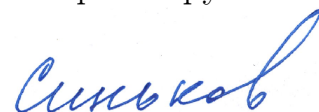


На правах рукописи



СИНЬКОВ Константин Федорович

**РАЗВИТИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
МНОГОФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТРУБОПРОВОДАХ**

*Специальность 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы*

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена на кафедре прикладной механики Московского физико-технического института.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник МНИЦ Шлюмберже,  
г. Москва

**Спесивцев Павел Евгеньевич**

Научные консультанты: кандидат физико-математических наук,  
ведущий научный сотрудник МНИЦ Шлюмберже,  
г. Москва

**Осипцов Андрей Александрович**

кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник МНИЦ Шлюмберже,  
г. Москва

**Лебедева Наталья Анатольевна**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
главный научный сотрудник  
Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
г. Новосибирск

**Роменский Евгений Игоревич**

кандидат физико-математических наук,  
ведущий научный сотрудник  
Центрального аэрогидродинамического института  
им. проф. Н.Е. Жуковского, г. Жуковский

**Асмолов Евгений Савельевич**

Ведущая организация: **Институт проблем механики  
им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва**

Защита состоится 18 ноября 2016 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.89 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119234, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан «\_\_\_» августа 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д.501.001.89,  
доктор физико-математических наук



В.В. Измоденов

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В данной работе рассматривается проблема моделирования многофазных течений в длинных трубопроводах и скважинах. Интерес к развитию математических моделей многофазных течений в трубах обусловлен широким распространением такого рода течений в ядерной энергетике, химическом производстве, угольной и нефтегазовой промышленности.

В нефтегазовой промышленности газожидкостные течения в трубопроводах имеют место при добыче и транспортировке углеводородов. Течение может быть многофазным как во всей системе, если происходит приток нескольких пластовых жидкостей и газа в скважину, так и в некоторой ее части, если в стволе скважины происходит дегазация и растворенный в нефти газ выходит в свободное состояние. Многие ключевые особенности в измерениях расходов и давлений, наблюдаемые на практике, объясняются явлениями характерными именно для многофазных течений. Корректное математическое описание явлений, сопровождающих газожидкостные течения в трубах, необходимо для планирования гидродинамических исследований скважин, интерпретации полученных результатов, а также при проектировании скважин и трубопроводов. Данные процессы зачастую носят существенно нестационарный характер и плохо поддаются аналитическому исследованию.

Практический интерес представляют задачи не только о газожидкостных течениях в трубах, но и двухфазные течения жидкость-твердые частицы и жидкость-капсулы. В нефтегазовых приложениях перенос твердых примесей потоком жидкости имеет место при бурении скважин (вынос обломков породы), установке гравийных фильтров, гидроразрыве пласта, выносе пропанта из трещины гидроразрыва. Этапом многих технологических процессов является перемещение в трубах различных пористых агрегатов. К примеру, для целлюлозно-бумажной промышленности представляют интерес задачи, связанные с движением волокнистых суспензий. Волокнистые суспензии могут быть использованы в качестве несущей среды при транспортировании гранулированных материалов. Гидравлический транспорт твердых и жидких материалов, заключенных в проницаемую или непроницаемую оболочку, переносимую потоком жидкости, также может быть использован для перемещения различного сырья по трубопроводам.

Развитие моделей многофазных течений является важной фундаментальной задачей. В частности, актуальной проблемой является построение замкнутых самосогласованных одномерных нестационарных моделей газожидкостных течений в скважинах и трубопроводах. Несмотря на большое число различных прикладных задач, до сих пор отсутствует общепринятая модель, описывающая подобные течения. Актуальными также являются вопросы строгого обоснования таких моделей и их вывода из первых принципов, а также определение границ их применимости. С другой стороны, подобные модели могут быть расширены и модифицированы для приложения к более широкому кругу практических задач. Модели гидравлического транспорта капсул и движения пористых тел в трубах, представленные в литературе, также имеют ряд ограничений, обусловленных используемой реологической моделью для несущей жидкости и отсутствием в моделях эффектов плавучести.

#### **Цели работы:**

- Установление границ применимости модели дрейфа для двухфазных течений в трубе в двух формулировках и ее связи с многожидкостной моделью.
- Определение корректной постановки начально-краевой задачи для системы уравнений модели дрейфа, установление критериев гиперболичности и требований к замыкающим соотношениям модели дрейфа.
- Разработка и программная реализация алгоритма численного решения системы уравнений модели дрейфа. Построение аналитических решений для проверки корректности численной реализации. Сравнение численных результатов с аналитическими.
- Исследование пробкового режима течения, вызванного сложной геометрией трубопровода. Развитие модели дрейфа для предсказания результатов лабораторных экспериментов по пробковому режиму течения. Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными.
- Построение модели гидравлического транспорта твердого проникаемого тела жидкостью неньютоновской реологии с учетом эффекта плавучести в ламинарном режиме течения. Исследование возможности перехода тела из упругого в пластическое состояние при гидравлическом транспорте.

**Научная новизна.** На защиту выносятся следующие новые результаты, полученные в диссертации:

1. Условия, сформулированные в терминах безразмерных определяющих параметров, при которых модель дрейфа для задачи о пузырьковом режиме течения газожидкостной смеси в длинной трубе в классической формулировке и формулировке с уравнением закона сохранения импульса смеси в терминах среднеобъемной скорости следует из законов сохранения. Модель дрейфа в двух формулировках как асимптотический предел уравнений законов сохранения, записанных в многоконтинуальном приближении.
2. Необходимое условие гиперболичности системы уравнений модели дрейфа в классической формулировке с модельными замыкающими соотношениями, обеспечивающими корректное вырождение системы к уравнениям одномерного движения сжимаемого газа. Достаточность полученного условия гиперболичности при малых числах Маха. Безусловная гиперболичность и явные выражения для характеристических скоростей системы уравнений модели дрейфа в формулировке с уравнением закона сохранения импульса в терминах среднеобъемной скорости смеси.
3. Результаты исследования пробкового режима течения, вызванного сложной геометрией трубопровода. Способ обобщения и значения настроечных параметров эмпирических замыкающих соотношений модели дрейфа обеспечивающие предсказание результатов лабораторных экспериментов по пробковому режиму газожидкостного течения, вызванному сложной геометрией трубопровода, с точностью приемлемой для характерных задач нефтегазовой промышленности.
4. Осесимметричная стационарная модель транспорта и перехода в пластическое состояние длинного упругого пористого пронизываемого тела, переносимого потоком несжимаемой жидкости со степенной реологией в вертикальной трубе. Классификация и границы возможных режимов течения в терминах безразмерных определяющих параметров задачи. Зависимость предельного радиуса тела, при котором скелет остается в упругом состоянии, от определяющих параметров задачи.

**Практическая значимость.** Практическая значимость работы обусловлена широким спектром приложений одномерных моделей многофаз-

ных течений в скважинах и длинных трубопроводах. Установленные границы применимости модели дрейфа, широко внедренной в коммерческие симуляторы многофазных течений для нефтегазовых приложений, обоснованные требования к эмпирическим замыкающим соотношениям и предложенное обобщение замыкающих соотношений модели могут быть использованы для развития и улучшения этих программных продуктов. Разработанный комплекс программ для решения уравнений модели дрейфа может быть использован при планировании и проведении различных технологических операций в нефтегазовой промышленности, например гидродинамических исследований и очистки скважин. При помощи моделирования могут быть определены оптимальные стратегии проведения этих операций и проведена интерпретация результатов полевых измерений. Построенная модель гидравлического транспорта цилиндрических тел в трубе может быть использована для определения перепадов давления, скорости движения и необходимых прочностных характеристик тел при транспортировке различных материалов в скважинах и трубопроводах.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на следующих конференциях: 54-я научная конференция МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук» (Москва, 2011); 55-я научная конференция МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук» (Москва, 2012); 8<sup>th</sup> International Conference on Multiphase Flow (Jeju, Korea, 2013); 7<sup>th</sup> International Conference on Computational and Experimental Methods in Multiphase and Complex Flow (A Coruña, Spain, 2013); международная конференция «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» (Звенигород, 2014); XVII школа-семинар, посвященная памяти академика Г. Г. Черного и 55-летию НИИ механики МГУ «Современные проблемы аэрогидродинамики» (Сочи, 2014); 14<sup>th</sup> European Conference of Mathematics of Oil Recovery (Catania, Italy, 2014); 19<sup>th</sup> International Conference on Hydrotransport (Golden, Colorado, USA, 2014); конференция-конкурс молодых ученых НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова (Москва, 2014); VII международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2015); 5-я Всероссийская научная конференция «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» (Москва, 2015); 9<sup>th</sup> International Conference on Multiphase Flow (Firenze, Italy, 2016).

Постановки задач и результаты работы обсуждались на семинарах в

Московском научно-исследовательском центре компании Шлюмберже (2011–2016); семинарах лаборатории механики многофазных сред НИИ механики МГУ под руководством проф. А. Н. Осипцова (2014–2016); семинаре по прикладной механике сплошных сред Института проблем механики РАН под руководством А. Н. Рожкова (2016); семинаре по механике сплошных сред НИИ механики МГУ под руководством акад. РАН А. Г. Куликовского, проф. В. П. Карликова и члена-корр. РАН О. Э. Мельника (2016); научно-исследовательском семинаре кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ под руководством акад. РАН Р. И. Нигматулина и проф. Н. Н. Смирнова (2016).

За результаты, изложенные в диссертации, автор был награжден дипломом победителя конкурса научно-исследовательских работ студентов и аспирантов 55-й научной конференции МФТИ. За совместную с П. Е. Спесивцевым, Н. А. Лебедевой и А. А. Осипцовым работу, результаты которой также частично изложены в диссертации, автор был удостоен звания победителя и приза им. К. Шлюмберже за техническую глубину на ежегодном симпозиуме компании Шлюмберже (Кембридж, Массачусетс, США, 2014).

**Публикации.** Основные результаты работы опубликованы в 13 печатных работах, из них 2 в журналах из перечня ВАК, 4 в сборниках трудов международных и российских конференций, 7 в сборниках тезисов.

**Личный вклад автора и достоверность результатов.** В диссертации приведены результаты полученные автором лично или при его непосредственном участии. Автор участвовал в формулировке постановок задач, обсуждении результатов и подготовке публикаций по результатам работы. Автором разработаны и реализованы оригинальные численные алгоритмы решения сформулированных в работе задач, проведены расчеты, выполнена обработка результатов и подготовлены графические и табличные материалы, представленные в диссертации. Положения, выносимые на защиту, получены лично соискателем. Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием апробированных методов исследования и классических моделей механики сплошной среды, аналитическим характером полученных результатов, сравнением результатов с экспериментальными данными, совпадением результатов исследования в частных случаях с известными в литературе решениями, тщательным контролем сходимости и сравнением численных решений с аналитическими.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, 2 глав, заключения и 2 приложений. Полный объем диссертации составляет

130 страниц с 25 рисунками и 7 таблицами. Список литературы содержит 129 наименований.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность научному руководителю к.ф.-м.н. П. Е. Спесивцеву, А. Д. Харлашкину, коллективу Московского научно-исследовательского центра компании Шлюмберже. Автор глубоко признателен лично А. А. Осипцову и Н. А. Лебедевой за плодотворное сотрудничество и поддержку работы.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обоснована актуальность темы работы, приведена аннотация ее содержания, указаны цель и новизна исследований, отмечена их практическая ценность.

**Глава 1** посвящена развитию модели дрейфа для описания нестационарных одномерных газожидкостных течений в длинных трубопроводах. Приведен вывод модели дрейфа из законов сохранения для частной постановки дисперсного течения и характеристический анализ системы уравнений модели дрейфа, описана реализация алгоритма численного решения уравнений и результаты исследования пробкового режима течения, вызванного сложной геометрией трубопровода.

Модель дрейфа [1] основана на упрощенном описании двухфазного течения и включает два уравнения закона сохранения массы для газовой и жидкой фазы, а также одно уравнение закона сохранения импульса для смеси и алгебраическое соотношение, связывающее скорости фаз через скорость дрейфа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i \rho_i) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_i \rho_i v_i) &= 0, \quad i = l, g \\ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_g \rho_g v_g + \alpha_l \rho_l v_l) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_g \rho_g v_g^2 + \alpha_l \rho_l v_l^2 + p) &= \rho_m g \cos \theta - \frac{2f \rho_m v_m |v_m|}{d}, \\ v_g &= C_0 v_m + v_d. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $z$  — координата вдоль трубы;  $t$  — время; индексы  $l, g$  относятся к жидкой и газовой фазам соответственно;  $\alpha_i, \rho_i, v_i$  — осредненные значения объёмных долей, плотностей и скоростей фаз;  $\rho_i = \rho_i(p)$ ,  $p$  — осредненное давление, которое предполагается одинаковым в обеих фазах;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $v_m = \alpha_g v_g + \alpha_l v_l$  — среднеобъемная скорость смеси,  $\rho_m = \alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l$  — плотность смеси,  $f = f(\alpha_g, v_m, p)$  — коэффициент трения,  $d$  — диаметр трубы,  $\theta$  — угол наклона трубы к вектору силы тяжести.



Соотношение (1), где  $C_0 = C_0(\alpha_g, v_m, p)$  – параметр профиля, учитывающий распределения объемной доли газа и скоростей по сечению трубы,  $v_d = v_d(\alpha_g, v_m, p)$  – скорость дрейфа, в литературе называется соотношением модели дрейфа [2]. Приведенная формулировка далее обозначается как классическая.

Также в литературе [3] известна формулировка модели дрейфа с уравнением закона сохранения импульса смеси, записанным в виде

$$\rho_m \left( \frac{\partial v_m}{\partial t} + v_m \frac{\partial v_m}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_m g \cos \theta - \frac{2f \rho_m v_m |v_m|}{d}.$$

Последнее уравнение постулируется в недивергентном виде в терминах среднеобъемной скорости смеси.

В **разделе 1.1** приведен обзор литературы по вопросам рассматриваемым в работе.

В **разделе 1.2** представлены результаты аналитических исследований модели дрейфа. В **подразделе 1.2.1** в рамках многоконтинуального подхода представлен вывод асимптотических уравнений модели дрейфа, записанной в виде алгебраического соотношения для скоростей фаз и одного уравнения сохранения импульса смеси в двух формулировках.

Рассматривается течение двухфазной смеси жидкости и дисперсной фазы (газа) в вертикальной трубе круглого сечения. Напряжениями в дисперсной фазе пренебрегается, вязкие напряжения в несущей фазе записываются в виде напряжений в вязкой сжимаемой жидкости с коэффициентами вязкости, зависящими от объемной доли газа. В приближении длинного канала  $\varepsilon \ll 1$ , где  $\varepsilon = R/L$  – отношение радиуса трубы  $R = d/2$  к характерному продольному масштабу  $L$  устанавливаются предположения необходимые для вывода модели дрейфа из законов сохранения. Первая группа предположений, необходимая для вывода алгебраического соотношения между скоростями фаз из уравнения закона сохранения импульса дисперсной фазы сводится к условию малости длины релаксации скорости дисперсной фазы по сравнению с продольным масштабом  $\varepsilon St \ll 1$ , где  $St = mU/(6\pi\mu_0 r_{b0}R)$  – число Стокса,  $m$  – масса пузырька,  $U$  – масштаб скорости течения,  $\mu_0$  – масштаб вязкости жидкости,  $r_{b0}$  – характерный радиус пузырька. Алгебраическая связь среднемассовых скоростей фаз  $\mathbf{v}_g$  и  $\mathbf{v}_l$  в этом случае принимает вид

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_s, \quad \mathbf{v}_s = -\frac{St}{\eta\mu r_b Fr^2} \mathbf{e}_z,$$

где  $\eta = \rho_g^0/\rho_l^0$  – отношение характерных плотностей,  $\text{Fr} = U/\sqrt{gR}$  – число Фруда,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\mu = \mu(\alpha_g)$  – безразмерная вязкость несущей фазы,  $r_b$  – безразмерный радиус пузырька,  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор в направлении силы тяжести. Из суммы уравнений законов сохранения импульса фаз также можно получить условие отсутствия поперечного градиента давления  $\partial_r p = 0$ , где  $r$  – радиальная координата, и уравнение закона сохранения импульса смеси в классической формулировке. В работе впервые показано, что уравнение закона сохранения импульса смеси в терминах среднеобъемной скорости смеси может быть получено как предел законов сохранения только в случаях (I) малой объемной доли дисперсной фазы  $\alpha_g \ll 1$ ; (II) отсутствия проскальзывания между фазами  $|C_0 - 1| \ll 1$ ,  $\text{St}/\eta\text{Fr}^2 \ll 1$ ; (III) безынерционного течения  $\varepsilon\text{Re} \ll 1$ , где  $\text{Re} = \rho_l^0 UR/\mu_0$  – число Рейнольдса. Таким образом, что модель дрейфа в данной формулировке для рассматриваемой частной постановки следует из законов сохранения в ограниченном наборе предельных случаев и является по существу моделью эффективной жидкости.

В подразделе 1.2.2 исследуются характеристические свойства системы уравнений модели дрейфа. В пространстве безразмерных определяющих параметров устанавливаются границы областей гиперболичности, и исследуется влияние замыкающих соотношений на характеристические свойства модели. Получены явные выражения для собственных скоростей системы уравнений модели дрейфа и сделаны выводы об их знакоопределенности, позволяющие определить корректную постановку граничных условий для системы.

Потеря гиперболичности системами квазилинейных уравнений первого порядка, к которым относится рассматриваемая система уравнений модели дрейфа, приводит к некорректной математической постановке начально-краевой задачи для системы, нарушению принципа причинности и потере равномерно-непрерывной зависимости решения от начальных данных. Свойства системы уравнений модели дрейфа исследовались многими авторами, однако обычно рассматривались упрощенные варианты системы, в частности коэффициенты замыкающего (1) соотношения принимались постоянными  $C_0 = \text{const} \neq 1$ ,  $v_d = \text{const} \neq 0$ . В отличие от предшествующих исследований модели дрейфа в классической формулировке в данной работе рассматриваются не постоянные, а зависящие от объемной доли газа параметр профиля  $C_0(\alpha_g)$  и скорость дрейфа  $v_d(\alpha_g)$ . Исходя из условия вырождения системы уравнений модели дрейфа к уравнениям одномерного

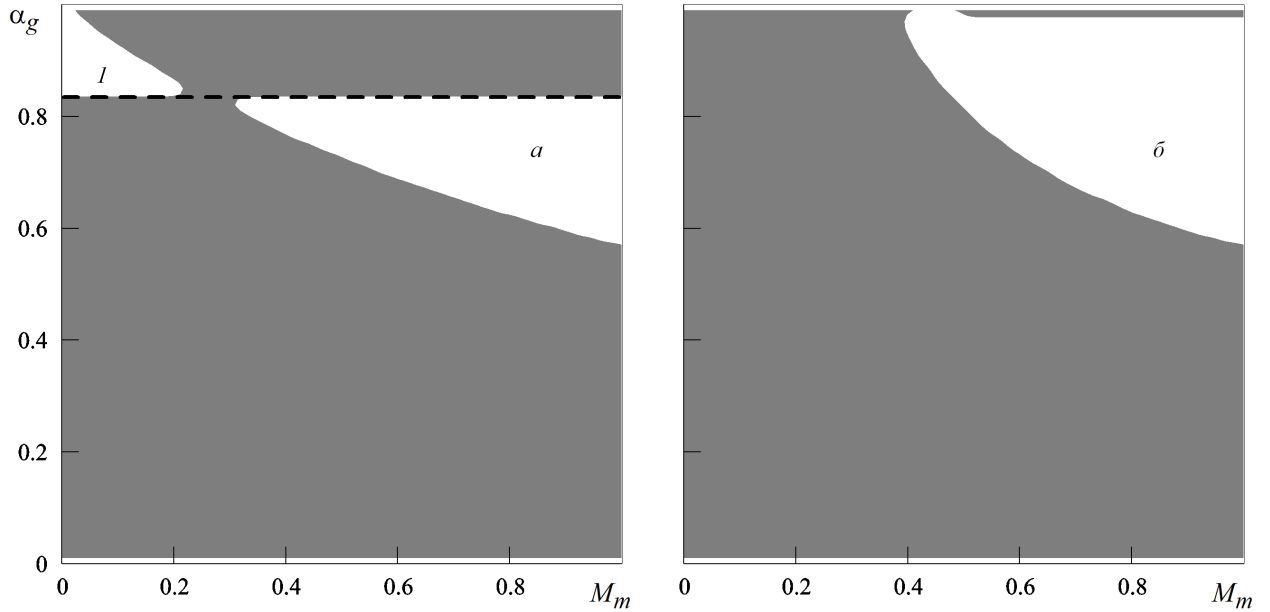


Рис. 1: Области гиперболичности для различных замыкающих соотношений модели дрейфа: (а) –  $C_0 = const \neq 1, v_d = const \neq 0$ ,  $l$  – граница области гиперболичности, полученная из условия (2); (б) – замыкающие соотношения предлагаемые в работе и удовлетворяющие (2).

движения сжимаемого газа на замыкающие соотношения накладываются дополнительные ограничения  $C_0(1) = 1$  и  $v_d(1) = 0$ . Из разложения характеристических скоростей системы по степеням чисел Маха  $M_m = v_m/c_l$  и  $M_d = v_d(0)/c_l$ , где  $c_l$  – скорость звука в жидкости, в окрестности нуля получено необходимое условие гиперболичности системы

$$(1 - \eta)\alpha_g C_0(\alpha_g) < 1. \quad (2)$$

Численные эксперименты с различными замыкающими соотношениями, удовлетворяющими условиям вырождения, показывают, что последнее условие является также и достаточным для широкого диапазона  $M_m$  и  $M_d$ , интересного с точки зрения практических приложений. На **рис. 1** изображены области гиперболичности для системы уравнений модели дрейфа с различными замыкающими соотношениями. **Рис. 1а** иллюстрирует совпадение границ области полученных численно и аналитически при малых числах Маха. **Рис. 1б** демонстрирует, что использование замыкающих соотношений удовлетворяющих (2) обеспечивает гиперболичность системы для всех  $\alpha_g$  в диапазоне  $M_m$ , интересном на практике.

Для неклассической формулировки системы уравнений модели дрейфа с уравнением закона сохранения импульса, записанным в терминах средне-

объемной скорости смеси, характеристическое уравнение может быть явно разрешено для произвольных замыкающих соотношений. Анализ решения показывает, что характеристические скорости в общем случае действительны и различны, и, следовательно система является безусловно гиперболической. Одна из характеристических скоростей оказывается не зависящей от сжимаемости фаз и описывает медленное распространение возмущений объемной доли

$$\lambda_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha_g} \alpha_g v_g,$$

в согласии с известным результатом для модели дрейфа безынерционных течений [1]. Две характеристики

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left( v_m + \omega_g v_g + \omega_l v_l \pm \sqrt{D} \right), \quad D = (v_m - \omega_g v_g - \omega_l v_l)^2 + 4c_m^2 > 0,$$

$$\frac{1}{\rho_m c_m^2} = \sum_{i=g,l} \frac{\alpha_i}{\rho_i c_i^2}, \quad \omega_i = \alpha_i \frac{\rho_m c_m^2}{\rho_i c_i^2},$$

где  $c_i$  – скорости звука в фазах, отвечают быстрым волнам давления. Условие смены знака одной из характеристических скоростей, определяющие аналог звуковой поверхности, для системы имеет вид

$$v_m (\omega_g v_g + \omega_l v_l) = c_m^2. \quad (3)$$

Зависимость  $c_m$  от  $\alpha_g$  при  $K = c_g/c_l < 1$  и  $\eta \ll 1$  имеет минимум

$$c_m^{min}/c_l = 2K(\eta^{1/2} + O(\eta^{3/2})), \quad \alpha_g^{min} = \frac{1}{2} (1 + (1 - K^2)\eta) + O(\eta^2)$$

Следовательно, в характерном для скважинных течений диапазоне параметров  $v_m \sim v_i \ll c_m^{min}$  характеристики  $\lambda_{2,3}$  имеют разный знак и описывают возмущения распространяющиеся вниз и вверх по потоку. Таким образом, одна из характеристик оказывается приходящей внутрь области на выходной границе и для корректной постановки краевой задачи для системы уравнений модели дрейфа требуется задание одного граничного условия на выходе. В случае квазистационарного уравнения закона сохранения импульса смеси одно из уравнений системы может быть приведено к виду уравнения переноса для давления со скоростью переноса, имеющий знак, противоположный знаку скорости смеси, что однозначно определяет постановку граничного условия для давления на выходе из трубы.

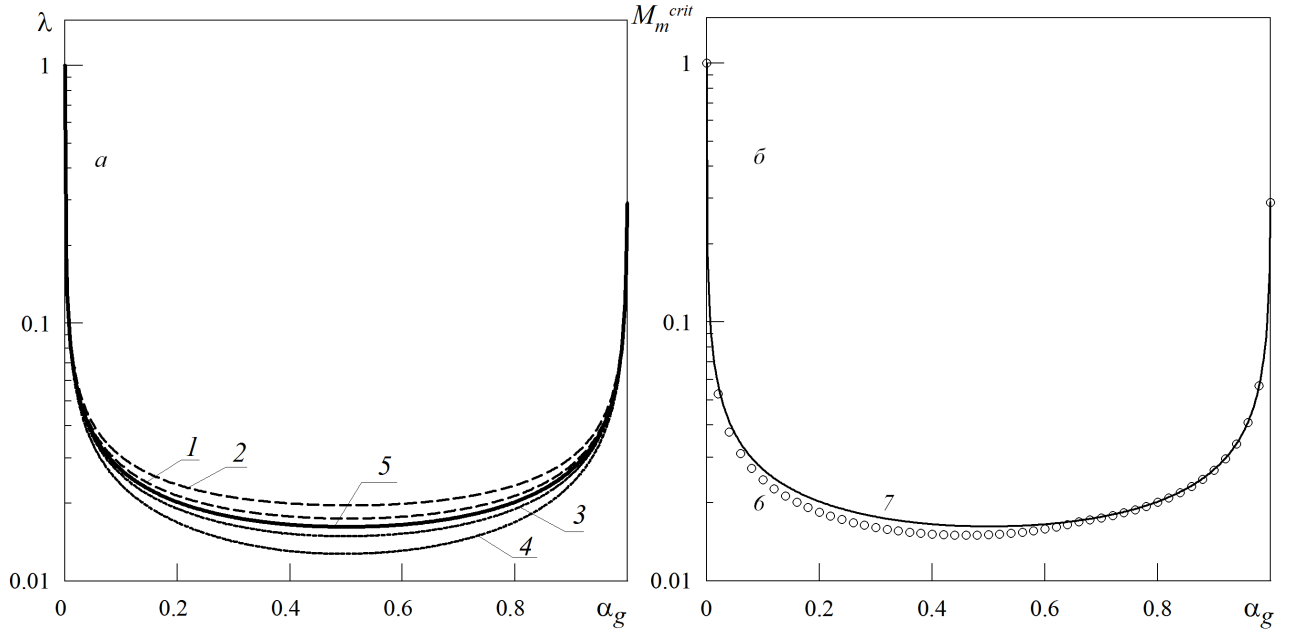


Рис. 2: Зависимость безразмерных характеристических скоростей  $\lambda_{2,3}$  и  $c_m$  (а), критического числа Маха (б) от объемной доли  $\alpha_g$ : 1, 2 –  $\lambda_2$  при  $M_m = 0.001, 0.003$ ; 3, 4 –  $|\lambda_3|$  при  $M_m = 0.001, 0.003$ ; 5 –  $c_m$ ; 6 – численное решение (3); 7 – аппроксимационная зависимость  $v_m = c_m$ .  $\eta = 7.8 \cdot 10^{-4}$ ,  $K = 0.29$ ,  $M_d = 1.5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\hat{d} = 47$ .

**Рис. 2** построен для замыкающих соотношений из [4], использующихся при моделировании скважинных течений. Для данного вида замыкающих соотношений скорости фаз и характеристики являются функциями шести безразмерных параметров –  $\alpha_g$ ,  $\eta$ ,  $K$ ,  $M_m$ ,  $M_d = u_d^0/c_l$ , где  $u_d^0 = u_d^0(p) = v_d(0, v_m, p)$ , и безразмерного диаметра трубы  $\hat{d}$  (определен в [4]). На **рис. 2а** представлены зависимости звуковых характеристических скоростей  $\tilde{\lambda}_{2,3} = \lambda_{2,3}/c_l$  от  $\alpha_g$ . На **рис. 2б** представлены зависимость критического числа Маха  $M_m^{crit}$  от объемной доли, полученная численным решением (3), и аппроксимационная зависимость  $M_m^{crit} = c_m/c_l$ .

**Раздел 1.3** кратко описывает реализацию алгоритма численного решения системы уравнений модели дрейфа. Приведено описание алгоритма и сравнение результатов моделирования с аналитическими решениями. В работе используется итерационный алгоритм на основе метода SIMPLE. В основе метода лежит представление полей давления и скорости смеси в виде суммы предполагаемых распределений и поправок к ним. Связь между поправками давления и скорости смеси вычисляется линеаризацией уравнения закона сохранения импульса смеси. Уравнение для поправки давления конструируется как взвешенная сумма линеаризованных уравнений неразрывности. Для верификации программной реализации описанного ал-

горитма предлагаются задачи о восстановлении давления и сегрегации.

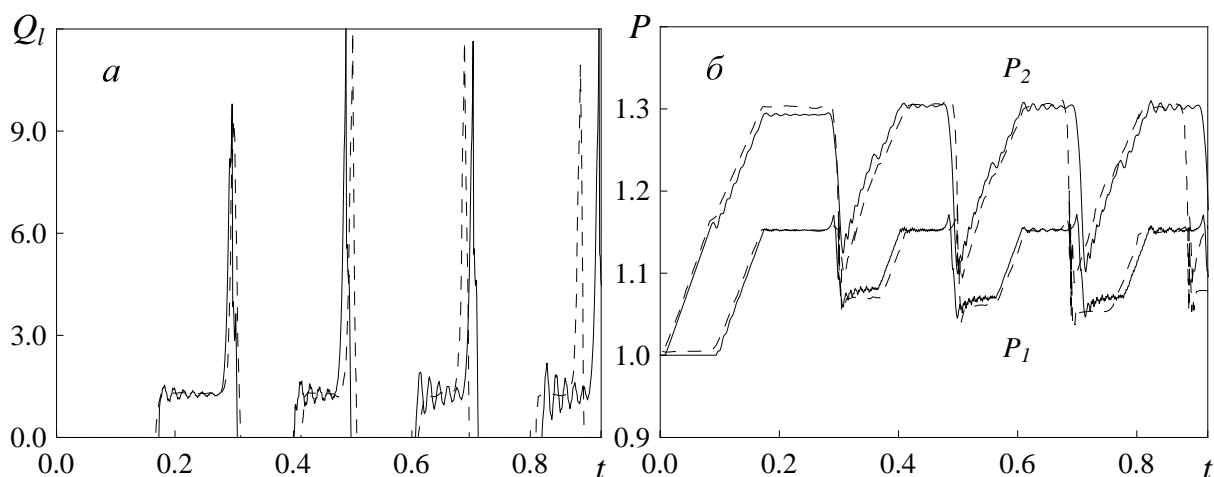


Рис. 3: Сравнение экспериментальных данных и результатов моделирования, эксперимент № 9. (а) – зависимость массового расхода жидкости на выходе из трубопровода от времени; (б) – зависимость давлений в двух точках  $P_1, P_2$  от времени. Сплошные линии – моделирование, прерывистые – эксперимент.

В разделе 1.4 на примере опубликованных в литературе экспериментальных данных [5] проведено исследование пробкового режима газожидкостного течения, вызванного сложной геометрией трубопровода. Данный режим течения формируется в результате блокирования свободного течения газа жидкостью в коленах трубопровода. Накопление газа приводит к постепенному росту давления и, по прошествии некоторого времени, резкому вышлеску жидкой пробки. В работе предлагаются метрика сравнения результатов моделирования и экспериментальных данных и обобщение эмпирических замыкающих соотношений модели дрейфа. Приложение модели дрейфа к описанию пробкового режима течения в трубопроводах W-образной геометрической конфигурации с несколькими секциями переменного угла наклона к горизонту ранее в литературе не рассматривалось. Настройка параметров замыкающих соотношений, отвечающих за зависимость скорости дрейфа от угла наклона трубы к горизонту производится на 3 экспериментах, в которых наблюдается ярко выраженное пробковое течение, из 11 доступных. Параметры варьируются до получения ошибки моделирования относительно эксперимента, не превышающей заданного порогового значения. Предиктивные возможности настроенных замыканий протестированы на экспериментах, не используемых при настройке замыканий. Результаты сравнения показывают качественное согласие моделирования с экспериментом, правильное предсказание режима течения

и воспроизведение характерных особенностей процесса. В **таб. 1** приведены результаты сравнения единственной доступной для всех экспериментов величины – периода колебаний. В экспериментах 1, 2 и 6 пробковый режим течения не наблюдался. Для всех экспериментов кроме 7, с коротким периодом осцилляций, совпадение результатов хорошее.

Таблица 1: Сравнение экспериментальных данных и результатов моделирования для периода пробкового течения

Эксперимент №	Период эксперимент, с	Период моделирование, с	Относительная ошибка, %
1	–	–	–
2	–	–	–
3	92.1	89.3	3.0
4	59.0	60.7	3.0
5	45.2	50.8	12.3
6	–	–	–
7	12.0	19.7	64.4
8	182.5	193.7	6.1
9	95.4	98.0	2.7
10	89.2	88.8	0.4
11	75.2	62.0	17.6

На **рис. 3** приведен пример сравнения результатов моделирования с экспериментом. В качестве характерных масштабов расхода и давления выбраны расход на входе в трубопровод  $Q_i^{in}$  и давление на выходе, заданные в эксперименте. Характерный масштаб времени вычислен по полной длине трубопровода  $L$  и характерной скорости жидкости, определяемой по  $U = Q_i^{in} / \rho_l S$ , где  $S$  – площадь сечения трубы.

В **главе 2** рассматриваются задачи, связанные с переносом твердой фазы потоком жидкости в трубопроводе. В **разделе 2.1** приведен обзор литературы по моделированию течений осаждающихся суспензий, гидравлическому транспорту непроницаемых твердых и пористых тел потоком жидкости. В **разделе 2.2** рассматривается стационарная модель для определения распределения частиц твердой фазы по сечению трубы, которая может использоваться в качестве эффективного замыкающего соотношения для одномерных систем уравнений законов сохранения, описывающих течение на масштабе длины трубопровода. Распределение описывается квазистационарным уравнением конвекции-диффузии для локальной концентрации частиц:

$$-\frac{\partial}{\partial y} \phi_s v_S = \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon_s \frac{\partial \phi_s}{\partial y} \right),$$

где  $y$  – координата, отсчитываемая от нижней точки сечения,  $\phi_s$  – локальная, усредненная по хорде концентрация твердой фазы,  $v_S$  – скорость стес-

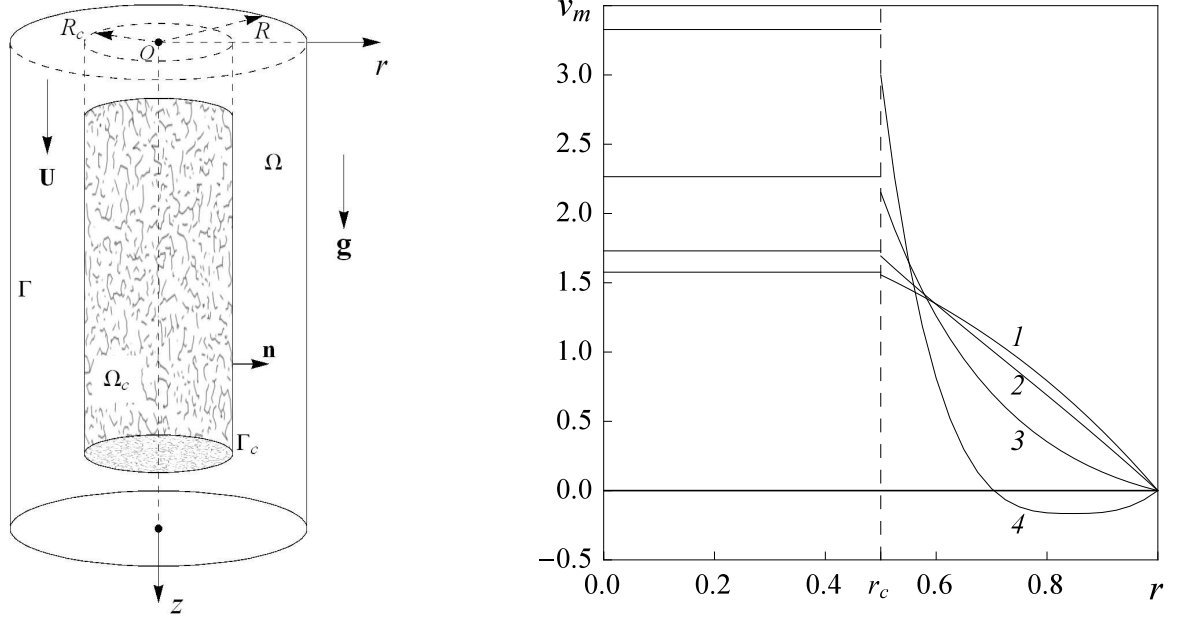


Рис. 4: Схема течения (а); распределение среднеобъемной скорости течения по сечению трубы для различных значений  $S$ , кривые (1 – 4):  $S = 1.64, 5.18, 15.57, 36.11$ .  $r_c = 0.5$ ,  $k = 10^{-3}$ ,  $\alpha = 1.0$ ,  $n = 0.5$  (б).

ненного осаждения,  $\varepsilon_s$  - коэффициент турбулентной диффузии. Предполагается, что время релаксации распределения твердой фазы по сечению много меньше характерного времени переноса на масштабе длины трубопровода. Распределение в сечении устанавливается балансом между гравитационным осаждением и турбулентным ресуспензированием. Приведено сравнение и показано хорошее совпадение расчетов по рассматриваемой модели с опубликованными в литературе замыкающими соотношениями для скорости стесненного осаждения и коэффициента турбулентной диффузии и экспериментальных данных.

**Раздел 2.3** посвящен двум задачам о гидравлическом транспорте длинных цилиндрических тел в трубах. В **подразделе 2.3.1** построена осесимметричная стационарная модель транспорта и перехода в пластическое состояние длинного пронцаемого упругого цилиндрического тела, переносимого в вертикальной трубе потоком несжимаемой вязкой жидкости со степенной зависимостью между тензорами вязких напряжений  $\boldsymbol{\tau}$  и скоростей деформации  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ :  $\boldsymbol{\tau} = K |\sqrt{2\dot{\boldsymbol{\gamma}} : \dot{\boldsymbol{\gamma}}}|^{n-1} \dot{\boldsymbol{\gamma}}$ . Течение несущей жидкости вне тела (область  $\Omega$  на **рис. 4а**) описывается уравнениями движения вязкой несжимаемой жидкости. Ядро течения (область  $\Omega_c$  на **рис. 4а**), состоящее из движущегося твердого пористого скелета и фильтрующейся через него



несущей жидкости, описывается в рамках многоконтинуального подхода при помощи уравнений фильтрации. Системы уравнений законов сохранения для двух зон течения сопрягаются на поверхности тела  $\Gamma_c$  с помощью условий, выражающих сохранение потоков массы и импульса через границу твердого скелета, непрерывность давления и условия проскальзывания Биверса-Джозефа-Саффмана для касательной компоненты скорости.

В качестве масштаба длины задачи выбирается радиус трубы  $R$ , масштаб скорости – средняя скорость течения  $U$ , определяемая полным расходом, масштаб напряжений – номинальные вязкие напряжения в несущей жидкости  $K (U/R)^n$ . В предположениях осесимметричного установившегося течения, однородности тела и при пренебрежении концевыми эффектами задача сводится к нахождению распределений скоростей, смещений и напряжений в сечении. Далее  $\phi_i, \rho_i, v_i$  обозначают объемные доли, плотности материалов и скорости фаз, индекс  $i = s$  обозначает твердую фазу, а индекс  $i = l$  – жидкость. Уравнения законов сохранения массы и импульса жидкости в зазоре в безразмерном виде в цилиндрических координатах преобразуются к виду

$$\begin{aligned}\partial_z v_l &= 0, \\ r^{-1} \partial_r (r \tau_{rz}) &= -P_z, \quad \tau_{rz} = |\partial_r v_l|^{n-1} \partial_r v_l, \\ \partial_r p &= 0,\end{aligned}$$

где  $r, z$  – поперечная и продольная координаты,  $p$  – давление, а приведенный продольный градиент давления  $P_z$ , числа Рейнольдса  $\text{Re}_0$  и Фруда  $\text{Fr}_0$  определены соотношениями

$$P_z = -\partial_z p + \frac{\text{Re}_0}{\text{Fr}_0^2}, \quad \text{Re}_0 = \frac{\rho_l U^{2-n} R^n}{K}, \quad \text{Fr}_0 = \frac{U}{\sqrt{gR}}.$$

Уравнения законов сохранения массы и импульса в жидкой и твердой фаз в ядре течения в принятых предположениях имеют вид

$$\begin{aligned}\partial_z v_i &= 0, \\ r^{-1} \partial_r (r \sigma_{rz}) &= -P_z - S, \quad W = k^{\frac{1}{n}} |P_z|^{\frac{1}{n}-1} P_z, \\ \partial_r \sigma_{rr} + r^{-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) &= 0, \quad \partial_r p = 0,\end{aligned}$$

где  $\sigma$  – приведенный тензор напряжений в твердой фазе,  $W = \phi_l (v_l - v_s)$  – скорость фильтрации,  $k$  – модифицированная проницаемость, а параметр плавучести  $S$  определен соотношением

$$S = \frac{\phi_s (\rho_s - \rho_l) g R^{n+1}}{K U^n} = \phi_s (s - 1) \frac{\text{Re}_0}{\text{Fr}_0^2}, \quad s = \frac{\rho_s}{\rho_l}.$$

На боковой поверхности тела условия непрерывности потока массы удовлетворяются тождественно, из условий непрерывности полного потока импульса и непрерывности давления следуют граничные условия для напряжений в скелете

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r_c) = \sigma_{rr}(r_c) = 0, \quad \sigma_{rz}(r_c) = \tau_{rz}(r_c),$$

где  $r_c = R_c/R$ . Условие прилипания на стенке трубы и граничное условие Биверса-Джозефа-Саффмана для касательной компоненты скорости преобразуются следующим образом

$$v_l(1) = 0, \quad v_l(r_c + 0) - \alpha^{-1} k^{\frac{1}{n+1}} \partial_r v_l(r_c + 0) = v_s + W.$$

Система уравнений замыкается условием постоянства полного расхода, имеющим вид

$$1 = 2 \int_{r_c}^1 r dr v_l + r_c^2 (v_s + W).$$

Определяющими параметрами задачи являются относительный радиус тела  $r_c$ , показатель степени в реологическом соотношении  $n$ , параметр условия проскальзывания  $\alpha$ , безразмерные проницаемость тела  $k$ , коэффициенты Ламэ скелета  $\lambda, \mu$  и параметр плавучести  $S$ , являющийся отношением равнодействующей силы тяжести и силы Архимеда к номинальной силе трения, действующей на тело, и безразмерное предельное сдвиговое напряжение скелета  $Y$ .

Выделяется замкнутая система уравнений, определяющая задачу об обтекании тела и сводящаяся к алгебраическому трансцендентному уравнению относительно приведенного градиента давления  $P_z$

$$\int_{r_c}^1 r^2 F \left( P_z r + \frac{S r_c^2}{r} \right) dr + r_c^{\frac{1}{n}+2} \alpha^{-1} k^{\frac{1}{n+1}} F(P_z + S) - 2^{\frac{1}{n}} = 0,$$

где  $F(x) = |x|^{\frac{1}{n}-1} x$ . Показано, что решение существует и единственно. Получены решения для распределения скорости жидкости в кольцевом зазоре и стационарной скорости движения капсулы

$$v_l(r) = \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} \int_r^1 F \left( P_z r' + \frac{S r_c^2}{r'} \right) dr',$$

$$v_s = v_l(r_c + 0) - \alpha^{-1} k^{\frac{1}{n+1}} \partial_r v_l(r_c + 0) - k^{\frac{1}{n}} F(P_z).$$

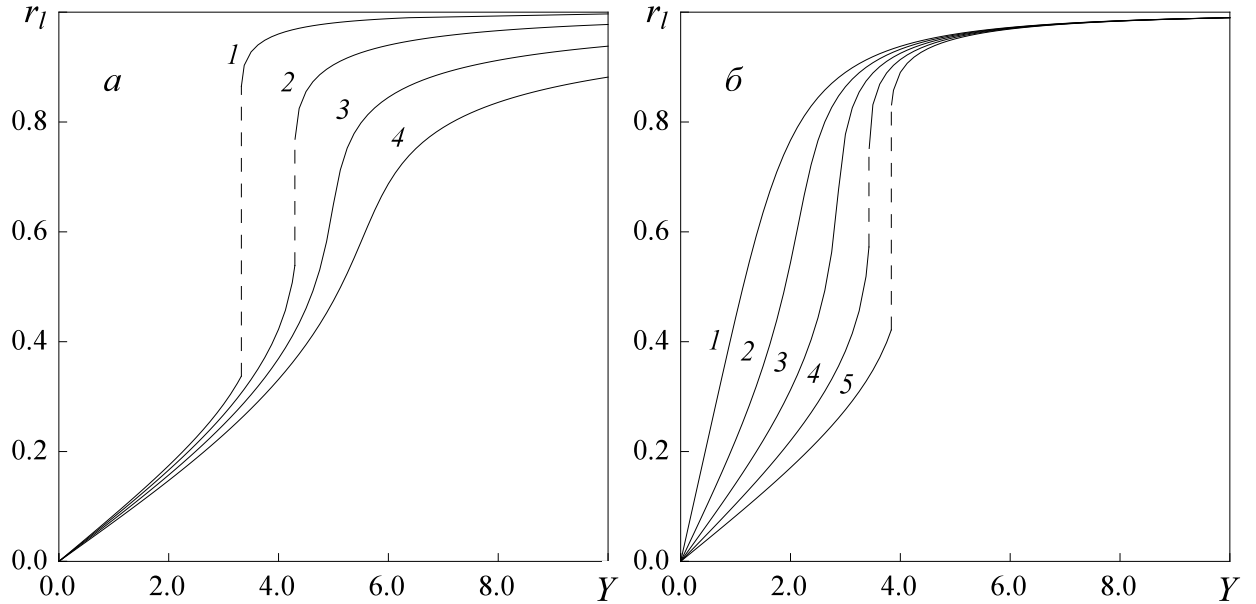


Рис. 5: Зависимость предельного радиуса тела  $r_l$  от предельного сдвигового напряжения  $Y$  при фиксированном  $S = 20.0$ , кривые (1 – 4):  $n = 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  (а); при фиксированном  $n = 0.5$ , кривые (1 – 5):  $S = 0.0, 5.0, 10.0, 15.0, 20.0$  (б).  $k = 10^{-7}, \alpha = 1.0$ .

Найдены возможные режимы течения, отличающиеся монотонностью и выпуклостью распределения скорости течения жидкости в зазоре, и установлены граничные значения параметра плавучести  $S$ , отвечающие за смену режимов. На **рис. 4б** изображены распределения среднеобъемной скорости течения  $v_m = \phi_s v_s + \phi_l v_l$  по сечению трубы для различных режимов течения. Вне тела среднеобъемная скорость совпадает со скоростью жидкости,  $v_m = v_l$  при  $r > r_c$ , на боковой поверхности тела  $r = r_c$  имеет разрыв  $[v_m] = \alpha^{-1} k^{\frac{1}{n+1}} \partial_r v_l(r_c + 0)$ .

Задача о нахождении напряжений в скелете связана с задачей об обтекании только через граничное значение напряжения на боковой поверхности тела и может быть решена после разрешения уравнений внешней задачи. Напряженное состояние скелета соответствует одноосному сдвигу

$$\sigma_{rz} = -\frac{r}{2} (P_z + S), \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 0,$$

при этом максимальное по величине напряжение достигается на боковой поверхности тела. Для некоторых значений параметров  $S$  и  $n$  зависимости модуля касательного напряжения на боковой поверхности тела  $\sigma_c(r_c)$  от безразмерного радиуса  $r_c$  немонотонны, что приводит к неединственности решения уравнения  $\sigma_c(r_c) = Y$ , определяющего предельный радиус тела  $r_l$ . В таких случаях за  $r_l$  принимается максимальный из корней, а зависи-

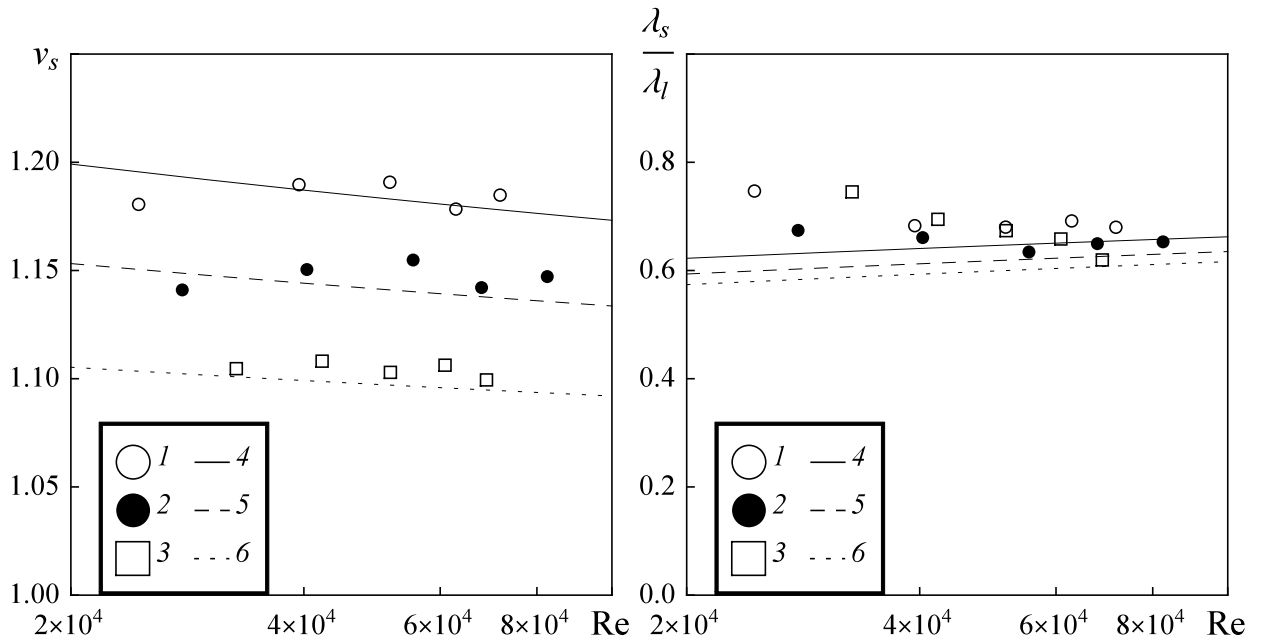


Рис. 6: Сравнение экспериментальных данных (1, 2, 3) и теоретических результатов (4, 5, 6) для капсул различных радиусов  $r_c$ : 1, 4 – 0.8, 2, 5 – 0.85, 3, 6 – 0.9. (а) – скорость движения капсулы; (б) – отношение перепадов давления на единицу длины трубы при движении капсулы и течения чистой жидкости.

мость  $r_l(Y)$  имеет разрыв. На **рис. 5** приведены зависимости предельного радиуса от безразмерного предельного сдвигового напряжения  $Y$ .

В **подразделе 2.2.3** приведено обобщение полуаналитической модели для концентрического транспорта нейтрально-плавучей капсулы в ньютоновской жидкости и турбулентном режиме течения в зазоре на случай произвольно высоких чисел Рейнольдса. В рамках известного в литературе подхода, предполагающего постулирование распределения средней по времени скорости течения жидкости в кольцевом зазоре между капсулой и стенкой трубы, используется универсальный логарифмический профиль скорости. Приводится сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными [6] для скорости движения и перепадов давления при транспорте нейтрально-плавучих капсул различных относительных радиусов  $r_c$  при различных числах Рейнольдса  $Re$  (**рис. 6**). Сравнение показывает хорошее совпадение скорости движения капсулы и некоторое расхождение для перепадов давления. Расхождение на **рис. 6б** может быть объяснено тем, что для относительно небольших чисел Рейнольдса отклонение действительного профиля скорости от универсального логарифмического оказывается значительным.

В **Заключении** к диссертации подведены итоги работы и указаны ее

основные результаты.

В **Приложения** вынесены описание замыкающих соотношений модели дрейфа, используемых в **разделах 1.2** и **1.3** и аналитические решения построенные для верификации численной реализации.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. В терминах безразмерных определяющих параметров получены условия, при которых модель дрейфа для задачи о пузырьковом режиме течения газо-жидкостной смеси в длинной трубе в классической формулировке и формулировке с уравнением закона сохранения импульса смеси в терминах среднеобъемной скорости следует из законов сохранения. В предположении справедливости полученных в работе условий модель дрейфа в двух формулировках получена как асимптотический предел уравнений законов сохранения, записанных в многоконтинуальном приближении.
2. Установлено необходимое условие гиперболичности системы уравнений модели дрейфа в классической формулировке с предложенными в работе модельными замыкающими соотношениями, обеспечивающими корректное вырождение системы к уравнениям одномерного движения сжимаемого газа. Показано, что при малых числах Маха полученное условие является достаточным. Для системы уравнений модели дрейфа в формулировке с уравнением закона сохранения импульса смеси в терминах среднеобъемной скорости и произвольными замыкающими соотношениями показана безусловная гиперболичность и получены явные выражения для характеристических скоростей.
3. Разработаны и реализованы численный алгоритм и комплекс программ для решения уравнений модели дрейфа. Проведено численное исследование пробкового режима течения, вызванного сложной геометрией трубопровода. Предложен способ обобщения эмпирических замыкающих соотношений модели дрейфа. Получены значения настроечных параметров замыкающих соотношений модели дрейфа, обеспечивающие предсказание результатов лабораторных экспериментов по пробковому режиму течения с точностью приемлемой для характерных задач нефтегазовой промышленности.
4. Построена осесимметричная стационарная модель транспорта и пере-

хода в пластическое состояние длинного твердого пористого проницаемого тела, переносимого потоком несжимаемой жидкости со степенной реологией в вертикальной трубе. Проведена классификация и определены границы возможных режимов течения в терминах безразмерных определяющих параметров. Исследована зависимость предельного радиуса тела, при котором твердый скелет остается в упругом состоянии, от определяющих параметров задачи. Проведено обобщение модели осесимметричного стационарного транспорта непроницаемого нейтрально-плавучего тела ньютоновской жидкостью в турбулентном режиме течения в зазоре на случай произвольно высоких чисел Рейнольдса.

### ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Осипцов А.А., Синьков К.Ф., Спесивцев П.Е.* Обоснование модели дрейфа для двухфазных течений в круглой трубе // Изв. РАН. МЖГ. — 2014. — № 5. — С. 60–73.
2. *Жибаедов В.Д., Лебедева Н.А., Осипцов А.А., Синьков К.Ф.* О гиперболичности одномерных моделей нестационарного двухфазного течения в трубопроводе // Изв. РАН. МЖГ. — 2016. — № 1. — С. 55–68.
3. *Синьков К.Ф., Спесивцев П.Е.* Характеристический анализ одномерных уравнений модели дрейфа для двухфазных течений в канале // Труды 54-й научной конференции МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук». — Т. Аэрофизика и космические исследования. — 2011. — С. 100–102.
4. *Синьков К.Ф., Спесивцев П.Е.* Описание сегрегации несжимаемых жидкостей в закрытой трубе с помощью модели дрейфа // Труды 55-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». — Т. Аэрофизика и космические исследования. — Т. 2. — 2012. — С. 90–92.
5. *Spesivtsev P., Sinkov K., Osiptsov A.* Modeling of wellbore phase segregation during shut-in using the drift-flux model // 8<sup>th</sup> International Conference on Multiphase Flow. — Jeju, Korea: 2013. — May 26 – June 1.

6. *Spesivtsev P., Sinkov K., Osiptsov A.* Comparison of drift-flux and multi-fluid approaches to modeling of multiphase flow in oil and gas wells // 7<sup>th</sup> International Conference on Computational and Experimental Methods in Multiphase and Complex Flow. — A Coruña, Spain: 2013. — July 3–5. — Pp. 89–100.
7. *Синьков К.Ф., Спесивцев П.Е., Осипцов А.А.* Моделирование пробкового режима двухфазного течения, вызванного геометрией трубопровода // «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность». — г. Звенигород, МО: 2014. — 25 февраля – 4 марта. — С. 222–225.
8. *Синьков К.Ф., Спесивцев П.Е., Осипцов А.А.* Развитие модели течения суспензии в трубопроводах с учетом образования осадка // XVII школа-семинар «Современные проблемы аэрогидродинамики». — г. Сочи, пансионат «Буревестник» МГУ им. М. В. Ломоносова: 2014. — 20 – 30 августа. — С. 100–101.
9. *Spesivtsev P., Sinkov K., Osiptsov A.A.* The Hyperbolic Nature of a System of Equations Describing Three-phase Flows in Wellbores // 14<sup>th</sup> European conference on the mathematics of oil recovery. — Catania, Italy: 2014. — September 8 – 11.
10. *Sinkov K. F., Spesivtsev P. E., Osiptsov A.A.* Simulation of particles transport in multiphase pipe flow for cleanup of oil and gas wells // 19<sup>th</sup> International Conference on Hydrotransport / BHR Group. — Golden, Colorado, USA: 2014. — September 24 – 26. — Pp. 5–16.
11. *Лебедева Н. А., Жубаедов В. Д., Синьков К.Ф.* Исследование гиперболичности одномерных нестационарных моделей газожидкостных течений в трубопроводе // VII международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике». — Новосибирск: 2015. — 7 – 11 сентября. — С. 135.
12. *Синьков К.Ф., Лебедева Н. А.* Модель гидравлического транспорта и разрушения длинной капсулы в трубе // 5-я Всероссийская научная конференция «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» — Москва: 2015. — 15 – 17 декабря. — С. 414–416.

13. *Sinkov K., Kharlashkin A., Spesivtsev P.* Modeling of the transient terrain-induced and severe slugging problems using the drift-flux model // 9<sup>th</sup> International Conference on Multiphase Flow — Firenze, Italy: 2016. — May 22 – 27. — P. 87.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нугматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 2. — М.: Наука, 1987. — 360 с.
2. *Zuber N., Findlay J.A.* Average volumetric concentration in two-phase flow systems // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. — 1965. — V. 87. — № 4. — P. 453–468.
3. *Hasan A.R., Kabir C.S.* Fluid flow and heat transfer in wellbores. — Richardson, Texas: Society of Petroleum Engineers, 2002. — 181 p.
4. Drift-Flux Modeling of Multiphase Flow in Wellbores / H. Shi, J. A. Holmes, L. J. Durlofsky et al. // SPE Journal. — 2005. — V. 10. — № 1. — P. 24–33.
5. *De Henau V., Raithby G.D.* A study of terrain-induced slugging in two-phase flow pipelines // Int. J. Multiphase Flow. — 1995. — V. 21. — № 3. — P. 365–379.
6. *Van den Kroonenberg H. H.* A mathematical model for concentric horizontal capsule transport // Canad. J. Chem. Eng. — 1978. — V. 56. — № 5. — P. 538–543.