коэффициенте трения $\mu = 0.7$. Области Σ_+ обозначены самым светлым оттенком, области Σ_- – более темным, а самым темным оттенком выделено их пересечение. Было показано [48], что в случае $\alpha = 0$ множество относительных равновесий представляет собой половину F "жирной вилки", симметричной относительно оси $\varphi = \pi$, а также область равновесий G в виде "иглы", вытянутую вдоль прямой $\varphi = 0$ и сужающуюся при $\omega \to \infty$ (см. левый верхний фрагмент фиг.2). При увеличении α совпадающие при $\alpha = 0$ области Σ_+ и Σ_- расходятся (см. правый верхний фрагмент), и при $\alpha = \operatorname{arctg}\mu$ область G исчезает, а от среднего зубца "вилки" остается только одна точка (см. левый средний фрагмент). Далее при

$$\operatorname{arctg}\mu < \alpha < \pi/2 - \operatorname{arctg}\mu$$

эти зубцы разделяются полностью и расходятся (см. правый средний фрагмент). При

$$\alpha > \pi/2 - \operatorname{arctg}\mu$$

при малых ω появляется "отросток" I (см. левый нижний фрагмент),

который увеличивается при возрастании α (см. правый нижний фрагмент) и при $\alpha = \pi/2$ соединяется с областью F. В этом случае бифуркационная диаграмма представляет собой полосу.

Для всех углов наклона α в пределе при $\omega \to \infty$ относительные равновесия заключены между прямыми $\varphi = \xi$ и $\varphi = \pi - \xi$, где $\xi = \operatorname{arctg}(1/\mu)$. Сходные расщепления областей, заполненных равновесиями, наблюдались [9] в задаче о движении бусинки по обручу, вращающемуся вокруг вертикальной оси, не совпадающей с его диаметром.

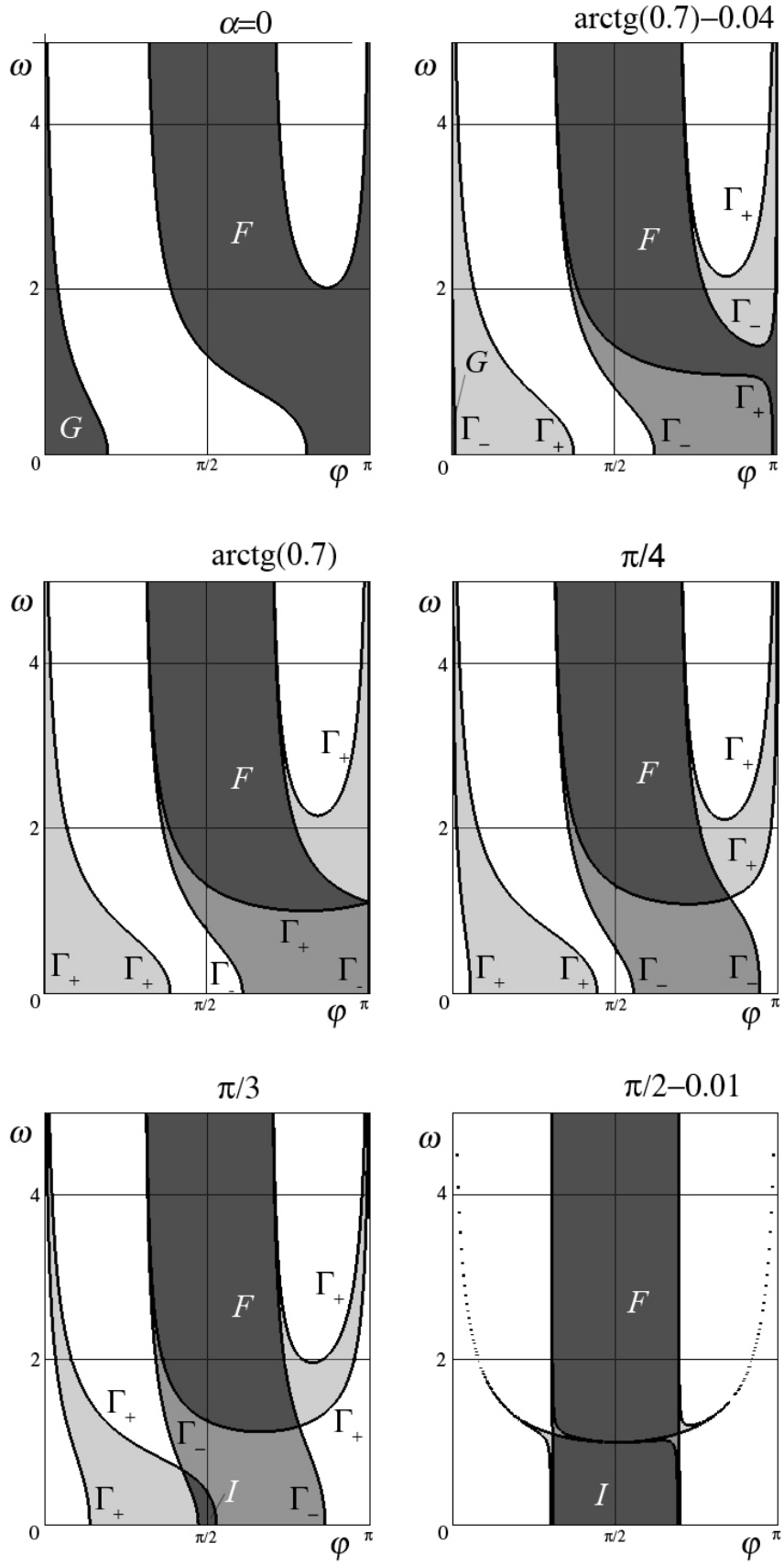

Рис. 3.3. Зависимость положений равновесия от ω для разных значений α при коэффициенте трения $\mu = 0.7$

Глава 4

Точка в параболоидальной чаше при наличии сухого трения

4.1 Постановка задачи и уравнения движения в избыточных координатах

Рассматривается движение тяжелой материальной точки – бусинки P массы m по параболоидальной чаше с вершиной в точке O, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, совпадающей с её осью симметрии. Предполагается, что между бусинкой и чашей действует сила сухого трения с коэффициентом трения μ.

Движение бусинки можно описать с помощью уравнений Лагранжа первого рода в связанной с чашей подвижной системе координат (ПСК). Пусть $Ox_1x_2x_3$ – такая система координат с началом в вершине параболоида, оси Ox_1 и Ox_2 которой перпендикулярны оси чаши, а ось Ox_3 совпадает с осью чаши и направлена вертикально вверх (рис.4.1).

В ПСК поверхность чаши задаётся соотношением

$$f = x_3 - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2}\right) = 0. \tag{4.1}$$

Пусть вектор $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ определяет положение бусинки в ПСК, $\boldsymbol{v}_r = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ – скорость бусинки в этой системе координат, $v_r = (\boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_r)^{1/2}$. Так как ее переносная скорость задаётся соотношением $\boldsymbol{v}_e = (-\omega x_2, \omega x_1, 0)$, то кинетическая энергия системы, освобожденной от

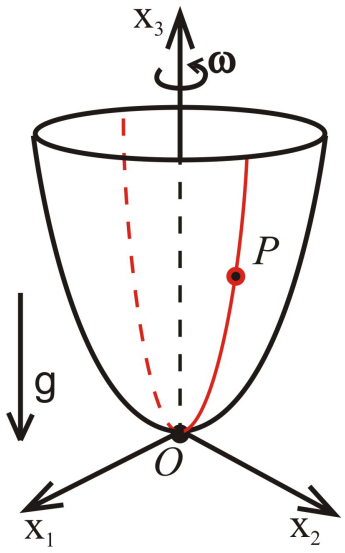

Рис. 4.1. *Точка в параболоидальной чаше*

связей, а также потенциальная энергия имеют вид

$$T = \frac{m}{2}\left((\dot{x}_1 - \omega x_2)^2 + (\dot{x}_2 + \omega x_1)^2 + \dot{x}_3^2\right), \quad U = mgx_3,$$

где g – ускорение свободного падения, и уравнения Лагранжа записываются следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial x_1} + F_1, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial x_2} + F_2, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}_3} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial x_3}, \tag{4.2}$$

$$L_\lambda = L + \lambda f, \quad L = T - U. \tag{4.3}$$

Уравнения (4.2) можно представить как

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_C + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_N + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}, \tag{4.4}$$

где $\boldsymbol{a}$ – ускорение бусинки в ПСК, $\boldsymbol{F}_C$ и $\boldsymbol{F}_c$ – кориолисова и центробежная силы, $\boldsymbol{F}_N$ – сила тяжести, $\boldsymbol{N}$ – нормальная реакция обруча, $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ – сила трения, направленная по касательной к чаше в точке P.

Заметим, что единичная нормаль к чаше в точке P определяется как

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^{-1} = \left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^{-1}\begin{pmatrix} -x_1/a_1 \\ -x_2/a_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right| = \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1\right)^{1/2},$$

а компоненты относительных скорости и ускорения в силу (4.1) связаны соотношениями

$$\dot{x}_3 - \dot{x}_1 x_1/a_1 - \dot{x}_2 x_2/a_2 = 0, \quad \ddot{x}_3 - \ddot{x}_1 x_1/a_1 - \ddot{x}_2 x_2/a_2 - \dot{x}_1^2/a_1 - \dot{x}_2^2/a_2 = 0. \quad (4.5)$$

Так как в проекциях на оси ПСК вектор абсолютной угловой скорости задаётся как $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$, то Кориолисова и центробежная силы задаются как

$$\boldsymbol{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r = \begin{pmatrix} 2m\omega\dot{x}_2 \\ -2m\omega\dot{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_c = -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} m\omega^2 x_1 \\ m\omega^2 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Сила тяжести и нормальная реакция имеют вид

$$\boldsymbol{F}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{N} = \lambda\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} -\lambda x_1/a_1 \\ -\lambda x_2/a_2 \\ \lambda \end{pmatrix} \left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^{-1}.$$

Для исключения множителя Лагранжа λ домножим левую и правую части уравнения (4.4) на $\boldsymbol{n}$.

$$m(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{F}_C, \boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{F}_c, \boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{F}_N, \boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{n}).$$

Подставляя в это равенства входящие в правую часть выражения для сил, учитывая второе соотношение (4.5) и принимая во внимание ортогональность векторов $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{n}$, имеем:

$$m\left(\dot{x}_1^2/a_1 + \dot{x}_2^2/a_2\right)\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^{-1} = -2m\omega\left(\dot{x}_2 x_1/a_1 - \dot{x}_1 x_2/a_2\right)\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^{-1} -$$

$$-m\omega^2\left(x_1^2/a_1 + x_2^2/a_2\right)\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^{-1} - mg\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^{-1} + \lambda,$$

откуда

$$\lambda(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \quad (4.6)$$

$$= m\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^{-1}\left[\left(\frac{\dot{x}_1^2}{a_1} + \frac{\dot{x}_2^2}{a_2}\right) + 2\omega\left(\frac{\dot{x}_2 x_1}{a_1} - \frac{\dot{x}_1 x_2}{a_2}\right) + \omega^2\left(\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2}\right) + g\right].$$

Определив таким образом нормальную реакцию $\boldsymbol{N} = \lambda\boldsymbol{n}$, заметим, что сила трения $\boldsymbol{F}$, перпедикулярная вектору нормали ($\boldsymbol{F} \perp \boldsymbol{n}$), в

случае скольжения ($\boldsymbol{v}_r \neq 0$) направлена в сторону, противоположную направлению скольжения:

$$\boldsymbol{F} = -\mu \frac{\boldsymbol{v}_r}{v_r} N, \quad N = (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N})^{1/2}. \tag{4.7}$$

В случае покоя бусинки относительно вращающейся чаши сила трения и нормальная реакция связаны соотношениями

$$\boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_N + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F} = 0, \quad |\boldsymbol{F}| \leq \mu \, |\boldsymbol{N}| \, . \tag{4.8}$$

Выражая силу трения $\boldsymbol{F}$ из первого равенства (4.8) и подставляя полученное соотношение в неравенство из (4.8), имеем

$$|\boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_N + \boldsymbol{N}| \leq \mu \, |\boldsymbol{N}| \, . \tag{4.9}$$

Соотношение (4.9) задаёт условие существования относительных равновесий. Это условие, зависящее, в частности, от параметра ω, выделяет на поверхности чаши область, «заполненную равновесиями». Граница этой области Σ определяется равенством

$$\Sigma : \quad (\boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_N + \boldsymbol{N}, \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_N + \boldsymbol{N}) - \mu^2 \, (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}) = 0. \tag{4.10}$$

Пересечение поверхности Σ с чашей (4.1) определяет на ней граничную кривую Γ.

Соотношение (4.10) можно записать как

$$(\boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_N, \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_N) + 2\lambda_0 \, (\boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_N, \boldsymbol{n}) + \left(1 - \mu^2\right) \lambda_0^2 = 0,$$

$$\lambda_0 = \lambda(x_1, x_2, 0, 0) = m \left| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} \right|^{-1} \left[\omega^2 \left(\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} \right) + g \right].$$

Раскрывая его, после сокращения на m имеем

$$\left(p^2 \left(x_1^2 + x_2^2\right) + 1\right) \cdot \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 \right) - \left(1 + \mu^2\right) \cdot \left(p \left(\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} \right) + 1 \right)^2 = 0,$$

где $p = \dfrac{\omega^2}{g}$.

С помощью соотношений

$$x_1 = \sqrt{a_1 a_2} \, x_1', \quad x_2 = \sqrt{a_1 a_2} \, x_2', \quad x_3 = \sqrt{a_1 a_2} \, x_3', \quad p' = \sqrt{a_1 a_2} \, p$$

перейдём к безразмерным переменным (x_1', x_2', x_3'), а также к безразмерному бифуркационному параметру p'. Отбрасывая штрихи, имеем

$$\left(p^2\left(x_1^2+x_2^2\right)+1\right)\cdot\left(\frac{a_2x_1^2}{a_1}+\frac{a_1x_2^2}{a_2}+1\right)-\left(1+\mu^2\right)\cdot$$
$$\cdot\left(p\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}x_1^2+\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}x_2^2\right)+1\right)^2=0.$$

Вводя, наконец, безразмерные величины

$$b_1=\sqrt{\frac{a_1}{a_2}},\quad b_2=\sqrt{\frac{a_2}{a_1}},$$

имеем

$$\left(p^2\left(x_1^2+x_2^2\right)+1\right)\left(\frac{x_1^2}{b_1^2}+\frac{x_2^2}{b_2^2}+1\right)-\left(1+\mu^2\right)\left(p\left(\frac{x_1^2}{b_1}+\frac{x_2^2}{b_2}\right)+1\right)^2=0. \tag{4.11}$$

Замечание. Так как $b_1b_2=1$, и оба сомножителя положительны, то один из них по величине больше, а другой – меньше единицы. В дальнейшем будем считать, что

$$0<b_1\le 1\le b_2.$$

4.2 Бифуркации семейств относительных равновесий

Кривая Γ, ограничивающая множество относительных равновесий, существенным образом зависит от бифуркационного параметра p. Естественно, что наиболее простой вид она имеет при $p=0$:

$$\Gamma_0:\quad \frac{x_1^2}{b_1^2}+\frac{x_2^2}{b_2^2}=\mu^2. \tag{4.12}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае множеству относительных равновесий отвечает область внутри эллипса (4.12) с центром в начале координат и с полуосями μb_1 и μb_2. В симметричном случае, когда $b_1=b_2=b$, этот эллипс представляет собой окружность.

Естественно ожидать, что и в целом в симметричном случае бифуркации будут проще. Рассмотрим их отдельно.

Симметричный случай Полагая $b_1=b_2=b$, $x^2=x_1^2+x_2^2$, запишем уравнение (4.11) как

$$P(x;p,b,\mu)=\left(p^2x^2+1\right)\left(\frac{x^2}{b^2}+1\right)-\left(1+\mu^2\right)\left(p\left(\frac{x^2}{b}\right)+1\right)^2=0.$$

(4.13)

Соотношение (4.13) можно рассматривать как уравнение относительно p. Это уравнение можно представить в виде

$$x^2\left(1-\mu^2\frac{x^2}{b^2}\right)p^2-2(1+\mu^2)\frac{x^2}{b}p+\frac{x^2}{b^2}-\mu^2=0. \tag{4.14}$$

При $x=0$ степень этого соотношения по p равна нулю, и равенство не выполняется при любом $\mu\neq 0$.

При $x=\pm\dfrac{b}{\mu}$ это уравнение линейно по p и имеет единственное решение

$$p=\frac{1-\mu^2}{2b}.$$

На плоскости (x,p) отвечающие этим решениям точки обозначим как

$$P_\pm:\quad \left(\pm\sqrt{\frac{b}{\mu}},\frac{1-\mu^2}{2b}\right).$$

При прочих значениях x, b и μ имеем квадратное уравнение относительно p. Его дискриминант имеет вид

$$D_p=\frac{4\mu^2x^2\left(x^2+b^2\right)^2}{b^4}.$$

При $x\neq 0$ дискриминант D_p отличен от нуля, и уравнение (4.14) имеет два различных вещественных корня $p^\pm$.

Напомним, что согласно принятым обозначениям параметр p положителен. Пусть величина x такова, что

$$1-\mu^2\frac{x^2}{b^2}>0.$$

Тогда, если

$$\frac{x^2}{b^2}-\mu^2>0,$$

то оба корня $p^\pm$ положительны, а если

$$\frac{x^2}{b^2}-\mu^2<0,$$

то положителен только больший корень.

Если же

$$1-\mu^2\frac{x^2}{b^2}<0,$$

то оба корня отрицательны в случае, когда

$$\frac{x^2}{b^2} - \mu^2 < 0,$$

и отрицателен только меньший корень в случае, когда

$$\frac{x^2}{b^2} - \mu^2 > 0.$$

Замечание. Пусть $\mu \leq 1$, что типично для большинства пар материалов. Тогда положительных корней два в случае, когда

$$\mu b \leq |x| \leq b/\mu.$$

Если же $\mu > 1$, что справедливо лишь в редких случаях, то положительных корней не более одного (при $|x| \geq \mu b$).

Но соотношение (4.13) можно рассматривать и как на биквадратное уравнение относительно x. Это уравнение после преобразований и введения обозначения $y = x^2 (\geq 0)$ можно представить в виде

$$p^2\mu^2y^2 - ((1-pb)^2 - 2pb\mu^2)y + \mu^2b^2 = 0. \tag{4.15}$$

Дискриминант левой части уравнения (4.15) относительно y имеет вид

$$D_y = (pb-1)^2\left((pb-1)^2 - 4pb\mu^2\right).$$

Этот дискриминант обращается в нуль при

$$p_0 = \frac{1}{b},$$

а также при

$$p_\pm = \frac{\left(\sqrt{1+\mu^2} \pm \mu\right)^2}{b}.$$

Значению $p = p_0$ отвечает не имеющий физического смысла двукратный корень $y_0 = -b^2$ уравнения (4.15). Значениям $p_\pm$ отвечают корни

$$y_\pm = \frac{b}{p_\pm} = \frac{b^2}{\left(\sqrt{1+\mu^2} \pm \mu\right)^2}.$$

Замечание. Так как

$$\left(\sqrt{1+\mu^2} + \mu\right) \cdot \left(\sqrt{1+\mu^2} - \mu\right) = 1$$

и коэффициент трения μ неотрицателен, то имеет место неравенство

$$0 < \sqrt{1+\mu^2} - \mu \leq 1 \leq \sqrt{1+\mu^2} + \mu.$$

Это означает, что $p_- < p_+$, но $y_- > y_+$.

4.3 Бифуркационная диаграмма на плоскости (p, x)

На плоскости (p, x) при $b = 1$ и $\mu = 0.25$ кривая $P(x; p, b, \mu) = 0$ изображена на фиг. 4.2.

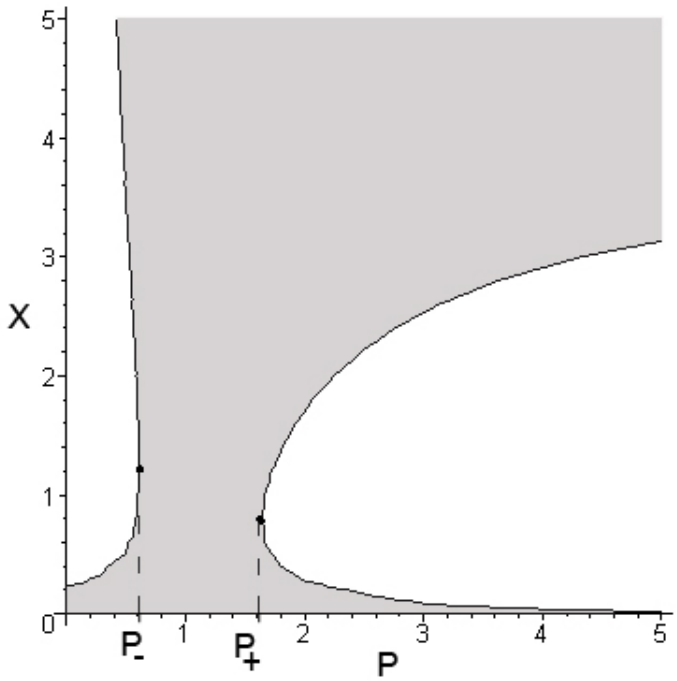

Рис. 4.2. *Бифуркационная диаграмма при* $b = 1$, $\mu = 0.25$

Исследование этой диаграммы показывает, что при $p = 0$ множество относительных равновесий заполняет круг, содержащий точку $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

При $0 < p < p_-$ множество относительных равновесий заполняет внешность кольца. Его граница Γ состоит из двух компонент $\Gamma = \Gamma_i \cup \Gamma_e$ и представляющих собой окружности с центром в начале координат – точке $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Внутренняя окружность Γ_i ограничивает заполненный равновесиями круг, содержащий начало координат. Внешняя окружность Γ_e ограничивает заполненную равновесиями область, простирающуюся на бесконечность. Радиус окружности Γ_e неограниченно возрастает при $p \mapsto 0$.

При $p = p_-$ обе окружности Γ_i и Γ_e сливаются в одну окружность радиуса $x_- = \sqrt{y_-}$ с центром в начале координат. При $p_- < p < p_+$ относительные равновесия заполняют всю чашу.

При $p = p_+$ на плоскости (x_1, x_2) выделяется окружность радиуса $x_+ = \sqrt{y_+}$ с центром в начале координат, которая при $p > p_+$ расщепляется на две окружности, которые также обозначим Γ_i и Γ_e. Эти окружности ограничивают кольцевую область с центром в начале координат, внутри которой нет относительных равновесий. При $p \mapsto \infty$ внутренний радиус этого кольца стремится к нулю, а внешний радиус кольца стремится к $\sqrt{\dfrac{b}{\mu}}$.

Несимметричный случай Так как Ox_1 и Ox_2 – оси симметрии кривой Γ, то естественно изучить прежде всего те её топологические перестройки, которые происходят на этих осях. Изучим структуру сечения поверхности Σ плоскостью $x_2 = 0$. На этой плоскости в пространстве (x_1, x_2, p) в силу (4.11) имеем кривую

$$\Lambda_1 : \quad P(x_1; p, b_1, \mu) = 0. \tag{4.16}$$

Свойства этой кривой подробно изучены в предыдущем разделе. Ограничимся тем, что обозначим

$$p_{1\pm} = \frac{\left(\sqrt{1+\mu^2} \pm \mu\right)^2}{b_1}, \quad y_{1\pm} = \frac{b_1}{p_{1\pm}} = \frac{b_1^2}{\left(\sqrt{1+\mu^2} \pm \mu\right)^2} \tag{4.17}$$

бифуркационные значения параметра p и переменной y.

Аналогично, сечение поверхности Σ плоскостью $x_1 = 0$ в силу (4.11) определяется соотношением

$$\Lambda_2 : \quad P(x_2; p, b_2, \mu) = 0. \tag{4.18}$$

Свойства этой кривой также подробно изучены в предыдущем разделе, так что ограничимся тем, что обозначим

$$p_{2\pm} = \frac{\left(\sqrt{1+\mu^2} \pm \mu\right)^2}{b_2}, \quad y_{2\pm} = \frac{b_2}{p_{2\pm}} = \frac{b_2^2}{\left(\sqrt{1+\mu^2} \pm \mu\right)^2} \tag{4.19}$$

бифуркационные значения параметра p и переменной y.

Так как по предположению $b_1 < b_2$, то

$$p_{1\pm} > p_{2\pm}.$$

Остается лишь сравнить, что большее – p_{1-} или p_{2+}. Различают три случая расположения бифуркационных значений параметра p :

$$I.\quad b_2 > \left(\sqrt{1+\mu^2}+\mu\right)^2, \tag{4.20}$$

$$II.\quad b_2 = \left(\sqrt{1+\mu^2}+\mu\right)^2, \tag{4.21}$$

$$III.\quad b_2 < \left(\sqrt{1+\mu^2}+\mu\right)^2. \tag{4.22}$$

Им отвечают следующие сочетания корней

$$I.\quad p_{1+} > p_{1-} > p_{2+} > p_{2-}, \tag{4.23}$$

$$II.\quad p_{1+} > p_{1-} = p_{2+} > p_{2-}, \tag{4.24}$$

$$III.\quad p_{1+} > p_{2+} > p_{1-} > p_{2-}. \tag{4.25}$$

Разным сочетаниям корней должны отвечать различные бифуркационные картины.

4.4 Топология областей относительных равновесий

Представим на фигурах области относительных равновесий (ООР) в зависимости от значений параметра p.

Топологически в данной задаче можно различать следующие типы перестроек областей равновесий относительно координатных осей:

– D : диск (с центром симметрии в начале координат) (фиг.4.3);

– $D \cup 4T$: диск и два языка, приходящих с бесконечности вдоль обеих координатных осей Ox_1 и Ox_2(фиг.4.4) ;

– $S_i \cup 2T_j$: полоса (strip), вытянутая вдоль оси Ox_i от бесконечности до бесконечности и два языка, приходящих с двух сторон из бесконечности вдоль оси Ox_j(фиг.4.6) ;

– C : крест, простирающийся в бесконечность вдоль обеих координатных осей Ox_1 и Ox_2 (фиг.4.8),

а также три типа особых областей

– $S2S_i \cup 2T_j$: полоса с двумя перетяжками (strip with 2 straps), вытянутая вдоль оси Ox_i от бесконечности до бесконечности и два языка, приходящих с двух сторон из бесконечности вдоль оси Ox_j (фиг.4.5);

– $C2S_i$: крест с двумя перетяжками (cross with 2 straps) на оси Ox_i (фиг.4.7);

– $C4S$: крест с четырьмя перетяжками (cross with 4 straps)(фиг.4.9).

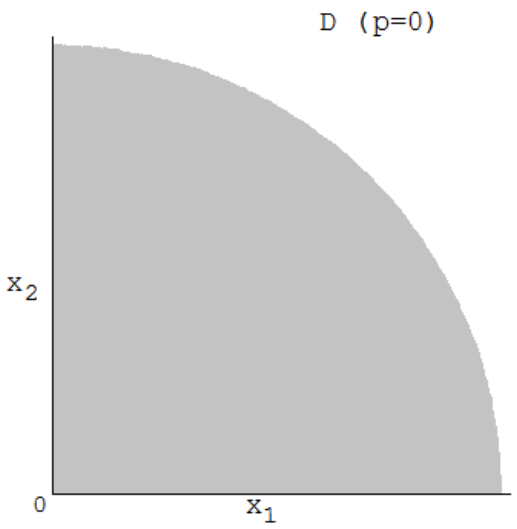

Рис. 4.3. *Область равновесия типа D*

В силу того, что Ox_1 и Ox_2 – оси симметрии этих областей, то на фигурах представлены лишь их части, расположенные в первом квадранте.

Пусть $\mu = 0.25$. В рамках случая I. предположим, что $b_1 = 0.5$, $b_2 = 2$. Тогда

$$p_{1+} = 3.2808, \quad p_{1-} = 1.2192,$$

$$p_{2+} = 0.8202, \quad p_{2-} = 0.3048.$$

С возрастанием параметра p от нуля последовательно имеем следующие перестройки ООР:

$$D \quad \to \quad D \cup 4T \to \quad S2S_2 \cup 2T_1 \quad \to \quad S_2 \cup 2T_1 \quad \to \quad S2S_2 \cup 2T_1 \quad \to$$

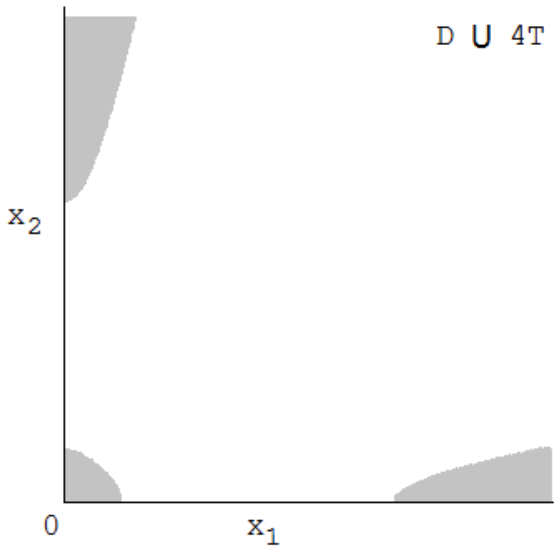

Рис. 4.4. *Область равновесия типа* $D \cup 4T$

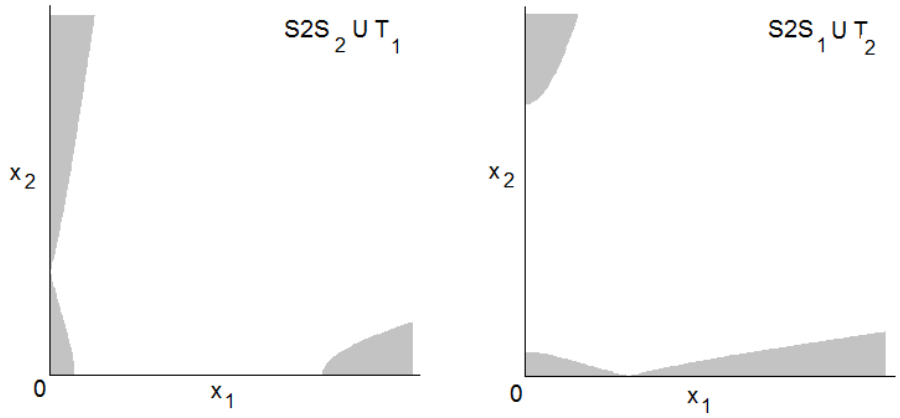

Рис. 4.5. *Области равновесия типа* $S2S_i \cup 2T_j$

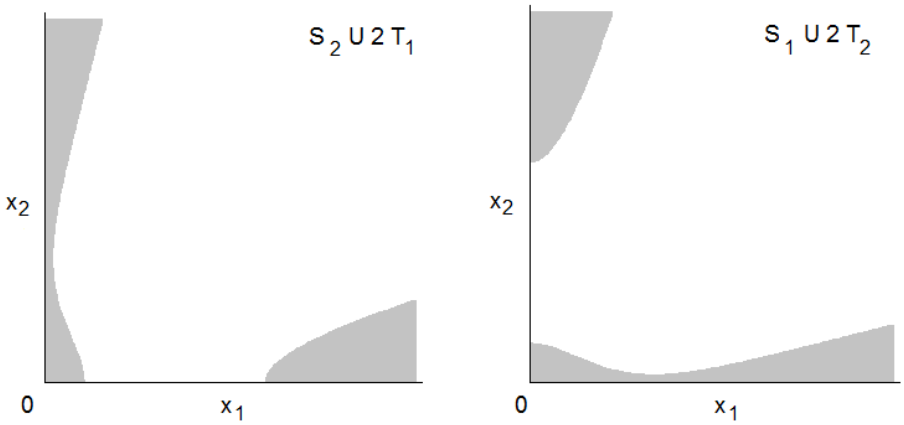

Рис. 4.6. *Области равновесия типа* $S_i \cup 2T_j$

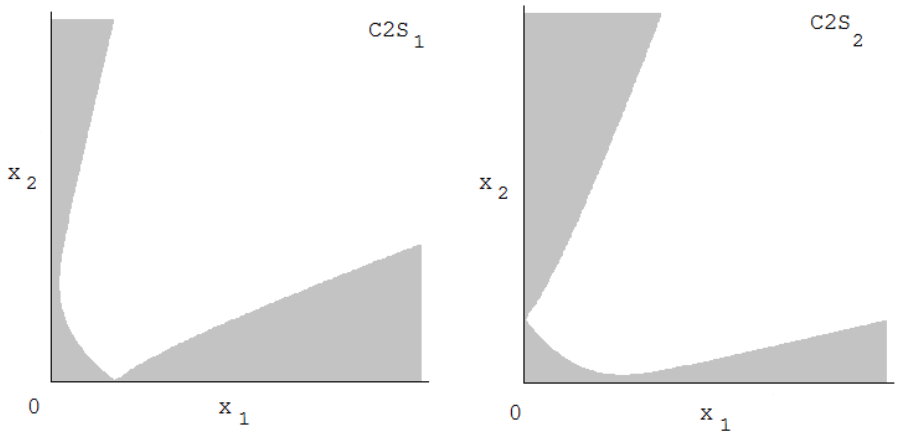

Рис. 4.7. *Области равновесия типа* $C2S_i$

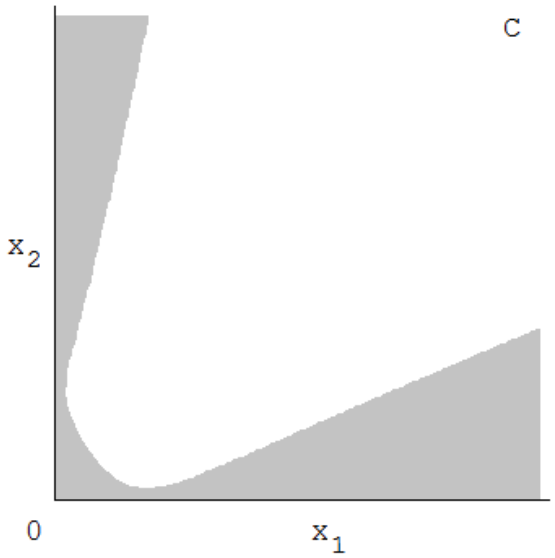

Рис. 4.8. *Область равновесия типа* C

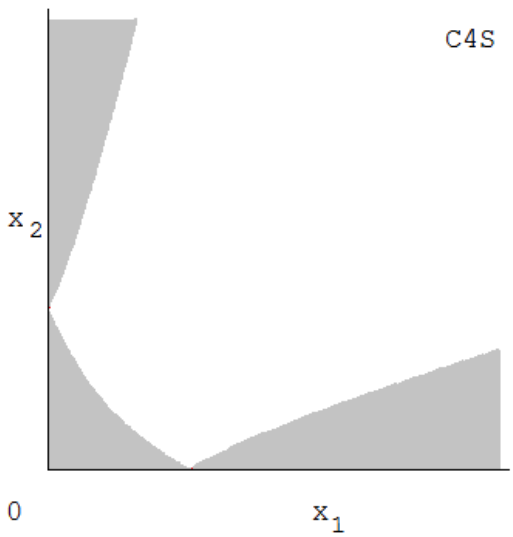

Рис. 4.9. *Область равновесия типа C4S*

$$D \cup 4T \to \quad S2S_1 \cup 2T_2 \quad \to S_1 \cup 2T_2 \quad \to S2S_1 \cup 2T_2 \quad \to D \cup 4T.$$

В рамках случая II. оказывается, что $b_1 = 0.6096$, $b_2 = 1.6404$, а

$$p_{1+} = 2.6909, \quad p_{1-} = p_{2+} = 1.000, \quad p_{2-} = 0.3716.$$

С возрастанием параметра p от нуля последовательно имеем следующие перестройки ООР:

$$D \quad \to \quad D \cup 4T \to \quad S2S_2 \cup 2T_1 \quad \to \quad S_2 \cup 2T_1 \quad \to \quad C4S \quad \to$$

$$S_1 \cup 2T_2 \quad \to \quad S2S_1 \cup 2T_2 \quad \to D \cup 4T.$$

В рамках случая III. предположим, что $b_1 = 0.8$, $b_2 = 1.25$. Тогда

$$p_{1+} = 3.2808, \quad p_{1-} = 1.2192,$$

$$p_{2+} = 1.3123, \quad p_{2-} = 0.4877.$$

С возрастанием параметра p от нуля последовательно имеем следующие перестройки ООР:

$$D \quad \to \quad D \cup 4T \to \quad S2S_2 \cup 2T_1 \quad \to \quad S_2 \cup 2T_1 \quad \to \quad C2S_1 \quad \to$$

$$C \quad \to \quad C2S_2 \to \quad S_1 \cup 2T_2 \to \quad S2S_1 \cup 2T_2 \quad \to D \cup 4T.$$

Глава 5

Точка на сфере, вращающейся вокруг вертикальной оси при наличии сухого трения

5.1 Постановка задачи

Рассматривается движение тяжелой точки P массы m по сфере радиуса ℓ с центром в точке O. Сфера вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, которая находится на расстоянии a от ее вертикального диаметра. Будем считать, что между бусинкой и сферой действует сила сухого трения с коэффициентом трения μ.

Движение бусинки можно описать с помощью уравнений Лагранжа первого рода в связанной со сферой подвижной системе координат (ПСК). Пусть $Oxyz$ – такая система координат с началом в центре сферы, ось y которой вертикальна, а оси x и z образуют с y правую тройку. Ось вращения сферы определяется единичным вектором $\mathbf{e} = (0, 1, 0)^T$ и проходит через точку A: $\mathbf{OA} = (-a, 0, 0)^T$.

В ПСК положение точки P задается координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)$, а связь, стесняющая ее движение, определяется соотношением

$$f = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2\right) = 0 \tag{5.1}$$

Пусть $\mathbf{v}_r = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ и $\mathbf{v}_e = (\omega z, 0, -\omega(x + a))$ – соответственно скорость точки относительно ПСК и ее переносная скорость; $v_r =$

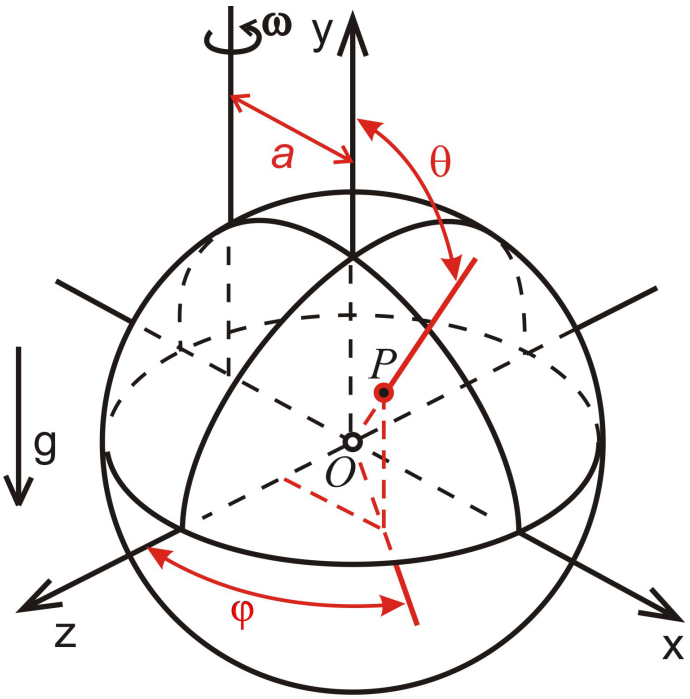

Рис. 5.1. Точка на окружности, вращающейся вокруг оси с постоянной угловой скоростью

$(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_r)^{1/2}$, $v_e = (\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_e)^{1/2}$. Тогда кинетическая и потенциальная энергия системы, освобожденной от связи примут вид:

$$T = \frac{m}{2}((\dot{x} + \omega z)^2 + \dot{y}^2 + (\dot{z} - \omega(x + a))^2), \quad U = mgy,$$

где g – величина ускорения свободного падения. Если $F = (F_x, F_y, F_z)^T$ – сила трения, то уравнения Лагранжа записываются как:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial x} + F_x, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial y} + F_y, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial z} + F_z, \quad (5.2)$$

$$L_\lambda = L + \lambda f, \quad L = T - U. \quad (5.3)$$

Уравнения (5.2) можно представить в виде:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_N + \mathbf{N} + \mathbf{F},$$

где $\mathbf{a}$ – ускорение точки в ПСК, $\mathbf{F}_C$ и $\mathbf{F}_c$ – кориолисова и центробежная силы, $\mathbf{F}_N$ – сила тяжести, $\mathbf{N}$ – нормальная реакция сферы, $\mathbf{F}$ – сила трения, причем в случае скольжения ($\mathbf{v}_r \neq 0$)

$$\mathbf{F} = -\mu\frac{\mathbf{v}_r}{v_r}N, \quad N = (\mathbf{N}, \mathbf{N})^{1/2}. \quad (5.4)$$

Единичный вектор

$$\mathbf{n} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \Big/ \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right| = \begin{pmatrix} -x/\ell \\ -y/\ell \\ -z/\ell \end{pmatrix}$$

определяет внутреннюю нормаль к сфере в точке P. Тогда выражения для сил имеют вид:

$$\mathbf{F}_C = \begin{pmatrix} -2m\omega\dot{z} \\ 0 \\ 2m\omega\dot{x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_c = \begin{pmatrix} m\omega^2(x+a) \\ 0 \\ m\omega^2 z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N} = -\lambda\ell\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}.$$

Введем безразмерные параметры при помощи соотношений:

$$x \mapsto x\ell, \quad y \mapsto y\ell, \quad z \mapsto z\ell, \quad t \mapsto t\sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad \omega \mapsto \omega\sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad a \mapsto a\ell$$
$$\lambda \mapsto \lambda m\frac{g}{\ell}, \quad L \mapsto Lmg\ell, \quad F_x \mapsto mgF_x, \quad F_y \mapsto mgF_y, \quad F_z \mapsto mgF_z. \tag{5.5}$$

Сохраняя точку над символом как обозначение производной по новому времени и учитывая выражения (5.5), уравнения связей (5.1) и функцию Лагранжа (5.3) можно записать как

$$\begin{gathered} f = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right) = 0, \\ L_\lambda = \frac{1}{2}\left((\dot{x} + \omega z)^2 + \dot{y}^2 + (\dot{z} - \omega(x+a))^2\right) - y + \lambda f. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Для определения множителя Лагранжа λ вычисляют первые и вторые производные по времени от тождества (5.1), задающего связь. Они имеют вид

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0, \tag{5.7}$$

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0. \tag{5.8}$$

Кроме того, так как вектор силы трения касается сферы в точке P, то

$$xF_x + yF_y + zF_z = 0$$

и подстановка в тождества (5.7) и (5.8) выражений для вторых производных из уравнений (5.2) позволяет представить множитель λ, а также уравнения движения в виде

$$\lambda = -\omega^2(x+a)x - \omega^2 z^2 + \omega\dot{z}x^2 - \omega\dot{x}z^2 + y, \quad \ddot{x} = \omega^2(x+a) - \omega\dot{z} + \lambda x + F_x$$
$$\ddot{y} = -1 + \lambda y + F_y, \quad \ddot{z} = \omega\dot{x} + \omega^2 z + \lambda z + F_z. \tag{5.9}$$

Согласно закону Амонтона – Кулона, для величины силы трения выполнено соотношение

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \le \mu^2\lambda^2. \tag{5.10}$$

Подстановка выражения (5.9) для λ в неравенство (5.10) дает условие

$$F^2 \le \mu^2\left(-\omega^2(x+a)x - \omega^2 z^2 + \omega\dot{z}x^2 - \omega\dot{x}z^2 + y\right)^2,$$

обращающееся в равенство в случае скольжения. При этом согласно соотношению (5.4),

$$F_x = -F\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}, \quad F_y = -F\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}, \quad F_z = -F\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}.$$

так как направление силы трения противоположно направлению скольжения. Здесь

$$F(x,y,z,\dot{x},\dot{z}) = \mu|\omega^2(x+a)x + \omega^2 z^2 - 2\omega x\dot{z} + 2\omega\dot{x}z - y| \quad -$$

величина силы трения. В случае равновесия сила трения уравновешивает касательную составляющую суммы силы тяжести и центробежной силы. Она противоположна по направлению этой касательной составляющей и удовлетворяет неравенству

$$F(x,y,z,0,0) \le \mu|\omega^2(x+a)x + \omega^2 z^2 - y|. \tag{5.11}$$

5.2 Существование относительных равновесий и их свойства. Уравнения относительных равновесий

Если точка находится в равновесии относительно сферы, то ее относительная скорость, а вместе с ней – и кориолисова сила, равны нулю. Обозначим

$$\xi(x,y,z) = ((x+a)^2+z^2-(x(x+a)+z^2)^2)\omega^4+2y(x(x+a)+z^2)\omega^2+1-y^2,$$

$$\eta(x,y,z) = \omega^2(x(x+a)+z^2)-y.$$

Тогда с учетом (5.9) и того, что $F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$, система для определения относительных равновесий принимает вид:

$$\xi(x,y,z) \le \mu^2\eta^2(x,y,z), \quad x^2+y^2+z^2=1. \tag{5.12}$$

Эта система составит предмет дальнейшего изучения.

Пусть

$$\Phi = \xi(x,y,z) - \mu^2\eta^2(x,y,z)$$

Обозначим $\kappa = 1+\mu^2$. Тогда выражение для функции Φ представимо в виде

$$\Phi = -(\omega^2x^2+\omega^2z^2-y+\omega^2xa)^2\kappa + ((x+a)^2+z^2)\omega^4+1$$

Исключая из этого соотношения z^2 с помощью уравнения сферы, имеем

$$\Phi = -(\omega^2(1-y^2)-y+\omega^2xa)^2\kappa+((x+a)^2+(1-x^2-y^2))\omega^4+1 \tag{5.13}$$

Выражение для Φ – многочлен четвёртой степени по x. Его дискриминант по этой переменной имеет вид

$$D_x = 4\omega^4a^2\left((\kappa(a^2+y^2-1)\kappa+1)\omega^4+2\kappa\omega^2y+\kappa\right) \tag{5.14}$$

Он обращается в нуль, если

$$y_\pm = \frac{-\kappa \pm \omega^2(-\kappa^2a^2+\kappa^2-\kappa)^{1/2}}{\kappa\omega^2} \tag{5.15}$$

При этом

$$x_\pm = a - \frac{(-\kappa^2a^2+\kappa^2-\kappa)^{1/2}}{\omega^2a\kappa} \tag{5.16}$$

В точках $(x_\pm, y_\pm)$, существующих при выполнении условия

$$\kappa(1-a^2)-1 \ge 0 \tag{5.17}$$

кривая на плоскости (x, y), задаваемая соотношением $\Phi = 0$, имеет горизонтальные касательные (рис.5.2). Если соотношение (5.17) обращается в равенство, то эти точки совпадают (рис.5.3).

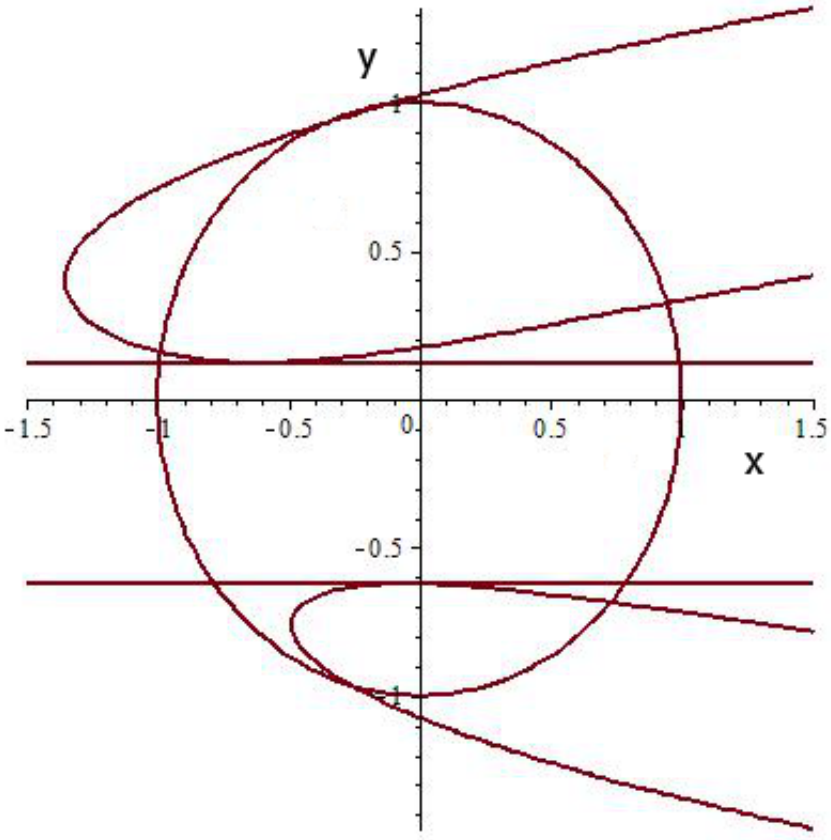

Рис. 5.2. Горизонтальные касательные к области равновесия при $\kappa = 3/4$, $\omega = 2$, $a = 1/3$

Множества относительных равновесий, определяемые системой (5.12), зависят от трех параметров (a, ω, μ). Аналогичная задача для движения точки по окружности изучалась в работе [9].

Конфигурационное многообразие рассматриваемой механической системы с двумя степенями свободы – сфера. Введем на ней две угловые координаты θ и φ. Координату θ будем отсчитывать от восходящей вертикали, φ задает угол между проекцией OP на плоскость Oxz и осью z (5.1). Тогда

$$x = \sin\theta \sin\varphi, \quad y = \cos\theta, \quad z = \sin\theta \cos\varphi,$$

и условие существования относительных равновесий запишется в виде

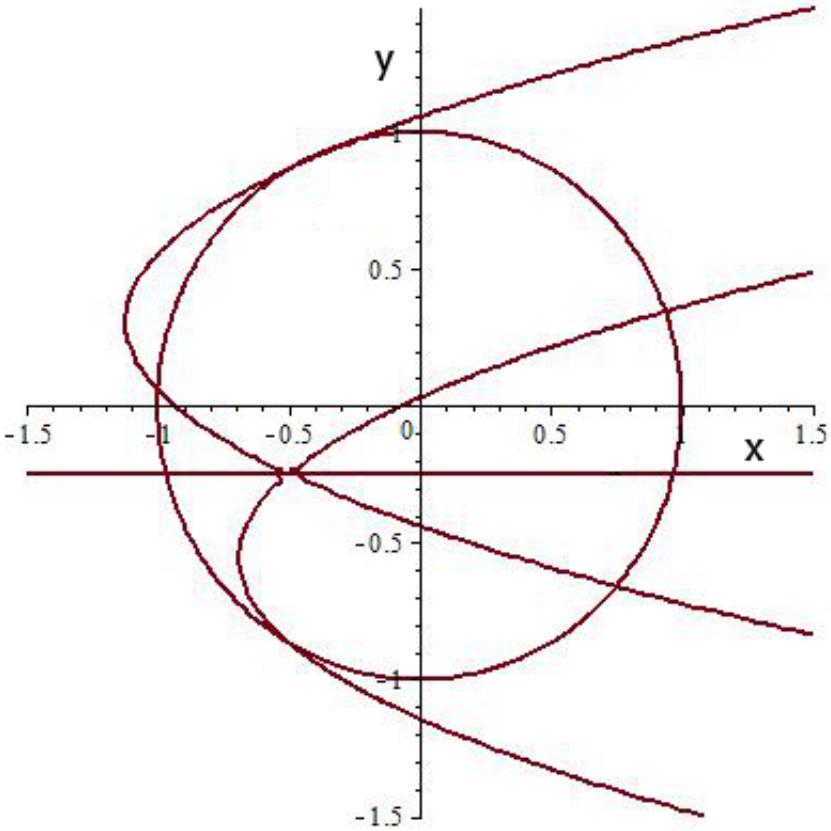

Рис. 5.3. Совпадающие горизонтальные касательные к области равновесия при $\kappa = 3/4$, $\omega = 2$, $a = 1/2$

неравенства

$$P(\theta, \varphi, \Omega, a) = \Omega^2 a^2 \cos^2\varphi + \sin^2\theta + \Omega^2 \cos^2\theta (a \sin\varphi + \sin\theta)^2 +$$

$$+2\Omega \sin\theta \cos\theta (a \sin\varphi + \sin\theta) - \mu^2 (\Omega \sin\theta (a \sin\varphi + \sin\theta) - \cos\theta)^2 \leq 0, \quad \Omega = \omega^2 \tag{5.18}$$

Исследуем зависимость решений неравенства (5.18) от значений параметров (a, ω, μ).

5.3 Относительные равновесия и бифуркационные диаграммы

Будем рассматривать области, задаваемые неравенством (5.18), на развертке цилиндра (φ, θ), $\{0 \leq \varphi < 2\pi\} \times \{0 \leq \theta < \pi/2\}$, причем прямые $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ отождествлены. Прежде всего рассмотрим два предельных случая: а) $a >> 1$, б) $\Omega >> 1$.

а) В этом случае сфера находится достаточно далеко от оси вращения. При $\Omega \neq 0$ условие (5.18) примет вид

$$1 \leq (\mu^2 + 1)\sin^2\theta\sin^2\varphi.$$

Область относительных равновесий в этом случае состоит из двух компонент, симметричных относительно прямой $\varphi = \pi$, и не зависит от угловой скорости вращения ω (см. рис.5.4). На этом и дальнейших рисунках точечным пунктиром обозначена граница, на которой меняет знак нормальная реакция $N = \cos\theta + \Omega\sin\theta(a\sin\varphi + \sin\theta)$. В случае $a >> 1$ она определяется знаком выражения $\sin\theta\sin\varphi$, т.е. нормальная реакция положительна на полусфере, расположенной дальше от оси вращения, и отрицательна на ближней.

Аналитическое исследование устойчивости полученных компонент семейств неизолированных относительных равновесий путём построения функций Ляпунова достаточно сложно (см. [71, 57, 58, 51, 17, 14, 15, 16]). Устойчивость по Ляпунову внутренних точек этих областей следует из результатов Г.К.Пожарицкого [28]. Поэтому ограничимся рассмотрением вопроса об устойчивости граничных точек изучаемых областей в следующем "статическом" смысле: пусть в начальный момент времени точка P располагается в некоторой точке Q границы области, заполненной неизолированными равновесиями. "Отпустим" точку P без начальной скорости, одновременно "освободив" систему от трения, т.е. предположив, что коэффициент трения обратился в нуль. Если точка P начнёт движения внутрь области, заполненной неизолированными равновесиями, (или вдоль её границы), то скажем, что располагавшаяся в точке Q точка P притягивается (не отталкивается) областью, заполненной неизолированными равновесиями. Если же точка P начнёт движение вовне по отношению к области, заполненной неизолированными равновесиями, то скажем, что располагавшаяся в точке Q точка P отталкивается областью, заполненной неизолированными равновесиями. Если граница изолированной компоненты области, заполненной неизолированными положениями равновесия, заполнена точками, в которых эта компонента притягивает точку P, то мож-

но говорить об устойчивости данной компоненты. Если же на границе изучаемой компоненты найдётся хоть одна точка, в которой точка P отталкивается, то можно говорить о неустойчивости данной компоненты.

Таким образом, направление движения точки определяется знаком скалярного произведения касательной проекции активных сил при нулевой начальной скорости на внешнюю нормаль к границе области. Выписывая это условие в явном виде, получим:

$$((-2\sin\theta\sin^3\varphi\cos^2\theta a^3 + 8\cos^4\theta\sin^2\varphi-$$
$$-10\sin\varphi\sin^3\theta\cos^2\theta a - 2\sin\theta\cos^2\varphi\sin\varphi a^3 - 4\cos^6\theta-$$
$$-8\cos^2\theta\sin^2\theta a^2 + 10\cos^2\varphi\cos^2\theta a^2 + 8\cos^4\theta - 2\cos^2\varphi a^2 - 4\cos^2\theta)\mu^2-$$
$$-2\sin\theta\sin^3\varphi\cos^2\theta a^3 + 8\cos^4\theta\sin^2\varphi + 10\sin\theta\sin\varphi\cos^4\theta a-$$
$$-2\sin\theta\cos\varphi^2\sin\varphi a^3 - 4\cos^6\theta + 8\cos^4\theta a^2 + 8\cos^2\varphi\cos^2\theta a^2-$$
$$-6\sin\theta\sin\varphi\cos^2\theta a + 6\cos^4\theta - 6\cos^2\theta a^2 - 2\cos^2\theta)\Omega^3+$$
$$((6\cos^2\varphi\cos\theta\sin^2\theta a^2 + 16\sin\theta\sin\varphi\cos^3\theta a - 10\cos^5\theta + 6\cos^3 a^2-$$
$$-10\sin\theta\sin\varphi\cos\theta a+16\cos^3\theta-4\cos\theta a^2-6\cos\theta)\mu^2+6\cos^2\varphi\cos\theta\sin^2\theta a^2+$$
$$+16\sin\theta\sin\varphi\cos^3\theta a - 10\cos^5\theta + 6\cos^3 a^2 - 8\sin\theta\sin\varphi\cos\theta a+$$
$$+14\cos^3\theta - 4\cos\theta a^2 - 4\cos\theta)\Omega^2+$$
$$+(\mu^2+1)(6\sin\theta\sin\varphi\cos^2\theta a - 8\cos^4\theta - 2\sin\theta\sin\varphi a+$$
$$+10\cos^2\theta - 2)\Omega + 2(\mu^2+1)\sin^2\theta\cos\theta$$

В случае $a >> 1$ направление движения определяет знак коэффициента при a^3, то есть $-2(\mu^2+1)\sin\varphi\sin\theta(1+\sin^2\theta)$

На рис.5.4 компонента G, находящаяся на дальней от оси полусфере – устойчивая, а компонента F на ближней полусфере – неустойчивая. Светло-серым цветом выделены области, на которых точка, запущенная без начальной скорости движется по направлению внешней нормали к области, на белых областях она движется в противоположную сторону.

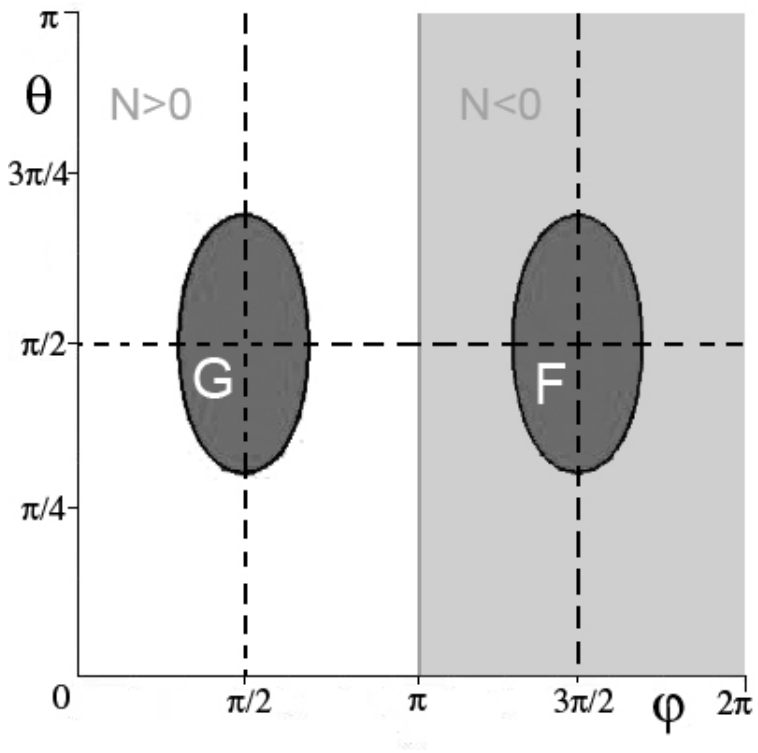

Рис. 5.4. Области относительных равновесий при больших значениях параметра a

б) В этом случае, когда угловая скорость вращения сферы ω велика, условие (5.18) принимает вид

$$a^2\cos^2\varphi \le (\mu^2\sin^2\theta - \cos^2\theta)(a\sin\varphi + \sin\theta)^2 \tag{5.19}$$

В силу (5.19) относительные равновесия существуют только при $\mu^2\sin^2\theta - \cos^2\theta \ge 0$, то есть для $\theta \in [\mathrm{arctg}(1/\mu), \pi - \mathrm{arctg}(1/\mu)]$. Пусть это условие выполнено.

Рассмотрим изменение области относительных равновесий на периоде при возрастании параметра a и $\Omega \gg 1$ (рис.5.5). На всех рисунках горизонтальные пунктирные линии обозначают "долгóты" $\theta_* = \arcsin a$ и $\pi - \theta_*$ точек пересечения оси вращения со сферой. Эти точки всегда являются положениями относительного равновесия.

При $a = 0$ область относительных равновесий одинакова для любого значения φ и таким образом на плоскости (θ, φ) представляет собой "пояс" G, заключенный между прямыми $\theta = \mathrm{arctg}(1/\mu)$ и $\theta = \pi - \mathrm{arctg}(1/\mu)$ (верхний левый рисунок). При $a \in (0, a_*)$, $a_* = \dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$ этот "пояс" деформируется (верхний рисунок посередине), затем при

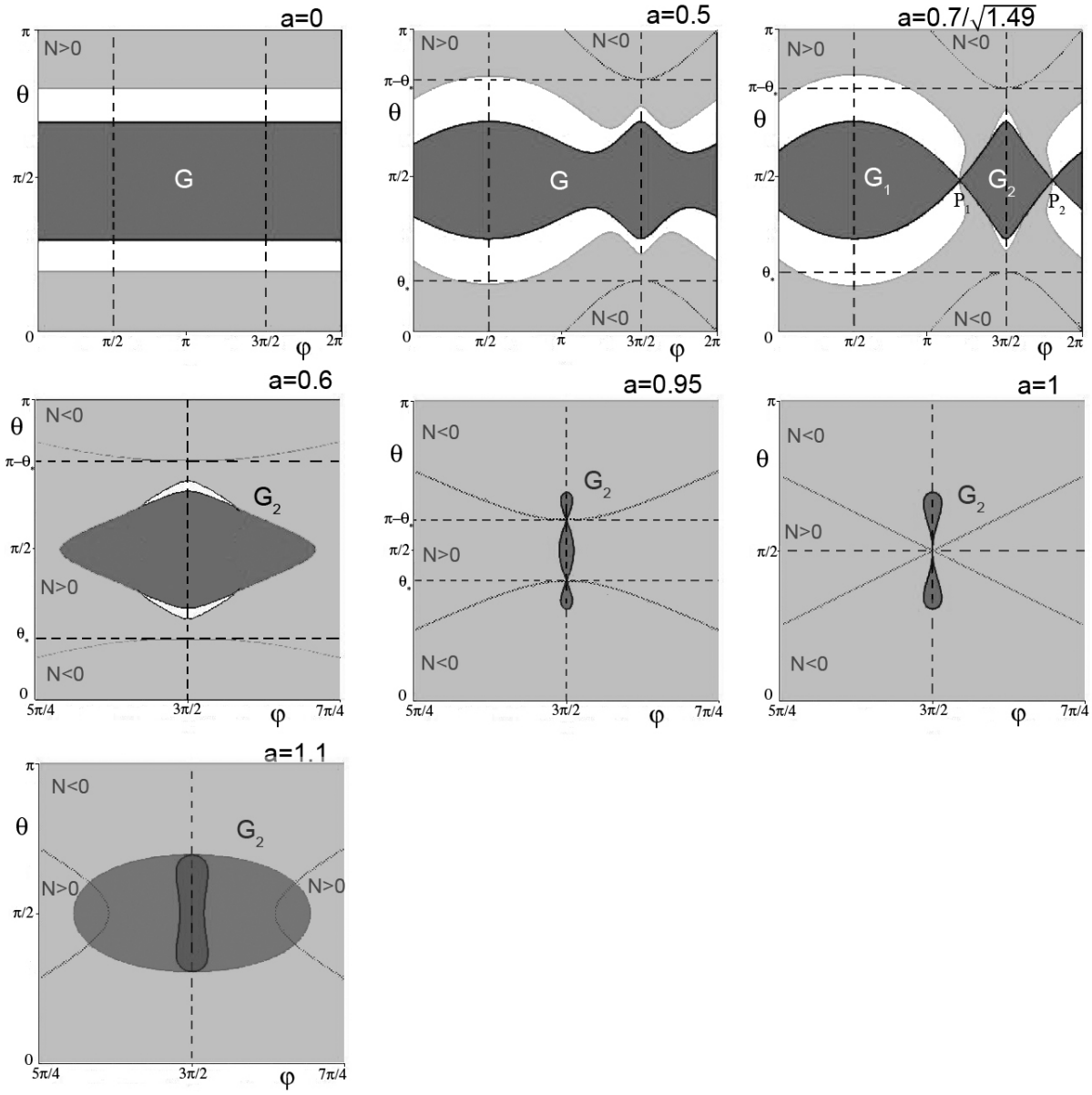

Рис. 5.5. Бифуркации области относительных равновесий при $\Omega \gg 1$

$a = a_*$ на нем появляются две перемычки в точках $P_1(\pi+\arcsin a_*, \pi/2)$ и $P_2(2\pi-\arcsin a_*, \pi/2)$ (правый верхний рисунок), а при $a > a_*$ он распадается на две подобласти G_1 и G_2(левый рисунок во втором ряду). Далее, подобласть G_2, находящаяся ближе к оси вращения, сужается, и при $a \in (a_{**}, 1)$, $a_{**} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$ в точках пересечения оси вращения и сферы образуются перемычки(случай совпадающих горизонтальных касательных, рисунок во втором ряду посередине). При $a = 1$ эти перемычки сходятся в единственной точке пересечения оси и сферы (пра-

вый рисунок во втором ряду), а с дальнейшим ростом a компонента G_2 снова расширяется (рисунок в нижнем ряду). Подобласть G_1, находящаяся дальше от оси вращения, при этом топологических изменений не претерпевает. В пределе при больших a область относительных равновесий принимает вид, изображенный на рис.2.

Направление движения точки, запущенной без начальной скорости с границы области равновесия определяется знаком выражения

$$((-2\sin\theta\sin^3\varphi\cos^2\theta a^3 + 8\cos^4\theta\sin^2\varphi-$$
$$-10\sin\varphi\sin^3\theta\cos^2\theta a - 2\sin\theta\cos^2\varphi\sin\varphi a^3 - 4\cos^6\theta-$$
$$-8\cos^2\theta\sin^2\theta a^2 + 10\cos^2\varphi\cos^2\theta a^2 + 8\cos^4\theta - 2\cos^2\varphi a^2 - 4\cos^2\theta)\mu^2-$$
$$-2\sin\theta\sin^3\varphi\cos^2\theta a^3 + 8\cos^4\theta\sin^2\varphi + 10\sin\theta\sin\varphi\cos^4\theta a-$$
$$-2\sin\theta\cos\varphi^2\sin\varphi a^3 - 4\cos^6\theta + 8\cos^4\theta a^2 + 8\cos^2\varphi\cos^2\theta a^2-$$
$$-6\sin\theta\sin\varphi\cos^2\theta a + 6\cos^4\theta - 6\cos^2\theta a^2 - 2\cos^2\theta)$$

Компонента G до разделения является устойчивой, после разделения компонента G_1 остается устойчивой, а компонента G_2 становится неустойчивой.

На этой же серии рисунков можно отследить изменение области, на которой нормальная реакция положительна. В случае $\Omega >> 1$ ее знак определяется знаком выражения $\sin\theta(a\sin\varphi+\sin\theta)$, т.е. при $a = 0$ она положительна для всей сферы, а при увеличении a на полусфере, которую пересекает ось вращения, появляются две области отрицательной реакции, которые объединяются при $a = 1$ и в пределе заполняют полусферу полностью.

В работах [48], [9] на основании численных построений были сделаны выводы о качественном поведении системы. Однако в рассматриваемом случае размерность системы выше, что не позволяет построить фазовые портреты и тем самым затрудняет исследования. В этом случае можно представить изменение области относительного равновесия графически в виде серии рисунков для разных значений a при фиксированном Ω. На рис. 5.6-5.9 изображены такие серии для $\Omega = 1, 2.25, 9, 64$.

При $a = 0$ область равновесий может состоять из двух (рис. 5.6, 5.7) или трех (рис. 5.8, 5.9) компонент. При $\Omega \geq \sqrt{\mu^2+1}$ для значения параметра $a_* = \dfrac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}$ на бóльшей компоненте появляются две перемычки

$$P_1(\pi + \arcsin a_* \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2-1}}, \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\Omega}),$$

$$P_2(2\pi - \arcsin a_* \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2-1}}, \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\Omega})$$

(ср. с критическим случаем в [9]), и далее эта компонента разделяется на две подкомпоненты G_1 и G_2.

Темно-серым цветом на последних рисунках каждой серии показана форма, к которой стремится область при больших значениях a. Для случаев $\Omega = 9$ и $\Omega = 64$ на последних двух и четырех картинках серий соответственно показано изменение только части области, которая находится ближе к оси вращения. Компонента G_1 при этом топологически не изменяется.

Замечание. Компоненты F и I всегда являются неустойчивыми. Компонента G при $a = 0$ – устойчивая, при увеличении параметра a она может оставаться устойчивой (рис. 5.6), или неустойчивой (рис. 5.7). В случаях, когда при $a = 0$ существует еще и компонента I, неустойчивость может появиться после (рис. 5.8) или до (рис. 5.9) ее слияния с компонентой G или ее частями. Отделившаяся меньшая компонента неустойчива.

В отличие от предельного случая $\Omega >> 1$, в общем случае при $a = 0$ область, на которой нормальная реакция отрицательна, существует и одинакова для любой широты φ. При увеличении a она деформируется, и в пределе она, как и ранее, полностью занимает полусферу, находящуюся ближе к оси вращения.

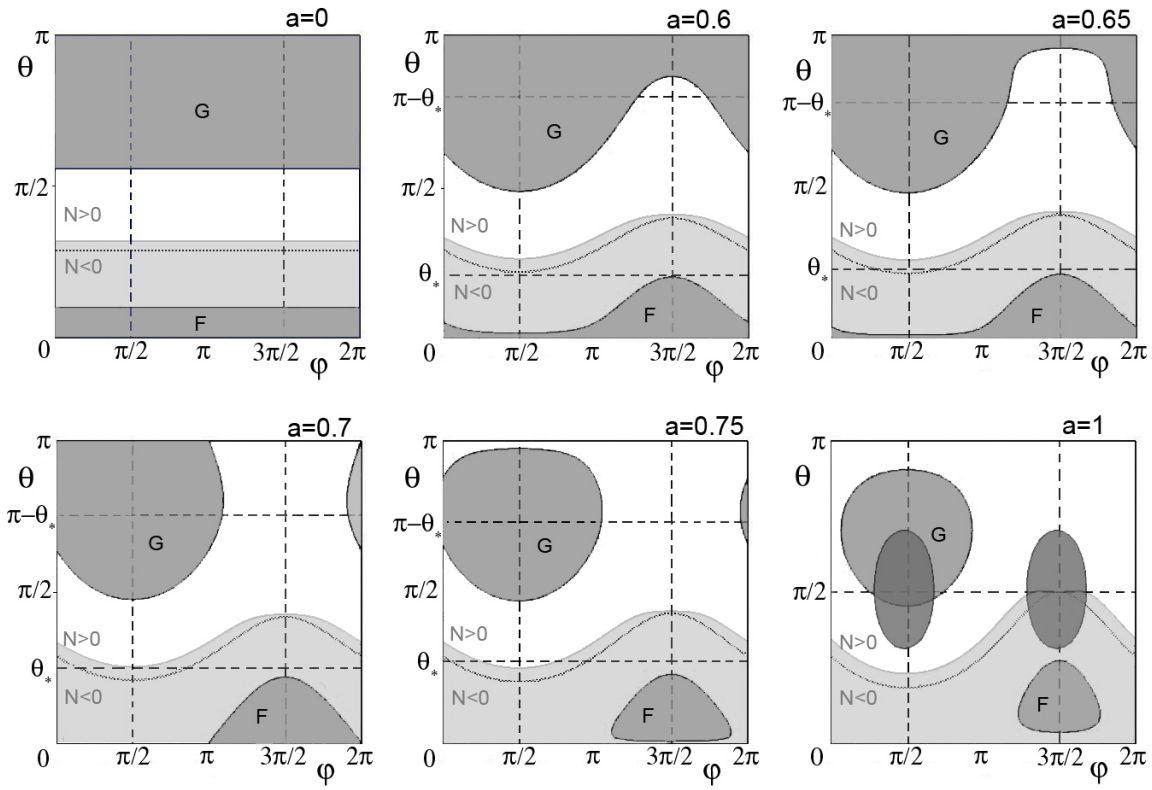

Рис. 5.6. Бифуркации области относительных равновесий при $\Omega = 1$

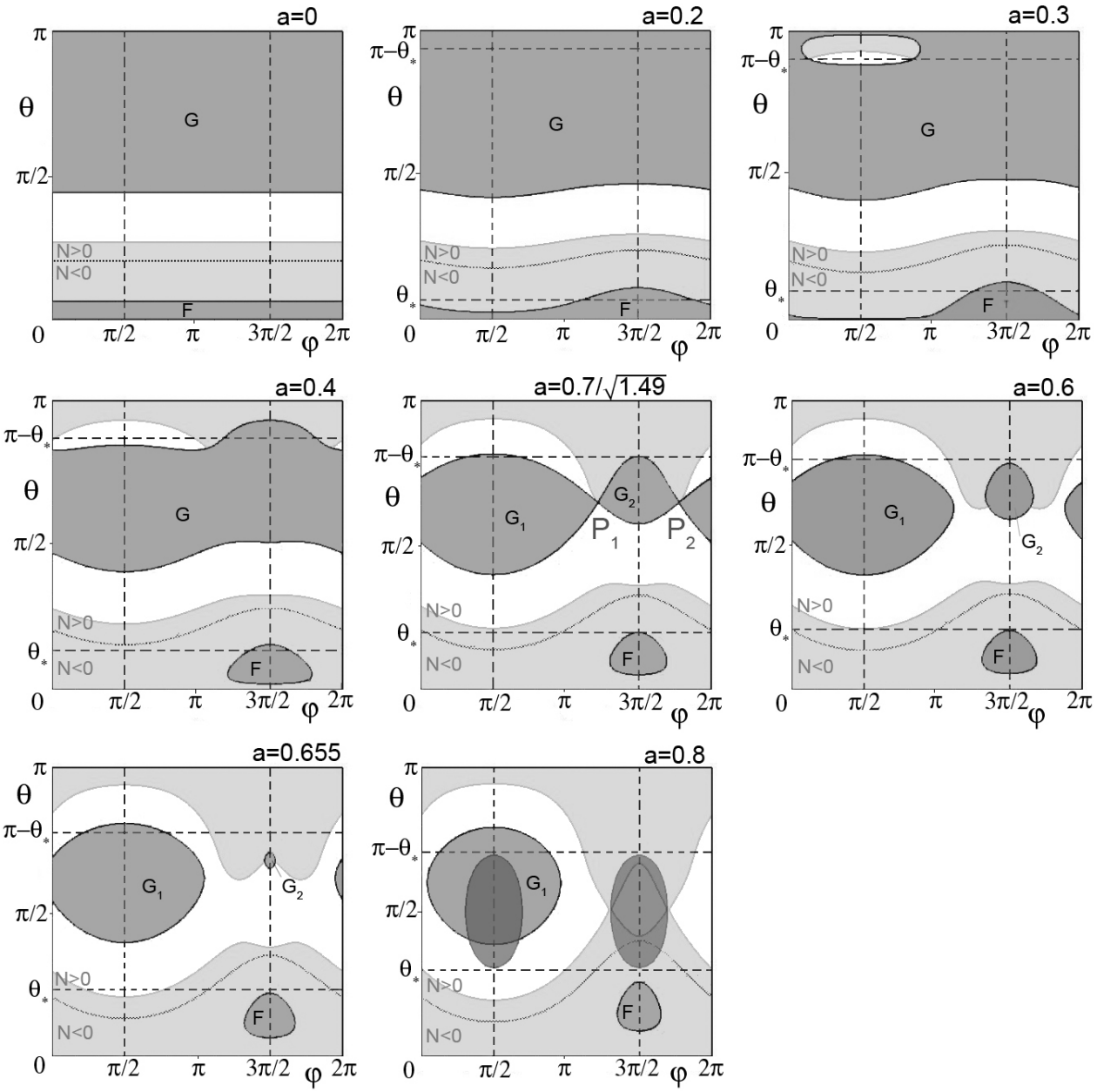

Рис. 5.7. Бифуркации области относительных равновесий при $\Omega = 2.25$

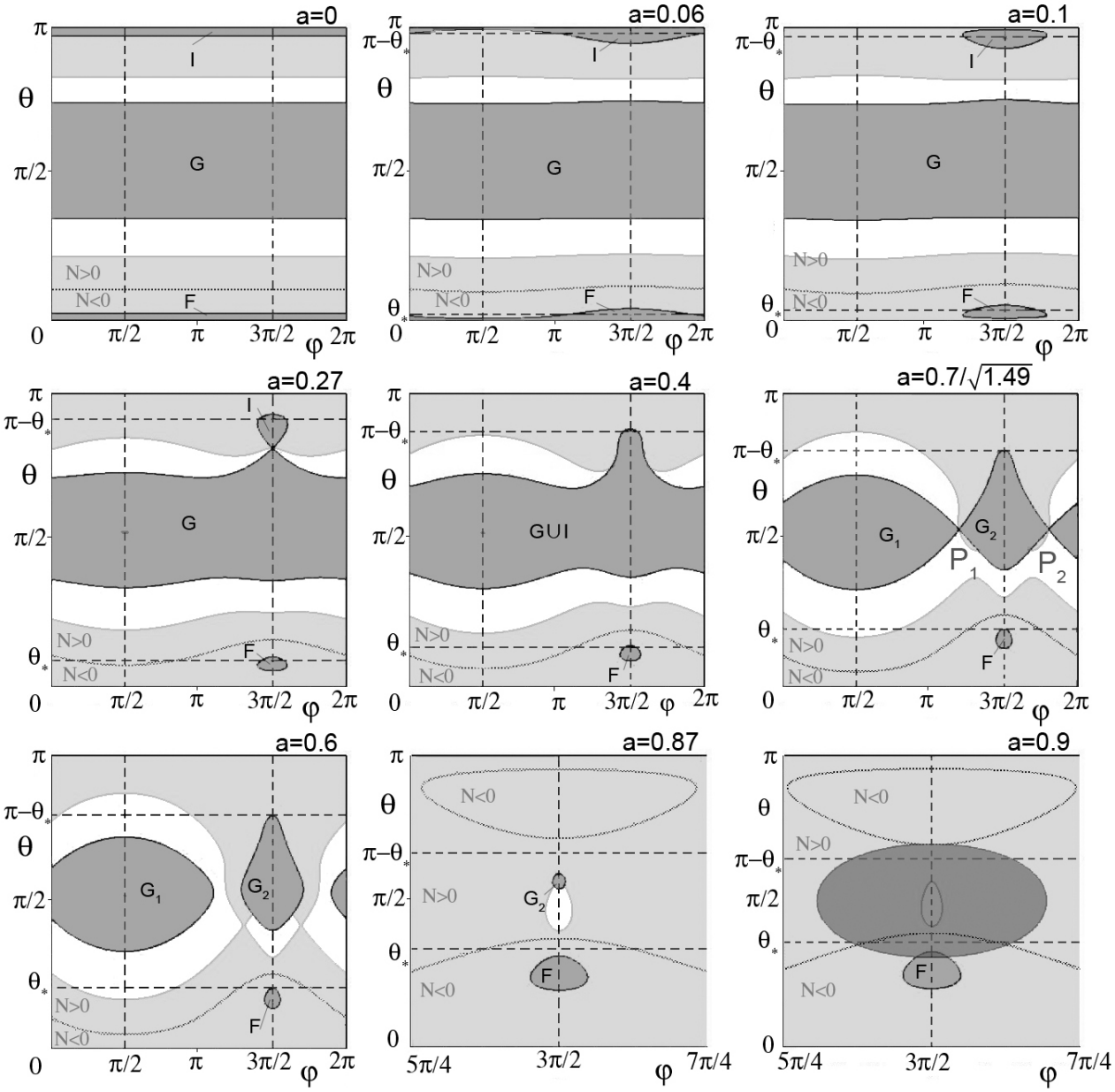

Рис. 5.8. Бифуркации области относительных равновесий при $\Omega = 9$

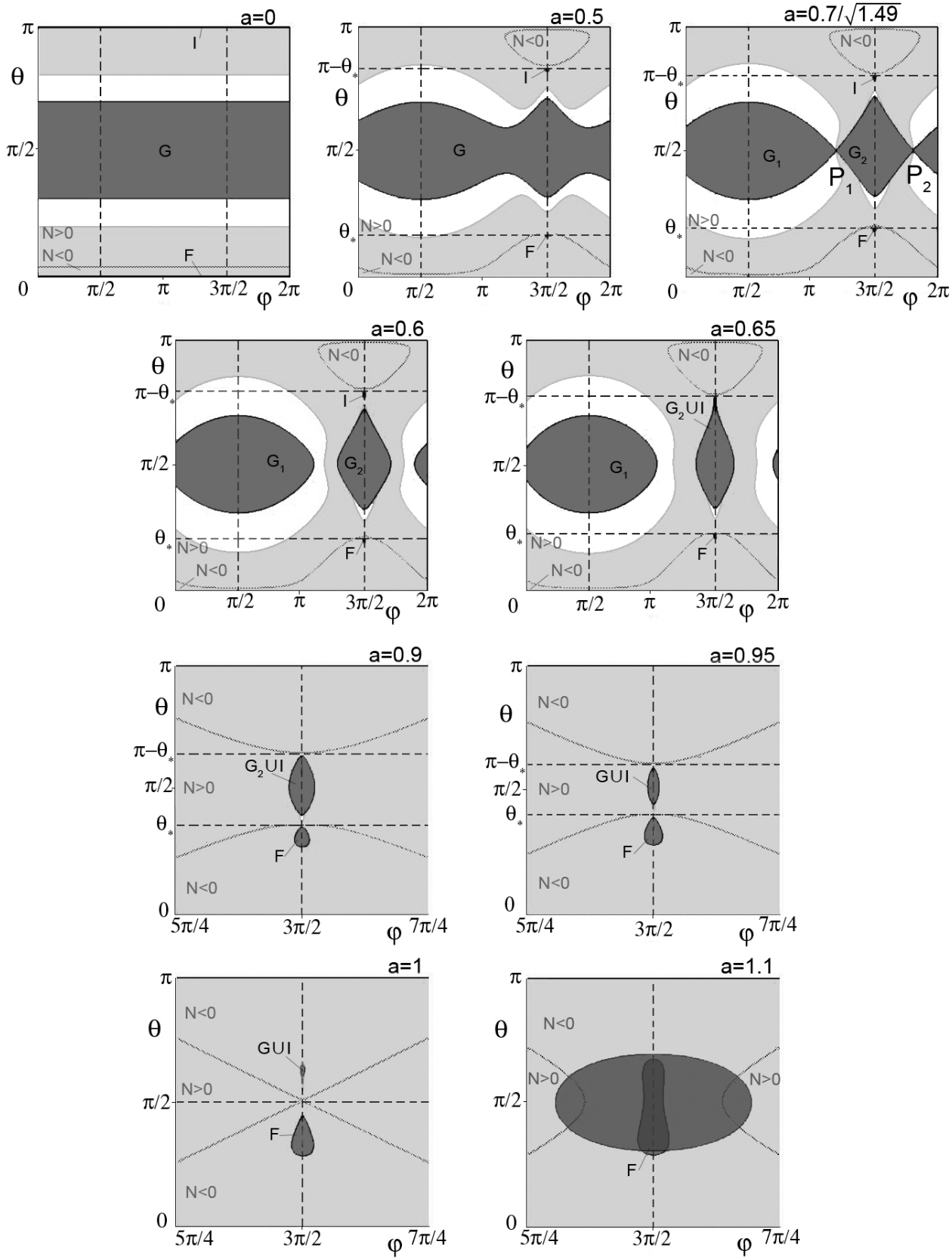

Рис. 5.9. Бифуркации области относительных равновесий при $\Omega = 64$

Заключение

В настоящей работе изучен ряд задач динамики тяжелой материальной точки (бусинки) на подвижных кривых и поверхностях, вращающихся с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси, в различных предположениях относительно характера сил трения в точке соприкосновения

В задаче о движении тяжелой точки по поверхности вращающейся сферы при наличии вязкого трения выписаны уравнения движения, найдены положения абсолютного равновесия, исследована их устойчивость и зависимость от параметров. Предложен и апробирован в ходе численного эксперимента восходящий в идейном плане к исследованиям Пуанкаре и Понтрягина подход к отысканию начальных условий существования периодического решения изучаемой системы в предположении о малости коэффициента трения.

В задаче о движении точки по поверхности сферы, вращающейся вокруг наклонной оси, при наличии сухого трения выписаны уравнения движения и найдены положения абсолютного равновесия, исследована их устойчивость в первом приближении. Рассмотрен вопрос о существовании в данной задаче относительных равновесий, их зависимость от параметров задачи проиллюстрирована в виде бифуркационных диаграмм.

Рассмотрена задача о движении бусинки, надетой на тонкий обруч, вращающийся с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной наклонной оси, лежащей в его плоскости, в предположении, что на бусинку действует сила сухого трения. Для этой системы выписаны

уравнения движения и найдены условия существования относительных положений равновесия. Построены бифуркационные диаграммы при разных значениях угла наклона оси вращения.

В задаче о движении точки в параболоидальной чаше, вращающейся вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью, при наличии сухого трения выписаны уравнения движения системы. Получены условия существования относительных равновесий. Изучены и проиллюстрированы с помощью численного счёта зависимости от параметров и топологические перестройки областей, заполненных неизолированными относительными равновесиями.

В задаче о движении тяжелой точки по поверхности сферы, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, не совпадающей с ее диаметром выписаны уравнения движения, найдены множества неизолированных положений равновесия. Результаты представлены графически в виде разверток на цилиндре.

Литература

[1] *Баландин Д.В., Шалимова Е.С.* Бифуркации относительных равновесий тяжелой бусинки на обруче, равномерно вращающемся вокруг наклонной оси, при наличии сухого трения // ПММ. 2015. Т.79. Вып.5. С. 627 – 634.

[2] *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* О колебаниях маятника при наличии сухого трения // Известия высших учебных заведений, Математика. 1977. №3(178), С.3 – 8.

[3] *Бизяев И. А., Борисов А. В., Мамаев И. С.* Динамика неголономных систем, состоящих из сферической оболочки с подвижным твердым телом внутри // Нелинейная Динамика. 2013. Т.9. № 3. С.547 – 566.

[4] *Болотин С. В., Попова Т. В.* Об уравнениях движения системы внутри катящегося шара // Нелинейная Динамика. 2013. Т.9. № 1. С. 51 – 58.

[5] *Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С.* Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // Нелинейная динамика.– 2012.– Том 8 Номер 2.– с. 289-307

[6] *Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С.* Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелинейная Динамика. 2011. Т.7. № 4. С. 785 – 801.

[7] *Борисов А.В., Мамаев И.С., Трещев Д.В.* Качение твердого тела без проскальзывания и верчения: кинематика и динамика // Нелинейная динамика.– 2012.– Том 8 Номер 4.– с. 783-797.

[8] *Буров А.А.* Маленькая сигма и задачи с модулями // Квант, 2012. №1. С.36 – 38.

[9] *Буров А.А., Якушев И.А.* Бифуркации относительных равновесий тяжелой бусинки на вращающемся обруче с сухим трением // ПММ. 2014. Т.78. Вып.5. С. 645-655.

[10] *Буров А.А., Шалимова Е.С.* Бифуркации относительных равновесий тяжелой бусинки на вращающейся параболоидальной чаше с сухим трением // Изв. РАН. МТТ. 2016. Т.4 (принята к печати).

[11] *Бахшалиев, В. И.* К вопросу математического моделирования трения качения // Трение и износ. - 2009. - Т. 30, N 5. - С. 423-428.

[12] *Akshat A., Sahil G., Toby J.* Particle sliding on a turntable in the presence of friction // Am. J. Phys. 2015. Vol.83. P.126.

[13] *Арет В.А., Орлов В.В., Зеленков С.К.* Выбор перемешивающего устройства на основе построения его морфологической модели // Процессы и аппараты пищевых производств. 2009. 2. 1–5.

[14] *Иванов А.П.* Об устойчивости равновесия в системах с трением // ПММ. 2007. Т. 71. Вып.3. С. 427 – 438.

[15] *Иванов А.П.* Бифуркации в системах с трением: основные модели и методы // Нелинейная динамика. 2009. Т.5. №.4. С.479 – 498.

[16] *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. Ижевск: РХД, 2011. 302 с.

[17] *Иванов А.П.* О равновесии систем с сухим трением // ПММ. 2015. Т. 79. Вып.3. С. 317 – 333.

[18] *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ. 1980. ??? с.

[19] *Козлов В.В.* Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // УМН. 1986. Т.41. №5 (251). 177 – 178.

[20] *Козлов В.В.* О механизме сухого трения // Докл. РАН. 2011. Т.437. №6. С.766 – 767.

[21] *Крементуло В.В.* Исследование устойчивости гироскопа с учетом сухого трения на оси внутреннего карданова кольца (кожуха) //ПММ, 1959. Т.23. Вып.5. С.968 – 970.

[22] *Крементуло В.В.* Устойчивость гироскопа, имеющего вертикальную ось внешнего кольца, при учёте сухого трения в осях подвеса //ПММ, 1960. Т.24. Вып.3. С.568 – 571.

[23] *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: ОНТИ. 1935. 386 с.

[24] *Мандельштам Л.И.*. Полное собрание трудов. IV Лекции по колебаниям (1930-1932). М.: Изд-во АН СССР, 1955. 512 с.

[25] *Маркеев А.П.* Динамика твёрдых тел, соприкасающихся с поверхностями. М.: Наука, 1992. ??? С.

[26] *Матросов В.М., Финогенко И.А.* О притяжении для автономных механических систем с трением скольжения// ПММ. 1998. Т.62. Вып. 1. С.100 – 109.

[27] *Матросов В.М., Финогенко И.А.* Об устойчивости множества положений равновесия автономных механических систем с трением скольжения// ПММ. 1998. Т.62. Вып. 6. С.934 – 944.

[28] *Пожарицкий Г.К.* Об устойчивости равновесий для систем с сухим трением // ПММ. 1962. Т.26. Вып.1. С.5 – 14.

[29] *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // ЖЭТФ. 1934. 4. 9. С. 234 – 238.

[30] *Раус Дж.Э.* Динамика систем твёрдых тел. Т.2. М.: Наука, 19??.

[31] *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.

[32] *Серебрякова В.С.* О круговых движениях связанных маятников Фроуда // Известия высших учебных заведений, Математика. 1965. №4 (47). С.122 – 125.

[33] *Стрелков С.П.* Маятник Фроуда // Журнал технической физики. 1933. Т.3. Вып.4. С.563 – 573.

[34] *Табуева В.А.* Условия существования круговых движений маятника Фроуда // Известия высших учебных заведений, Математика. 1961. №5(24). С.61 – 68.

[35] *Табуева В.А.* Последовательные приближения Трикоми для нахождения периодического решения дифференциального уравнения // Известия высших учебных заведений, Математика. 1959. №6(13), С.169 – 173.

[36] *Тёйфель А., Штайндль А., Трогер Х.* Классификация негладких бифуркаций для осциллятора с трением // Проблемы аналитической механики и теории устойчивости: Сб. научн. ст., посв. памяти акад. В.В.Румянцева. М.: ИПУ РАН, 2009. С.161 – 175.

[37] *Шалимова Е.С.* О движении точки по вращающейся сфере при наличии вязкого трения// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2013. № 1(3). С. 241 – 243.

[38] *Шалимова Е.С.* Стационарные и периодические режимы в задаче о движении тяжелой точки по вращающейся сфере при наличии вязкого трения // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2014. №4. С.43 – 50.

[39] *Akpolat Z.H., Asher G.M., Clare J.C.* Dynamic emulation of mechanical loads using a vector–controlled induction motor–generator set // IEEE Trans. Ind. Electron. 1999. Vol.46. №2. P.370 – 379.

[40] *Alkhaldi H., Ergenzinger C., Fleissner F., Eberhard P.* Comparison Between Two Different Mesh Descriptions Used for Simulation of Sieving Processes // Granular Matter. 2008. Vol.10. №3. P.223 – 229.

[41] *Biemond J.J.B., van de Wouw N., Nijmeijer H.* Bifurcations of equilibrium sets in mechanical systems with dry friction //Physica D: Nonlinear Phenomena. 2012. Vol.241. № 22. P.1882 – 1894.

[42] *Biemond J.J.B.* Nonsmooth dynamical systems. On stability of hybrid trajectories and bifurcations of discontinuous systems // PhD Thesis. Eindhoven. 2012. 217 p.

[43] *Biemond J.J.B., de Moura A.P.S., Celso G., van de Wouw N., Nijmeijer H.* Dynamical collapse of trajectories, part I: homoclinic tangles in systems with dry friction // ENOC 2014, July 6-11, 2014, Vienna, Austria

[44] *Biemond J.J.B., de Moura A.P.S., Celso G., van de Wouw N., Nijmeijer H.* Dynamical collapse of trajectories, part II: Limit set of a horseshoe-like map // ENOC 2014, July 6-11, 2014, Vienna, Austria

[45] *Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S.* Rolling of a Homogeneous Ball over a Dynamically Asymmetric Sphere // Regular and Chaotic Dynamics.– 2011.– Том 16 Номер 5.– с. 465-483.

[46] *Broseghini M., Gelisio L., D'Incau M., Azanza Ricardo C.L., Pugno N.M., Scardi P.* Modeling of the planetary ball-milling process: The case study of ceramic powders // Journal of the European Ceramic Society (2016), vol. 36, (9) pp. 2205-2212.

[47] *Brouwer L.E.J.* Collected Works, Vol. II, Amsterdam: North-Holland, 1976.

[48] *Burov A.A.* On bifurcations of relative equilibria of a heavy bead sliding with dry friction on a rotating circle // Acta mechanica. 2010. Vol.212. Nos 3-4. P.349 – 354.

[49] *Burov A.A., Shalimova E.S.* On the motion of a heavy material point on a rotating sphere (dry friction case) // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. Vol.20. №3. P.225 – 233.

[50] *Fleissner, F., Lehnart, A., Eberhard, P.* Dynamic Simulation of Sloshing Fluid and Granular Cargo in Transport Vehicles// Vehicle System Dynamics. 2010. Vol.48. № 1. P.3 – 15.

[51] *Goeleven D., Brogliato B.* Necessary conditions of asymptotic stability for unilateral dynamical systems // Nonlinear Analysis: Theory, Methods I& Applications. 2005. Vol.61. №6. P.961 – 1004.

[52] *Ehrlich R., Tuszynski J.* Ball on a rotating turntable: Comparison of theory and experiment // Am. J. Phys. 1995. Vol.63. P.351.

[53] *Joshi P., Nigam K.D.P., Nauman E.Bruce* The Kenics static mixer: new data and proposed correlations// Chem. Eng. J. 1995. Vol.59. № 3. P.265 – 271.

[54] *Kuznetsov Yu.A., Rinaldi S., Gragniani A.* One-parameter bifurcations in planar Filippov systems // International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 13, No. 8 (2003) 2157–2188

[55] *Lamarque C.-H., Bastien J.* Numerical study of a forced pendulum with dry friction // Nonlin. Dyn. 2000.Vol. 23, pp. 335–352.

[56] *Leine R.I., Van Campen D.H., De Kraker A., Van Den Steen L.* Stick-Slip Vibrations Induced By Alternate Friction Models // Nonlin. Dyn. 1998. Vol.16. №1. P.41 – 54.

[57] *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability properties of equilibrium sets of nonlinear mechanical systems with dry friction and impact // Nonlin. Dyn. 2008. Vol.51. №4. P.551 – 583.

[58] *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability and convergence of mechanical systems with unilateral constraints // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer, 2008. V.36. 236 p.

[59] *Leine R.I., van Campen D.H.* Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // Europ. J. Mechanics A. Solids, 2006. V.25. P.595 – 616.

[60] *Leine R.I.* Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // Physica D. Nonlinear Pnenomena. 2006. Vol.223. P.121 – 137.

[61] *Lewis A., Murray R.M.* Variational principles in constrained systems: theory and experiments // Int. J. Nonl. Mech. Vol.30. №6. P.793 – 815.

[62] *Papadopoulos E., Papadimitriou I.*Modeling, design and control of a portable washing machine during the spinning cycle // Proc. 2001 IEEE/ASME Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics Systems (AIM 2001), 8-11 July 2001, Como, Italy, 2001. P.899 – 904.

[63] *Persson B.N.* Rolling friction for hard cylinder and sphere on viscoelastic solid // The European Physical Journal E. 2010. Vol.33. №4. P.327 – 333.

[64] *Prandtl L.* Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Köper // ZAMM. 1928. Vol.8. № 2. P.85 – 106.

[65] *Sinopoli, A.* Unilaterality and Dry Friction: A Geometric Formulation for Two-Dimensional Rigid Body Dynamics // Nonlin. Dyn. 1997. Vol.12. №4. P.343 – 366.

[66] *Tomlinson G.A.* A molecular theory of friction // The London, Edinburgh, and Dublin Philos. Mag. and Journal of Sciences, 1929. Vol.7. P. 905 – 939.

[67] *Udwadia F.E., Di Massa G.* Sphere rolling on a moving surface: Application of the fundamental equation of constrained motion // Simulation Modelling Practice and Theory. 2011. Vol.19. №4. P.1118 – 1138.

[68] *van de Vrande B. L., van Campen D. H., de Kraker, A.* An approximate analysis of dry-friction-induced stick-slip vibrations by a smoothing procedure // Nonlin. Dyn. 1999. Vol.19. №2. P.157 – 169.

[69] *van de Wouw, N. and Leine. R.I.* Attractivity of equilibrium sets of systems with dry friction // Nonlinear Dynamics, 2004. Vol.35. №1. P.19 -– 39.

[70] *van de Wouw N., van Den Heuvel M.N., Nijmeijer H., van Rooij J.A.* Performance of an automatic ball balancer with dry friction // Int. J. Bifurc. Chaos. 2005. Vol.15. № 1. P.65 – 82.

[71] *van de Wouw N., Leine R.I.* Stability of stationary sets in nonlinear systems with set-valued friction // Proc. 45th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conf. (CDC2006), San Diego, USA, 2006. P.3765 – 3770.