

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Кафедра прикладной механики и управления

Лаборатория управления и навигации

На правах рукописи

Джепе Али

**ЗАДАЧА НАВИГАЦИИ И ОРИЕНТАЦИИ
ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ
НА ОСНОВЕ ДАТЧИКОВ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ
И МНОГОАНТЕННОГО СПУТНИКОВОГО ПРИЕМНИКА**

Специальность 01.02.01 Теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук Голован А.А.

Москва – 2016

Содержание

1	Введение	3
1.1	Актуальность темы	3
1.2	Краткий обзор	5
1.3	Обзор литературы	7
1.4	Научная новизна	10
1.5	Практическое применение	11
1.6	Структура и объем работы	11
1.7	Публикации по теме диссертации	12
1.8	Основные обозначения и терминологические замечания . .	14
2	Задача определения траекторных параметров движения малого спутника при помощи первичных спутниковых из- мерений	18
2.1	Моделирование траекторных параметров спутника	18
2.2	Задача определения траекторных параметров спутника на основе модели ГЛОНАСС	20
2.3	Задача уточнения траекторных параметров как задача коррекции	25
2.3.1	Корректирующие измерения при использовании вторичной информации СНС (слабо связанная ин- теграция)	25
2.3.2	Корректирующие измерения на основе первич- ных кодовых, доплеровских спутниковых измере- ний (тесно связанная интеграция)	27
2.4	Совместная обработка первичных кодовых, доплеровских измерений систем GPS и ГЛОНАСС	34
2.5	Обработка модельных данных	41
2.6	Заключение к главе 1	46
3	Задача определения параметров ориентации малого спут- ника при помощи датчиков угловой скорости и разнесен- ных спутниковых антенн	47
3.1	Моделирование углового движения спутника	47
3.2	Слабо связанная интеграция: использование вторичной ин- формации – встроенных решений СНС	52

3.3	Тесно связанная интеграция: использование первичных фазовых измерений	60
3.4	Обработка модельных данных	67
3.5	Заключение к главе 2	72
4	Стохастический анализ точности редуцированных моделей и алгоритмов в задаче ориентации	73
4.1	Полная модель задачи оценивания	75
4.2	Редуцированная (упрощенная) модель задачи оценивания и редуцированный фильтр Калмана	76
4.3	Уравнения для истинной ошибки оценки	76
4.4	Дисперсионное уравнение для истинной ошибки оценки	77
4.5	Обработка модельных данных	83
4.5.1	Модификация моделей, обусловленная неточностью знания координат базовых векторов.	83
4.5.2	Результаты обработки данных.	85
4.6	Заключение к главе 3.	85
5	Заключение	87

1 Введение

1.1 Актуальность темы

Диссертационная работа посвящена задаче навигации гипотетического искусственного спутника Земли, навигационный комплекс которого состоит из датчиков угловой скорости (ДУС) и многоантенного приемника сигналов спутниковых навигационных систем (СНС) ГЛОНАСС и/или GPS. Ставится задача построения и обоснования алгоритмов комплексной обработки, предоставляемой этими датчиками, в условиях, когда спутниковая навигационная информация может быть нерегулярной: возможны пропуски этой информации, число видимых спутников может быть малым и т.п.

В диссертационной работе в части задачи ориентации не рассматривались варианты комплексирования ДУС с иными датчиками навигационной информации: астродатчиками, магнитометрами, датчиком направления на Солнце, инфракрасной вертикалью, поскольку такие задачи исследовались другими авторами.

Диссертационное исследование было нацелено именно на задачи интеграции данных ДУС и многоантенных СНС, поскольку эта тематика в настоящее время формируется.

Исследуемая задача навигации спутника состоит из двух подзадач:

- собственно задачи навигации – задаче определения траекторных параметров движения характерной точки спутника, например, точки установки базовой спутниковой антенны. Под траекторными параметрами понимаются координаты и вектор относительной скорости этой точки, для определенности, в осях Земной, гринвичской системы координат.

Рассматриваются несколько возможных постановок этой задачи, когда

- для решения задачи может использоваться так называемая вторичная спутниковая информация – встроенные позиционные и скоростные решения приемника сигналов СНС;
- для решения задачи может использоваться так называемая первичная спутниковая информация – кодовые псевдодалности, доплеровские псевдоскорости, фазовые измерения;

- для решения задачи могут использоваться совместные данные систем ГЛОНАСС и GPS.
- задачи ориентации – задаче определения параметров ориентации спутника путем комплексной обработки информации, предоставляемой ДУС и фазовыми измерениями многоантенного спутникового приемника.

Здесь также рассматриваются несколько возможных постановок этой задачи, когда

- для решения задачи может использоваться так называемая вторичная спутниковая информация – встроенные ориентационные решения многоантенного приемника сигналов СНС;
- для решения задачи может использоваться так называемая первичная спутниковая информация – фазовые измерения от нескольких антенн;
- исследуются вопросы чувствительности алгоритма комплексирования информации к неточности задания базовых векторов многоантенной системы, несовпадения приборного трехгранника, образованного осями чувствительности ДУС и связанной с корпусом объекта системой координат, к осям которой привязаны координаты спутниковых антенн.

Разработанные в диссертационной работе алгоритмы комплексной обработки информации не привязаны к конкретному типу датчиков угловой скорости, их классу точности, типу приемника спутниковой навигации и в этом смысле унифицированы.

В настоящее время многоантенные спутниковые приемники доступны на рынке:

<https://www.javad.com/jgnss/products/oem/Duo-G3D/specifications.html>,
<https://www.javad.com/jgnss/products/oem/Quattro-G3D/specifications.html>,
<http://www.stepglobal.com/GNSS-RTK-GPS-Receivers.html>,
<http://www.novatel.com/products/gnss-receivers/oem-receiver-boards/oem6-receivers> ,
http://intech.trimble.com/oem_gnss/sensors-enclosures/ashtech_adu800 ,
http://www.navtechgps.com/assets/1/7/ADU5_DS.pdf.

Технология их производства в достаточной степени отработана. На рынке доступны также датчики угловой скорости разного класса точности, габаритов, энергопотребления, разных физических принципов изме-

рения полезного сигнала. Представляется, что сочетание ДУС + многоантенный СНС приемник станет достаточно стандартной комплектацией искусственных спутников Земли, когда требования по решению задачи ориентации не очень высоки.

Поэтому исследование задач комплексирования ДУС + многоантенный СНС приемник в задачах навигации искусственного спутника Земли представляется актуальной.

1.2 Краткий обзор

К настоящему времени спутниковые навигационные системы, например GPS, применяются в основном для определения местоположения (географических координат и высоты), точного времени, а также других параметров движения (вектора скорости, путевого угла и т.д.) для наземных, водных и воздушных объектов. Наряду с земными приложениями, в космических приложениях также активно используются возможности спутниковых навигационных систем для определения траекторных параметров движения искусственных спутников Земли (ИСЗ).

В частности, в задаче навигации малых (микро) искусственных спутников Земли – спутников, имеющих малый вес и габариты – применение навигационных решений СНС имеет ряд преимуществ. Обычно малые спутники вращаются по низким околоземным орбитам, то есть на высоте до 1500 км над земной поверхностью. Первое преимущество заключается в том, что атмосферные задержки распространения радиосигнала, вызванные его прохождением через слой тропосферы (слой атмосферы на высоте от 8 до 18 км.), слой ионосферы (слой атмосферы на высоте от 50 до 1000 км.), практически отсутствуют. Отсутствуют также погрешности многолучевости, поскольку отражающие поверхности отсутствуют.

Вторым возможным преимуществом является получение большего объема измерений от навигационных спутников, поскольку сферы космических пространств, в которой спутники находятся, расширяются, и количество доступных в зоне прямой видимости спутников может увеличиваться.

Стандартный алгоритм определения местоположения приемником СНС основывается на измерениях псевдодальностей объект-спутники для определения с их помощью трех координат приемника. Для этого решается линеаризованная система уравнений с четырьмя неизвестными: три координаты местоположения и погрешность часов приемника.

Поэтому приемнику необходимо провести измерения псевдодальностей от четырех или более спутников. Результат решения этой задачи называется вторичной информацией приемника сигналов СНС.

Однако необходимость нахождения в зоне видимости, по крайней мере, четырех спутников может не всегда выполняться и в этом случае приемник СНС не может предоставлять указанную вторичную информацию.

В диссертационной работе в случае возникновения такой особенности предложено использовать первичные спутниковые измерения для коррекции моделируемой (модельной) траектории спутника. Методически эта задача схожа с задачей коррекции в инерциальной навигации [15], [16]. Ее отличие в том, что не используются инерциальные датчики (акселерометры) для счисления модельной траектории объекта, а роль модельных уравнений выполняют уравнения движения искусственного спутника Земли.

Для этого варианта предложено использовать так называемые первые разности первичных измерений с целью исключения погрешностей часов приемника из модели решаемой задачи коррекции. Представлены соответствующие модели.

Кроме того, для этого же варианта исследован вопрос о моделях совместного использования первичных спутниковых измерений систем ГЛОНАСС и GPS.

Другой важной задачей, которую приходится решать практически в течение всего времени полета искусственного спутника, является определения ориентации его корпуса в пространстве, при которой обеспечивается заданное направление в пространстве одной или всех трех осей связанной с корпусом спутника системы координат.

Такая задача возникает, например, когда необходимо обеспечить наилучшие условия работы солнечных батарей. Наилучшим положением солнечных батарей будет такое, когда их плоскость перпендикулярна направлению солнечных лучей.

Параметры ориентации малого спутника традиционно определяются с помощью позиционных датчиков систем ориентации, в состав которого входят, например, астродатчик, солнечный датчик, трехосный магнитометр и т.д.

Для обработки результатов измерений, проведенных с помощью этих датчиков, в литературе используются, фактически, два основных метода оценивания: детерминированные, алгебраические методы и рекурсивные

алгоритмы, например, фильтры калмановского типа.

Для определения ориентации детерминированные алгоритмы используют измерения от как минимум двух датчиков ориентации в единственной точке отсчета во времени и, вообще говоря, не нуждаются в применении рекуррентных алгоритмов, основанных на использовании модели динамической задачи оценивания.

Рекурсивные алгоритмы для получения оценки вектора состояния динамической системы используют измерения от одного или несколько датчиков совместно с параметрами модели динамической системы.

В последнее время для решения задач ориентации интенсивно развивались методы и аппаратура, которые базируются на использовании фазовых измерений многоантенных спутниковых приемников.

Пусть имеется система разнесенных спутниковых антенн, в которой антенны приемника сигналов СНС закреплены в фиксированных положениях относительно корпуса объекта. Многоантенный приемник способен синхронно регистрировать измерения фазы (систем GPS и/или ГЛОНАСС) несущей частоты для каждой из антенн. Программное обеспечение многоантенного приемника, оперируя с дифференциальными комбинациями фазовых измерений (при достаточном числе видимых спутников) определяет два угла ориентации (при наличии в принимающей аппаратуре только двух антенн), а при наличии в принимающей аппаратуре трех и более антенн (с невырожденной геометрией) – три угла, полностью характеризующих ориентацию корпуса объекта.

Соответствующее ориентационное решение назовем вторичной информацией многоантенного спутникового приемника.

Здесь отметим, что при отсутствии требуемого числа видимых спутников вторичная информация отсутствует. Кроме того, это решение очень чувствительно к сбоям фазовых измерений.

Для повышения надежности, непрерывности ориентационных решений, стандартным подходом является использование комплексной навигационной аппаратуры, состоящей из упомянутой выше многоантенной спутниковой системы и триады инерциальных датчиков – датчиков угловой скорости.

1.3 Обзор литературы

К настоящему времени спутниковые навигационные системы (СНС) используются в основном для определения местоположения (географи-

ческих координат и высоты) и точного времени, а также других параметров движения (вектора скорости, путевого угла и т.д.) для наземных, водных и воздушных объектов. Подробный обзор таких приложений изложен в [1].

Среди основных научных работ, посвященных изучению и описанию методов и алгоритмов обработки информации системы GPS, можно перечислить: [2], [3], [7], [8], [9], [10], [11], [12].

Наряду с земными приложениями, в космических приложениях также активно используются возможности спутниковых навигационных систем, например, для определения траекторных параметров движения искусственных спутников Земли [13]. В работе [14] изложены подходы к решению задачи определения траектории спутников с низкой околоземной орбитой.

Важной задачей, которую приходится решать практически в течение всего времени полета искусственного спутника, является определения его ориентации в пространстве, при которой обеспечивается заданное направление в пространстве одной или всех трех осей спутника.

Параметры ориентации малого спутника традиционно определяются с помощью позиционных датчиков систем ориентации, в состав которого входят, например, астродатчик, солнечный датчик, векторный магнетометр и т.д.

Для обработки результатов измерений, проведенных с помощью этих датчиков, в литературе используются, фактически, два основных метода оценивания: детерминированные методы и рекурсивные алгоритмы, например, фильтры калмановского типа.

Детерминированные методы в большинстве случаев опираются на решение задачи Вахбы. Задача Вахбы [17] была поставлена Грейсом Вахба в 1965 году. Суть задачи заключается в том, что требуется установить соотношения, связывающие направляющие косинусы единичного вектора, измеряемые в связанной системе координат и известные единичные векторы линии визирования на небесные светила относительно инерциальной системы координат. Другими словами, задача Вахбы состоит в определении матрицы ориентации космического аппарата в заданный момент времени используя два и более направляющие косинусы единичных векторов, измеряемые в связанной системе координат.

В литературе существует ряд других подходов к решению задачи Вахбы, например, q -метод Давенпорта [18], алгоритм QUEST [19] и методы, основанные на сингулярном разложении [20]. В [21] приведен аналити-

ческий обзор методов и алгоритмов, разработанных для решения задачи Вахбы.

Рекурсивные алгоритмы для получения оценки состояния динамической системы используют измерения от одного или несколько датчиков совместно с параметрами модели динамической системы.

В качестве примера можно привести португальский микроспутник PoSAT-1 [22]: фильтр строится на измерениях солнечного датчика, звездного датчика и магнитометра.

Интересны работы [5], [6] сотрудников ИПМ им. М.В.Келдыша.

Немецкий астрономический спутник «ABRIXAS» для определения ориентации использует трехосный магнитометр и солнечные датчики [23].

В некоторых проектах используются фильтры, которые основываются только на измерениях магнитометра [24], [25].

Также в качестве примера стоит отметить те проекты, которые наряду с датчиками ориентации используют измерения датчика угловой скорости [26], [27], [28], [29], [30], [31].

В последнее время для решения задач ориентации интенсивно развивались методы и аппаратура, которые базируются на фазовых измерениях многоантенных спутниковых приемников [32], [33], [34].

Фазовые измерения получаются путем интегрирования фазы принимаемых от спутника несущих сигналов приемником, которая сравнивается с фазой соответствующих сигналов, генерируемых в приемнике. Текущая фаза несущих сигналов, поступающих от спутника на вход приемника потребителя, зависит от частоты несущих сигналов, и от времени прохождения сигнала.

Однако поскольку начальное количество полных периодов при распространении между спутником и приемником, когда приемник начинает отслеживать фазу несущей сигнала не известно, в измерении фазы несущей присутствует так называемая целочисленная неопределенность (ambiguity), составляющая целое число длин волн радиосигнала.

Измеряемая разность фаз в долях цикла прямо пропорциональна проекции базовых векторов, соединяющих фазовые центры антенн, на линии визирования антенны-спутник. В настоящее время точность измерения разности фаз радиосигналов корреляционными методами составляет величину порядка 0.002 доли цикла, что при длинах волн $\lambda_1 \simeq 19$ см, $\lambda_2 \simeq 24.4$ см. радиосигналов системы GPS на несущих частотах L_1 , L_2 , эквивалентно миллиметровому уровню погрешности фазового измере-

ния.

Для использования такой точности фазовых измерений необходимо разрешать целочисленные неопределенности, присущие этим фазовым измерениям. Обзор различных подходов для разрешения этой неопределенности, составляющей целое число периодов, сделан в работе [7].

Классическими работами в этой области являются работы P.J.G. Teunissen [38], [39] и другие работы автора.

Следует также отметить, что при определении ориентации спутника на основе измерений многоантенной СНС для получения трехмерного решения необходимо как минимум три спутниковых антенны с невырожденной геометрией и достаточное количество видимых в каждый момент спутников.

1.4 Научная новизна

В работе получены следующие основные результаты.

1. Разработаны, обоснованы, подтверждены математическим моделированием модели и алгоритмы решения задачи определения траекторных параметров движения малого спутника при помощи вторичной, первичной информации СНС, модели орбитального движения спутника.
2. Показано, что следует использовать первые разности первичных спутниковых измерений, в том числе при совместной обработке измерений GPS и ГЛОНАСС, позволяющих решать эту задачу при малом числе видимых спутников, когда информация СНС не регулярна.
3. Выведены и обоснованы модели задачи определения ориентации спутника при помощи показаний ДУС и вторичной информации от системы разнесенных спутниковых антенн.
4. Выведены и обоснованы модели задачи интеграции данных ДУС и фазовых измерений многоантенной спутниковой навигационной системы.
5. Приведена и обоснована схема стохастического анализа чувствительности задачи ориентации к неточности знания координат базовых векторов и их возможной неортогональности. Представленный

анализ основан на понятии редуцированной модели задачи оценивания и стохастической меры оцениваемости.

1.5 Практическое применение

Разработанные алгоритмы могут найти практическое применение при разработке программно-математического обеспечения навигационного комплекса искусственных спутников Земли.

1.6 Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения, списка литературы и двух приложений.

Во введении обосновывается актуальность темы, дается краткий обзор и краткое содержание диссертации.

В первой главе исследуется задача определения траекторных параметров малого спутника, использующего аппаратуру спутниковой навигации.

Приводятся результаты моделирование задачи, в котором за основу берутся характеристики траекторного движения спутника МГУ «Университетский-Татьяна-2». Приводится краткое описание моделей и допущений, используемых при построении траекторного движения малого спутника «Университетский-Татьяна-2», даются сведения о моделировании первичных и вторичных спутниковых измерений, моделировании измерений датчиков угловых скоростей.

В этой главе также описаны алгоритмы оценивания для случаев регулярной и не регулярной спутниковой информации.

Во второй главе рассматривается задача определения параметров движения вокруг центра масс малого спутника «Университетский-Татьяна-2», основанная на показаниях датчиков угловых скоростей и измерениях, доставляемых системой разнесенных спутниковых антенн.

При этом дается краткое описание моделей и алгоритмов, используемых при описании углового движения малого спутника «Университетский-Татьяна-2», даются кинематические соотношения, связывающие компоненты угловой скорости спутника с углами ориентации.

В третьей главе проводится стохастический анализ точности оценивания параметров ориентации в зависимости от неточности знания коор-

динат базовых векторов многоантенной спутниковой системы и их геометрических погрешностей. Стохастический анализ точности основан на введенном понятии редуцированной модели задачи оценивания и на понятии стохастической меры оцениваемости.

В данной работе для моделирования процесса определения положения, скорости и ориентации малого спутника формировались следующие математические модели и алгоритмы:

- модель созвездий GPS / ГЛОНАСС;
- модели первичных спутниковых измерений (кодовые, доплеровские, фазовые), а также вторичной спутниковой информации;
- модель измерений датчиков угловой скорости;
- модели движения центра масс и углового движения малого спутника Университетский-Татьяна-2;
- алгоритм определения координат и относительной скорости малого спутника для случаев регулярной и не регулярной спутниковой информации;
- алгоритм определения ориентации малого спутника при так называемых слабой и тесной интеграции спутниковой информации.

1.7 Публикации по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК:

- А. Джепе, А. А. Голован Определение траекторных параметров движения малого спутника при помощи первичных спутниковых измерений, Вестник Московского университета. Серия 1, Математика. Механика. 2016. Выпуск 1, Стр. 1-4.

СЕРЕ А., Golovan A. Determination of trajectory parameters for a small satellite using raw satellite measurements. Moscow University Mechanics Bulletin January 2016, Volume 71, Issue 1, pp 19-22. Allerton Press. DOI: 10.3103/S0027133016010040

- А. Джепе, А.В. Козлов, А.А. Никулин Задача определения ориентации спутника при помощи разнесенных спутниковых антенн и датчиков угловой скорости, Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. Выпуск 4, Стр. 155-159. DOI: 10.7868/S0002338815030051
A PROBLEM OF SATELLITE ORIENTATION DETERMINATION BY SPACED SATELLITE ANTENNAS AND ANGULAR RATE SENSORS CEPE A., KOZLOV A.V., NIKULIN A.A. JOURNAL OF COMPUTER AND SYSTEMS SCIENCES INTERNATIONAL. V.54, #4, 2015, 651-655 Pleiades Publishing, Ltd. DOI: 10.1134/S1064230715030053

Статьи, опубликованные в сборнике научных трудов международной научно-практической конференции:

- Alexander V. Kozlov, Andrei. A. Golovan, Alexey A. Nikulin, Ali Cepe, Vladimir B. Chemodanov, GPS Attitude Determination Under Antenna Array Geometry Deformation, Recent Advances in Space Technologies (RAST), 2015 7th International Conference on. С. 265–270, 2015.
- Cepe A., Golovan A., Stochastic Analysis of Reduced Order GNSS Based Attitude Determination Algorithm, Recent Advances in Space Technologies (RAST), 2015 7th International Conference on. С. 265–270, 2015.
- Golovan A., Cepe A., Small Satellite Attitude and Orbit Determination based on GPS/IMU Data Fusion, Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences (ICNPAA) 10th International Conference on. Narvik University, Norway, С. 341 , 2014.
- Cepe A., Golovan A., Integration of angular rate sensors and GPS carrier phase measurements for attitude determination of Small Satellites, Recent Advances in Space Technologies (RAST), 2013 6th International Conference on. С. 265-270, 2013.
- Джепе, А. Определение курсового угла движущегося объекта по фазовым измерениям с помощью двух разнесенных антенн, Сборник докладов XIX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, МКИНС2012, 28 - 30 мая 2012 г., Санкт-Петербург, Россия.

- Bogdanov O., Сеpe A. Precise orbit determination for GPS and GLONASS satellites on the basis of IGS data, Recent Advances in Space Technologies (RAST), 2011 5th International Conference on. С. 915-919, 2011.

1.8 Основные обозначения и терминологические замечания

Инерциальная система координат $O\xi$.

В качестве инерциальной системы координат, задающей инерциальное пространство, принимается система координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, начало O которой совпадает с центром масс Земли. Ось $O\xi_3$ – ось вращения Земли, направленная к условному северному Земному полюсу, плоскость $O\xi_1\xi_2$ составляет плоскость земного экватора.

Гринвичская (Земная) система координат $O\eta$, жестко связанная с Землей.

Точка O – центр масс Земли. Ось $O\eta_3$ совпадает с осью $O\xi_3$ – осью вращения Земли, направленной на Условный Земной полюс, плоскость $O\eta_1\eta_3$ – плоскость гринвичского (нулевого) меридиана, плоскость $O\eta_1\eta_2$ – экваториальная плоскость.

Переход от системы $O\xi$ к системе $O\eta$ определяется поворотом:

$$O\xi \xrightarrow[3]{u(t-t_0)} O\eta.$$

Здесь u – модуль угловой скорости вращения Земли, t – время, t_0 – начальный момент времени.

Не нарушая общности, полагаем $t_0 = 0$.

Матрица взаимной ориентации $A_{\eta\xi}$ систем $O\eta$, $O\xi$ имеет вид:

$$A_{\eta\xi} = \begin{pmatrix} \cos ut & \sin ut & 0 \\ -\sin ut & \cos ut & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Орбитальная система координат $O\zeta$.

Точка O – центр масс Земли. Ось $O\zeta_3$ ортогональна плоскости орбиты спутника. (Положение спутника в орбитальной системе $O\zeta$ определяется значением аргумента широты θ .)

Переход от инерциальной системы координат $O\xi$ и орбитальной системе $O\zeta$ определяется последовательностью поворотов:

$$O\xi \xrightarrow[1]{3} \xrightarrow{i} O\zeta.$$

Здесь Ω_0 – начальное значение долготы восходящего узла в момент времени t_0 , i – наклон (наклонение) орбиты.

Матрица взаимной ориентации $A_{\xi\zeta}$ систем $O\xi$, $O\zeta$ имеет вид:

$$A_{\xi\zeta} = \begin{pmatrix} \cos \Omega_0 & -\sin \Omega_0 \cos i & \sin \Omega_0 \sin i \\ \sin \Omega_0 & \cos \Omega_0 \cos i & -\cos \Omega_0 \sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}.$$

Переход от гринвичской системы координат $O\eta$ и орбитальной системе координат $O\zeta$ определяется последовательностью поворотов:

$$O\eta \xrightarrow[1]{3} \xrightarrow{i} O\zeta.$$

Здесь $\Omega(t) = \Omega_0 - u \cdot t$ – долгота восходящего узла ($t_0 = 0$), i – наклон (наклонение) орбиты.

Матрица взаимной ориентации $A_{\eta\zeta}$ систем $O\eta$, $O\zeta$ имеет вид:

$$A_{\eta\zeta} = \begin{pmatrix} \cos \Omega(t) & -\sin \Omega(t) \cos i & \sin \Omega(t) \sin i \\ \sin \Omega(t) & \cos \Omega(t) \cos i & -\cos \Omega(t) \sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}.$$

Траекторная система координат Mt (Ot).

Для описания движения спутника вокруг центра масс потребуется траекторная система координат. Ее также называют орбитальной системой координат (не путать с ранее введенной орбитальной системой координат, которая характеризует ориентацию орбитальной плоскости относительно инерциального пространства).

Первая ось Mt_1 траекторной системы координат совпадает с вектором абсолютной скорости движения спутника. Третья ось Mt_3 направлена по радиус-вектору OM . Вторая ось ортогональна плоскости орбиты и определяет правую систему координат.

Здесь отметим, что введенная траекторная система координат близка по ориентации к системе координат, связанной с географической вертикалью.

Переход от орбитальной системы координат к траекторной определяется следующей цепочкой поворотов:

$$O\zeta \xrightarrow[3]{\theta + \frac{\pi}{2}} \xrightarrow[1]{\frac{\pi}{2}} Ot.$$

Матрицы взаимной ориентации имеют вид

$$A_{\zeta t} = \begin{pmatrix} -\sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{t\zeta} = A_{\zeta t}^T.$$

Абсолютная угловая скорость ω_t^o траекторной системы координат такова:

$$\omega_t^o = (0, \dot{\theta}, 0)^T.$$

Связанная система координат Ms (Os).

Введем понятие связанной с корпусом объекта системы координат Ms . Для определенности в качестве объекта рассмотрим малый спутник. Предполагаем, что ее оси направлены вдоль главных центральных осей инерции корпуса спутника.

Ориентация трехгранника Ms относительно трехгранника Mt определяется углами истинного курса ψ , крена γ и тангажа ϑ .

Взаимосвязь траекторной и связанной систем координат такова

$$Ot \xrightarrow[3]{\psi} \xrightarrow[1]{\gamma} \xrightarrow[2]{\vartheta} Os.$$

Матрицы взаимной ориентации B_{st} , B_{ts} систем Os , Ot имеют вид:

$$B_{st} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \vartheta - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma & \sin \psi \cos \vartheta + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma & -\cos \gamma \sin \vartheta \\ -\sin \psi \cos \gamma & \cos \psi \cos \gamma & \sin \gamma \\ \cos \psi \sin \vartheta + \sin \psi \sin \gamma \cos \vartheta & \sin \psi \sin \vartheta - \cos \psi \sin \gamma \cos \vartheta & \cos \vartheta \cos \gamma \end{pmatrix},$$

$$B_{ts} = B_{st}^T.$$

Для системы координат Ms также будем использовать обозначение Mz , подчеркивая, что ее оси являются осями приборной системы координат Mz инерциальных датчиков - датчиков угловой скорости.

2 Задача определения траекторных параметров движения малого спутника при помощи первичных спутниковых измерений

Спутниковые навигационные системы (СНС) широко используются для определения местоположения и скорости объектов. Приемники СНС предоставляют указанную информацию, когда доступны измерения не менее чем от 4-х спутников.

Однако в случае, когда доступны измерения менее чем от 4-х спутников, приемники СНС не могут предоставлять указанную информацию.

В данной главе рассматривается задача определения траекторных параметров движения малого спутника, когда число видимых спутников может быть меньше 4-х, то есть когда информация СНС не регулярна.

Рассматриваются два варианта использования первичных спутниковых измерений.

В первом варианте для исключения из модели задачи погрешностей часов спутникового приемника предлагается использовать первые разности первичных спутниковых измерений.

Во втором варианте предлагается использовать совместно первичные измерения систем ГЛОНАСС и GPS, что позволяет использовать большее количество данных от спутников обеих систем для определения траекторных параметров объектов.

Методически эта задача схожа с задачей коррекции в инерциальной навигации [15], [16]. Ее отличие в том, что не используются инерциальные датчики (ньютонометры) для счисления модельной траектории объекта, а роль модельных уравнений выполняют уравнения движения искусственного спутника Земли.

Вначале опишем справочные модели, связанные с моделированием траекторных параметров движения искусственного спутника Земли.

2.1 Моделирование траекторных параметров спутника

Для моделирование траектории спутника осуществляется следующая последовательность вычислений:

1. Определяется время для вычисления координат и скорости t , пусть

для определенности начальный момент $t_0 = 0$ сек;

2. Вычисляется модуль космической скорости движения спутника по орбите

$$\frac{v^2}{r} = g^0(r),$$

где g^0 – модуль удельной силы тяготения, главное значение которого определяется формулой

$$g^0(r) = \frac{\mu}{r^2}.$$

Здесь μ – гравитационная постоянная и r – радиус спутника.

3. Вычисляется аргумент широты $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}t,$$

где $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$.

4. Вычисляются координаты и вектор абсолютной скорости в орбитальной системе координат:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= r \cos \theta, & \zeta_2 &= r \sin \theta, & \zeta_3 &= 0, \\ v_{\zeta_1} &= -r\dot{\theta} \sin \theta = -v \sin \theta, & v_{\zeta_2} &= r\dot{\theta} \cos \theta = v \cos \theta, & v_{\zeta_3} &= 0.\end{aligned}$$

5. Вычисляются координаты и вектор абсолютной скорости в инерциальной системе координат:

$$\xi = A_{\xi\zeta}\zeta, \quad v_\xi = A_{\xi\zeta}v_\zeta.$$

6. Вычисляются координаты и вектор абсолютной скорости в гринвичской системе координат:

$$\eta = A_{\eta\xi}\xi, \quad v_\eta = A_{\eta\xi}v_\xi.$$

7. Вычисляются вектор относительной скорости в гринвичской системе координат:

$$V_{\eta_1} = v_{\eta_1} + u\eta_2, \quad V_{\eta_2} = v_{\eta_2} - u\eta_1, \quad V_{\eta_3} = v_{\eta_3}.$$

2.2 Задача определения траекторных параметров спутника на основе модели ГЛОНАСС

Для моделирование траектории спутника другой способ заключается в использовании уравнений, используемый для прогноза движения навигационных спутников системы ГЛОНАСС [35]. Она представляет собой уравнения движения материальной точки под действием только одной силы – нормальной составляющей удельной силы тяготения.

Будем считать, что на спутнике установлена аппаратура спутниковых навигационных систем (СНС) GPS и/или ГЛОНАСС. Ставится задача определения траекторных параметров движения спутника в условиях, когда информация СНС не всегда регулярна.

Предполагается, что в начальный момент времени t_0 известна информация о начальных координатах $\eta'(t_0)$ и векторе относительной скорости $V_{\eta'}(t_0)$ движения спутника. Для определенности, будем считать, что эта информация доставляется приемником сигналов СНС.

Имеем

$$\eta'(t_0) = \eta(t_0) + \Delta\eta(t_0), \quad V_{\eta'}(t_0) = V_{\eta}(t_0) + \Delta V_{\eta}(t_0), \quad (1)$$

где $\eta(t_0)$, $V_{\eta}(t_0)$ – истинные значения, $\Delta\eta(t_0)$, $\Delta V_{\eta}(t_0)$ – ошибки начальных условий.

Уравнения движения записываются в осях подвижной гринвичской системы координат $O\eta$ с использованием относительной скорости V_{η} движения точки. Прогнозирование координат и скоростей малого спутника производится путем численного интегрирования методом Рунге-Кутты 4-го порядка следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}' &= V_{\eta}', \\ \dot{V}_{\eta}' &= 2\hat{u}V_{\eta}' - \hat{u}^2\eta' + g_{\eta}^{0'} + f_{\eta}'. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь:

- $g_{\eta}^{0'} - \hat{u}^2\eta' = g_{\eta}$ – вектор удельной силы тяжести в проекциях на оси трехгранника $O\eta$,
- $\eta' = (\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3)^T$ – модельные гринвичские координаты,
- $V_{\eta}' = (V'_{\eta_1}, V'_{\eta_2}, V'_{\eta_3})^T$ – модельные компоненты вектора относительной скорости,

- $u = (0, 0, u)^T$ – вектор угловой скорости вращения Земли, \hat{u} – кососимметрическая матрица, соответствующая этому вектору.

В скалярной форме (2) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}'_1 &= V'_{\eta_1}, \\
\dot{\eta}'_2 &= V'_{\eta_2}, \\
\dot{\eta}'_3 &= V'_{\eta_3}, \\
\dot{V}'_{\eta_1} &= 2uV'_{\eta_2} + u^2\eta'_1 + g_{\eta_1}^{0'} + f'_{\eta_1}, \\
\dot{V}'_{\eta_2} &= -2uV'_{\eta_1} + u^2\eta'_2 + g_{\eta_2}^{0'} + f'_{\eta_2}, \\
\dot{V}'_{\eta_3} &= g_{\eta_3}^{0'} + f'_{\eta_3}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $g_{\eta}^{0'} = (g_{\eta_3}^{0'}, g_{\eta_2}^{0'}, g_{\eta_1}^{0'})^T$ – вектор удельной нормальной силы тяготения.

Модель нормальной удельной силы тяготения, используемая в спутниковой навигационной системе ГЛОНАСС

Для вычисления силы тяготения используем модель, описанную в контрольном документе ГЛОНАСС ([35]). Мы будем применять ее для расчета.

В осях гринвичской системы координат $O\eta$ ускорение $g_{\eta}^0 = (g_{\eta_1}^0, g_{\eta_2}^0, g_{\eta_3}^0)^T$ нормальной силы тяготения имеет вид:

$$\begin{aligned}
g_{\eta_1}^{0'} &= -\frac{\mu}{r^3} \left[1 + \frac{3}{2}C_{20} \frac{a^2}{r^2} \left(5\frac{\eta_3'^2}{r^2} - 1 \right) \right] \eta'_1, \\
g_{\eta_2}^{0'} &= -\frac{\mu}{r^3} \left[1 + \frac{3}{2}C_{20} \frac{a^2}{r^2} \left(5\frac{\eta_3'^2}{r^2} - 1 \right) \right] \eta'_2, \\
g_{\eta_3}^{0'} &= -\frac{\mu}{r^3} \left[1 + \frac{3}{2}C_{20} \frac{a^2}{r^2} \left(5\frac{\eta_3'^2}{r^2} - 3 \right) \right] \eta'_3, \\
r &= \sqrt{\eta_1'^2 + \eta_2'^2 + \eta_3'^2}.
\end{aligned}$$

Здесь:

- $\mu = 398600, 4418 \times 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2$ – константа гравитационного поля Земли;
- $C_{20} = -1082, 6257 \times 10^{-6}$ – коэффициент при второй зональной гармонике разложения гравитационного поля Земли в ряд по сферическим функциям;
- $a = 6378136 \text{ м}$ – большая полуось модельного эллипсоида Земли координатной системы ПЗ-90.11.

Замечание. В принципе можно использовать расширенную модель для ускорения силы тяготения из контрольного документа системы ГЛОНАСС [35], которая учитывает влияние притяжения Луны, Солнца. Для исследуемой методической задачи такое усложнение модели не принципиально.

Уравнения (2) интегрируются методом Рунге-Кутты 4-го порядка с требуемым шагом интегрирования. Начальные условия заданы (1).

Уравнения движения спутника в вариациях – линейные уравнения ошибок.

Введем позиционные и скоростные ошибки:

$$\Delta\eta = \eta' - \eta, \quad \Delta V_\eta = V'_\eta - V_\eta. \quad (4)$$

Введем внешние возмущающие силы f_η , действующие на спутник и порождаемые, например, влиянием остаточной атмосферы, солнечным давлением, силами тяготения Солнца и Луны.

Будем считать, что неизвестный вектор f_η представим в виде суммы детерминированной составляющей – вектора f_η^0 и случайной составляющей – случайного вектора f_η^s .

$$f_\eta = f_\eta^0 + f_\eta^s. \quad (5)$$

Для определенности, далее рассмотрим только случай, когда принимается следующая модель:

$$f_\eta^0 = \text{const}. \quad (6)$$

Замечание. При необходимости модель (6) можно видоизменить, например, используя модель интеграла от белого шума q_f (с подбираемой интенсивностью):

$$\dot{f}_\eta^0 = q_f. \quad (7)$$

Для исследуемой методической задачи соответствующее усложнение модели не принципиально.

Линеаризуем систему уравнений движения спутника (3) в окрестности априорной траектории :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\eta} &= \Delta V_\eta, \\ \Delta \dot{V}_\eta &= 2\hat{u}\Delta V_\eta - \hat{u}^2\Delta\eta + \Delta\eta + f_\eta^0 + f_\eta^s, \\ \dot{f}_\eta^0 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь T – гравитационный тензор.

Для сферической модели поля тяготения ($g_{\eta_i}^0 = -\frac{\mu}{r^3}\eta_i$, ($i = 1, 2, 3$) – главной составляющей гравитационного потенциала) он имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 3\frac{\mu}{r^5}\eta_1^2 - \frac{\mu}{r^3} & 3\frac{\mu}{r^5}\eta_1\eta_2 & 3\frac{\mu}{r^5}\eta_1\eta_3 \\ 3\frac{\mu}{r^5}\eta_1\eta_2 & 3\frac{\mu}{r^5}\eta_2^2 - \frac{\mu}{r^3} & 3\frac{\mu}{r^5}\eta_2\eta_3 \\ 3\frac{\mu}{r^5}\eta_1\eta_3 & 3\frac{\mu}{r^5}\eta_2\eta_3 & 3\frac{\mu}{r^5}\eta_3^2 - \frac{\mu}{r^3} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Скалярная форма уравнений ошибок имеет вид (8):

$$\begin{aligned} \Delta\eta_1 &= \Delta V_{\eta_1}, \\ \Delta\dot{\eta}_2 &= \Delta V_{\eta_2}, \\ \Delta\dot{\eta}_3 &= \Delta V_{\eta_3}, \\ \Delta\dot{V}_{\eta_1} &= 2u\Delta V_{\eta_2} + (g_{\eta_1}^0)'_{\eta_1}\Delta\eta_1 + (g_{\eta_1}^0)'_{\eta_2}\Delta\eta_2 + (g_{\eta_1}^0)'_{\eta_3}\Delta\eta_3 + u^2\Delta\eta_1 + \Delta f_{\eta_1}^0 + \Delta f_{\eta_1}^s, \\ \Delta\dot{V}_{\eta_2} &= -2u\Delta V_{\eta_1} + (g_{\eta_2}^0)'_{\eta_1}\Delta\eta_1 + (g_{\eta_2}^0)'_{\eta_2}\Delta\eta_2 + (g_{\eta_2}^0)'_{\eta_3}\Delta\eta_3 + u^2\Delta\eta_2 + \Delta f_{\eta_2}^0 + \Delta f_{\eta_2}^s, \\ \Delta\dot{V}_{\eta_3} &= (g_{\eta_3}^0)'_{\eta_1}\Delta\eta_1 + (g_{\eta_3}^0)'_{\eta_2}\Delta\eta_2 + (g_{\eta_3}^0)'_{\eta_3}\Delta\eta_3, \quad + \Delta f_{\eta_3}^0 + \Delta f_{\eta_3}^s, \\ \Delta\dot{f}_{\eta_1}^0 &= 0, \\ \Delta\dot{f}_{\eta_2}^0 &= 0, \\ \Delta\dot{f}_{\eta_3}^0 &= 0. \end{aligned}$$

Здесь через $(g_{\eta_i}^0)'_{\eta_k}$ обозначены вариации ускорения силы тяготения. В частности, для вполне оправданной сферической модели поля тяготения ($g_{\eta_i}^0 = -\frac{\mu}{r^3}\eta_i$, $i = 1, 2, 3$) они имеют вид:

$$(g_{\eta_i}^0)'_{\eta_k} = 3\frac{\mu}{r^5}\eta_i\eta_k - \frac{\mu}{r^3}\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3$$

Будем предполагать, что возмущения $f_\eta^s = (f_{\eta_1}^s, f_{\eta_2}^s, f_{\eta_3}^s)^T$ являются независимыми центрированными белыми шумами с заданными дисперсиями σ_q^2 . Также предположим, что ошибки $\Delta\eta$, ΔV_η , f_η^0 в начальный момент некоррелированы.

Компонентами сводного вектора состояния x служат выше введенные позиционные, скоростные ошибки траекторных параметров, а также постоянные составляющие внешних возмущающих сил динамической системы (8):

$$x = (\Delta\eta_1, \Delta\eta_2, \Delta\eta_3, \Delta V_{\eta_1}, \Delta V_{\eta_2}, \Delta V_{\eta_3}, f_{\eta_1}^0, f_{\eta_2}^0, f_{\eta_3}^0)^T. \quad (10)$$

Введем вектор шумов q динамической системы (8):

$$q = (f_{\eta_1}^s, f_{\eta_2}^s, f_{\eta_3}^s)^T.$$

Будем предполагать, что возмущения $q = (f_{\eta_1}^s, f_{\eta_2}^s, f_{\eta_3}^s)^T$ являются независимыми центрированными белыми шумами с заданными интенсивностями:

$$M[q(t)] = 0, \quad M[q(t)q^T(s)] = Q(t)\delta(t-s), \quad Q(t) = \begin{pmatrix} \sigma_q^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_q^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_q^2 \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать также, что

$$M[x(t_0)] = 0, \quad M[x(t_0)q^T(t)] = 0,$$

а матрица ковариации $M[x(t_0)x^T(t_0)]$ диагональна.

Тогда систему (8) можно записать в виде:

$$\dot{x} = Ax + Bq,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (g_{\eta_1}^0)'_{\eta_1} + u^2 & (g_{\eta_1}^0)'_{\eta_2} & (g_{\eta_1}^0)'_{\eta_3} & 0 & 2u & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (g_{\eta_2}^0)'_{\eta_1} & (g_{\eta_2}^0)'_{\eta_2} + u^2 & (g_{\eta_2}^0)'_{\eta_3} & -2u & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (g_{\eta_3}^0)'_{\eta_1} & (g_{\eta_3}^0)'_{\eta_2} & (g_{\eta_3}^0)'_{\eta_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Дискретизация модели задачи

Динамическую систему (8) можно записать в дискретном виде:

$$x_{j+1} = \Phi_{j+1,j}x_j + Bq_j, \quad (13)$$

Здесь:

- x_j, x_{j+1} – значение вектора состояния x , соответственно, в моменты времени t_j, t_{j+1} ;
- q_j – эквивалентный в среднеквадратичном смысле вектор дискретного шума динамической системы;
- $\Phi_{j+1,j}$ – переходная матрица системы.

Для вычисления переходной матрицы системы Φ можно использоваться, например, простейший метод численного интегрирования дифференциальных уравнений – метод Эйлера следующим образом:

$$\Phi_{j+1,j} = E + \Delta t \cdot A(t_j), \quad \Delta t = t_{j+1} - t_j.$$

2.3 Задача уточнения траекторных параметров как задача коррекции

2.3.1 Корректирующие измерения при использовании вторичной информации СНС (слабо связанная интеграция)

При наличии в зоне видимости по крайней мере 4-х навигационных спутников приемник СНС доставляет информацию о координатах и век-

торе относительной скорости движения спутника при помощи стандартных алгоритмов определения координат и скорости (см., например, [2]).

Обозначим через Z^{pos} и Z^{vel} оценки координат и вектора относительной скорости, доставляемые приемоиндикатором спутниковой навигационной системы (СНС). Назовем их позиционными и скоростными решениями СНС.

Можно представить их в виде суммы истинных и ошибочных составляющих:

$$\begin{aligned} Z^{pos} &= \eta + \Delta\eta^{pos}, \\ Z^{vel} &= V_\eta + \Delta V_\eta^{vel}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\Delta\eta^{pos}$, ΔV_η^{vel} – ошибки спутниковых навигационных решений.

Составим уравнения корректирующих измерений:

$$\begin{aligned} z^{pos} &= \eta' - Z^{pos} = \Delta\eta + r_\eta, \quad r_\eta = -\Delta\eta^{pos}, \\ z^{vel} &= V'_\eta - Z^{vel} = \Delta V_\eta + r_{V_\eta}, \quad r_{V_\eta} = -\Delta V_\eta^{vel}. \end{aligned} \quad (15)$$

Будем предполагать, что погрешности измерений являются независимыми центрированными белыми шумами с заданными дисперсиями $\sigma_{\eta_i}^2$, $\sigma_{V_{\eta_i}}^2$.

Уравнения измерений легко представить в матричной форме

$$\begin{aligned} z^{pos} &= H^{pos}x + r_\eta, \\ z^{vel} &= H^{vel}x + r_{V_\eta}. \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} H^{pos} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H^{vel} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

Как уже упоминалось, методически задача коррекции в варианте оценивания сводится к решению стандартной задачи вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bq, \\ z &= Hx + r, \end{aligned} \quad (18)$$

Для решения (18) используется фильтр Калмана

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A\tilde{x} + K(z - H\tilde{x}),$$

Здесь \tilde{x} – оценка вектора состояния, K – калмановский коэффициент усиления, вычисляемый по решению известного уравнения Риккати.

Обозначим через $\Delta\tilde{\eta}$, $\Delta\tilde{V}_\eta$ оценки ошибок координат и скорости $\Delta\eta$, ΔV_η спутника. Тогда

$$\tilde{\eta} = \eta' - \Delta\tilde{\eta}, \quad \tilde{V}_\eta = V'_\eta - \Delta\tilde{V}_\eta, \quad (19)$$

где $\tilde{\eta}$, \tilde{V}_η – оценки местоположения и скорости спутника.

Поскольку реализуется дискретный алгоритм фильтрации, то решение задачи коррекции траекторных параметров движения спутника целесообразно решать не в варианте оценивания, а в варианте введения обратных связей [4]. Вариант обратных связей сводится к реинициализации начальных значений координат и вектора относительной скорости. Реинициализация осуществляется перед этапом прогноза координат и скоростей по модели (3) к следующему моменту времени появления корректирующей спутниковой информации:

$$\eta'(t_i) \longrightarrow \eta'(t_i) - \Delta\tilde{\eta}(t_i), \quad V'_\eta(t_i) \longrightarrow V'_\eta(t_i) - \Delta\tilde{V}_\eta(t_i). \quad (20)$$

2.3.2 Корректирующие измерения на основе первичных кодовых, доплеровских спутниковых измерений (тесно связанная интеграция)

Выше описано решение задачи, предполагающее использование для коррекции вторичной спутниковой информации – спутниковых позиционных и скоростных решений. Это возможно когда спутниковый приемник регистрирует измерения по крайней мере от 4-х спутников. Если число видимых спутников меньше 4-х, то вторичная позиционная, скоростная информация отсутствует. В этом случае следуют использовать первичные спутниковые измерения (кодовые псевдодалности, доплеровские псевдоскорости) в качестве корректирующих измерений.

В моделях этих измерения присутствуют погрешности часов приемника. Здесь существует две возможности:

- использовать эвристические модели погрешностей часов спутника, включать моделируемые составляющие этой погрешности в вектор состояния коррекционной задачи;
- использовать первые разности этих измерений, в которых погрешности часов алгебраически компенсируются.

Опишем второй вариант.

Предварительно приведем общеизвестные модели кодовых и доплеровских измерений.

Модель кодовых измерений

Упрощенная модель кодовых измерений Z_ρ такова:

$$Z_\rho = \rho + \rho_{\Delta\tau} + \Delta\rho^s, \quad (21)$$

где ρ – расстояние приемник-спутник; $\rho_{\Delta\tau} = c\Delta\tau$, $\Delta\tau$ – погрешность часов приемника сигналов СНС; c – скорость света; $\Delta\rho^s$ – приведенная погрешность измерения.

Упрощение связано с предположением, что погрешность часов навигационного спутника уже учтена известным способом, тропосферные и ионосферные задержки, погрешности многолучевости отсутствуют.

Обозначим через ρ^{comp} вычисленное при помощи информации о координатах η^{sat} навигационного спутника, модельных координатах η' спутника расстояние приемник-спутник:

$$\rho^{comp} = \sqrt{(\eta^{sat} - \eta')^T (\eta^{sat} - \eta')}, \quad (22)$$

и сформируем измерение

$$z_\rho = Z_\rho - \rho^{comp}. \quad (23)$$

В линейном приближении имеем

$$z_\rho = h^T \Delta\eta + \rho_{\Delta\tau} + \Delta\rho^s, \quad h^T = \left(\frac{\eta_1^{sat} - \eta'_1}{\rho^{comp}}, \frac{\eta_2^{sat} - \eta'_2}{\rho^{comp}}, \frac{\eta_3^{sat} - \eta'_3}{\rho^{comp}} \right). \quad (24)$$

Обозначим через $z_\rho^{(i)}$ – измерение, сформированное при помощи измерения от спутника с номером i . Обозначим через z – номер опорного

спутника (обычно используется спутник с максимальным углов возвышения).

Сформируем первые разности измерений

$$\nabla z_{\rho}^{(i)} = z_{\rho}^{(i)} - z_{\rho}^{(z)} = h^{(i)T} \Delta\eta + \nabla\Delta\rho^{(i)s}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} h^{(i)T} &= \frac{(\eta^{sati} - \eta')^T}{\rho^{comp_i}} - \frac{(\eta^{sat_z} - \eta')^T}{\rho^{comp_z}}, \\ \nabla\Delta\rho^{(i)s} &= \Delta\rho^{(i)s} - \Delta\rho^{(z)s}. \end{aligned}$$

Модель (25) не содержит погрешности часов приемника.

Модель доплеровских измерений

Упрощенная модель доплеровских измерений $Z_{V_{\rho}}$ такова:

$$Z_{V_{\rho}} = V_{\rho} + \Delta V_{\rho} + \Delta V_{\rho}^s, \quad (26)$$

где V_{ρ} – радиальная скорость относительного движения объект-спутник; ΔV_{ρ} – неизвестная постоянная погрешность, общая для всех доплеровских измерений – скорость ухода погрешности часов приемника; ΔV_{ρ}^s – случайная составляющая погрешности измерения.

Выражение для радиальной скорости V_{ρ} объект-спутник таково:

$$\begin{aligned} V_{\rho} &= \frac{(\eta^{sat} - \eta)^T (V_{\eta}^{sat} - V_{\eta})}{\rho}, \\ \rho &= \sqrt{(\eta^{sat} - \eta)^T (\eta^{sat} - \eta)}, \end{aligned} \quad (27)$$

где η, η^{sat} – гринвичские координаты приемника и спутника, V_{η}^{sat} – вектор **относительной** скорости спутника в гринвичской системе координат; ρ – дальность объект-спутник; V_{η}^{rcv} – вектор относительной скорости приемника в гринвичской системе координат.

Обозначим через V_{ρ}^{comp} вычисленное при помощи информации о координатах η^{sat} и вектора скорости V_{η}^{sat} навигационного спутника, модельных координатах η' и векторе скорости спутника радиальную скорость приемник-спутник:

$$V_{\rho}^{comp} = \frac{(\eta^{sat} - \eta')^T (V_{\eta}^{sat} - V_{\eta}')}{\rho^{comp}}, \quad (28)$$

и сформируем измерение

$$z_{V_\rho} = Z_{V_\rho} - V_\rho^{comp}. \quad (29)$$

Осуществим некоторые регуляризации для V_ρ^{comp} :

- Будем использовать разложение функции многих переменных $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) &= f(x, y) + [f_x \cdot \Delta x + f_y \cdot \Delta y] + \\ &+ \frac{1}{2!} [f_{xx} \cdot (\Delta x)^2 + 2f_{xy} \cdot \Delta x \Delta y + f_{yy} \cdot (\Delta y)^2] + \dots, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x}, & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y}, \\ f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

- Осуществляется линейризация уравнений измерений (28) в окрестности опорного решения $\eta' = \eta + \Delta\eta$, $V'_\eta = V_\eta + \Delta V_\eta$, $\rho' = \rho + \delta\rho$:

$$\begin{aligned} V_\rho^{comp} &= \frac{(\eta^{sat} - \eta')^T (V_\eta^{sat} - V'_\eta)}{\rho'} = \frac{(\eta^{sat} - [\eta + \Delta\eta])^T (V_\eta^{sat} - [V_\eta + \Delta V_\eta])}{\rho + \delta\rho} = \\ &= V_\rho - \frac{(V_\eta^{sat} - V'_\eta)^T}{\rho'} \Delta\eta - \frac{(\eta^{sat} - \eta')^T}{\rho'} \Delta V_\eta - \frac{(\eta^{sat} - \eta')^T (V_\eta^{sat} - V'_\eta)}{\rho'^2} \cdot \delta\rho = \\ &= V_\rho - \frac{(V_\eta^{sat} - V'_\eta)^T}{\rho'} \Delta\eta - \frac{(\eta^{sat} - \eta')^T}{\rho'} \Delta V_\eta - \frac{V_\rho^{comp}}{\rho'} \cdot \delta\rho, \end{aligned}$$

где

$$V_\rho = \frac{(\eta^{sat} - \eta)^T (V_\eta^{sat} - V_\eta)}{\rho}, \quad V_\rho^{comp} = \frac{(\eta^{sat} - \eta')^T (V_\eta^{sat} - V'_\eta)}{\rho'},$$

$$\begin{aligned}
\rho' &= \sqrt{(\eta^{sat} - \eta')^T (\eta^{sat} - \eta')} = \sqrt{((\eta^{sat} - \eta) - \Delta\eta)^T ((\eta^{sat} - \eta) - \Delta\eta)} = \\
&= \sqrt{(\eta^{sat} - \eta)^T (\eta^{sat} - \eta) - 2(\eta^{sat} - \eta)^T \Delta\eta} = \\
&= \sqrt{\rho^2 \left[1 - 2 \frac{(\eta^{sat} - \eta)^T}{\rho^2} \Delta\eta \right]} = \rho \sqrt{1 - 2 \frac{(\eta^{sat} - \eta)^T}{\rho^2} \Delta\eta} \simeq \\
&\simeq \rho \left(1 - \frac{(\eta^{sat} - \eta)^T}{\rho^2} \Delta\eta \right) \simeq \rho - \frac{(\eta^{sat} - \eta')^T}{\rho'} \Delta\eta, \\
\Rightarrow \delta\rho &= -\frac{\eta^{sat} - \eta'}{\rho'} \Delta\eta,
\end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{(\eta^{sat} - \eta)^T (\eta^{sat} - \eta)}$.

• Итог:

$$V_\rho^{comp} = V_\rho - \left[\frac{(V_\eta^{sat} - V_\eta')^T}{\rho'} - V_\rho^{comp} \frac{\eta^{sat} - \eta'}{\rho'^2} \right] \Delta\eta + \frac{(\eta^{sat} - \eta')^T}{\rho'} \Delta V_\eta.$$

Далее имеем в линейном приближении:

$$\begin{aligned}
z_{V_\rho} &= Z_{V_\rho} - V_\rho^{comp} = \\
&= \left[\frac{(V_\eta^{sat} - V_\eta')^T}{\rho^{comp}} - V_\rho^{comp} \frac{(\eta^{sat} - \eta')^T}{\rho^{comp2}} \right] \Delta\eta + \frac{(\eta^{sat} - \eta')^T}{\rho^{comp}} \Delta V_\eta + \Delta V_\rho^s.
\end{aligned} \tag{30}$$

Обозначим через $z_{V_\rho}^{(i)}$ – измерение, сформированное при помощи измерения от спутника с номером i . Обозначим через z – номер опорного спутника (обычно используется спутник с максимальным углом возвышения).

Сформируем первые разности измерений

$$\nabla z_{V_\rho}^{(i)} = z_{V_\rho}^{(i)} - z_{V_\rho}^{(z)} = h_p^{(i)T} \Delta\eta + h_v^{(i)T} \Delta V_\eta + \nabla \Delta V_\rho^{(i)s}, \tag{31}$$

где

$$\begin{aligned}
h_p^{(i)T} &= \frac{\left(V_\eta^{sat_i} - V'_\eta\right)^T}{\rho^{comp_i}} - \frac{V_\rho^{comp_i}}{\rho^{comp_i 2}} \left(\eta^{sat_i} - \eta'\right)^T - \\
&- \frac{\left(V_\eta^{sat_z} - V'_\eta\right)^T}{\rho^{comp_z}} + \frac{V_\rho^{comp_z}}{\rho^{comp_i 2}} \left(\eta^{sat_z} - \eta'\right)^T, \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_v^{(i)T} &= \frac{\left(\eta^{sat_i} - \eta'\right)^T}{\rho^{comp_i}} - \frac{\left(\eta^{sat_z} - \eta'\right)^T}{\rho^{comp_z}}, \\
\nabla \Delta V_\rho^{(i)s} &= \Delta V_\rho^{(i)s} - V_{\Delta\rho}^{(z)s}. \quad (33)
\end{aligned}$$

Модель (31) не содержит погрешности часов приемника.

Легко заметить (21), (26), что при формировании первых разностей кодовых и доплеровских измерений происходит алгоритмическая компенсация ошибок в определении координат и скорости из-за погрешностей встроенных в приемник часов $\rho_{\Delta\tau}$, ΔV_ρ , общей для всех кодовых и доплеровских измерений.

Замечание. В соотношения (30), (31) входит ошибка местоположения $\Delta\eta$. Производя последовательную обработку сначала кодовых, а затем доплеровских измерений мы можем алгоритмически компенсировать ее. Для этого при вычислении величины V_ρ^{comp} необходимо использовать текущую оценку координат $\tilde{\eta} = \eta' - \Delta\tilde{\eta}$, полученную после обработки кодовых измерений:

$$\begin{aligned}
V_\rho^{comp} &= \frac{\left(\eta^{sat} - \tilde{\eta}'\right)^T \left(V_\eta^{sat} - V'_\eta\right)}{\tilde{\rho}^{comp}}, \\
\tilde{\rho}^{comp} &= \sqrt{\left(\eta^{sat} - \tilde{\eta}'\right)^T \left(\eta^{sat} - \tilde{\eta}'\right)},
\end{aligned}$$

то соотношения (30), (31) упростятся, за счет пренебрежения малой по уровню величины ошибки оценки

$$\delta(\Delta\eta) = \Delta\eta - \Delta\tilde{\eta}.$$

Соотношения примут вид:

$$z_{V_\rho} = Z_{V_\rho} - V_\rho^{comp} = \frac{\left(\eta^{sat} - \tilde{\eta}'\right)^T}{\tilde{\rho}^{comp}} \Delta V_\eta + \Delta V_\rho^s.$$

Обозначим через $z_{V_\rho}^{(i)}$ – измерение, сформированное при помощи измерения от спутника с номером i . Обозначим через z – номер опорного спутника (обычно используется спутник с максимальным углом возвышения).

Сформируем первые разности измерений

$$\nabla z_{V_\rho}^{(i)} = z_{V_\rho}^{(i)} - z_{V_\rho}^{(z)} = h_v^{(i)T} \Delta V_\eta + \nabla \Delta V_\rho^{(i)s}, \quad (34)$$

где

$$h_v^{(i)T} = \frac{(\eta^{sat_i} - \tilde{\eta}')^T}{\tilde{\rho}^{comp_i}} - \frac{(\eta^{sat_z} - \tilde{\eta}')^T}{\tilde{\rho}^{comp_z}}. \quad (35)$$

Вектор измерений z и вектор погрешностей измерений r формируются следующим образом (25), (34):

$$\begin{aligned} z &= \left(\nabla z_\rho^{(1)}, \dots, \nabla z_\rho^{(m-1)}, \nabla z_{V_\rho}^{(1)}, \dots, \nabla z_{V_\rho}^{(m-1)} \right)^T, \\ r &= \left(\nabla \Delta \rho^{(1)s}, \dots, \nabla \Delta \rho^{(m-1)s}, \nabla \Delta V_\rho^{(1)s}, \dots, \nabla \Delta V_\rho^{(m-1)s} \right)^T, \end{aligned}$$

где m – число видимых спутников.

На основе вышеприведенных уравнений ошибок траекторных параметров спутника, линеаризованных уравнений корректирующих измерений (первичных) можно поставить задачу оценивания следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bq, \\ z &= Hx + r, \end{aligned}$$

где матрицы A , B , H определяются уравнениям (11), (12), (32), (35).

Задача решается методами калмановской фильтрации (при постулировании соответствующих гипотез). При моделировании уравнения записываются в эквивалентной дискретной форме.

При помощи полученных оценок $\Delta \tilde{\eta}$, $\Delta \tilde{V}_\eta$ уточняются координаты и скорости спутника:

$$\tilde{\eta} = \eta' - \Delta \tilde{\eta}, \quad \tilde{V}_\eta = V_\eta' - \Delta \tilde{V}_\eta,$$

Решение задачи целесообразно приводить не в варианте оценивания, а в варианте введения обратных связей, или, что тоже самое, использовать расширенный фильтр Калмана.

В данном случае он сводится к реинициализации начальных значений координат и вектора относительной скорости перед этапом численного интегрирования уравнений движения спутника (3):

$$\eta'(t_i) \longrightarrow \eta'(t_i) - \Delta\tilde{\eta}(t_i), \quad V'_\eta(t_i) \longrightarrow V'_\eta(t_i) - \Delta\tilde{V}_\eta(t_i).$$

2.4 Совместная обработка первичных кодовых, доплеровских измерений систем GPS и ГЛОНАСС

Выше предложено использовать так называемые первые разности первичных спутниковых измерений, позволяющих использовать соответствующие корректирующие измерения при малом числе видимых спутников, когда информация СНС не всегда регулярна.

Это возможно, если спутниковый приемник регистрирует измерения по крайней мере от 2-х спутников. Если число видимых спутников равно единице, то первые разности сформировать невозможно.

Ситуацию может исправить двухсистемный приемник, принимающий сигналы ГЛОНАСС и GPS. При этом, имеет смысл использовать совместную обработку только при наличии как минимум двух спутников для каждой из систем.

В этом разделе описываются способы учета основных различий в работе систем GPS и ГЛОНАСС при построении алгоритмов совместной обработки измерений. Главным, принципиальным моментом совместной обработки является учет расхождения системных шкал времени спутниковых навигационных систем в соответствующих моделях и алгоритмах.

Основные отличия систем ГЛОНАСС и GPS

Системы ГЛОНАСС и GPS имеют множество отличий в их функционировании, которые необходимо учитывать при построении алгоритмов совместной обработки. Кратко перечислим аспекты, в которых проявляются эти отличия:

- состав и параметры космического сегмента,
- частотные характеристики радиосигналов навигационных спутников,
- используемые системы координат и параметры модельного эллипсоида,

- системные шкалы времени,
- алгоритмы определения гринвичских координат и относительной скорости навигационного спутника,
- определение погрешности часов навигационного спутника,
- моделирование ионосферной задержки.

При этом большинство из приведенных отличий не существенно меняют математические модели обработки спутниковых измерений. Главные моменты, которые надо учитывать - это различие в характеристиках навигационных радиосигналов и расхождение шкал времени двух систем. Первый аспект, в частности частотное разделение сигналов спутников ГЛОНАСС, влияет только на математические модели дифференциального режима функционирования СНС. Второй аспект, то есть расхождение шкал системного времени GPS и ГЛОНАСС, модифицирует модели стандартного режима.

Кроме двух главных моментов опишем также два существенных различия, которые влияют на вспомогательные модели совместной обработки измерений: определение гринвичских координат и относительной скорости навигационного спутника и определение погрешности часов навигационного спутника.

Расхождение шкал времени систем ГЛОНАСС и GPS

Здесь и далее для двух спутниковых систем будем использовать обозначения из общепринятого формата передачи данных RINEX: для системы GPS – символ G , для системы ГЛОНАСС – символ R («Russian»).

Расхождение системных шкал времени GPS (T_G) и ГЛОНАСС (T_R) определяется в соответствии со следующим выражением:

$$T_G - T_R = \Delta T^{leap} + \tau_{GPS}, \quad (36)$$

где ΔT^{leap} (leap - скачок) - целая часть, а τ_{GPS} - дробная часть расхождения шкал времени, выраженного в секундах.

Целая часть расхождения ΔT^{leap} определяется потребителем из навигационного сообщения системы GPS (равна 17 секундам, действующая с 30 июня 2015 года) и может быть алгоритмически скомпенсирована. Дробная часть τ_{GPS} передается только в сообщении модернизированных

спутников ГЛОНАСС-М, которые в настоящее время составляют менее половины орбитальной группировки системы ГЛОНАСС. Точность определения поправки τ_{GPS} составляет порядка 30 нс (среднеквадратическое значение), что соответствует среднеквадратичной погрешности в 9 м при определении координат объекта.

Таким образом, существует необходимость включать дробную часть τ_{GPS} в вектор оцениваемых параметров при совместной обработке измерений ГЛОНАСС и GPS в стандартном режиме. Причем величину влияния данного параметра можно оценивать исходя из диапазона его значений [36]: $(-1.9, +1.9)$ мс.

Определение погрешности часов навигационного спутника

Общая модель погрешности часов спутника ΔT одинакова для систем ГЛОНАСС и GPS и записывается в виде [2, 35]:

$$\Delta T = \Delta T_{trend} + T_{rel} - T_{gd}, \quad (37)$$

где T_{rel} – релятивистская поправка, которая определяется в процессе решения задачи позиционирования навигационного спутника, T_{gd} – групповая задержка.

Различие между системами ГЛОНАСС и GPS состоит в том, что ΔT_{trend} – это квадратичный тренд часов для системы GPS и линейный тренд для системы ГЛОНАСС:

$$\Delta T_{trend} = \alpha_0 + \alpha_1 t^* + \alpha_2 t^{*2}, \quad (38)$$

где t^* – относительное к моменту прихода эфемеридной информации время расчета погрешности, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ – эфемеридные параметры модели дрейфа часов спутника. Соответственно, для системы ГЛОНАСС имеем, что $\alpha_2 = 0$.

Модификация моделей первичных спутниковых измерений при совместной обработке

В разделе описывается модификация моделей первичных спутниковых измерений для систем GPS и ГЛОНАСС – кодовых, доплеровских – при совместной обработке измерений GPS и ГЛОНАСС.

Кодовые псевдодалности

При совместной обработке кодовых измерений спутниковых систем GPS и ГЛОНАСС возникает проблема корректного описания моделей измерений для одной из систем. Это связано с тем, что приемоиндикатор работает в шкале времени одной системы. Тогда для спутников другой системы время излучения сигнала t_{em} и время детектирования t_{rec} относятся к разным шкалам времени. При этом шкалы времени систем ГЛОНАСС и GPS связаны соотношением (36).

Рассмотрим случай, когда приемоиндикатор работает в шкале времени GPS. Тогда полученные псевдодалности для системы ГЛОНАСС будут содержать ошибку синхронизации шкал. Пусть Z_ρ^R - полученная метрическая псевдодалность, t_{em}^R - время излучения сигнала в шкале времени ГЛОНАСС. Алгоритмически скомпенсируем известную часть ошибки:

$$\begin{aligned} Z_\rho^R &\rightarrow Z_\rho^R - c \cdot \Delta T^{leap}, \\ t_{em}^R &\rightarrow t_{em}^R + \Delta T^{leap}. \end{aligned}$$

Далее везде будем считать, что данная компенсация известной целой части расхождения шкал времени уже произведена.

Пусть Z_ρ^{RG} - истинная псевдодалность спутника ГЛОНАСС, отнесенная к моментам времени t_{em}^G и t_{rec}^G , где моменты излучения и детектирования относятся к шкале времени GPS. Учитывая связь шкал времени, получаем:

$$Z_\rho^{RG} = c \cdot (t_{rec}^G - t_{em}^G) = c \cdot (t_{rec}^G - t_{em}^R - \tau_{GPS}) = Z_\rho^R - c \cdot \tau_{GPS}.$$

Объединяя последнее выражение с (21), получаем модель псевдодалности для системы ГЛОНАСС (атмосферные задержки, погрешность многолучевости не учитываем):

$$Z_\rho^R = \rho + c(\Delta\tau - \Delta T) + c \cdot \tau_{GPS} + \Delta\rho^s. \quad (39)$$

Доплеровские псевдоскорости

При совместной обработке доплеровских измерений ГЛОНАСС и GPS все рассуждения практически полностью аналогичны рассуждениям про кодовые измерения.

В случае, когда приемоиндикатор работает в шкале времени GPS, модель измерений меняется только для системы ГЛОНАСС:

$$Z_{V_\rho} = V_\rho - \lambda(f_{\Delta\tau} - f_{\Delta T}) + \lambda \cdot \dot{\tau}_{GPS} + \Delta V_\rho^s, \quad (40)$$

где $\dot{\tau}_{GPS}$ - скорость изменения параметра τ_{GPS} .

Таким образом, при совместной обработке доплеровских измерений систем ГЛОНАСС и GPS в модель измерений входит $\dot{\tau}_{GPS}$. Однако этот параметр является малым по сравнению с остальными слагаемыми, входящими в модель, и его можно не учитывать. Малость значения $\dot{\tau}_{GPS}$ следует из того, что τ_{GPS} - это величина расхождения между очень стабильными шкалами времени.

Окончательно модель доплеровских измерений для систем ГЛОНАСС и GPS, с учетом возможной компенсации моделируемой скорости ухода $\lambda f_{\Delta T}$ шкалы времени спутника, примет вид:

$$Z_{V_\rho} = V_\rho - \lambda f_{\Delta\tau} + \Delta V_\rho^s. \quad (41)$$

Формирование корректирующих измерений при совместном использовании систем ГЛОНАСС и GPS

Напомним, что рассматриваем случай, когда приемник работает в шкале времени GPS. В этом случае для первых разностей измерений GPS остается ранее представленная модель (25).

Первые разности кодовых измерений ГЛОНАСС.

Упрощенная модель кодовых измерений Z_ρ^R для системы ГЛОНАСС (где моменты излучения и детектирования относятся к шкале времени GPS) такова:

$$Z_\rho^R = \rho + \rho_{\Delta\tau} + c \cdot (\Delta T^{Leap} + \tau_{GPS}) + \Delta \rho^s, \quad (42)$$

где ρ - расстояние приемник-спутник; $\rho_{\Delta\tau} = c \cdot \Delta\tau$, $\Delta\tau$ - погрешность часов приемника сигналов СНС; c - скорость света; $\Delta \rho^s$ - приведенная погрешность измерения.

Упрощение связано с предположением, что погрешность часов навигационного спутника уже учтена известным способом, тропосферные и ионосферные задержки, погрешности многолучевости отсутствуют.

Осуществляется алгоритмическая компенсация погрешностей $c \cdot \Delta T^{leap}$ в кодовых псевдодальностях ГЛОНАСС:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_\rho^R &= Z_\rho^R - c \cdot \Delta T^{leap}, \\ \tilde{t}_{em}^R &= t_{em}^R + \Delta T^{leap}.\end{aligned}$$

Модель измерения кодовых псевдодальностей систем ГЛОНАСС примет вид:

$$\tilde{Z}_\rho^R = \rho + \rho_{\Delta\tau} + c \cdot \tau_{GPS} + \Delta\rho^s. \quad (43)$$

Сформируем измерения z_ρ «в малом»:

$$\begin{aligned}\rho_R^{comp} &= \sqrt{(\eta_{RG}^{sat} - \eta')^T (\eta_{RG}^{sat} - \eta')}, \\ z_\rho^R &= \tilde{Z}_\rho^R - \rho_R^{comp} \simeq h^T x + \rho_{\Delta\tau} + c \cdot \tau_{GPS} + \Delta\rho^s.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}x &= \Delta\eta, \\ h &= \frac{\eta_{RG}^{sat} - \eta'}{\rho^{comp}}.\end{aligned}$$

Здесь отметим, что структурно выше представленная модель отличается от ранее приведенной аналогичной модели (24) для измерений GPS, в том, что вместо погрешности часов $\Delta\tau$ возникает суммарная погрешность $\Delta\tau + \tau_{GPS}$.

Обозначим через $z_\rho^{R(i)}$ – измерение, сформированное при помощи измерения от спутника ГЛОНАСС с номером i и обозначим через z – номер опорного спутника ГЛОНАСС (обычно используется спутник с максимальным углом возвышения).

Сформируем первые разности измерений **только между измерениями ГЛОНАСС**

$$\begin{aligned}\nabla z_\rho^{(i)} &= z_\rho^{R(i)} - z_\rho^{R(z)} = h^{(i)T} \Delta\eta + \nabla \Delta\rho^{(i)s}, \\ h^{(i)T} &= \frac{(\eta_{RG}^{sat_i} - \eta')^T}{\rho^{comp_i}} - \frac{(\eta_{RG}^{sat_z} - \eta')^T}{\rho^{comp_z}}, \\ \nabla \Delta\rho^{(i)s} &= \Delta\rho^{(i)s} - \Delta\rho^{(z)s}.\end{aligned} \quad (44)$$

В результате определяется следующая модель вектора измерения, построенного по сигналам ГЛОНАСС:

$$\nabla z^R = \begin{pmatrix} \nabla z_\rho^{(1)} \\ \dots \\ \nabla z_\rho^{(N^R-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^{(1)T} \\ \dots \\ h^{(N^R-1)T} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \nabla \Delta \rho^{(1)s} \\ \dots \\ \nabla \Delta \rho^{(N^R-1)s} \end{pmatrix} = H^R x + r^R, \quad (45)$$

где $x = (\Delta \eta_1^{rcv}, \Delta \eta_2^{rcv}, \Delta \eta_3^{rcv})^T$ – вектор неизвестных оцениваемых параметров, N^R – число видимых спутников ГЛОНАСС.

Добавляя аналогичный вектор ∇z^G , построенный по первым разностям сигналов GPS, получим сводный вектор измерения

$$z = \begin{pmatrix} \nabla z^R \\ \nabla z^G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^R \\ H^G \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} r^R \\ r^G \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Таким образом, при совместной обработке кодовых измерений GPS и ГЛОНАСС тем. Соответственно если число видимых спутников любой из систем меньше 2-х, использование одного измерения не имеет смысла.

Замечание. Учитывая стабильность τ_{GPS} , существует возможность определить за некоторое время достаточно точную оценку $\tilde{\tau}_{GPS}$ и зафиксировать ее при дальнейшей обработке измерений. В случае, когда приемник работает в системном времени GPS, необходимо внести следующие поправки в кодовые измерения ГЛОНАСС:

$$Z_\rho^R \rightarrow Z_\rho^R - c \cdot \tilde{\tau}_{GPS}. \quad (47)$$

Первые разности доплеровских измерений.

Рассмотрим, по-прежнему, случай, когда приемник работает в шкале времени GPS. Тогда алгоритм определения скорости по измерениям системы GPS известен и описан в разделе 2.3.2.

Ранее было показано, что в случае, когда приемоиндикатор работает в шкале времени GPS, модель измерений меняется только для системы ГЛОНАСС:

$$Z_{V_\rho} = V_\rho - \lambda (f_{\Delta\tau} - f_{\Delta T}) + \lambda \cdot \dot{\tau}_{GPS} + \Delta V_\rho^s, \quad (48)$$

где $\dot{\tau}_{GPS}$ – скорость изменения параметра τ_{GPS} .

Параметр является малым по сравнению с остальными слагаемыми, входящими в модель, и его можно не учитывать. Малость значения $\dot{\tau}_{GPS}$ следует из того, что τ_{GPS} - это величина расхождения между очень стабильными шкалами времени.

Поэтому модель доплеровских измерений для систем ГЛОНАСС и GPS, с учетом возможной компенсации моделируемой скорости ухода $\lambda f_{\Delta T}$ шкалы времени спутника, имеет общий вид:

$$Z_{V\rho} = V\rho - \lambda f_{\Delta T} + \Delta V\rho^s. \quad (49)$$

Как следствие, при формировании первых разностей доплеровских измерений можно не обращать внимание на принадлежность опорного, зенитного спутника к той или иной спутниковой системы. Другими словами, требование использовать для формирования первых разностей спутники, как в кодовых измерениях, из "своей" системы, здесь отсутствует.

Соответствующие модели измерений представлены формулами (31), (32).

2.5 Обработка модельных данных

Моделирование задачи определения траекторных параметров малого спутника.

За основу численного моделирования были взяты характеристики углового движения спутника Университетский «Татьяна-2». Микроспутник «Университетский-Татьяна-2» предназначен для выполнения международной научно-образовательной молодежной программы изучения околоземного космического пространства.

Основные характеристики микроспутника «Университетский-Татьяна-2»:

- период обращения, $T = 101.30655$ мин (6078.3921 с);
- средняя высота, $h = 832.22$ (827-836) км;
- наклонение, $i = 98.786$ град.;
- эксцентриситет, $e = 0.00112$;
- долгота восходящего узла, отсчитанного от прямого восхождения среднего Солнца - 134 град;

Микроспутник «Университетский-Татьяна-2» представляет собой негерметичную четырехгранную призму, основанием которой является прямоугольник. На одной из граней призмы неподвижно закреплена солнечная батарея. Начало системы координат спутника находится в центре масс полностью собранного аппарата. Ось Z параллельна боковому ребру призмы. Ось Y перпендикулярна грани призмы с солнечной батареей. Ось X дополняет систему до правой.

Платформа спутника включает в себя следующие датчики ориентации и устройства:

- трехосевой магнитометр;
- пять цифровых солнечных датчиков;
- трехосный датчик угловых скоростей;
- аппаратура спутниковой навигации;

Характеристики аппаратуры спутниковой навигации – приемника СНС:

- Шумовые составляющие кодовых измерений были порядка 1 м, доплеровских измерений порядка 5 см/сек.

Начальные условия:

- $\Delta\eta_i(t_0) = 10$ [м],
- $\Delta V_{\eta_i}(t_0) = 10$ [м/сек],
- $\sigma_{\eta} = 30$ [м],
- $\sigma_{V_{\eta}} = 3$ [м/сек],
- $\sigma_{f_{\eta}^0} = 10^{-4}$ [м/сек²].

В работе также разработана имитационная модель задачи, включающая в себя моделирование:

1. движения спутников системы GPS / ГЛОНАСС;

2. первичных спутниковых измерений (кодовые, доплеровские), а также вторичной спутниковой информации.
3. алгоритма оценивания для случаев регулярной и не регулярной спутниковой информации (когда вторичная информация отсутствует, а коррекция при помощи первичных измерений возможна).

Основные параметры имитатора:

- Среднее число видимых спутников – 10,
- Интервал записи – 1 [сек],
- Угол маски – 10 [град],
- Длительность пропуска сигнала СНС – 500 сек.

Результаты обработки данных.

1. При достаточном числе видимых спутников интеграционное решение при использовании вторичной и первичной информации соизмеримо.
2. Использование первых разностей первичных спутниковых измерений позволяет решать задачу когда число видимых спутников меньше 4-х (рис. 1).
3. Для тестирования алгоритма моделировались пропуски, например, 5 минут, при которых спутниковые позиционные и скоростные решения отсутствуют. В эти моменты расхождение траектории спутника от его истинной орбиты в слабой интеграции быстро нарастает, а в тесной интеграции оно удерживается почти на прежнем уровне (рис. 1) (для той конфигурации усеченного созвездия, которое использовалось при обработке).

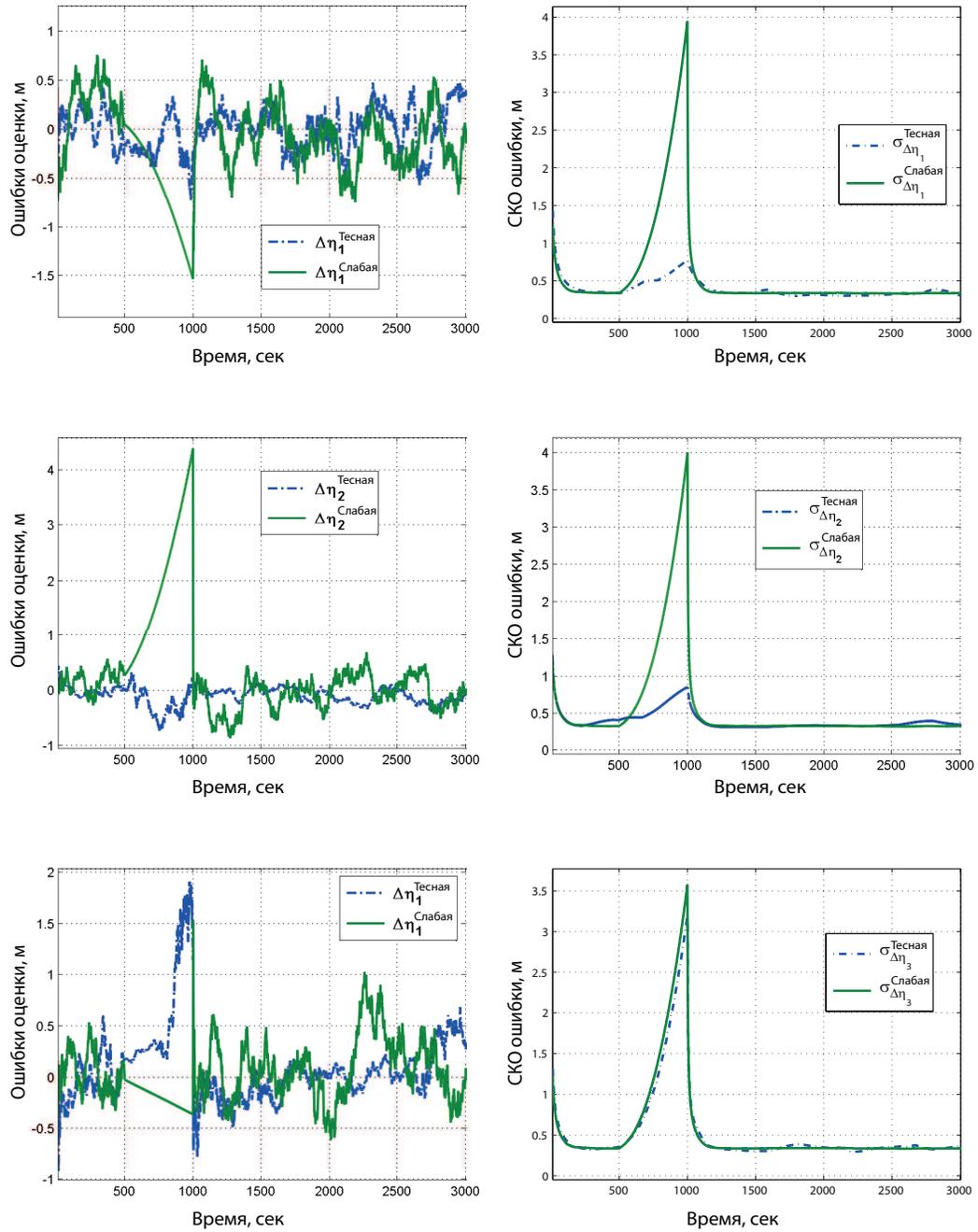
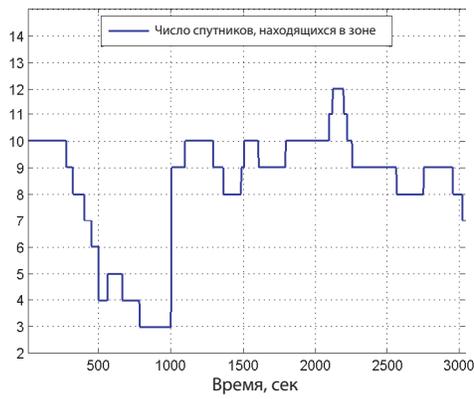
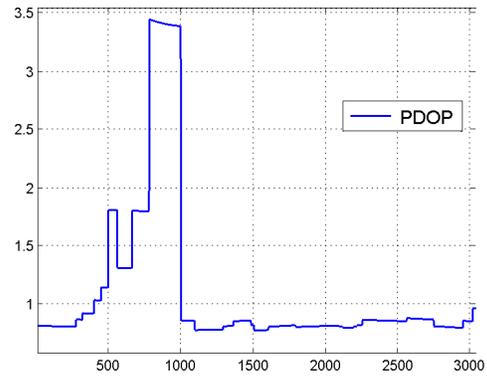


Рис. 1: Сравнение ошибки оценки $\Delta\eta$ & СКО ошибки оценивания $\sigma_{\Delta\eta}$, полученные при слабой и тесной интеграции.



(a) Число спутников, находящихся в зоне видимости.



(b) Значения позиционного геометрического фактора PDOP (при числе спутников > 3).

Рис. 2

2.6 Заключение к главе 1

1. Разработаны, обоснованы, подтверждены математическим моделированием модели и алгоритмы решения задачи определения траекторных параметров движения малого спутника при помощи вторичной, первичной информации СНС и модели орбитального движения спутника.
2. Показано, что следует использовать первые разности первичных спутниковых измерений, в том числе при совместной обработке измерений GPS и ГЛОНАСС.
3. Показано преимущество использования первых разностей измерений при малом числе видимых спутников, когда информация СНС не регулярна.

3 Задача определения параметров ориентации малого спутника при помощи датчиков угловой скорости и разнесенных спутниковых антенн

В первой главе данной работы подробно рассмотрена задача определения параметров движения характерной точки M спутника – координат, вектора скорости в осях жестко связанной с вращающейся Землей гринвичской системы координат – при помощи вторичной спутниковой информации или первичных спутниковых измерений.

В этой главе рассматривается задача определения параметров ориентации малого спутника при помощи датчиков угловой скорости (ДУС) и информацией, предоставляемой системой разнесенных спутниковых антенн.

Вначале предполагается, что:

- оси связанной с корпусом спутника системы координат Ms ;
- оси системы координат Mz , связанные с осями чувствительности (откалиброванных) ДУС,
- оси системы координат Mz^a , связанные с базовыми векторами многоантенного GPS приемника;

идентично направлены.

Затем отдельно будет рассмотрен случай, когда взаимная ориентация (несоосность) трехгранников Mz , Mz^a будет характеризоваться вектором малого поворота β^a :

$$A_{zz^a} = E + \widehat{\beta^a}.$$

Вначале опишем справочные модели, связанные с моделированием параметров ориентации искусственного спутника Земли.

3.1 Моделирование углового движения спутника

Для описания углового движения спутника используются кинематические соотношения, связывающие угловые скорости корпуса спутника с

углами ориентации и их производными, а также наличием в этих соотношениях угловой скорости движения спутника по орбите Земли. Приведем эти соотношения.

Кинематические соотношения, связывающие компоненты угловой скорости спутника с углами ориентации.

Зададим последовательность поворотов относительно траекторной системы координат $Mt = (Mt_1, Mt_2, Mt_3)$, с помощью которой определим углы ориентации.

Пусть первоначально оси спутника Ms совпадали с осями траекторной системы координат Mt . Первый поворот удобнее совершить вокруг оси Mt_3 на угол курса ψ . После первого поворота система координат аппарата занимает положение $Ot' = (Mt'_1, Mt'_2, Mt'_3)$ (рис. 3). Второй поворот на угол крена γ совершается вокруг оси Mt'_1 , после чего система занимает положение $Mt'' = (Mt''_1, Mt''_2, Mt''_3)$. Третий поворот совершается вокруг оси Mt''_2 на угол тангажа ϑ , после чего система осей космического аппарата занимает окончательное положение $Ms = (Ms_1, Ms_2, Ms_3)$.

Матрица поворота B_{st} , составленная из направляющих косинусов углов между осями спутника и осями траекторной системы координат, выражается через произведение матриц направляющих косинусов $B_\psi, B_\gamma, B_\vartheta$, соответствующих трем отдельным поворотам на углы ψ, γ, ϑ .

$$B_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix},$$

$$B_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица выражается посредством произведения:

$$B_{st} = B_\psi B_\gamma B_\vartheta.$$

Взаимосвязь траекторной и связанной систем координат такова

$$Mt \begin{matrix} \xrightarrow{\psi} \\ \xrightarrow{\gamma} \\ \xrightarrow{\vartheta} \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} Ms.$$

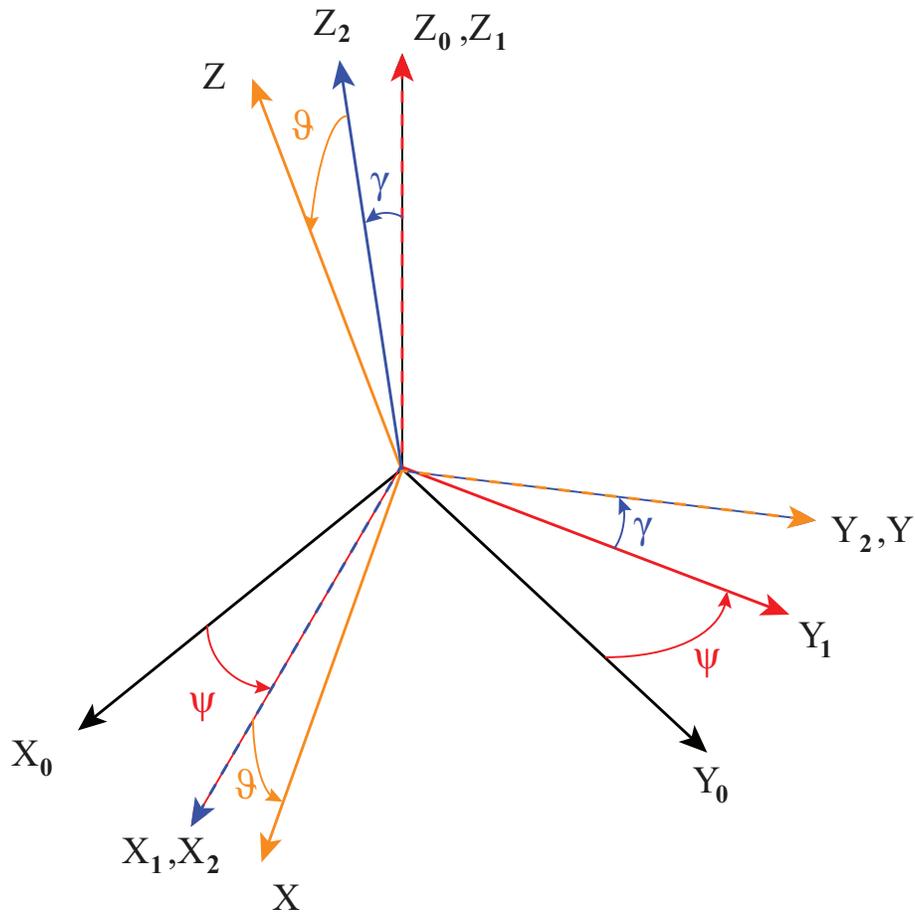


Рис. 3: Углы ориентации

Здесь ψ – угол курса, γ – угол крена, ϑ – угол тангажа.

При $\psi = \gamma = \vartheta = 0$ траекторная и связанная системы координат совпадают.

(На рис.3 оси X_0, Y_0, Z_0 соответствуют осям Mt_1, Mt_2, Mt_3 ; оси X_1, Y_1, Z_1 соответствуют осям Mt'_1, Mt'_2, Mt'_3 ; оси X_2, Y_2, Z_2 соответствуют осям Mt''_1, Mt''_2, Mt''_3 ; оси X, Y, Z соответствуют осям Ms_1, Ms_2, Ms_3 .)

Матрицы взаимной ориентации B_{st} , B_{ts} систем Ms , Mt имеют вид:

$$B_{st} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \vartheta - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma & \sin \psi \cos \vartheta + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma & -\cos \gamma \sin \vartheta \\ -\sin \psi \cos \gamma & \cos \psi \cos \gamma & \sin \gamma \\ \cos \psi \sin \vartheta + \sin \psi \sin \gamma \cos \vartheta & \sin \psi \sin \vartheta - \cos \psi \sin \gamma \cos \vartheta & \cos \vartheta \cos \gamma \end{pmatrix},$$

$$B_{ts} = B_{st}^T.$$

Абсолютная угловая скорость ω_s связанных систем координат Ms

Вектор абсолютной угловой скорости спутника $\bar{\omega}_s$ можно представить в виде суммы двух векторов:

$$\bar{\omega}_s = \bar{\Omega}_{st} + \bar{\omega}_{ts}.$$

Здесь:

1. вектор относительной $\bar{\Omega}_{st}$ угловой скорости трехгранника Ms относительно траекторной системы координат Mt ,
2. вектор абсолютной угловой скорости $\bar{\omega}_{ts}$ траекторной системы координат Mt , спроектированного на оси Ms .

Вектор относительной Ω_{st} угловой скорости трехгранника Ms относительно трехгранника Mt в осях Ms определяется суперпозицией соответствующих парциальных угловых скоростей $\dot{\psi}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\vartheta}$:

$$\Omega_{st} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\vartheta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \right],$$

и

$$\omega_{ts} = B_{st} \omega_t^o.$$

В скалярной форме

$$\begin{aligned} \omega_{s_1} &= \dot{\gamma} \cos \vartheta - \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \gamma + \omega_t^o (\sin \psi \cos \vartheta + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma), \\ \omega_{s_2} &= \dot{\vartheta} + \dot{\psi} \sin \gamma + \omega_t^o \cos \psi \cos \gamma, \\ \omega_{s_3} &= \dot{\gamma} \sin \vartheta + \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \omega_t^o (\sin \psi \sin \vartheta - \cos \psi \sin \gamma \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь:

- $\omega_t^o = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}{r}$, v_1, v_2, v_3 – компоненты вектора абсолютной скорости движения спутника в орбитальной системе координат;
- $r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ – радиус орбиты.

Полученные кинематические соотношения связывают проекции вектора угловой скорости спутника с производными от углов ориентации.

Моделирование задачи ориентации.

Будем считать, что на спутнике установлена аппаратура спутниковых навигационных систем (СНС) GPS и/или ГЛОНАСС. Ставится задача определения ориентации корпуса спутника при помощи показаний датчиков угловой скорости (ДУС) и измерений, доставляемых системой разнесенных спутниковых антенн.

Предполагается, что в начальный момент времени t_0 известна информация о начальном значении матрицы ориентации $A'(t_0)$ связанной системы координат спутника Ms относительно инерциальной системы координат $O\xi$. Эта информация может быть сформирована на основе встроенного ориентационного решения приемника СНС с разнесенными антеннами с учетом связи между инерциальной и гринвичской системами координат.

Обозначим через ω' измерения ДУС:

$$\omega' = \omega_z - \nu_z, \quad (51)$$

где ω_z – вектор абсолютной угловой скорости связанной Ms (или приборной Mz) системы координат спутника, ν_z – погрешность измерения ДУС – дрейф гироскопов.

Для определенности, в дальнейшем будем считать, что

$$\nu_z = \nu_z^0 + \nu_z^s, \quad \nu_z^0 = const. \quad (52)$$

Здесь $\nu_z^0 = (\nu_{z_1}^0, \nu_{z_2}^0, \nu_{z_3}^0)^T$ – систематическая составляющая гироскопического дрейфа, $\nu_z^s = (\nu_{z_1}^s, \nu_{z_2}^s, \nu_{z_3}^s)^T$ – случайная составляющая гироскопического дрейфа – процесс типа белого шума с заданными характеристиками.

Кинематическое уравнение Пуассона для матрицы ориентации A' имеем вид:

$$\dot{A}' = \hat{\omega}' A'. \quad (53)$$

Матрица A' определяет ориентацию некоего трехгранника Mu , который в инерциальной навигации называется модельным трехгранником. Трехгранник Mu является числовым образом трехгранника Ms . Можно явно указать, что $A' = A_{y\xi}$.

Введем вектор малого поворота β_z , характеризующий взаимную ориентацию модельного трехгранника Mu (как выше упоминалось, его ориентация в пространстве определяется модельной матрицей A') и приборной Mz или связанной Ms системы координат:

$$A_{zy} = E + \widehat{\beta}_z. \quad (54)$$

Справедливо следующее линейное кинематическое уравнение ошибок [15]:

$$\dot{\beta}_z = \widehat{\omega}' \beta_z + \nu_z. \quad (55)$$

Имеет место, полезное в дальнейшем, соотношение (в линейном приближении):

$$A' = A_{y\xi} = \left(E - \widehat{\beta}_z \right) A_{z\xi}, \quad (56)$$

где $A_{z\xi}$ – матрица ориентации Mz относительно $O\xi$.

Далее рассматриваются две возможные постановки задачи определения параметров ориентации малого спутника при помощи датчиков угловой скорости (ДУС) и разнесенных спутниковых антенн

3.2 Слабо связанная интеграция: использование вторичной информации – встроенных решений СНС

Обозначим через l вектор, соединяющий фазовые центры двух спутниковых антенн, установленных на спутнике. Координаты вектора l_z в осях Mz предполагаются известными.

Пусть с помощью обработки дифференциальных комбинаций спутниковых измерений (прежде всего, фазовых) получена оценка этого вектора в гринвичских осях $O\eta$. Последнее связано с технологией обработки спутниковых измерений, которая традиционно использует эту систему координат. Имеем

$$l_\eta^{est} = l_\eta + \Delta l_\eta, \quad (57)$$

где $l_\eta = A_{\eta z} l_z$ – истинное значение базового вектора в осях $O\eta$, $A_{\eta z}$ – матрица ориентации приборной и гринвичской систем координат, Δl_η – погрешность определения вектора l_η .

Спроектируем измерение l_η^{est} на оси модельного трехгранника

$$l_y^{est} = A' A_{\xi\eta} l_\eta^{est} = l_y + \Delta l_y, \quad l_y = A' A_{\xi\eta} l_\eta, \quad \Delta l_y = A' A_{\xi\eta} \Delta l_\eta. \quad (58)$$

Здесь $A_{\xi\eta}$ – матрица взаимной ориентации инерциальной и гринвичской систем координат, являющаяся известной функцией текущего времени и угловой скорости вращения Земли.

Векторы l_y , l_z связаны соотношением

$$A' = A_{y\xi} = A_{zy}^T A_{z\xi} = (E - \widehat{\beta}_z) A_{z\xi} \quad \rightarrow \quad l_y = (E - \widehat{\beta}_z) l_z. \quad (59)$$

Образуя измерение

$$z_y = l_y^{est} - l_z, \quad (60)$$

получим

$$z_y = -\widehat{\beta}_z l_z + \Delta l_y = \widehat{l}_z \beta_z + \Delta l_y. \quad (61)$$

Это измерение можно использовать в качестве корректирующего измерения для оценивания вектора β_z , поведение которого описывается моделью (55).

Замечание. Измерение (61) – векторное произведение векторов β_z и l_z и представляет собой вектор, ортогональный плоскости, построенной векторами β_z и l_z . Иногда целесообразно перейти к следующим «новым» измерениям [16]:

$$\begin{aligned} z_y^{(1)} &= -\widehat{l}_y z_y = -\widehat{l}_y (-\widehat{\beta}_z l_z + \Delta l_y) = \beta_z \|l_z\|^2 - l_z (l_z^T \beta_z) - \widehat{l}_y \Delta l_y, \\ z_y^{(2)} &= l_z^T z_y = l_z^T \Delta l_y. \end{aligned} \quad (62)$$

Измерение $z_y^{(1)}$ содержит полезный сигнал β_z , измерение $z_y^{(2)}$ зависит только от погрешности измерения Δl_y .

Аналогичную (61) коррекционную модель можно записать в осях гринвичской системы координат. Для этого введем модельное значение l'_η базового вектора в гринвичских осях:

$$l'_\eta = (A' A_{\xi\eta})^T l_z, \quad (63)$$

и образуем измерение

$$z_\eta = l_\eta^{est} - l'_\eta. \quad (64)$$

Учитывая, что

$$A' = (E - \widehat{\beta}_z) A_{z\xi}, \quad A_{\eta z} \widehat{\beta}_z A_{\eta z}^T = \widehat{\beta}_\eta, \quad \beta_\eta = A_{\eta z} \beta_z, \quad (65)$$

получим

$$z_\eta = -\widehat{\beta}_\eta l'_\eta + \Delta l_\eta = \widehat{l}_\eta \beta_\eta + \Delta l_\eta. \quad (66)$$

При этом вектор малого поворота β_η удовлетворяет кинематическому уравнению

$$\dot{\beta}_\eta = \widehat{u}_\eta \beta_\eta + (A' A_{\xi\eta})^T \nu_z. \quad (67)$$

Далее можно воспользоваться приемом, описанным в (62).

Перейдем к следующим «новым» измерениям:

$$\begin{aligned} z_\eta^{(1)} &= -\widehat{l}_\eta z_\eta = \beta_\eta \|l'_\eta\|^2 - l'_\eta (l'^T_\eta \beta_\eta) - \widehat{l}_\eta \Delta l_\eta, \\ z_\eta^{(2)} &= l'^T_\eta z_\eta = l'^T_\eta \Delta l_\eta. \end{aligned} \quad (68)$$

Измерение $z_\eta^{(1)}$ содержит полезный сигнал β_η , измерение $z_\eta^{(2)}$ зависит только от погрешности измерения Δl_η .

Для определенности допустим, что многоантенный GPS приемник образует три базовых взаимно ортогональных вектора и для каждого из них обеспечивается встроенное СНС решение в гринвичской системе координат: $l_\eta^{est(1)}$, $l_\eta^{est(2)}$, $l_\eta^{est(3)}$. Сводная модель корректирующих измерений формируются следующим образом:

$$\begin{aligned} z_\eta^{(1)} &= l_\eta^{est(1)} - l_\eta^{(1)'} = \widehat{l}_\eta^{(1)'} \beta_\eta + \Delta l_\eta^{(1)}, \quad l_\eta^{(1)'} = (A' A_{\xi\eta})^T l_z^{(1)}, \quad l_z^{(1)} = [1 \ 0 \ 0]^T, \\ z_\eta^{(2)} &= l_\eta^{est(2)} - l_\eta^{(2)'} = \widehat{l}_\eta^{(2)'} \beta_\eta + \Delta l_\eta^{(2)}, \quad l_\eta^{(2)'} = (A' A_{\xi\eta})^T l_z^{(2)}, \quad l_z^{(2)} = [0 \ 1 \ 0]^T, \\ z_\eta^{(3)} &= l_\eta^{est(3)} - l_\eta^{(3)'} = \widehat{l}_\eta^{(3)'} \beta_\eta + \Delta l_\eta^{(3)}, \quad l_\eta^{(3)'} = (A' A_{\xi\eta})^T l_z^{(3)}, \quad l_z^{(3)} = [0 \ 0 \ 1]^T. \end{aligned}$$

Здесь, для определенности, мы считаем, что базовые векторы $l_z^{(1)}$, $l_z^{(2)}$, $l_z^{(3)}$ есть единичные векторы, направленные по осям приборной системы координат Mz .

Введем

$$z = \begin{pmatrix} z_\eta^{(1)} \\ z_\eta^{(2)} \\ z_\eta^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Введем вектор состояния x , вектор шумов q динамической системы (67), вектор шумов r измерений (69):

$$\begin{aligned} x &= (\beta_{\eta_1}, \beta_{\eta_2}, \beta_{\eta_3}, \nu_{z_1}^0, \nu_{z_2}^0, \nu_{z_3}^0)^T, \\ q &= [\nu_{z_1}^s, \nu_{z_2}^s, \nu_{z_3}^s]^T, \\ r &= \begin{pmatrix} \Delta l_\eta^{(1)} \\ \Delta l_\eta^{(2)} \\ \Delta l_\eta^{(3)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (70)$$

Тогда на основе моделей (67), (52), (66) можно поставить стандартную задачу оценивания фазового вектора x линейной динамической системы:

$$\dot{x} = Ax + Bq, \quad (71)$$

при помощи измерений z линейных комбинаций его компонент:

$$z = Hx + r. \quad (72)$$

При принятии соответствующих стохастических, ковариационных гипотез о векторах $x(t_0)$, q , r , для решения этой задачи могут быть применены алгоритмы оценивания калмановского типа.

Детерминированный метод для изучения наблюдаемости

Приведем некоторые результаты качественного детерминированного анализа наблюдаемости [37] поставленной выше задачи оценивания (71), (72).

Детерминированный анализ наблюдаемости может оказаться полезным для аналитического выделения «хорошо» наблюдаемых переменных.

Перепишем уравнения (55) в скалярном виде (шумы ν_z^s не учитываем):

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_1 &= \omega_3\beta_2 - \omega_2\beta_3 + \nu_1^0, \\ \dot{\beta}_2 &= -\omega_3\beta_1 + \omega_1\beta_3 + \nu_2^0, \\ \dot{\beta}_3 &= \omega_2\beta_1 - \omega_1\beta_2 + \nu_3^0.\end{aligned}\tag{73}$$

Осуществим процедуру нормализации фазовых переменных, уравнений динамической системы, введем малый параметр.

Величины, входящие в уравнения, имеют различный физический смысл, различные размерности. Осуществим масштабирование переменных модели задачи по уровню, единицу масштабирования обозначим через ε и примем $\varepsilon = 0.1$.

Перейдем к новым безразмерным переменным порядка единицы.

Характерное значение времени определяется, главным образом, постановкой цели исследования (изучения): величиной интервала времени, на котором исследователя интересует поведение системы; интервала, на котором переменные системы достигают своих предельных значений; соображениями более компактной записи уравнений и т.п.

Переход от исходных переменных $\beta_i, \nu_i^0 \{i = 1, 2, 3\}, A_{\vartheta, \gamma}, \omega_{\vartheta, \gamma}$ к новым $\beta_i^*, \nu_i^{0*}, A_{\vartheta, \gamma}^*, \omega_{\vartheta, \gamma}^*$ осуществляется с помощью замены переменных.

Для характерных значений коэффициентов принимаются максимальные по модулю величины для каждой из групп коэффициентов. Выразим характерные значения соответствующих величин, входящие в уравнения динамической системы по степеням малого параметра ε .

$$\begin{aligned}A_{\vartheta}, A_{\gamma} &\simeq 0.5^\circ \simeq \varepsilon^2 A_{\vartheta, \gamma}^*, \\ \omega_{\vartheta}, \omega_{\gamma} &\simeq \frac{2\pi}{600} \simeq \varepsilon^2 \omega_{\vartheta, \gamma}^*.\end{aligned}$$

Микроспутник «Университетский-Татьяна-2» во время поддержания ориентации на Землю совершал колебательные движения по углам крена и тангажа, амплитуда которых доходила до 0.4 градуса [42].

$$\begin{aligned}\vartheta &= A_{\vartheta} \sin(\omega_{\vartheta} + \varphi) \Rightarrow \vartheta = \varepsilon^2 A_{\vartheta}^* \sin(\omega_{\vartheta} + \varphi), \\ \dot{\vartheta} &= A_{\vartheta} \omega_{\vartheta} \cos(\omega_{\vartheta} + \varphi) \Rightarrow \dot{\vartheta} = \varepsilon^4 A_{\vartheta}^* \omega_{\vartheta}^* \cos(\omega_{\vartheta} + \varphi), \\ \gamma &= A_{\gamma} \sin(\omega_{\gamma} + \varphi) \Rightarrow \gamma = \varepsilon^2 A_{\gamma}^* \sin(\omega_{\gamma} + \varphi), \\ \dot{\gamma} &= A_{\gamma} \omega_{\gamma} \cos(\omega_{\gamma} + \varphi) \Rightarrow \dot{\gamma} = \varepsilon^4 A_{\gamma}^* \omega_{\gamma}^* \cos(\omega_{\gamma} + \varphi), \\ \dot{\theta} &\simeq \varepsilon^3 \dot{\theta}^*.\end{aligned}$$

Угловое движение КА по углу курса характеризуется линейной функцией (поворот по углу курса с постоянной скоростью) вида:

$$\psi(t) = b t + c.$$

Характерное значение производной от угла курса ($\dot{\psi}$) определяется b :
 $\dot{\psi} = b$.

$$\begin{aligned} b &\simeq 0.3144 \text{ [град/сек]} \simeq 0.3144 \times 1.74 \times 10^{-2} \text{ [рад/сек]}, \\ \Rightarrow b &\simeq 0.5 \times 10^{-2} \simeq \varepsilon^2 \text{ [рад/сек]} \quad \Rightarrow \dot{\psi} \simeq \varepsilon^2 \dot{\psi}^* \end{aligned}$$

Выполним разложение функций синус и косинус в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots. \end{aligned}$$

Далее с помощью понятия вектора малого поворота получим следующие соотношения для углов крена и тангажа:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta &= \vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} = \varepsilon^2 A_\vartheta^* \sin(\omega_\vartheta t + \varphi) - \frac{\varepsilon^6 A_\vartheta^{*3} \sin^3(\omega_\vartheta t + \varphi)}{3!} \simeq \varepsilon^2 A_\vartheta^* \sin(\omega_\vartheta t + \varphi), \\ \cos \vartheta &= 1 - \frac{\vartheta^2}{2!} = 1 - \frac{\varepsilon^4 A_\vartheta^{*2} \sin^2(\omega_\vartheta t + \varphi)}{2!} \simeq 1. \end{aligned}$$

Здесь эpsilon ε используется для обозначения малого параметра и верхний индекс (*) - безразмерных параметров порядка единицы. Имеем

$$\begin{aligned} \omega_{s_1} &= \dot{\gamma} \cos \vartheta - \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \gamma + \dot{\theta} (\sin \psi \cos \vartheta + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma) \\ &= \dot{\gamma} - \dot{\psi} \vartheta + \dot{\theta} \sin \psi \\ &= \varepsilon^4 A_\gamma^* \omega_\gamma^* \cos(\omega_\gamma t + \varphi) - \varepsilon^4 \dot{\psi}^* A_\vartheta^* \sin(\omega_\vartheta t + \varphi) + \varepsilon^3 \dot{\theta}^* \sin \psi, \\ \omega_{s_2} &= \dot{\vartheta} + \dot{\psi} \sin \gamma + \dot{\theta} \cos \psi \cos \gamma \\ &= \dot{\vartheta} + \dot{\psi} \gamma + \dot{\theta} \cos \psi \\ &= \varepsilon^4 A_\vartheta^* \omega_\vartheta^* \cos(\omega_\vartheta t + \varphi) + \varepsilon^4 \dot{\psi}^* A_\gamma^* \sin(\omega_\gamma t + \varphi) + \varepsilon^3 \dot{\theta}^* \cos \psi, \\ \omega_{s_3} &= \dot{\gamma} \sin \vartheta + \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\theta} (\sin \psi \sin \vartheta - \cos \psi \sin \gamma \cos \vartheta) \\ &= \dot{\gamma} \vartheta + \dot{\psi} \\ &= \varepsilon^6 A_\gamma^* \omega_\gamma^* A_\vartheta^* \cos(\omega_\gamma t + \varphi) \sin(\omega_\vartheta t + \varphi) + \varepsilon^2 \dot{\psi}^*., \end{aligned} \tag{74}$$

Запишем соотношения (74) в более простой форме, не беря в расчет малые величины более чем третьего порядка (ε^3):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta} \sin \psi, & \omega_1 &= \varepsilon^3 \omega_1^* + O(\varepsilon^4), \\ \omega_2 &= \dot{\theta} \cos \psi, & \Rightarrow \quad \omega_2 &= \varepsilon^3 \omega_2^* + O(\varepsilon^4), \\ \omega_3 &= \dot{\psi}, & \omega_3 &= \varepsilon^2 \omega_3^* + O(\varepsilon^6). \end{aligned}$$

Для характерных значений фазовых переменных (т.е. для угловых ошибок ориентации β_i и погрешностей датчиков угловых скоростей ν_i^0 $\{i = 1, 2, 3\}$) примем:

$$\begin{aligned} \beta_i &\simeq \varepsilon^2 \beta_i^*, \\ \nu_i^0 &\simeq \varepsilon^5 \nu_i^{0*}, \quad i = (1, 2, 3) \end{aligned}$$

Теперь после определения рассматриваемого класса движений и характерных значений переменных мы можем осуществлять нормализацию уравнения системы (73):

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \dot{\beta}_1^* &= \varepsilon^2 \omega_3^* \varepsilon^2 \beta_2^* - \varepsilon^3 \omega_2^* \varepsilon^2 \beta_3^* + \varepsilon^5 \nu_1^{0*} \\ \varepsilon^2 \dot{\beta}_2^* &= -\varepsilon^2 \omega_3^* \varepsilon^2 \beta_1^* + \varepsilon^3 \omega_1^* \varepsilon^2 \beta_3^* + \varepsilon^5 \nu_2^{0*}, \\ \varepsilon^2 \dot{\beta}_3^* &= \varepsilon^3 \omega_2^* \varepsilon^2 \beta_1^* - \varepsilon^3 \omega_1^* \varepsilon^2 \beta_2^* + \varepsilon^5 \nu_3^{0*}. \end{aligned} \quad (75)$$

После проведения нормализации всех переменных и выбора их характерных значений исследуется зависимость системы от малого параметра.

Не беря в расчет малые величины более чем второго порядка (пренебрегаем ε^3 и выше), получим:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1^* &= \varepsilon^2 [\omega_3^* \beta_2^* + \varepsilon (\omega_2^* \beta_3^* + \nu_1^{0*})], & \dot{\beta}_1 &= \omega_3 \beta_2, \\ \dot{\beta}_2^* &= \varepsilon^2 [\omega_3^* \beta_1^* + \varepsilon (\omega_1^* \beta_3^* + \nu_2^{0*})], & \Rightarrow \quad \dot{\beta}_2 &= \omega_3 \beta_1, \\ \dot{\beta}_3^* &= \varepsilon^3 [\omega_2^* \beta_1^* + \omega_1^* \beta_2^* + \nu_3^{0*}], & \dot{\beta}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (76)$$

В качестве значений вектора измерения z используется линейная комбинация исходного вектора измерения.

Для качественного анализа наблюдаемости рассмотрим три случая использования двух разнесенных антенн или одного базового вектора:

1. используется базовый вектор $l_z^{(1)} = [1 \ 0 \ 0]^T$ или две антенны разнесены вдоль первой оси Mz_1 приборного трехгранника Mz . Тогда

$$z_\eta^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_3 \\ -\beta_2 \end{pmatrix}.$$

Соответственно β_3 сразу оказывается наблюдаемой переменной, а для переменных β_1, β_2 формализуется следующая модель задачи оценивания 2-го порядка

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 \\ -\omega_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad z = \beta_2.$$

Очевидно, что β_1, β_2 также оказываются наблюдаемыми переменными. Последнее есть, в частности, следствие того, что величина ω_3 (по курсовому каналу) на порядок превышает угловые скорости ω_1, ω_2 по каналам тангажа и крена.

- используется базовый вектор $l_z^{(2)} = [0 \ 1 \ 0]^T$ или две антенны разнесены вдоль второй оси Mz_2 приборного трехгранника Mz . Тогда

$$z_\eta^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_3 \\ 0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}.$$

Картина аналогична предыдущему случаю. Параметр β_3 сразу оказывается наблюдаемой переменной, а для переменных β_1, β_2 формализуется следующая модель задачи оценивания 2-го порядка

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 \\ -\omega_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad z = \beta_1.$$

Переменными β_1, β_2 также наблюдаемы.

- используется базовый вектор $l_z^{(3)} = [0 \ 0 \ 1]^T$ или две антенны разнесены вдоль второй оси Mz_3 приборного трехгранника Mz . Тогда

$$z_\eta^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ -\beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Параметр β_3 сразу оказывается ненаблюдаемой переменной.

Переменными β_1, β_2 очевидно наблюдаемы.

Выводы. Качественный анализ наблюдаемости показал, что:

1. свойства наблюдаемости зависят от геометрии расположения антенн.
2. свойства наблюдаемости зависят от уровня парциальных составляющих угловых движений корпуса спутника и от уровня угловых ошибок определения ориентации.
3. Прием с использованием нормализации, малого параметра, редукции представляется полезным методическим приемом для предварительного анализа задачи ориентации.

3.3 Тесно связанная интеграция: использование первичных фазовых измерений

Второй способ предполагает записать коррекционную модель, основанную на первых разностях фазовых измерений.

Приведем общеизвестную модель фазовых измерений.

Модель фазовых измерений

Фазовые измерения Z_{φ_i} представляет собой результат измерения разности фаз φ между принимаемым спутниковым радиосигналом и непрерывно генерируемым в приемоиндикаторе аналогичным опорным сигналом.

Фазовые измерения интерпретируются как мера расстояния объект-спутник, поскольку приращение фазовых измерений для двух соседних отсчетов (при отсутствии сбоев измерений) пропорционально измерению расстояния объект-спутник на этом временном интервале.

Поскольку измерительные устройства приемоиндикаторов не позволяют фиксировать число целых длин волн спутникового радиосигнала, укладывающихся в расстоянии объект-спутник, фазовые измерения рассматриваются как измерения расстояния ρ объект-спутник с неопределенной систематической составляющей, равной некоторому целому числу N длин волн несущей частоты f радиосигнала: На рис.4 представлена общая схема фазовых измерений.

Приведем достаточно общую модель фазовых измерений [7], [8], [9] (размерность – циклы):

$$Z_{\varphi_i} = \frac{\rho_i}{\lambda} + f\Delta\tau + N_i + \Delta\varphi^s. \quad (77)$$

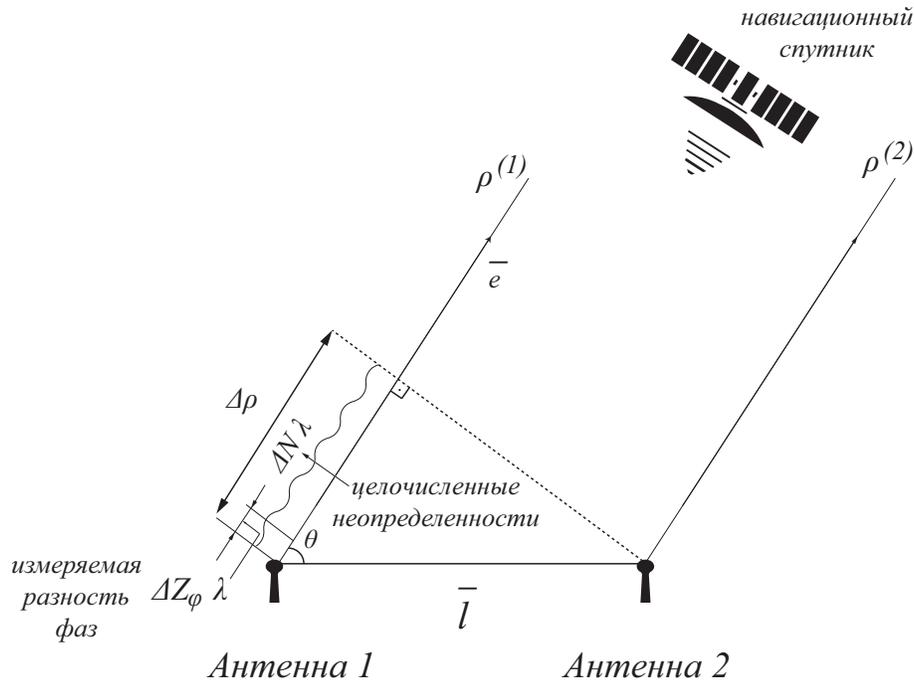


Рис. 4: Общая схема фазовых измерений

Здесь:

- $\rho_i = \sqrt{(\eta^{sat_i} - \eta^{rcv})^T (\eta^{sat_i} - \eta^{rcv})}$ – истинное расстояние объект-спутник (i – номер спутника),
- f – частота радиосигнала,
- λ – длина волны радиосигнала ($\lambda = c/f$),
- N_i – целочисленная неопределенность фазового измерения (в англоязычной литературе величину N называют «ambiguity»),
- $\Delta\tau$ – погрешность часов приемника,
- $\Delta\varphi^s$ – нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и стандартным отклонением σ_φ порядка $0.01/\lambda$.

Разность фаз измеряется в долях цикла 2π . Для получения размерного [м] значения фазового измерения величину Z_φ надо умножить на длину волны λ [м] радиосигнала.

Потенциальная точность фазовых измерений значительно выше кодовых. Так, точность измерения разности фаз радиосигналов корреляционными методами составляет величину порядка 0.002 доли цикла, что при длинах волн $\lambda_1 \sim 19$ см, $\lambda_2 \sim 24.4$ см радиосигналов системы GPS на несущих частотах L_1, L_2 , эквивалентно миллиметровому уровню погрешности фазового измерения.

Формирование корректирующих измерений

Обозначим через l_z известный вектор в осях Mz , соединяющий центры двух спутниковых антенн, установленных на спутнике. В гринвичских осях имеем

$$l_\eta = A_{\eta z} l_z. \quad (78)$$

Обозначим через $Z_{\varphi_i}^m$ фазовое измерение основной ($m \rightarrow master$) антенны, через $Z_{\varphi_i}^s$ второй ($s \rightarrow slave$) антенны. Полезным сигналом этих измерений является расстояние ρ . Обозначим через η^m – координаты основной антенны. Тогда для координат η^s второй антенны справедливо:

$$\eta^s = \eta^m + l_\eta. \quad (79)$$

Введем первую разность фазовых измерений

$$\Delta Z_{\varphi_i} = Z_{\varphi_i}^m - Z_{\varphi_i}^s. \quad (80)$$

В линейном приближении справедливо

$$\begin{aligned} \Delta Z_{\varphi_i} &= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{(\eta^{sat_i} - \eta^m)^T}{\rho_i^m} l_\eta + \Delta N_i + \Delta \varphi_i^*, \\ \rho_i^m &= \sqrt{(\eta^{sat_i} - \eta^m)^T (\eta^{sat_i} - \eta^m)}. \end{aligned} \quad (81)$$

Здесь $\Delta N_i = N_i^m - N_i^s$, $\Delta \varphi_i^* = \Delta \varphi_i^{m^s} - \Delta \varphi_i^{s^s}$.

С помощью модельной матрицы A' , оценок координат $\tilde{\eta}^m$ антенны (см. п. 2), сформируем выражение

$$\begin{aligned} \Delta Z_i^{comp} &= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{(\eta^{sat_i} - \tilde{\eta}^m)^T}{\tilde{\rho}_i^m} l'_\eta, \quad l'_\eta = (A' A_{\xi \eta})^T l_z, \\ \tilde{\rho}_i^m &= \sqrt{(\eta^{sat_i} - \tilde{\eta}^m)^T (\eta^{sat_i} - \tilde{\eta}^m)}. \end{aligned} \quad (82)$$

Сформируем корректирующее измерение

$$\Delta z_{\varphi_i} = \Delta Z_{\varphi_i} - \Delta Z_i^{comp}. \quad (83)$$

Используя (66) и полагая, что ошибками оценки $\Delta \tilde{\eta} = \eta^m - \tilde{\eta}^m$ можно пренебречь ($\Delta \tilde{\eta} / \tilde{\rho}^m$ малая величина), получим

$$\Delta z_{\varphi_i} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{(\eta^{sat_i} - \tilde{\eta}^m)^T}{\tilde{\rho}^m} \hat{l}_{\eta} \beta_{\eta} + \Delta N_i + \Delta \varphi^*, \quad \Delta \dot{N}_i = 0. \quad (84)$$

Используя измерения вида (84) для всех видимых навигационных спутников, далее можно поставить задачу оценивания вектора β_{η} , поведение которого описывается уравнением (67).

При этом вводится коагулированный вектор состояния, компонентами которого также являются величины ΔN_i .

При помощи (84) накапливаются первичные фазовые измерения GPS-приемника:

$$z = \left[\Delta z_{\varphi}^{(1)}, \Delta z_{\varphi}^{(2)}, \dots, \Delta z_{\varphi}^{(m)} \right]^T, \quad (85)$$

где $m + 1$ – число видимых спутников GPS.

С учетом (67) и выбранного вектора измерения (85) вектор состояния x и вектор погрешности динамической системы q примут следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= \left[\beta_{\eta_1}, \beta_{\eta_2}, \beta_{\eta_3}, \nu_{z_1}^0, \nu_{z_2}^0, \nu_{z_3}^0, \Delta N_1, \dots, \Delta N_m \right]^T, \\ q &= \left[\nu_{z_1}^s, \nu_{z_2}^s, \nu_{z_3}^s \right]^T, \end{aligned} \quad (86)$$

где $m + 1$ – число видимых спутников GPS и q – векторный случайный процесс типа белого шума с заданной интенсивностью и нулевым математическим ожиданием.

Тогда систему (67), (69) и (84) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bq, \\ z &= Hx + r, \end{aligned}$$

где вид матриц A , B и H может быть легко определен.

Таким образом задача определения ориентации сводится к задаче оценивания кинематической ошибки при помощи дифференциальных комбинаций первичных спутниковых измерений.

Разрешения целочисленных неопределенностей в фазовых измерениях

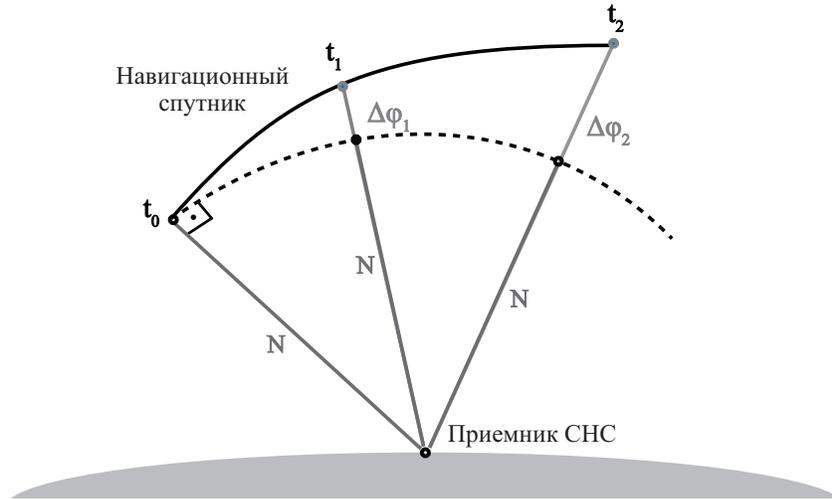


Рис. 5: Целочисленные неоднозначности в фазовых измерениях.

Во время попытки осуществить захват сигналов от набора навигационных спутников GPS, значения неоднозначности в фазовых измерениях от каждого спутника называются «значениями плавающей неоднозначности». После того как захват был осуществлен, значения неоднозначности были разрешены, они называются значениями целочисленной неоднозначности, так как значения разрешенных неоднозначностей являются целыми числами.

Для разрешения целочисленной неоднозначности мы будем использовать метод корректировки декорреляции неоднозначности методом наименьших квадратов (LAMBDA метод), который был разработан Теюниссеном [38]. Подробное описание реализации алгоритма было дано в [40].

В оригинальной работе Теюниссена в качестве исходных данных использовались двойные разности фазовых измерений. В нашем случае исходные данные являются первыми разностями фазовых измерений.

Упрощенная модель первых разностей фазовых измерений имеет следующий вид:

$$\Delta z_\varphi = h_1 x + h_2 \Delta N + \Delta \varphi^s.$$

где Δz_φ – заданный вектор исходных данных, состоящий из «наблюдаемых» минус «вычисленных» первых разностей фазовых измерений, ΔN – вектор разностей целочисленных неопределенностей размерности $m-1$, измеряемые в циклах и $\Delta\varphi^s$ – вектор шумов. В векторе x размерности 6 содержатся оцениваемые угловые ошибки ориентации и постоянные составляющие гироскопических дрейфов.

Для каждого видимого спутника значения целочисленных неоднозначностей N_k и соответственно значения R_k являются единственными.

Задача разрешения целочисленной неоднозначности заключается в минимизации следующей функции:

$$\min_{x, \Delta N} (\Delta z_\varphi - h_1 x - h_2 \Delta N) P_{\Delta z_\varphi}^{-1} (\Delta z_\varphi - h_1 x - h_2 \Delta N), \quad \Delta N \in Z^{m-1}, \quad x \in R^6 \quad (87)$$

где $P_{\Delta z_\varphi}$ – ковариационная матрица первых разностей фазовых измерений, Z^{m-1} – целочисленное пространство размерности $m-1$ и R^6 – шестимерное вещественное пространство.

В основном процедура разрешения целочисленной неоднозначности состоит из двух шагов. На первом шаге отвергнув поставленные условия целочисленности в (87) ($\Delta N \in R^{m-1}$), получается решение задачи минимизации (87).

В подлиннике его работы Теюниссен для получения нецелочисленного решения неоднозначностей применял метод наименьших квадратов (МНК). В нашем распоряжении в качестве плавающих неоднозначностей мы используем оценки, предоставляемые фильтром Калмана.

Выходные данные этого шага являются оценки вещественных (плавающих) неоднозначностей фазовых измерений и оцениваемые значения базовых векторов, одновременно соответствующие ковариации их ошибок оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$, $\delta N = \Delta N - \widetilde{\Delta N}$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\Delta N} \\ \tilde{x} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P_{\delta N} & P_{\delta N \Delta x} \\ P_{\delta N \Delta x}^T & P_{\Delta x} \end{pmatrix}$$

Ключом к методу LAMBDA является декорреляция (или Z-преобразование) коррелированных исходных данных (исходные неоднозначности ΔN , оцениваемые вещественные неоднозначности $\widetilde{\Delta N}$ и их матрица ковариации $P_{\delta N}$). Цель декорреляции заключается в том, чтобы сделать процесс дискретного поиска для целочисленных неоднозначностей более эффективным.

Декомпозиция осуществляется следующим образом:

$$z = Z^T \Delta N, \quad \tilde{z} = Z^T \widetilde{\Delta N}, \quad P_{\tilde{z}} = Z^T P_{\delta N} Z$$

где z означает новые преобразованные неоднозначности.

Преимущество этой процедуры состоит в том, что преобразованные плавающие неоднозначности имеют меньшие стандартные отклонения и имеется меньшее количество вариантов целочисленных наборов, и таким образом, значительно уменьшается время вычисления.

После выполнения операции декомпозиции переходим ко второму шагу: дискретный поиск для целочисленных неоднозначностей (т.е. фактическая оценка целочисленной неоднозначности).

Так что предоставляет решение в виде некоторых целочисленных наборов неоднозначностей.

$$\min_z (z - \tilde{z})^T P_{\tilde{z}}^{-1} (z - \tilde{z}) \quad \text{где } z \in Z^m. \quad (88)$$

Для того чтобы решить такого рода задачу минимизации, необходимо сначала провести ортогональную декомпозицию целевой функции $P_{\delta N}^{-1}$.

Декомпозиция осуществляется при помощи $L^T D L$ разложения [41]:

$$(\widetilde{\Delta N} - \Delta N) = L(\hat{d} - \Delta N), \quad P_{\delta N}^{-1} = L D L^T, \quad (89)$$

где L – нижняя треугольная матрица с единичной диагональю, а D – диагональная матрица, $\hat{d} = (\sigma_{\delta N_1}^2, \sigma_{\delta N_{2|1}}^2, \dots, \sigma_{\delta N_{n|N}}^2)^T$ – условные дисперсии.

Замена (89) в (88) предоставляет решение в виде некоторых целочисленных наборов неоднозначностей, наиболее подходящих полученному плавающему решению и может использоваться далее для получения конечного фиксированного решения неоднозначности.

Исключение целочисленной неопределенности из вектора состояния

Для этого, прежде всего, мы будем вычитать из левой части корректирующих уравнений (84), оценки целочисленных однозначностей, а затем приступим к обнулению соответствующих элементов матрицы H , находящаяся с правой стороны уравнений.

$$\Delta z_{\varphi_i} - \Delta N_i = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{(\eta^{sat_i} - \tilde{\eta}^m)^T}{\tilde{\rho}^m} \hat{l}'_{\eta} \beta_{\eta} + \Delta \varphi^s, \quad \Delta \dot{N}_i = 0. \quad (90)$$

3.4 Обработка модельных данных

Моделирование задачи определения параметров ориентации малого спутника.

За основу численного моделирования были взяты характеристики углового движения спутника Университетский «Татьяна-2». Микроспутник «Университетский-Татьяна-2» во время поддержания ориентации на Землю совершает колебательные движения по углам крена и тангажа, амплитуда которых доходит до 0.5 градуса.

Пусть угловое движение малого спутника «Университетский-Татьяна-2» характеризуется следующими свойствами [42]:

1. Углы крена и тангажа меняются по гармоническому закону:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= A_\gamma \sin(\omega_\gamma t + \varphi_\gamma), \\ \vartheta(t) &= A_\vartheta \sin(\omega_\vartheta t + \varphi_\vartheta),\end{aligned}\tag{91}$$

где $A_\gamma, A_\vartheta, \omega_\gamma, \omega_\vartheta, \varphi_\gamma, \varphi_\vartheta$ – амплитуды, частоты, фазы колебаний.

2. Характерные значения этих параметров таковы:

$$\begin{aligned}A_\gamma, A_\vartheta &\simeq 0.5^\circ, \\ \omega_\gamma, \omega_\vartheta &\simeq \frac{2\pi}{600}.\end{aligned}\tag{92}$$

3. Для описания поведения угла курса возьмем функцию

$$\psi(t) = \frac{305}{970}t + 20^\circ.$$

4. Функции $\psi(t), \gamma(t), \vartheta(t)$ должны иметь непрерывные производные в каждой точке указанного отрезка.

Таким образом мы полностью задали параметры ориентации.

На корпусе спутника жестко установлено следующее навигационное оборудование:

1. Три датчика угловых скоростей (систематические дрейфы порядка $1^\circ/\text{ч}$).
2. Приемник СНС с несколькими разнесенными антеннами.

Предполагается, что оси чувствительности ДУС и направления базовых векторов совпадают. Приемник СНС составляет систему разнесенных антенн, включающая в себя два ортогональных друг другу базовых векторов.

Моделирование показаний ДУС

Модель измерения ω'_s ДУС такова:

$$\omega'_s = \omega_s - \nu^0 - \nu^s,$$

где ν^0 – систематическая составляющая погрешности ДУС – гироскопический дрейф, порядка $1^\circ/\text{час}$, ν^s – шумовая составляющая.

Пусть априори заданы начальные значения углов ориентации:

$$\psi'(t_0) = \psi(t_0) + \Delta\psi(t_0), \quad \gamma'(t_0) = \gamma(t_0) + \Delta\gamma(t_0), \quad \vartheta(t_0) = \vartheta(t_0) + \Delta\vartheta(t_0).$$

Здесь $\Delta\psi$, $\Delta\gamma$, $\Delta\vartheta$ – начальные ошибки углов.

Далее при помощи начальных значений углов ориентации и соотношения (50) моделируются показания датчиков угловой скорости.

Имитация кинематических уравнений Пуассона в дискретном времени

Упомянем здесь лишь один из способов имитации кинематических уравнений Пуассона в дискретном времени.

Используя показания ω' датчиков угловой скорости определяется модельная матрица ориентации [43] корпуса спутника путем интегрирования кинематическое уравнение Пуассона.

При постоянной угловой скорости ω' на шаге интегрирования используется следующая процедура для численного интегрирования кинематического матричного уравнения Пуассона (основанная на точной формуле интегрирования соответствующего дифференциального уравнения):

1. Вычисляется модуль измеренной угловой скорости:

$$\omega' = \sqrt{\omega_1'^2 + \omega_2'^2 + \omega_3'^2}$$

2. Вычисляются вспомогательные коэффициенты c_1 , c_2 :

$$c_1 = \frac{\sin \omega' \Delta t}{\omega'}, \quad c_2 = \frac{1.0 - \cos \omega' \Delta t}{\omega'^2}$$

3. Вычисляется переходная матрица Φ :

$$\Phi = E + c_1 \hat{\omega}' + c_2 \hat{\omega}'^2$$

4. Вычисляется значение матрицы ориентации $A'(t_{j+1})$:

$$A'(t_{j+1}) = \Phi A'(t_j)$$

Основные параметры имитатора:

- Система разнесенных антенн состоит из 3-х базовых векторов ортогональных друг другу,
- Среднее число видимых спутников ~ 8 ,
- Целочисленные неоднозначности определены и исключены из измерений,
- Интервал записи – 0.1 [сек],
- Угол маски – 0 [град].

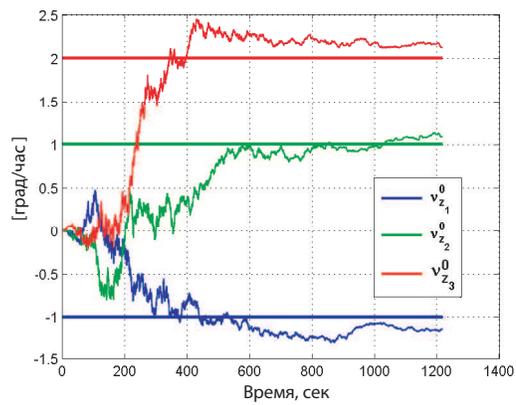
Характеристики датчика угловых скоростей:

- $\sigma_{\nu_z^0} = 1$ [град/час],
- $\sigma_{\nu_s} = 10^{-2}$ [град/час] (10Hz).

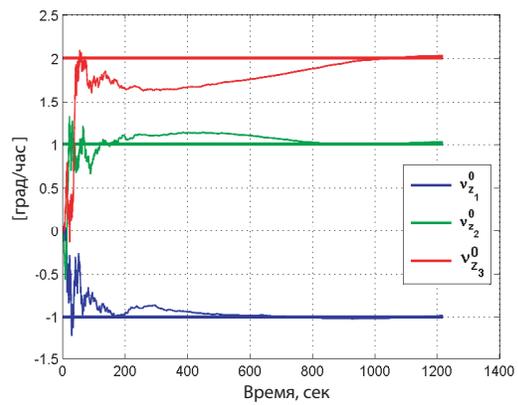
Начальные условия: $\beta_{z_1}(t_0) = 1, \beta_{z_2}(t_0) = -1, \beta_{z_3}(t_0) = 2$ [град].

Результаты обработки данных.

1. Оба метода интеграции этих данных позволяют получать удовлетворительные оценки ошибок определения ориентации и гироскопического дрейфа.
2. При достаточном числе видимых спутников и при наличии 3-х базовых ортогональных друг другу векторов оба метода позволяют оценивать ошибки ориентации с погрешностью порядка несколько угловых минут.

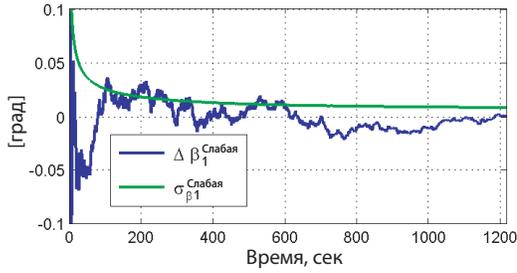


(a) Слабо связанная интеграция.

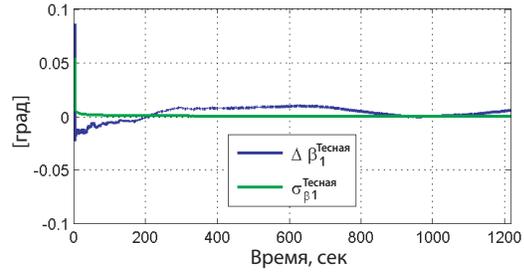


(b) Тесно связанная интеграция.

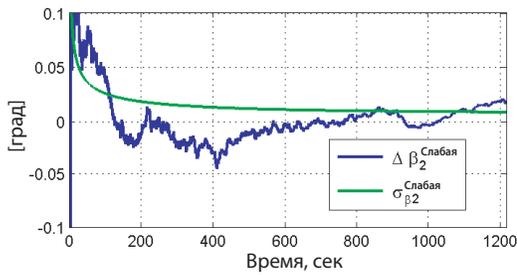
Рис. 6: Сравнение истинных & оцененных гироскопических дрейфов.



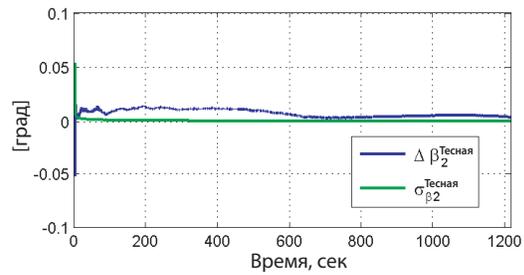
(a) Оценки $\Delta\beta_1$ & σ_{β_1} , полученные при слабой интеграции.



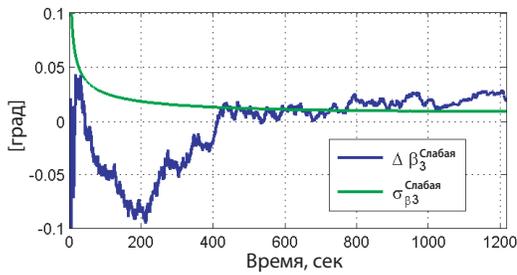
(b) Оценки $\Delta\beta_1$ & σ_{β_1} , полученные при тесной интеграции.



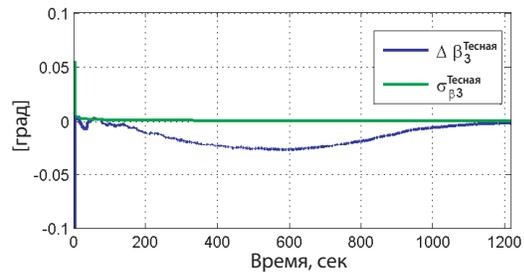
(c) Оценки $\Delta\beta_2$ & σ_{β_2} , полученные при слабой интеграции.



(d) Оценки $\Delta\beta_2$ & σ_{β_2} , полученные при тесной интеграции.



(e) Оценки $\Delta\beta_3$ & σ_{β_3} , полученные при слабой интеграции.



(f) Оценки $\Delta\beta_3$ & σ_{β_3} , полученные при тесной интеграции.

Рис. 7: Сравнение ошибок оценки $\Delta\beta$ & СКО ошибок оценки σ_β .

3.5 Заключение к главе 2

1. Выведены и обоснованы модели задачи определения ориентации спутника при помощи показаний ДУС и системы разнесенных спутниковых антенн для случаев:
 - использования вторичной информации СНС;
 - использования первичных фазовых измерений СНС.
2. При недостаточном числе видимых спутников, когда вторичная информация отсутствует, задача интеграции, тем не менее, может решаться при помощи первичной спутниковой информации.

4 Стохастический анализ точности редуцированных моделей и алгоритмов в задаче ориентации

При выведении спутников на свои расчетные орбиты или при эксплуатации многоантенной системы СНС возникает ряд нежелательных эффектов, возникающий из-за воздействия силы тяжести, механических вибраций и т. д., приводящих к изменению взаимного расположения антенного устройства и к появлению смещения базовых векторов.

В зависимости от специфики установки многоантенной системы СНС, смещения могут быть достаточно значительным, чтобы пересекать фазы несущего сигнала СНС более одной длины волны [34], поэтому приходится оценивать эти смещения и исключать из измерений.

Однако введение смещений как неизвестных параметров в вектор состояния приводит к достаточно сложным моделям задач оценивания большой размерности. Это часто усложняет использование оптимальных алгоритмов для решения задачи в полном объеме. Поэтому практически используются упрощенные (редуцированные) алгоритмы оценивания. В связи с этим ставится вопрос об анализе их точности.

В этой главе исследуется зависимость точности (качества) оценивания параметров редуцированных моделей (алгоритмов) от количества и распределения (по продольной/боковой оси) смещений, присутствующих в базовых векторах. Производится стохастический анализ точности редуцированных алгоритмов оценивания, основанной на понятии стохастической меры оцениваемости.

Напомним (см. главу 3), что ранее предполагалось, что

- оси связанной с корпусом спутника системы координат Ms ;
- оси системы координат Mz , связанные с осями чувствительности (откалиброванных) ДУС,
- оси системы координат Mz^a , связанные с базовыми векторами многоантенного GPS приемника;

идентично направлены.

Введение смещений в координатах базовых векторов можно осуществить, например, на основе введения вектора малого поворота β^a между

приборной системой координат Mz , связанной с осями чувствительности ДУС, и системой координат Mz^a , связанной с базовыми векторами многоантенного GPS приемника. Тогда матрица взаимной ориентации A_{zz^a} этих систем координат примет вид

$$A_{zz^a} = E + \widehat{\beta}^a,$$

и

$$l_z = l_{z^a} + \delta l_z, \quad \delta l_z = \widehat{\beta}^a l_{z^a},$$

где вектор δl_z

$$\delta l_z = \begin{pmatrix} \delta l_{z_1} \\ \delta l_{z_2} \\ \delta l_{z_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{z_2^a} \beta_3^a - l_{z_3^a} \beta_2^a \\ -l_{z_1^a} \beta_3^a + l_{z_3^a} \beta_1^a \\ l_{z_1^a} \beta_2^a - l_{z_2^a} \beta_1^a \end{pmatrix}, \quad (93)$$

можно интерпретировать как неизвестное смещение, порождаемое несоосностью трехгранников Mz , Mz^a (координаты вектора l_{z^a} изначально измеряются в осях Mz^a).

Здесь же отметим, что модель (93) не учитывает возможную погрешность информации о длине базового вектора l_{z^a} .

Поэтому рассмотрим сразу общий случай, когда предполагается, что координаты базовых векторов $l_z^{(j)}$ (j – условный номер вектора) в связанных осях Mz предполагаются известными с некоторой ошибкой $\Delta l_z^{(j)}$:

$$l_z^{(j)'} = l_z^{(j)} + \delta l_z^{(j)}, \quad \delta l_z^{(j)} = const. \quad (94)$$

Такая модель включает в себя ошибки несоосности систем координат Mz , Mz^a , неточность знания длин базовых векторов, смещения, вызванные возможной деформацией конструкции спутника и т.п.

Появление ошибок $\delta l_z^{(j)}$ в модели (94) приводят к тому, что представленные выше модели задач оценивания (для слабой и тесной интеграции) изменяться только в части моделей векторов измерения. Имеем:

- вместо уравнения (61), получим

$$z_y^{(j)} = \widehat{l}_z^{(j)'} \beta_z - \delta l_z^{(j)} + \Delta l_y^{(j)}. \quad (95)$$

- вместо уравнения (66), получим

$$z_\eta = \widehat{l}_\eta^{(j)'} \beta_\eta - \delta l_\eta^{(j)} + \Delta l_\eta^{(j)}, \quad \delta l_\eta^{(j)} = (A' A_{\xi\eta})^T \delta l_z^{(j)}. \quad (96)$$

- вместо уравнения (84), получим

$$\begin{aligned}\Delta z_{\varphi_i} &= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{(\eta^{sat_i} - \tilde{\eta}^m)^T}{\tilde{\rho}^m} \left(\hat{l}_{\eta}^{(j)'} \beta_{\eta} - \delta l_{\eta}^{(j)} \right) + \Delta N_i^{(j)} + \Delta \varphi_i^{(j)*}, \\ \delta l_{\eta}^{(j)} &= (A' A_{\xi\eta})^T \delta l_z^{(j)}.\end{aligned}\quad (97)$$

4.1 Полная модель задачи оценивания

Рассмотрим, для определенности, случай установки трех антенн, и соответственно, наличия двух базовых векторов. Имеем:

$$l_z^{(1)'} = l_z^{(1)} + \delta l_z^{(1)}, \quad l_z^{(2)'} = l_z^{(2)} + \delta l_z^{(2)}, \quad \delta l_z^{(j)} = (\delta l_{z_1}^{(j)}, \delta l_{z_2}^{(j)}, \delta l_{z_3}^{(j)})^T, \quad j = 1, 2. \quad (98)$$

Введем коагулированный вектор состояния x :

$$x = \begin{pmatrix} x_I \\ x_{II} \end{pmatrix}, \quad (99)$$

где

$$\begin{aligned}x_I &= (\beta_{\eta_1}, \beta_{\eta_2}, \beta_{\eta_3}, \nu_{z_1}^0, \nu_{z_2}^0, \nu_{z_3}^0)^T, \\ x_{II} &= (\delta l_z^{(1)T}, \delta l_z^{(2)T})^T = (\delta l_{z_1}^{(1)}, \delta l_{z_2}^{(1)}, \delta l_{z_3}^{(1)}, \delta l_{z_1}^{(2)}, \delta l_{z_2}^{(2)}, \delta l_{z_3}^{(2)})^T.\end{aligned}\quad (100)$$

Тогда полная модель задачи оценивания примет вид

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x}_{II} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & 0_{6 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_I \\ x_{II} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{6 \times 1} \\ 0_{6 \times 1} \end{pmatrix}, \\ z &= H_I x_I + H_{II} x_{II} + r,\end{aligned}\quad (101)$$

где:

- матрица A_{11} и вектор q соответствуют модели динамической системы (67) и имеют вид:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \hat{u} & (A' A_{\xi\eta})^T \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q'_{3 \times 1} \\ 0_{3 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A' A_{\xi\eta})^T \nu_z^s \\ 0_{3 \times 1} \end{pmatrix}; \quad (102)$$

- матрица H_I и вектор r соответствует модели динамической системы (66):

$$H_I = \begin{pmatrix} \widehat{l}_\eta^{(1)'} & 0_{3 \times 3} \\ \widehat{l}_\eta^{(2)'} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad r = (A' A_{\xi\eta})^T \begin{pmatrix} \Delta l_z^{(1)s} \\ \Delta l_z^{(2)s} \end{pmatrix}; \quad (103)$$

- матрица H_{II} имеет вид:

$$H_{II} = \begin{pmatrix} -(A' A_{\xi\eta})^T & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & -(A' A_{\xi\eta})^T \end{pmatrix}. \quad (104)$$

4.2 Редуцированная (упрощенная) модель задачи оценивания и редуцированный фильтр Калмана

Имеем (вектором x_{II} пренебрегаем в полной модели):

$$\dot{x}_I^r = A_{11}x_I^r + q, \quad z^r = H_I x_I^r + r, \quad (105)$$

где x_I^r – вектор состояния редуцированной модели задачи, вектор измерения z^r равен как реализация вектору z (103);

Соответственно, редуцированный фильтр Калмана будет иметь вид:

$$\dot{\tilde{x}}_I^r = A_{11}\tilde{x}_I^r + K^r (z - H_I \tilde{x}_I^r). \quad (106)$$

где \tilde{x}_I^r оценка, доставляемая редуцированным фильтром Калмана и используемая далее в качестве оценки исходного вектора состояния x_I , K^r – калмановский коэффициент усиления.

4.3 Уравнения для истинной ошибки оценки

Введем истинную ошибку оценки Δx_I^r (см. (100)):

$$\Delta x_I^r = Lx - \tilde{x}_I^r = x_I - \tilde{x}_I^r, \quad L = \begin{pmatrix} I_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \end{pmatrix}. \quad (107)$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{II} \\ \Delta \dot{x}_I^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \\ -K^r H_{II} & A_{11} - K^r H_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{II} \\ \Delta x_I^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{6 \times 1} \\ q - K^r r \end{pmatrix}. \quad (108)$$

Отсюда, в частности, следует, что оценка \tilde{x}_I^r исходного вектора состояния x_I оказывается смещенной.

Введем коагулированный вектор y :

$$y = \begin{pmatrix} x_{II} \\ \Delta x_I^r \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Введем математическое ожидание μ_y вектора y и соответствующий центрированный вектор $\overset{\circ}{y}$:

$$\mu_y = M[y], \quad \overset{\circ}{y} = y - \mu_y. \quad (110)$$

Тогда

$$\overset{\circ}{\dot{y}} = A_y \overset{\circ}{y} + q_y, \quad A_y = \begin{pmatrix} 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \\ -K^r H_{II} & A_{II} - K^r H_I \end{pmatrix}, \quad q_y = \begin{pmatrix} 0_{6 \times 1} \\ q - K^r r \end{pmatrix}. \quad (111)$$

4.4 Дисперсионное уравнение для истинной ошибки оценки

Введем

$$P_y = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{y} \overset{\circ}{y}^T \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P_{x_{II}} & K_{x_{II} \Delta x_I^r} \\ K_{\Delta x_I^r x_{II}} & P_{\Delta x_I^r} \end{pmatrix}. \quad (112)$$

Здесь:

- $P_{x_{II}}$ – ковариационная матрица вектора x_{II} ;
- $P_{\Delta x_I^r}$ – ковариационная матрица истинной ошибки оценки Δx_I^r ;
- $K_{x_{II} \Delta x_I^r}, K_{\Delta x_I^r x_{II}} = K_{x_{II} \Delta x_I^r}^T$ – соответствующие моменты корреляции.

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{P}_y &= A_y P_y + P_y A_y + Q_y, & Q_y &= \begin{pmatrix} 0_{6 \times 1} & 0_{6 \times 1} \\ 0_{6 \times 1} & Q - K^r R K^r \end{pmatrix}, \\ M \left[q(t) q^T(s) \right] &= Q(t) \delta(t-s), & & (113) \\ M \left[r(t) r^T(s) \right] &= R(t) \delta(t-s), & M \left[q(t) r^T(s) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Диагональные элементы матрицы $P_{\Delta x_I^r}$ являются дисперсиями компонент вектора истинной ошибки оценки Δx_I^r .

Дискретизация модели задачи

В расчетах используются дискретные модели, приведем их.

Полная модель задачи.

$$\begin{pmatrix} x_{I_{j+1}} \\ x_{II_{j+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_j & 0_{6 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} & I_{6 \times 6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{I_j} \\ x_{II_j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_j \\ 0_{6 \times 1} \end{pmatrix},$$

$$z_j = H_I x_{I_j} + H_{II} x_{II_j} + r_j, \quad (114)$$

где матрица Φ_{11} и вектор q_j соответствуют дискретному представлению динамической системы (67).

Соответственно, редуцированная модель задачи оценивания примет вид:

$$x_{I_{j+1}}^r = \Phi_j x_{I_j}^r + q_j, \quad z_j^r = H_{I_j} x_{I_j}^r + r_j. \quad (115)$$

Редуцированный дискретный фильтр Калмана.

1. Этап коррекции:

$$\tilde{x}_{I_j}^{+r} = \tilde{x}_{I_j}^{-r} + K_j^r (z_j - H_{I_j} \tilde{x}_{I_j}^{-r}). \quad (116)$$

Здесь K_j^r – калмановский коэффициент усиления. Если используется поскалярная обработка измерений, то циклично реализуются соотношения (116) для каждой компоненты вектора измерения z_j .

2. Этап прогноза

$$\tilde{x}_{I_{j+1}}^{-r} = \Phi_j \tilde{x}_{I_j}^{+r}. \quad (117)$$

Истинные ошибки оценки.

Введем:

$$\Delta x_{I_j}^{+r} = L x_j - \tilde{x}_{I_j}^{+r} = x_{I_j} - \tilde{x}_{I_j}^{+r}, \quad \Delta x_{I_j}^{-r} = L x_j - \tilde{x}_{I_j}^{-r} = x_{I_j} - \tilde{x}_{I_j}^{-r},$$

$$L = \begin{pmatrix} I_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \end{pmatrix}. \quad (118)$$

Имеем:

1. Этап коррекции:

$$\begin{pmatrix} x_{II_j} \\ \Delta x_{I_j}^{\pm r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \\ -K_j^r H_{II_j} & I - K_j^r H_{I_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{II_j} \\ \Delta x_{I_j}^{\pm r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{6 \times 1} \\ -K_j^r r_j \end{pmatrix}. \quad (119)$$

2. Этап прогноза

$$\begin{pmatrix} x_{II_{j+1}} \\ \Delta x_{I_{j+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} & \Phi_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{II_j} \\ \Delta x_{I_j}^{\pm r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{6 \times 1} \\ q_j \end{pmatrix}. \quad (120)$$

Центрированные истинные ошибки оценки.

Введем:

$$\Delta \overset{\circ}{x}_{I_j}^{\pm r} = \Delta x_{I_j}^{\pm r} - \mu_{\Delta x_{I_j}^{\pm r}}, \quad \mu_{\Delta x_{I_j}^{\pm r}} = M [\Delta x_{I_j}^{\pm r}]. \quad (121)$$

Для центрированных истинных ошибок оценки будут справедливы аналогичные (119), (120) соотношения:

1. Этап коррекции:

$$\begin{pmatrix} x_{II_j} \\ \Delta \overset{\circ}{x}_{I_j}^{\pm r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \\ -K_j^r H_{II_j} & I - K_j^r H_{I_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{II_j} \\ \Delta \overset{\circ}{x}_{I_j}^{\pm r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{6 \times 1} \\ -K_j^r r_j \end{pmatrix}. \quad (122)$$

2. Этап прогноза

$$\begin{pmatrix} x_{II_{j+1}} \\ \Delta \overset{\circ}{x}_{I_{j+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} & \Phi_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{II_j} \\ \Delta \overset{\circ}{x}_{I_j}^{\pm r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{6 \times 1} \\ q_j \end{pmatrix}. \quad (123)$$

Дисперсионные уравнения для истинных ошибок оценки.

Введем коагулированный вектор y :

$$y_j^\pm = \begin{pmatrix} x_{II_j} \\ \Delta x_{I_j}^{\pm r} \end{pmatrix}. \quad (124)$$

Введем соответствующую ковариационную матрицу $P_{y_j}^\pm$:

$$P_{y_j}^\pm = M \left[y_j^\pm y_j^{\pm T} \right] = \begin{pmatrix} P_{x_{II_j}} & K_{x_{II_j} \Delta x_{I_j}^{\pm r}} \\ K_{\Delta x_{I_j}^{\pm r} x_{II_j}} & P_{\Delta x_{I_j}^{\pm r}} \end{pmatrix}. \quad (125)$$

Имеем

1. Этап коррекции:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} P_{x_{II_j}} & K_{x_{II_j} \Delta x_{I_j}^{\pm r}} \\ K_{\Delta x_{I_j}^{\pm r} x_{II_j}} & P_{\Delta x_{I_j}^{\pm r}} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} I_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \\ -K_j^r H_{II_j} & I - K_j^r H_{I_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{x_{II_j}} & K_{x_{II_j} \Delta x_{I_j}^{\pm r}} \\ K_{\Delta x_{I_j}^{\pm r} x_{II_j}} & P_{\Delta x_{I_j}^{\pm r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{6 \times 6} & -H_{II_j}^T K_j^{rT} \\ 0_{6 \times 6} & I - H_{I_j}^T K_j^{rT} \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} & K_j^r R_j K_j^{rT} \end{pmatrix}, \quad M [r_j r_k^T] = R_j \delta_{jk}. \end{aligned} \quad (126)$$

Замечание. При поскалярной обработке измерений соотношения (126) повторяются циклично (по числу компонент вектора измерений) и фигурирующие в (126) параметры K_j^r , H_{I_j} , H_{II_j} представляют собой, соответственно, коэффициент усиления (вектор), строки матриц H_{I_j} , H_{II_j} .

2. Этап прогноза

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} P_{x_{II_{j+1}}} & K_{x_{II_{j+1}} \Delta \hat{x}_{I_{j+1}}^{\circ-r}} \\ K_{\Delta \hat{x}_{I_{j+1}}^{\circ-r} x_{II_{j+1}}} & P_{\Delta \hat{x}_{I_{j+1}}^{\circ-r}} \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} I_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} & \Phi_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{x_{II_j}} & K_{x_{II_j} \Delta \hat{x}_{I_j}^{\circ+r}} \\ K_{\Delta \hat{x}_{I_j}^{\circ+r} x_{II_j}} & P_{\Delta \hat{x}_{I_j}^{\circ+r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} & \Phi_j^T \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} & Q_j \end{pmatrix}, \quad M[q_j q_k^T] = Q_j \delta_{jk} \quad (127)
\end{aligned}$$

Диагональные элементы матрицы $P_{\Delta \hat{x}_{I_j}^{\circ \pm r}}$ являются дисперсиями компонент вектора истинной ошибки оценки $\Delta x_{I_j}^{\pm r}$.

Для последующего анализа важно сравнивать значения дисперсий ошибок оценки для истинной ошибки оценки $\Delta x_{I_j}^{\pm r}$ и дисперсий ошибок оценки, полученных из ковариационной матрицы редуцированного фильтра (105), (106).

Начальное условие для дисперсионного уравнения.

Имеем:

$$P_{y_0}^- = \begin{pmatrix} P_{x_{II}} & 0_{6 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} & P_{\Delta x_{I_0}^r} \end{pmatrix}. \quad (128)$$

Введем стохастические меры оцениваемости переменных y_i , $i = 1, \dots, n$:

$$y = L(t)x$$

Определение: Абсолютной мерой оцениваемости $\mu_{y_i}^a$ переменной y_i назовем величину

$$\mu_{y_i}^a = 1 - \frac{\sqrt{\tilde{P}_{y_{ii}}}}{\sqrt{P_{y_{ii}}}}$$

Здесь $\tilde{P}_y = L(t)\tilde{P}(t)L^T(t)$ – ковариационная матрица ошибки оценки $\Delta y = y - \tilde{y} = L(t)(x - \tilde{x})$ в том случае, когда оценка $\tilde{y} = L(t)\tilde{x}$ доставляется оптимальным алгоритмом оценивания – фильтром Калмана, $P_y = L(t)P(t)L^T(t)$ – априорная ковариационная матрица вектора $y = L(t)x$.

Очевидно, что величины $\mu_{y_i}^a$ характеризуют предельные точностные возможности оценивания переменных y_i при помощи измерений z (101).

Определение: Истинной мерой оцениваемости μ_{y_i} переменной y_i при помощи редуцированного алгоритма (106) назовем величину

$$\mu_{y_i} = 1 - \frac{\sqrt{\tilde{P}_{\Delta y_{ii}}}}{\sqrt{P_{y_{ii}}}}$$

Здесь \tilde{P}_{Δ} – ковариационная матрица истинной ошибки оценки Δx , $P_y = L(t)P(t)L^T(t)$ – ковариационная матрица вектора $y = L(t)x$.

Мера μ_{y_i} характеризует точностные возможности редуцированного алгоритма (106).

Справедливо очевидное неравенство

$$\mu_{y_i} \leq \mu_{y_i}^a \leq 1 \quad (129)$$

Если величина μ_{y_i} близка к единице, то на основе редуцированной модели возможно получить удовлетворительные оценки указанной переменной. Если величина μ_{y_i} близка к нулю (или даже меньше нуля), то применение редуцированного алгоритма неэффективно. Это может быть вызвано как свойствами исходной задачи оценивания (101) (значение $\mu_{y_i}^a$ также близко к нулю), так и методическими погрешностями редукции. Поэтому необходим сравнительный анализ точностных характеристик оптимального и субоптимального алгоритмов оценивания, для чего собственно и были введены две меры оцениваемости μ_{y_i} и $\mu_{y_i}^a$.

4.5 Обработка модельных данных

4.5.1 Модификация моделей, обусловленная неточностью знания координат базовых векторов.

Предполагается, что координаты базовых векторов в связанных осях Mz известны с некоторой ошибкой - смещением. В качестве начального значения смещения (базовых векторов в Mz) будем задавать следующие величины:

- $\delta l_z^{(1)} = [0.01 \quad -0.01 \quad 0.015]^T \quad [\text{м}]$

- $\delta l_z^{(1)} = [-0.015 \quad 0.01 \quad -0.02]^T \quad [\text{м}]$

Во-первых, рассмотрим вариант слабо связанной интеграции.

В таком случае вектор состояния состоит из 12 параметров:

- три угловые ошибки ориентации: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$;
- три компоненты гироскопического дрейфа: $\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0$;
- три компоненты смещения первого базового вектора: $\delta l_1^{(1)}, \delta l_2^{(1)}, \delta l_3^{(1)}$;
- три компоненты смещения второго базового вектора: $\delta l_1^{(2)}, \delta l_2^{(2)}, \delta l_3^{(2)}$.

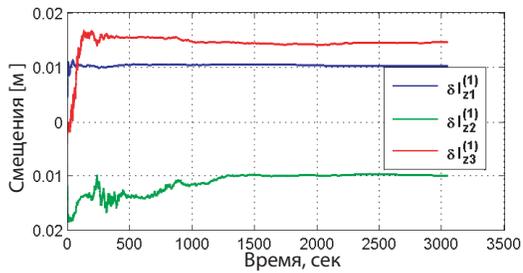
На рисунке 8a изображен результат оценивания смещения, присущего в базовых векторах, для первого базового вектора.

Как видим, смещения, оказывались полностью оцененными при помощи разработанного алгоритма с точностью до тех самых нескольких сантиметров.

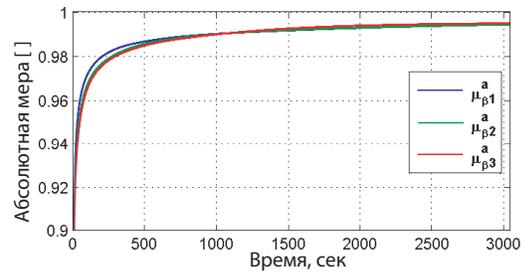
В случаях, когда смещения менее одного сантиметра, абсолютная μ_y^a и истинная μ_y мера оцениваемости совпадут. Таким образом можно прийти к такому выводу, что в этих случаях, истинные полные модели могут быть заменены редуцированными моделями задачи оценивания.

На рисунке 8b и 9a приведены соответственно графики абсолютной μ_y^a и истинной μ_y меры оцениваемости для $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

На рисунке 9b изображен график истинной μ_y меры оцениваемости для $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ на случай, когда смещения присутствуют только по продольной оси системы разнесенных антенн. При имитации были заданы следующие величины $\sigma_{\delta l_3^{(1)}} = 10$ см и $\sigma_{\delta l_3^{(2)}} = 10$ см (СКО).

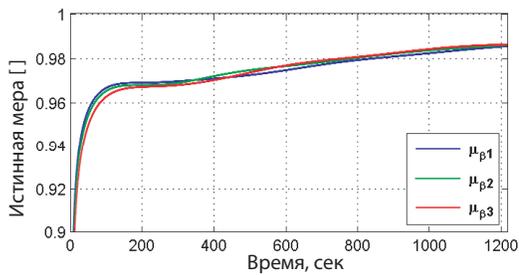


(a) Компоненты оцененных смещений $\delta l_z^{(1)}$, 1-ого базового вектора, при слабо связанной интеграции.

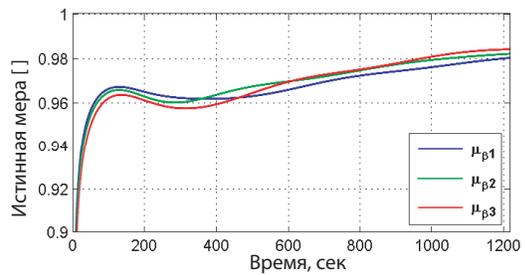


(b) Абсолютная μ_y^a мера оцениваемости для $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Рис. 8



(a) Истинная μ_y мера оцениваемости для $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.



(b) Истинная μ_y мера оцениваемости для $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ при наличии смещения только по продольной оси системы разнесенных антенн.

Рис. 9

4.5.2 Результаты обработки данных.

Результаты моделирования характеристик полного и редуцированного алгоритма оценивания, соответствующих стохастических мер оцениваемости, показали:

1. что потенциально возможно оценивание смещений при помощи разработанного алгоритма с точностью до нескольких сантиметров (при условии углового движения корпуса спутника).
2. что если смещения достаточно малые величины по сравнению с длиной волны (например порядка одного сантиметра), абсолютная $\mu_{y_i}^a$ и истинная μ_{y_i} мера оцениваемости совпадают. Таким образом, можно сделать вывод, что в этих случаях, вместо полных моделей могут быть использованы редуцированные модели задачи оценивания.
3. смещения вдоль базового вектора менее значимы, чем смещения в плоскости, перпендикулярной базовому вектору.

4.6 Заключение к главе 3.

1. Разработана схема ковариационного анализа точности упрощенных алгоритмов интеграции ДУС и системы разнесенных антенн СНС, для случая, когда из полной модели задачи исключаются возможные смещения координат базовых векторов. Схема ковариационного анализа использует понятие стохастической меры оцениваемости.
2. Ковариационный анализ показал, что точность оценивания параметров редуцированных моделей прежде всего зависит от характерных значений и распределения (по продольной/боковым осям) смещений, присутствующих в информации о координатах базовых векторов.
3. Оказалось, что смещения по боковой или вертикальной оси базового вектора оказывают значительно большее влияние на точность оценивания чем по продольной оси. Поэтому смещения по продольной оси базового вектора можно не вводить в модели задачи оценивания. В том случае, если смещения существуют только по про-

дольной оси базового вектора, редуцированные модели могут быть заменены исходными полными моделями задачи оценивания.

4. Смещения, ортогональные направлению базового вектора следует вводить в модель задачи оценивания.

5 Заключение

В диссертационной работе исследованы задачи навигации и ориентации гипотетического искусственного спутника Земли, навигационный комплекс которого состоит из датчиков угловой скорости и многоантенного приемника сигналов спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС и/или GPS.

Исследованы две задачи:

1. задача навигации – задача определения координат и вектора относительной скорости характерной точки спутника;
2. задача ориентации корпуса спутника.

Рассмотрены два варианта построения алгоритмов интеграции на основе показаний ДУС и информации, предоставляемой многоантенным СНС приемником:

1. вариант использования так называемой вторичной информации СНС – встроенных позиционных, скоростных, ориентационных решений многоантенного приемника;
2. вариант использования первичных спутниковых измерений:
 - кодовых псевдодальностей, доплеровских псевдоскоростей в задаче навигации;
 - фазовых измерений в задаче ориентации.

Для каждой из подзадач предложены обоснованные модели и алгоритмы комплексной обработки информации. Соответствующее математическое моделирование подтвердило обоснованность и эффективность предложенных алгоритмических решений.

Проведено исследование сопутствующих задач, связанных с анализом наблюдаемости, ковариационным анализом возникающих задач оценивания.

На основе понятий стохастической меры оцениваемости, истинной (полной) и редуцированной моделей задачи оценивания, разработана схема ковариационного анализа задачи ориентации для случая, когда информация о координатах базовых векторов многоантенного приемника содержит неизвестные ошибки.

Ковариационный анализ показал малую чувствительность алгоритма интеграции ДУС-многоантенная СНС к ошибкам задания длины базового вектора и, напротив, большую чувствительность алгоритма к ошибкам перпендикулярным направлению базового вектора.

Список литературы

- [1] E.D. KAPLAN, C.J. HEGARTY, (EDS.) (2006) *Understanding GPS: principles and applications*. 2nd ed., Norwood: Artech House, pp.635-661.
- [2] Н.Б. ВАВИЛОВА, А.А. ГОЛОВАН, Н.А. ПАРУСНИКОВ, С.А. ТРУБНИКОВ (2009) Математические модели и алгоритмы обработки измерений спутниковой навигационной системы GPS. Стандартный режим. Препринт. 2-е издание. М.: Изд-во Механико-Математического факультета МГУ.
- [3] А.А. ГОЛОВАН, Н.Б. ВАВИЛОВА (2003) *Особенности использования спутниковых измерений для определения скорости носителя в задаче авиационной гравиметрии*. Аэрокосмическое приборостроение, 2003, No.3.
- [4] А.А. ГОЛОВАН, Н.Б. ВАВИЛОВА, Н.А. ПАРУСНИКОВ (2008) *К вопросу об информационно эквивалентных схемах в корректируемых инерциальных навигационных системах*. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. No.3, с. 90-101.
- [5] Д.С.ИВАНОВ *Метод исследования алгоритмов определения ориентации микроспутников и его верификация*. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. с. 80. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-80>
- [6] Д.С.ИВАНОВ [и др.] *Исследование алгоритмов определения ориентации для микроспутников серии ТаблетСат*/ Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. с. 64. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-64>
- [7] A. LEICK (1995) *GPS satellite surveying*. 3rd Edition John Wiley & Sons, Inc, 2004.
- [8] B. HOFMANN-WELLENHOF, H. LICHTENEGGER, E. WALSE (2008) *GNSS-Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo, and More*. Springer; Berlin, Germany: 2008.

- [9] Под ред. А.И. ПЕРОВ, В.Н. ХАРИСОВ. (2010) *ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования*. 4-е, перераб. и доп. – М.: Радиотехника, 2010.
- [10] Ю.А. СОЛОВЬЕВ (2000) *Системы спутниковой навигации*. М.: Радио и связь, ИТЦ «Эко-Трендз», 2000.
- [11] E.D. KAPLAN, C.J. HEGARTY (2006) *Understanding GPS Principles and Applications*. 2nd Ed. Norwood, MA: Artech House, 2006.
- [12] B.W. PARKINSON, J.J.JR. SPILKER (1996) *Global Positioning System: Theory and Applications*. 2nd Ed. Vol. 1-2, 1996.
- [13] P. AXELRAD, J. KELLEY (1986) *Near Earth orbit determination and rendezvous navigation using GPS*. PLANS'86-Position Location and Navigation Symposium (Vol. 1, pp. 184-191).
- [14] S.B. BISNATH, R.B. LANGLEY (1999) *Precise a posteriori geometric tracking of Low Earth Orbiters with GPS*. Canadian Aeronautics and Space Journal, 45(3), 245-252.
- [15] А.А. ГОЛОВАН, Н.А. ПАРУСНИКОВ. (2011) *Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации*. 3-е издание, исправленное и дополненное. МАКС Пресс Москва, 136 с., 2011.
- [16] А.А. ГОЛОВАН, Н.А. ПАРУСНИКОВ. (2012) *Математические основы навигационных систем Часть II. Приложения методов оптимального оценивания к задачам навигации*. 2-е издание исправленное и дополненное. МАКС Пресс Москва, 172 с, 2012.
- [17] G. WANBA (1965) *A Least-Squares Estimate of Satellite Attitude*. SIAM Review, Vol. 7, No. 3, July, 1965, p. 409.
- [18] P. DAVENPORT (1965) *A vector approach to the algebra of rotations with applications*. Technical report, NASA, X-546-65-437, November 1965.
- [19] M.D. SHUSTER (1981) *Three-Axis Attitude Determination from Vector Observations*. Journal of Guidance and Control, Vol. 4, No. 1, 1981, pp. 70-77.

- [20] F.L. MARKLEY (1992) *Attitude Determination Using Vector Observations: A Fast Optimal Matrix Algorithm*. 1992 Goddard Space Flight Center Mechanics/Estimation Theory Symposium, Greebelt, MD, May, 1992.
- [21] О.А. СТЕПАНОВ, Д.А. КОШАЕВ (1999) *Исследование методов решения задачи ориентации с использованием спутниковых систем*. Гироскопия и навигация, (2), 30-55.
- [22] M.G. LEITMANN ET AL. (1993) *Attitude and position determination using a star mapper on the small-satellite platform PoSAT-1*. Optical Engineering and Photonics in Aerospace Sensing. International Society for Optics and Photonics, 1993. С. 224-230.
- [23] M. WIEGAND, O. MATTHEWS (1997) *Using Magnetometer And Sun-Sensor to Determine Three-Axis Attitude For The ABRIXAS Missions*. AAS-97, 15.
- [24] N.V. YEFIMENKO (2010) *Magnetic Attitude Control and Stabilizing System of Egyptsat-1 Spacecraft*. Journal of Automation and Information Sciences, 42(11).
- [25] J.D. SEARCY, H.J. PERNICKA (2012) *Magnetometer-only attitude determination using novel two-step Kalman filter approach*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 35(6), 1693-1701.
- [26] М.Д. ШУСТЕР (1983) *Использование фильтров Калмана для оценивания пространственной ориентации КЛА*. AIAA Guidance, navigation and control. Vol. 82. 1983.
- [27] J.C. SPRINGMANN, A.J. SLOBODA, A.T. KLESH, M.W. BENNETT, J.W. CUTLER (2012) *The attitude determination system of the RAX satellite*. Acta Astronautica, 75, 120-135.
- [28] E.J. LEFFERTS, F.L. MARKLEY, M.D. SHUSTER (1982) *Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation*. Journal of Guidance and Control, Vol.5, No.5, 1982, pp. 417-429.
- [29] M.E. PITTELKAU (2001) *Kalman filtering for spacecraft system alignment calibration*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 24(6), 1187-1195.

- [30] Р.В. БЕССОНОВ, С.В. ДЯТЛОВ, А.А. КРУПИН, М.И. КУДЕЛИН (2008) *Разработка и исследование характеристик трехосного блока определения угловых скоростей на основе технологии МЭМС*. Авиакосмическое приборостроение, (9), 16.
- [31] М.Л. ПИВОВАРОВ (1985) *Определение ориентации ИСЗ с использованием измерений угловых скоростей*. Космические исследования, 23(3), 331-334.
- [32] S. PURIVIGRAIPONG, Y. HASHIDA, M. UNWIN (2007) *Simplified Filtering Estimator for Spacecraft Attitude Determination from Phase Information of GPS Signals*. World Congress on Engineering (pp. 391-396).
- [33] R. WOLF, G.W. HEIN, B. EISSFELLER, E. LOEHNERT (1996) *An Integrated Low Cost GPS/INS Attitude Determination and Position Location System*. Proceedings of the 9th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 1996), pp. 975-981.
- [34] С.Е. СОЛЕН (1992) *Attitude Determination Using GPS*. Ph.D. Dissertation, Stanford University, Dec. 1992.
- [35] *Глобальная спутниковая навигационная система ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ ГЛОНАСС*. (5.1-ая редакция, 2008 г.).
- [36] *Global Positioning System Interface Control Document, Revision B*. (ICD-GPS-870B, Sep 24, 2013).
- [37] Н.А. ПАРУСНИКОВ, В.М. МОРОЗОВ, В.И. БОРЗОВ (2011) *Задача коррекции в инерциальной навигации*. М.: Изд-во МАКС Пресс.
- [38] P.J.G. TEUNISSEN (1993) *Least-squares estimation of the integer GPS ambiguities*. Invited lecture, Section IV Theory and Methodology, IAG General Meeting, Beijing, China. Also in: Delft Geodetic Computing Centre LGR series, No. 6.
- [39] P.J.G. TEUNISSEN *Integer least-squares theory for the GNSS compass*. DOI 10.1007/s00190-010-0380-8

- [40] P.J. DE JONGE, C.C.J.M. TIBERIUS (1996) *The LAMBDA method for integer ambiguity estimation: implementation aspects*. Delft Geodetic Computing Centre LGR Series, No.12, Delft University of Technology.
- [41] G.H. GOLUB, C.F. VAN LOAN (1986) *Matrix Computations*. North Oxford Academic.
- [42] В.В. АЛЕКСАНДРОВ, А.Д. БЕЛЕНЬКИЙ, Д.И. БУГРОВ, А.В. ЛЕВЕДЕВ, С.С. ЛЕМАК, В.Ф. ГЕРРЕРО САНЧЕЗ. (2011) *Оценка точности ориентации по телеметрии спутника «Татьяна-2»*. Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика, No. 3, с. 69-72, 2011.
- [43] P.G. SAVAGE (1998) *Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1: attitude algorithms*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 21, No. 1, 1998, pp. 19-28.
- [44] Г.Н. ДУБОШИН (1979) *Небесная механика: Основные задачи и методы*. М.: Наука, 1975; Абалакин В.К., Основы эфемеридной астрономии, М.: Наука, 1979.