

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

---

На правах рукописи  
УДК 532.529.5, 532.542

**Синьков Константин Федорович**

**РАЗВИТИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
МНОГОФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТРУБОПРОВОДАХ**

*Специальность 01.02.05 —  
«Механика жидкости, газа и плазмы»*

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., с.н.с.  
Спесивцев П.Е.

Москва — 2016

# Оглавление

Введение . . . . .	4
<b>1 Модель дрейфа для нестационарных газожидкостных течений в трубопроводе . . . . .</b>	<b>11</b>
1.1 Обзор литературы . . . . .	11
1.2 Модель дрейфа . . . . .	21
1.2.1 Обоснование модели дрейфа . . . . .	21
1.2.2 Гиперболичность модели дрейфа . . . . .	33
1.3 Численная реализация и верификация . . . . .	41
1.3.1 Восстановление давления при закрытии скважины. . . . .	44
1.3.2 Гравитационная сегрегация. . . . .	45
1.4 Приложение модели дрейфа к описанию пробкового режима течения, вызванного сложной геометрией трубопровода . . . . .	47
1.4.1 Описание эксперимента . . . . .	47
1.4.2 Сеточная сходимость и настройка замыкающих соотношений	49
1.4.3 Результаты . . . . .	52
<b>2 Модели переноса твердой фазы в трубопроводах . . . . .</b>	<b>59</b>
2.1 Обзор литературы . . . . .	59
2.2 Модель образования осадка при течении суспензии . . . . .	66
2.3 Гидравлический транспорт твердых тел в трубе . . . . .	70
2.3.1 Транспорт пористого проницаемого тела жидкостью со степенной реологией в вертикальной трубе . . . . .	70
2.3.2 Транспорт нейтрально-плавучей капсулы турбулентным потоком ньютоновской жидкости . . . . .	88

Заключение . . . . .	91
Литература . . . . .	96
Список иллюстраций . . . . .	110
Список таблиц . . . . .	112
А Замыкающие соотношения модели дрейфа . . . . .	113
В Аналитические решения . . . . .	118
В.1 Задача о восстановлении давления . . . . .	118
В.2 Задача о сегрегации . . . . .	123

# Введение

**Актуальность темы.** В данной работе рассматривается проблема моделирования многофазных течений в длинных трубопроводах и скважинах. Интерес к развитию математических моделей многофазных течений в трубах обусловлен широким распространением такого рода течений в ядерной энергетике, химическом производстве, угольной и нефтегазовой промышленности.

В нефтегазовой промышленности газожидкостные течения в трубопроводах имеют место при добыче и транспортировке углеводородов. Течение может быть многофазным как во всей системе, если происходит приток нескольких пластовых жидкостей и газа в скважину, так и в некоторой ее части, если в стволе скважины происходит дегазация и растворенный в нефти газ выходит в свободное состояние. Многие ключевые особенности в измерениях расходов и давлений, наблюдаемые на практике, объясняются явлениями характерными именно для многофазных течений. Корректное математическое описание явлений, сопровождающих газожидкостные течения в трубах, необходимо для планирования гидродинамических исследований скважин, интерпретации полученных результатов, а также при проектировании скважин и трубопроводов. Данные процессы зачастую носят существенно нестационарный характер и плохо поддаются аналитическому исследованию.

Практический интерес представляют задачи не только о газожидкостных течениях в трубах, но и двухфазные течения жидкость-твердые частицы и жидкость-капсулы. В нефтегазовых приложениях перенос твердых примесей потоком жидкости имеет место при бурении скважин (вынос обломков породы), установке гравийных фильтров, гидроразрыве пласта, выносе пропантанта из трещины гидроразрыва. Этапом многих технологических процессов явля-

ется перемещение в трубах различных пористых агрегатов. К примеру, для целлюлозно-бумажной промышленности представляют интерес задачи, связанные с движением волокнистых суспензий. Волокнистые суспензии могут быть использованы в качестве несущей среды при транспортировании гранулированных материалов. Гидравлический транспорт твердых и жидких материалов, заключенных в проницаемую или непроницаемую оболочку, переносимую потоком жидкости, также может быть использован для перемещения различного сырья по трубопроводам.

Развитие моделей многофазных течений является важной фундаментальной задачей. В частности, актуальной проблемой является построение замкнутых самосогласованных одномерных нестационарных моделей газожидкостных течений в скважинах и трубопроводах. Несмотря на большое число различных прикладных задач, до сих пор отсутствует общепринятая модель, описывающая подобные течения. Актуальными также являются вопросы строгого обоснования таких моделей и их вывода из первых принципов, а также определение границ их применимости. С другой стороны, подобные модели могут быть расширены и модифицированы для приложения к более широкому кругу практических задач. Модели гидравлического транспорта капсул и движения пористых тел в трубах, представленные в литературе, также имеют ряд ограничений, обусловленных используемой реологической моделью для несущей жидкости и отсутствием в моделях эффектов плавучести.

### **Цели работы:**

- Установление границ применимости модели дрейфа для двухфазных течений в трубе в двух формулировках и ее связи с многожидкостной моделью.
- Определение корректной постановки начально-краевой задачи для системы уравнений модели дрейфа, установление критериев гиперболичности и требований к замыкающим соотношениям модели дрейфа.
- Разработка и программная реализация алгоритма численного решения системы уравнений модели дрейфа. Построение аналитических решений для

проверки корректности численной реализации. Сравнение численных результатов с аналитическими.

- Исследование пробкового режима течения, вызванного сложной геометрией трубопровода. Развитие модели дрейфа для предсказания результатов лабораторных экспериментов по пробковому режиму течения. Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными.
- Построение модели гидравлического транспорта твердого проницаемого тела жидкостью неньютоновской реологии с учетом эффекта плавучести в ламинарном режиме течения. Исследование возможности перехода тела из упругого в пластическое состояние при гидравлическом транспорте.

**Научная новизна.** На защиту выносятся следующие новые результаты, полученные в диссертации:

1. Условия, сформулированные в терминах безразмерных определяющих параметров, при которых модель дрейфа для задачи о пузырьковом режиме течения газожидкостной смеси в длинной трубе в классической формулировке и формулировке с уравнением закона сохранения импульса смеси в терминах среднеобъемной скорости следует из законов сохранения. Модель дрейфа в двух формулировках как асимптотический предел уравнений законов сохранения, записанных в многоконтинуальном приближении.
2. Необходимое условие гиперболичности системы уравнений модели дрейфа в классической формулировке с модельными замыкающими соотношениями, обеспечивающими корректное вырождение системы к уравнениям одномерного движения сжимаемого газа. Достаточность полученного условия гиперболичности при малых числах Маха. Безусловная гиперболичность и явные выражения для характеристических скоростей системы уравнений модели дрейфа в формулировке с уравнением закона сохранения импульса в терминах среднеобъемной скорости смеси.
3. Результаты исследования пробкового режима течения, вызванного сложной геометрией трубопровода. Способ обобщения и значения настроечных

параметров эмпирических замыкающих соотношений модели дрейфа обеспечивающие предсказание результатов лабораторных экспериментов по пробковому режиму газожидкостного течения, вызванному сложной геометрией трубопровода, с точностью приемлемой для характерных задач нефтегазовой промышленности.

4. Осесимметричная стационарная модель транспорта и перехода в пластическое состояние длинного упругого пористого пронцаемого тела, переносимого потоком несжимаемой жидкости со степенной реологией в вертикальной трубе. Классификация и границы возможных режимов течения в терминах безразмерных определяющих параметров задачи. Зависимость предельного радиуса тела, при котором скелет остается в упругом состоянии, от определяющих параметров задачи.

**Практическая значимость.** Практическая значимость работы обусловлена широким спектром приложений одномерных моделей многофазных течений в скважинах и длинных трубопроводах. Установленные границы применимости модели дрейфа, широко внедренной в коммерческие симуляторы многофазных течений для нефтегазовых приложений, обоснованные требования к эмпирическим замыкающим соотношениям и предложенное обобщение замыкающих соотношений модели могут быть использованы для развития и улучшения этих программных продуктов. Разработанный комплекс программ для решения уравнений модели дрейфа может быть использован при планировании и проведении различных технологических операций в нефтегазовой промышленности, например гидродинамических исследований и очистки скважин. При помощи моделирования могут быть определены оптимальные стратегии проведения этих операций и проведена интерпретация результатов полевых измерений. Построенная модель гидравлического транспорта цилиндрических тел в трубе может быть использована для определения перепадов давления, скорости движения и необходимых прочностных характеристик тел при транспортировке различных материалов в скважинах и трубопроводах.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на следующих конференциях: 54-я научная конференция МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук» (Москва, 2011); 55-я научная конференция МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук» (Москва, 2012); 8<sup>th</sup> International Conference on Multiphase Flow (Jeju, Korea, 2013); 7<sup>th</sup> International Conference on Computational and Experimental Methods in Multiphase and Complex Flow (A Coruña, Spain, 2013); международная конференция «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» (Звенигород, 2014); XVII школа-семинар, посвященная памяти академика Г. Г. Черного и 55-летию НИИ механики МГУ «Современные проблемы аэрогидродинамики» (Сочи, 2014); 14<sup>th</sup> European Conference of Mathematics of Oil Recovery (Catania, Italy, 2014); 19<sup>th</sup> International Conference on Hydrotransport (Golden, Colorado, USA, 2014); конференция-конкурс молодых ученых НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова (Москва, 2014); VII международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2015); 5-я Всероссийская научная конференция «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» (Москва, 2015); 9<sup>th</sup> International Conference on Multiphase Flow (Firenze, Italy, 2016).

Постановки задач и результаты работы обсуждались на семинарах в Московском научно-исследовательском центре компании Шлюмберже (2011–2016); семинарах лаборатории механики многофазных сред НИИ механики МГУ под руководством проф. А. Н. Осипцова (2014–2016); семинаре по прикладной механике сплошных сред Института проблем механики РАН под руководством А. Н. Рожкова (2016); семинаре по механике сплошных сред НИИ механики МГУ под руководством акад. РАН А. Г. Куликовского, проф. В. П. Карликова и члена-корр. РАН О. Э. Мельника (2016); научно-исследовательском семинаре кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ под руководством акад. РАН Р. И. Нигматулина и проф. Н. Н. Смирнова (2016).



За результаты, изложенные в диссертации, автор был награжден дипломом победителя конкурса научно-исследовательских работ студентов и аспирантов 55-й научной конференции МФТИ. За совместную с П. Е. Спесивцевым, Н. А. Лебедевой и А. А. Осипцовым работу, результаты которой также частично изложены в диссертации, автор был удостоен звания победителя и приза им. К. Шлюмберже за техническую глубину на ежегодном симпозиуме компании Шлюмберже (Кембридж, Массачусетс, США, 2014).

**Публикации.** Основные результаты работы опубликованы в 13 печатных работах, из них 2 в журналах из перечня ВАК [1, 2], 4 в сборниках трудов международных и российских конференций [3–6], 7 в сборниках тезисов [7–13].

**Личный вклад автора и достоверность результатов.** В диссертации приведены результаты полученные автором лично или при его непосредственном участии. Автор участвовал в формулировке постановок задач, обсуждении результатов и подготовке публикаций по результатам работы. Автором разработаны и реализованы оригинальные численные алгоритмы решения сформулированных в работе задач, проведены расчеты, выполнена обработка результатов и подготовлены графические и табличные материалы, представленные в диссертации. Положения, выносимые на защиту, получены лично соискателем. Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием апробированных методов исследования и классических моделей механики сплошной среды, аналитическим характером полученных результатов, сравнением результатов с экспериментальными данными, совпадением результатов исследования в частных случаях с известными в литературе решениями, тщательным контролем сходимости и сравнением численных решений с аналитическими.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность научному руководителю к.ф.-м.н. П. Е. Спесивцеву, А. Д. Харлашкину, коллективу Московского научно-исследовательского центра компании Шлюмберже. Автор глубоко признателен лично А. А. Осипцову и Н. А. Лебедевой за плодотворное сотрудничество и поддержку работы.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 2 глав, заключения и 2 приложений. Полный объем диссертации составляет 130 страниц с 25 рисунками и 7 таблицами. Список литературы содержит 129 наименований.

# Глава 1

## Модель дрейфа для нестационарных газожидкостных течений в трубопроводе

Настоящая глава посвящена нестационарным газожидкостным течениям в трубопроводах и организована следующим образом. В разделе 1.1 формулируются системы, являющиеся предметом исследования, и приводится обзор литературы и известных результатов по рассматриваемым вопросам. Раздел 1.2 включает результаты аналитических исследований модели дрейфа. В подразделе 1.2.1 приведена постановка и решение задачи о выводе уравнений модели дрейфа из законов сохранения и установлении границ ее применимости. В подразделе 1.2.2 исследуются характеристические свойства систем уравнений модели дрейфа. В разделе 1.3 кратко описывается используемый в работе алгоритм численного решения системы уравнений модели дрейфа и приводится сравнение результатов численных расчетов с аналитическими решениями. В разделе 1.4 рассматривается задача о пробковом режиме газожидкостного течения, вызванном сложной геометрией трубопровода.

### 1.1 Обзор литературы

Интерес к моделированию многофазных течений в трубах обусловлен промышленными приложениями, в частности, необходимостью контролировать системы охлаждения ядерных реакторов, а также транспортировку жидкостей и газов в нефтяных и газовых скважинах и трубопроводах. В нефтегазовой ин-

дустрии при изучении многофазных течений в трубе наибольшее распространение получили два подхода [14]: многожидкостная модель и модель дрейфа. Системы уравнений обеих моделей содержат осредненные по поперечному сечению трубы законы сохранения, дополненные рядом упрощающих предположений. С точки зрения фундаментальных исследований, представляет интерес вопрос о связи между многожидкостной моделью и упрощенной моделью дрейфа, и о границах применимости последней. Для замыкания систем уравнений многожидкостной модели и модели дрейфа используется ряд дополнительных соотношений, которые приводят к тому, что система теряет гиперболичность и математическая постановка начально-краевой задачи становится некорректной. В этом случае модель перестает описывать реальное физическое явление, а в численном решении наблюдается нефизическая неустойчивость [15]. Таким образом, актуальным является поиск критериев гиперболичности существующих систем уравнений, а также построение новых безусловно гиперболических моделей двухфазного течения. Развитие таких подходов, в частности, необходимо для создания промышленных симуляторов одномерных многофазных нестационарных течений [16].

Разработка многожидкостной модели [17] для многофазных течений в трубах и скважинах, которая построена в рамках многоконтинуального подхода, где совместное течение фаз описывается уравнениями законов сохранения массы и импульса для каждой фазы [16, 18] началась в конце 1960-х годов. Модели на основе многожидкостного подхода внедрены в коммерческие симуляторы, например, OLGA (SPT Group, Schlumberger), LedaFlow (Kongsberg) и MAST (TEA Sistemi). В рамках многоконтинуального подхода [19] осредненные по сечению длинной трубы ( $d \ll L$ , см. Рис. 1.1) одномерные нестационарные уравнения законов сохранения массы и импульса для каждой из фаз, дополненные

соотношением на объёмные доли и уравнениями состояния фаз, имеют вид [14]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_i \rho_i v_i) = 0 \quad i = l, g \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i v_i) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_i \rho_i v_i^2) = -\alpha_i \frac{\partial p}{\partial z} + \alpha_i \rho_i g \cos \theta + F_i^p + F_i^T \quad (1.2)$$

$$\alpha_l + \alpha_g = 1 \quad (1.3)$$

$$\rho_i = \rho_i(p) \quad (1.4)$$

Здесь  $z$  — координата вдоль трубы;  $t$  — время; индексы  $l, g$  относятся к жидкой и газовой фазам соответственно;  $\alpha_i, \rho_i, v_i$  — осредненные значения объёмных долей, плотностей и скоростей фаз;  $p$  — осредненное давление, которое предполагается одинаковым в обеих фазах;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\theta$  — угол наклона трубы к вектору силы тяжести,  $F_i^p$  — силы межфазного взаимодействия за счёт давления (далее, межфазные силы давления) для  $i$ -й фазы,  $F_i^T$  — силы трения, включающие в себя силы межфазного трения и трения о стенку.

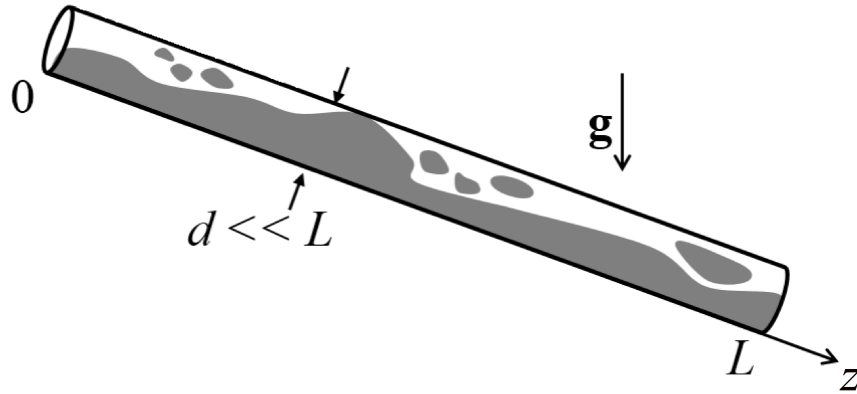


Рис. 1.1: Схема двухфазного течения в трубопроводе.

Несмотря на десятилетия исследований, проблема потери гиперболичности многожидкостной модели остается нерешенной [20]. Частым предположением для её замыкания является удобное с практической точки зрения условие равенства давлений в фазах. Однако, такое упрощение существенно ограничивает область гиперболичности модели [14, 19, 21]. Известны работы, в которых предлагаются различные модификации классической двухжидкостной модели с одним давлением, позволяющие сделать систему уравнений гиперболической для

широкого диапазона определяющих параметров (см., например, [20, 22–24]). Тем не менее, до сих пор отсутствует общепринятая формулировка системы определяющих уравнений для двухжидкостной модели.

Предположение о равенстве средних давлений в фазах может нарушаться из-за капиллярных эффектов или быстро протекающих процессов, когда играет роль движение фаз на масштабе диаметра трубы [19]. Отметим, что активно развивается класс безусловно гиперболических моделей, построенных в предположении о различных давлениях в фазах [25–27]. Однако, эти модели содержат большее число уравнений и требуют дополнительных замыкающих соотношений, поэтому пока не используются для создания промышленных симуляторов газожидкостных трубных течений.

Во многих инженерных приложениях для замыкания системы предполагается, что  $F_i^p = 0$ .  $F_i^T$  задаются как алгебраические функции параметров  $\alpha_i$ ,  $\rho_i$ ,  $v_i$ , аппроксимирующие экспериментальные измерения трения для различных режимов течения (см. например, [14, 18, 28]). При этом в зависимости от режима течения используются различные формы замыканий для  $F_i^T$ .

В рамках сформулированных предположений система вида (1.1)-(1.4) оказывается негиперболической [19, 21, 29, 30], а её стационарное однородное решение неустойчивым [15].

Модель дрейфа, впервые предложенная в литературе в 1960-х годах [31–33], включает два уравнения закона сохранения массы для газовой и жидкой фазы, а также одно уравнение закона сохранения импульса для смеси и алгебраическое соотношение, связывающее скорости фаз через скорость дрейфа. Одномерные модели, построенные на основе данного подхода для течений в длинных трубах, широко внедрены в коммерческие симуляторы многофазных течений для нефтегазовых приложений, например, PIPESIM, ECLIPSE (Schlumberger) и др. Варианты модели дрейфа также используются при описании течения суспензии из осаждающихся частиц, где скорость частиц связана со среднеобъемной скоростью суспензии через алгебраическое соотношение с учетом скорости осаждения. Например, в [34] модель дрейфа была построена для двумерной гра-

витационной конвекции суспензии в сосуде с наклонными стенками. В [35] и [36] асимптотическая модель течения суспензии в трещине гидроразрыва была выведена из полных законов сохранения, записанных в рамках многожидкостного подхода. Было показано, что в диапазоне параметров, представляющем интерес для нефтесервисных приложений, модель дрейфа применима для течения осаждающейся суспензии в трещине гидроразрыва.

Осредненные по сечению трубы уравнения законов сохранения массы фаз в предположении отсутствия источников и постоянной площади сечения для модели дрейфа имеют тот же вид, что и для многожидкостной модели (1.1).

Алгебраическое соотношение, связывающее скорости фаз, часто записывается в виде [32]

$$v_g = C_0 v_m + v_d \quad (1.5)$$

где  $v_m = \alpha_g v_g + \alpha_l v_l$  – среднеобъемная скорость смеси,  $C_0 = C_0(\alpha_g, v_m, p)$  – параметр профиля, учитывающий распределения объемной доли газа и скоростей по сечению трубы,  $v_d = v_d(\alpha_g, v_m, p)$  – скорость дрейфа. Также связь может задаваться в виде закона проскальзывания [37]

$$v_g - v_l = \Phi(\alpha_g, v_g, p) \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6), дополненное определением среднеобъемной скорости смеси, приводится к виду (1.5). Предполагается, что система дифференциальных уравнений модели дрейфа дополнена алгебраической связью скоростей в форме (1.5), а параметр профиля  $C_0$  и скорость дрейфа  $v_d$  считаются заданными функциями переменных  $\alpha_g$ ,  $v_m$  и  $p$ . Скорости фаз в таком случае оказываются функциями тех же переменных. На замыкающее соотношение (1.5) накладываются дополнительные физические ограничения. Поскольку при чистом газовом течении эффекты неоднородного распределения объемной доли и скорости по сечению и выталкивания отсутствуют, ожидается

$$C_0(1, v_m, p) = 1, \quad v_d(1, v_m, p) = 0 \quad (1.7)$$

В литературе известны различные формулировки уравнения закона сохранения импульса смеси. В формулировке [37] данное уравнение получено суммированием уравнений законов сохранения импульса многожидкостной модели (1.2) для каждой из фаз

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_g \rho_g v_g + \alpha_l \rho_l v_l) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_g \rho_g v_g^2 + \alpha_l \rho_l v_l^2 + p) = Q_l + Q_g \quad (1.8)$$

где  $Q_i$  – алгебраические источниковые члены для каждой из фаз.

В модели [38], внедренной в квазистационарном варианте, в частности, в коммерческий симулятор пластовых течений ECLIPSE (Schlumberger) для описания течения в скважине, уравнение на импульс смеси записывается в неконсервативном виде и в терминах среднеобъемной скорости смеси. Квазистационарный вариант уравнения закона сохранения импульса, в котором производной скорости по времени пренебрегается, или вариант без производной по времени и конвективных членов в уравнении сохранения импульса смеси широко распространены в приложениях. Последняя модификация в литературе называется моделью без волн давления, так как она не учитывает распространение быстрых волн давления, а описывает распространение возмущений со скоростью массопереноса [39]. Общий перепад давления при этом выражается как сумма членов, отвечающих силе тяжести, трению и, в квазистационарном случае, ускорению [38]. В данной работе используется следующая форма уравнения на импульс смеси

$$\epsilon_1 \rho_m \frac{\partial v_m}{\partial t} + \epsilon_2 \rho_m v_m \frac{\partial v_m}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \rho_m g \cos \theta - \frac{2f \rho_m v_m |v_m|}{d} \quad (1.9)$$

где  $\rho_m = \alpha_l \rho_l + \alpha_g \rho_g$  – плотность смеси,  $f = f(\alpha_g, v_m, p)$  – коэффициент трения,  $d$  – диаметр трубы,  $\theta$  – угол между осью трубы и вертикалью. Коэффициенты  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , принимающие значения 0 и 1 введены для рассмотрения различных вариантов модели.

Системы уравнений (1.1), (1.8) и (1.1), (1.9), дополненные тождеством (1.3), соотношениями для скоростей фаз и зависимостями (1.4), являются замкнуты-



ми системами трех дифференциальных уравнений относительно трех искомых функций  $\alpha_g(x, t)$ ,  $v_m(x, t)$  и  $p(x, t)$ .

Характеристические свойства систем (1.1), (1.8) и (1.1), (1.9) в общем случае определяются, в том числе, формой соотношения (1.5). Выполнение приведенного выше условия (1.7) обеспечивает вырождение обеих систем к уравнениям одномерного движения сжимаемого газа при  $\alpha_g = 1$ .

Для формулировки модели дрейфа (1.1), (1.8) далее будет использоваться название классическая. Формулировка (1.1), (1.9) с уравнением закона сохранения импульса смеси в терминах среднеобъемной скорости для краткости далее обозначается как формулировка ECLIPSE.

Свойства системы уравнений модели дрейфа в классической формулировке исследовались многими авторами (см., например, [37, 40–42]). Характеристическое уравнение системы имеет третий порядок, может быть выписано явно и формально разрешено. Однако, результирующие выражения для корней непригодны для интерпретации, и простой достаточно общий критерий гиперболичности неизвестен. Для исследования обычно привлекаются дополнительные предположения, и анализируется система в упрощенном виде.

В работах [40–42] использовались предположения о постоянстве  $C_0$  и  $v_d$ , а также о несжимаемости жидкости. В [40, 41] при использовании дополнительных предположений пренебрежимости слагаемых отвечающих газовой фазе по сравнению с соответствующими слагаемыми для жидкой фазы в (1.8) и справедливости закона идеального газа для  $\rho_g(p)$  получены явные выражения для характеристических скоростей

$$\lambda_1 = v_g, \quad \lambda_{2,3} = v_l \pm \sqrt{\frac{p}{\alpha_g \rho_l (1 - \alpha_g C_0)}} \quad (1.10)$$

Из (1.10) следует условие гиперболичности исследуемой системы

$$\alpha_g C_0 < 1 \quad (1.11)$$

Авторы [42], используя ранее полученные дополнительно ограничения, привели систему к эквивалентному виду в лагранжевых координатах, причем од-

но из уравнений принимает форму уравнения переноса. При дополнительных предположениях  $v_d = 0$  и  $Q_g + Q_l = 0$  там же получено, что система (1.1), (1.8) подобна одномерной системе уравнений газовой динамики в лагранжевых координатах, и вычислены ее характеристические скорости.

В [37] для класса замыкающих соотношений (1.5), ограниченного дифференциальным условием на скорость проскальзывания и включающего в себя случай постоянных  $C_0$  и  $v_d$ , получены первые члены разложения характеристических скоростей рассматриваемой системы по степеням малых параметров, имеющих смысл сжимаемости жидкости, числа Маха по скоростям проскальзывания и скорости звука в жидкости и отношения плотностей газа и жидкости.

Отметим, что рассматриваемая в [40–42] алгебраическая связь скоростей с  $C_0 = const \neq 1$  и  $v_d = const \neq 0$  не обеспечивает вырождения системы (1.1), (1.8) к уравнениям однофазного течения при  $\alpha_g = 1$ . Условие гиперболичности (1.11) также нарушается при достаточно высоких объемных долях газа. В [43] из физических соображений также показано, что нарушение условия (1.11) приводит к некорректному поведению системы: из выражения для поверхностной плотности расхода жидкости  $\alpha_l v_l = (1 - \alpha_g C_0) v_m - \alpha_g v_d$  следует, что при  $\alpha_g C_0 \geq 1$  расход жидкости отрицателен для любого, сколь угодно большого, положительного объемного расхода смеси.

Модель дрейфа имеет некоторые преимущества и недостатки по сравнению с различными вариациями многожидкостной модели. В первую очередь, предположения необходимые для вывода модели дрейфа из законов сохранения накладывают серьезные ограничения на область ее применимости. Предсказательные возможности модели дрейфа напрямую определяются замыкающими соотношениями для зависимости скорости одной из фаз от среднеобъемной скорости смеси, локальных объемных долей и давления. Функциональный вид замыкающих соотношений обычно постулируется на основе модельных предположений. Затем, ограниченное число свободных настроечных параметров устанавливаются путем минимизации средней ошибки предсказаний модели относительно большого набора экспериментальных данных [44–46]. Таким образом ограниче-

ния на применимости модели накладываются не только справедливостью предположений, использующихся при задании функционального вида замыканий, но и полнотой набора экспериментов, на котором модель была откалибрована. В частности, вариант замыкающих соотношений, используемый в данной работе [44], не откалиброван для горизонтальных и нисходящих течений.

С другой стороны, модель дрейфа с единственным уравнением закона сохранения импульса смеси, в отличие от многожидкостной модели, система уравнений которой может содержать два или три уравнения сохранения импульса для каждой из фаз с обменными членами [16, 47], оказывается менее требовательной к вычислительным ресурсам.

Правильный выбор функциональной формы замыкающих соотношений, удовлетворяющей некоторым физическим ограничениям, позволяет избежать проблем, связанных с вырождением системы уравнений при объемной доле одной из фаз, стремящейся к нулю. Тесная связь области применимости замыкающих соотношений с набором экспериментов, на которых они были откалиброваны может быть использована при решении практических задач. Ограниченное число настроечных параметров позволяет рассчитывать, что после настройки модели на полевых данных для одной скважины она может быть применена в предсказательных целях для разработки скважин аналогичной геометрии при схожих свойствах и расходах фаз.

Важный класс практических задач, связанный с описанием нестационарных газожидкостных течений в длинных трубопроводах и рассматриваемый в данной работе, относится к описанию пробкового режима течения, вызванного сложной геометрией трубопровода. Пробковый режим газожидкостного течения, характеризуемый значительными осцилляциями давлений и расходов в системе, может иметь место даже в случае постоянных условий эксплуатации поддерживаемых на концах скважины или трубопровода. Предсказание возможности формирования пробкового течения, периода колебаний и пиковых значений расхода важно с практической точки зрения для выбора поверхностного оборудования и надлежащих условий его работы. В трубопроводах

сложной геометрической конфигурации, расположенных на неровной подстилающей поверхности, и скважинах сложной траектории с переменным углом наклона к горизонту пробковый режим течения может формироваться по следующим причинам [48, 49]. Гравитационная сегрегация приводит к накоплению в коленах трубопровода жидкости, которая, в свою очередь, блокирует свободное течение газа. Накопление газа, обладающего заметной сжимаемостью, в части системы, расположенной выше пробки по течению, приводит к постепенному росту давления. По достижению давлением некоторого критического значения данная конфигурация течения теряет устойчивость и происходит выплеск жидкой пробки, сопровождающийся быстрым ростом расхода жидкости на выходе из трубопровода, после чего процесс циклически повторяется. Таким образом, описанное явление обязано своим происхождением эффектам сегрегации и сжимаемости. Исторически, в связи с приложениями к добыче углеводородов на шельфовых месторождениях, в большинстве работ по моделированию пробкового течения рассматриваются L-образные геометрические конфигурации трубопроводов, состоящие из длинной горизонтальной части и короткого вертикального участка [50, 51]. Пробковый режим течения, вызванный сложной геометрией трубопровода ("terrain-induced" или "severe slugging"), следует отличать от пробкового течения в горизонтальных и наклонных трубопроводах, имеющего гидродинамическую природу ("hydrodynamic slugging"), и формирующегося в результате развития неустойчивостей на поверхности раздела газа и жидкости [52, 53]. Последнее явление в данной работе не рассматривается.

В нефтегазовой промышленности модель дрейфа широко применяется для описания квазистационарных течений в скважинах в процессе добычи [54]. Тем не менее, модель дрейфа также может быть применена для описания существенно нестационарных процессов (см., например [55]). Далее будет показано, что замыкающие соотношения модели дрейфа могут настроены для лучшего совпадения с экспериментальными данными в задачах о пробковом режиме течения. В литературе представлено некоторое количество работ по моделированию пробкового режима течения, вызванного сложной геометрией трубопро-

вода, с помощью модели дрейфа (см., например, [39, 55]). Большинство подобных исследований посвящено изучению L-образных геометрических конфигураций трубопровода, состоящих из длинной горизонтальной части и небольшого вертикального участка. В данной работе рассмотрена отличная постановка. В первую очередь, рассматривается W-образная геометрия, приводящая к некоторым характерным особенностям зависимостей расхода и давлений от времени. Следующей особенностью данного исследования является попытка настройки эмпирических замыкающих соотношений модели дрейфа. Представленный подход отличается от широко используемой глобальной оптимизации замыкающих соотношений путем сравнения с большим набором лабораторных данных для стационарных экспериментов [46].

## 1.2 Модель дрейфа

### 1.2.1 Обоснование модели дрейфа

Целью данного раздела является вывод модели дрейфа из законов сохранения, записанных в рамках двухжидкостного подхода для каждой фазы и определение границы применимости модели дрейфа в терминах определяющих безразмерных параметров. При выводе асимптотических уравнений многофазного течения в трубе и обосновании применимости модели дрейфа мы будем следовать методологии, изложенной в [36].

Рассматривается нестационарное изотермическое течение газожидкостной смеси в длинной трубе круглого сечения с переменным углом наклона к горизонту. Течение считается осесимметричным и не закрученным. Жидкость является непрерывной несущей фазой. Газ является дисперсной фазой и представлен в виде мелких сферических пузырьков одинакового диаметра, взвешенных в жидкости. Газ считается сжимаемым, жидкость несжимаемой. Процесс поперечной миграции по сечению трубы и слияние пузырьков не рассматриваются, однако учитывается неоднородный профиль объемной концентрации пузырьков, сформировавшийся в результате миграции. Разность давлений внутри

пузырьков и в жидкости, обусловленная поверхностным натяжением, не учитывается. Считается, что размеры пузырька много меньше пространственных масштабов изменения поля скорости жидкости и число Рейнольдса обтекания пузырька мало.

Двухфазное течение рассматривается на основе модели двух взаимопроникающих и взаимодействующих континуумов [19]. Задача описывается законами сохранения массы и импульса в дифференциальной форме, записанными для каждого континуума. Предполагается отсутствие источников массы и массообмена между фазами.

Законы сохранения массы и импульса в дифференциальной форме для газа и жидкости имеют вид [19]

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i \rho_i) + \nabla \cdot (\alpha_i \rho_i \mathbf{v}_i) = 0 \quad (1.12)$$

$$\alpha_i \rho_i \frac{d_i \mathbf{v}_i}{dt} = -\nabla p_i + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_i + \alpha_i \rho_i \mathbf{g} + n_b \mathbf{F}_{ij} \quad (1.13)$$

$$\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla)$$

где индексы  $i, j = g, l$ ,  $i \neq j$  обозначают газ и жидкость,  $\alpha_i$ ,  $\rho_i$  и  $\mathbf{v}_i$  – объемные доли, плотности и скорости фаз,  $p_i$  и  $\boldsymbol{\tau}_i$  – давления и тензоры вязких напряжений в каждой из фаз,  $\mathbf{g}$  – ускорение силы тяжести. Обмен импульсом между фазами описывается слагаемыми  $n_b \mathbf{F}_{ij}$ , где  $\mathbf{F}_{gl} \equiv \mathbf{F}$  – сила, действующая на отдельный пузырек со стороны жидкости,  $\mathbf{F}_{lg} = -\mathbf{F}_{gl}$ , а  $n_b$  – числовая концентрация пузырьков.

Для простоты дальнейшие выкладки проведены для вертикальной трубы, хотя результаты могут быть обобщены на случай наклонной трубы, за исключением течения в околоризонтальных трубах.

Предполагается, что хаотическим движением пузырьков можно пренебречь и отклонение скорости пузырьков от среднemasсовой скорости дисперсной фазы  $\mathbf{v}_g$  мало, тогда давлением и тензором вязких напряжений в дисперсной фазе можно пренебречь [35]. Наличие дисперсной примеси влияет на тензор напряжений в несущей фазе. В первую очередь, дисперсная примесь оказывает влияние

на величину сдвиговой вязкости жидкой фазы [56]. С другой стороны, пузыри сжимаемого газа движутся со скоростью, отличной от скорости жидкости, и их объемная доля переменна, поэтому условие  $\nabla \mathbf{v}_l = 0$  не выполняется. В этом смысле жидкая фаза, в отличие от жидкости как материала, является сжимаемой. Таким образом, тензор вязких напряжений в жидкой фазе записывается как для вязкой сжимаемой жидкости с коэффициентами сдвиговой  $\mu$  и объемной  $\zeta$  вязкости, зависящими от объемной доли газа

$$\boldsymbol{\tau}_l = 2\mu(\alpha_g) \left( \mathbf{e}_l - \frac{1}{3} \nabla \mathbf{v}_l \mathbf{I} \right) + \zeta(\alpha_g) \nabla \mathbf{v}_l \mathbf{I} \quad (1.14)$$

где  $\mathbf{e}_l$  – тензор скоростей деформации,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор. Определение зависимостей  $\mu(\alpha_g)$  и  $\zeta(\alpha_g)$  представляет отдельную задачу [57], которая обычно решается для нейтрально плавучих частиц без учета межфазного проскальзывания. В дальнейшем считается, что  $\mu(0) = \mu_0$ , где  $\mu_0$  – вязкость чистой жидкости, и  $\zeta(\alpha_g) \nabla \mathbf{v}_l \rightarrow 0$  при  $\alpha_g \rightarrow 0$ .

Радиус пузырьков ограничен предельным значением  $r_{bc}$ , при котором поверхность пузырька теряет сферическую форму, устойчивость и происходит дробление на более мелкие пузырьки [58]

$$r_b \leq r_{bc} \simeq \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma}{\rho_l g} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 10^{-3} \text{ м}$$

где  $\sigma$  – поверхностное натяжение на границе газ-жидкость. В принятых предположениях на отдельный пузырек со стороны жидкости действуют силы Стокса  $\mathbf{F}_{St}$ , Архимеда  $\mathbf{F}_A$  и присоединенных масс  $\mathbf{F}_{am}$ . Влияние наследственной силы (силы Бассе-Буссинеска) на движение пузырька не рассматривается. В неочищенных жидкостях влияние поверхностно-активных веществ приводит к тому, что в жидкости вблизи поверхности пузырьков формируется тонкий высоковязкий слой, и в результате мелкие пузырьки движутся как твердые частицы [58].

Тогда выражения для сил могут быть приняты в виде [59, 60]

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_{St} + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_{am} \\ \mathbf{F}_{St} &= 6\pi\mu r_b (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_g), \quad \mathbf{F}_A = \frac{4}{3}\pi r_b^3 \rho_l \left( \frac{d_l \mathbf{v}_l}{dt} - \mathbf{g} \right) \\ \mathbf{F}_{am} &= \frac{2}{3}\pi \rho_l \frac{d_g}{dt} r_b^3 (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_g),\end{aligned}$$

Безразмерные переменные вводятся следующим образом (размерные переменные обозначены звездочкой, где требуется отличить их от безразмерных переменных)

$$\begin{aligned}(x^*, y^*, z^*) &= L \cdot (x, y, z), \quad \nabla^* = \frac{1}{L} \nabla, \quad r_b^* = r_{b0} r_b \\ \mathbf{v}_i^* &= U \mathbf{v}_i, \quad t^* = \frac{L}{U} t, \quad \rho_i^* = \rho_i^0 \rho_i, \quad \eta = \frac{\rho_g^0}{\rho_l^0} \\ p_l^* &= \rho_l^0 U^2 p, \quad \mu^* = \mu_0 \mu, \quad \zeta^* = \zeta_0 \zeta, \quad \xi = \frac{\zeta_0}{\mu_0}, \quad \boldsymbol{\tau}_l^* = \frac{\mu_0 U}{L} \boldsymbol{\tau}_l\end{aligned}$$

где  $L$  – характерный линейный масштаб в продольном направлении,  $r_{b0}$  – характерный радиус пузырька,  $U$  – характерный масштаб скорости,  $\rho_i^0$  – характерные плотности материалов фаз,  $\zeta_0$  – характерная величина объемной вязкости эмульсии и  $\mu(0) = 1$ .

В безразмерной форме с учетом равенства  $\alpha_g = 4\pi r_b^3 n_b / 3$  уравнение (1.13) для газа принимает вид

$$\begin{aligned}\varepsilon \text{St} \rho_g \frac{d_g \mathbf{v}_g}{dt} &= \mu r_b (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_g) + \frac{\text{St}}{\eta \text{Fr}^2} (\eta \rho_g - \rho_l) \mathbf{e}_z + \\ &+ \varepsilon \text{St} \eta^{-1} \left( \rho_l \frac{d_g \mathbf{v}_l}{dt} + \frac{1}{2} \rho_l \frac{d_g}{dt} r_b^3 (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_g) \right) \quad (1.15) \\ \text{St} &= \frac{mU}{6\pi\mu_0 R r_{b0}}, \quad \text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gR}}, \quad \varepsilon = \frac{R}{L}, \quad m = \frac{4}{3}\pi r_{b0}^3 \rho_g^0\end{aligned}$$

Здесь  $\text{St}$  – число Стокса,  $\text{Fr}$  – число Фруда,  $R$  – характерный радиус трубы,  $\varepsilon$  – отношение поперечного размера к продольному,  $m$  – масса пузырька. Поскольку процессы массообмена, дробления и слияния пузырьков не рассмат-



риваются, масса пузырька во время движения остается постоянной, а радиус пузырька оказывается функцией текущего давления.

Сложением уравнений (1.13) для жидкости и газа можно получить

$$\varepsilon \text{Re} \left( \eta \alpha_g \rho_g \frac{d_g \mathbf{v}_g}{dt} + \alpha_l \rho_l \frac{d_l \mathbf{v}_l}{dt} \right) = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} (\eta \alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l) \mathbf{e}_z + \varepsilon^2 \nabla \boldsymbol{\tau}_l - \varepsilon \text{Re} \nabla p \quad (1.16)$$

где  $\text{Re} = \rho_l^0 U R / \mu_0$  – число Рейнольдса.

Уравнения неразрывности (1.12) в безразмерных переменных имеют тот же вид, что и исходные размерные уравнения.

В соответствии с целями данной главы ниже приведен вывод уравнений (1.1), (1.9) из исходной многожидкостной модели (1.12)-(1.13), определены границы применимости этой модели и проведено сравнение с границами применимости модели (1.1), (1.8).

### Вывод асимптотических уравнений

Асимптотические уравнения выводятся в приближении длинного канала:

$$\varepsilon \ll 1$$

аналогичном приближениям пограничного слоя, тонкого канала для течения в трещинах [35] и тонкого слоя (lubrication approximation) для течения пленок [61].

**Алгебраическая связь между скоростями фаз.** Дополнительно предполагается, что

$$\varepsilon \text{St} \eta^{-1} \ll 1, \quad \eta \ll 1, \quad \frac{\text{St}}{\eta \text{Fr}^2} \sim 1$$

Основное предположение  $\varepsilon \text{St} \eta^{-1} \ll 1$  обеспечивает выполнение условия  $\varepsilon \text{St} \ll 1$ , что равносильно требованию безынерционного межфазного проскальзывания или релаксации скорости пузырька к скорости потока на длинах, много меньших характерного масштаба длины в продольном направлении. Как следует из (1.15), в рамках данного предположения можно пренебречь силой присоеди-

ненных масс, нестационарной частью силы Архимеда и силой Бассе-Буссинеска. Аналогичный результат был получен для гравитационной конвекции суспензий в [34]. Тогда, уравнение (1.15) может быть приведено к виду

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_s, \quad \mathbf{v}_s = -\frac{\text{St}}{\eta \text{Fr}^2} \frac{\rho_l}{r_b \mu} \mathbf{e}_z \quad (1.17)$$

Уравнение (1.17) учитывает неоднородное по сечению распределение дисперсной фазы через зависимость вязкости от объемной доли газа.

**Асимптотические уравнения в приближении длинного канала.** Для получения осредненных по сечению трубы уравнений модели дрейфа безразмерные уравнения будут выписаны покомпонентно в цилиндрических координатах. Растянутая радиальная координата и соответствующие ей компоненты скорости газа и жидкости  $v_{ir}$  вводятся следующим образом

$$r^* = \varepsilon r, \quad v_{ir}^* = \varepsilon v_{ir}$$

Уравнения неразрывности в новых переменных имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i \rho_i) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \alpha_i \rho_i v_{ir}) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_i \rho_i v_{iz}) = 0 \quad (1.18)$$

Дополнительно накладываются следующие ограничения

$$\varepsilon \text{Re} \sim 1, \quad \varepsilon \xi_0 \ll 1$$

Удерживая главные члены, с учетом (1.14) можно получить: из  $r$ -компоненты уравнения (1.16)

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (1.19)$$

из  $z$ -компоненты уравнения (1.16)

$$\begin{aligned} & \varepsilon \operatorname{Re} \left( \alpha_l \rho_l \left( \frac{\partial v_{lz}}{\partial t} + v_{lr} \frac{\partial v_{lz}}{\partial r} + v_{lz} \frac{\partial v_{lz}}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. + \eta \alpha_g \rho_g \left( \frac{\partial v_{gz}}{\partial t} + v_{gr} \frac{\partial v_{gz}}{\partial r} + v_{gz} \frac{\partial v_{gz}}{\partial z} \right) \right) = \\ & = -\varepsilon \operatorname{Re} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Fr}^2} (\alpha_l \rho_l + \eta \alpha_g \rho_g) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mu \frac{\partial v_{lz}}{\partial r} \end{aligned} \quad (1.20)$$

**Осреднение по поперечному сечению.** Осредненные асимптотические уравнения получены интегрированием по радиусу. Среднее значение величины  $F(t, r, z)$  по сечению находится по формуле

$$\langle F \rangle = \frac{1}{S} \int_0^R 2\pi r dr \cdot F(t, r, z)$$

где  $S = \pi R^2$  – площадь сечения трубы.

Интегрированием уравнений неразрывности (1.18) по радиусу с учетом зависимости радиуса трубы от координаты  $z$ , условия прилипания на стенках трубы и уравнения (1.19) можно получить

$$\frac{\partial}{\partial t} S \rho_i \langle \alpha_i \rangle + \frac{\partial}{\partial z} S \rho_i \langle \alpha_i \rangle \bar{v}_{iz} = 0 \quad (1.21)$$

где  $\bar{v}_{iz} = \langle \alpha_i v_{iz} \rangle / \langle \alpha_i \rangle$ .

С учетом осредненных уравнений неразрывности (1.21) и условия прилипания на стенке трубы интегрирование и тождественные преобразования уравнения (1.20) приводят к уравнению

$$\begin{aligned} & \varepsilon \operatorname{Re} \left( \langle \alpha_l \rangle \rho_l \left( \frac{\partial \bar{v}_{lz}}{\partial t} + \bar{v}_{lz} \frac{\partial \bar{v}_{lz}}{\partial z} \right) + \eta \langle \alpha_g \rangle \rho_g \left( \frac{\partial \bar{v}_{gz}}{\partial t} + \bar{v}_{gz} \frac{\partial \bar{v}_{gz}}{\partial z} \right) \right) = \\ & = -\varepsilon \operatorname{Re} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Fr}^2} (\langle \alpha_l \rangle \rho_l + \eta \langle \alpha_g \rangle \rho_g) + \frac{1}{S} r \mu \frac{\partial v_{lz}}{\partial r} \Big|_{r=R} - \\ & \quad - \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial z} S (\rho_l \langle \alpha_l v_{lz}'^2 \rangle + \eta \rho_g \langle \alpha_g v_{gz}'^2 \rangle) \end{aligned} \quad (1.22)$$

где  $v_{iz}' = v_{iz} - \bar{v}_{iz}$  – отклонение скорости от среднего по сечению значения.

Последнее слагаемое в (1.22) аналогично тензору напряжений Рейнольдса, который возникает при осреднении уравнений турбулентного движения жидкости. При этом величина отклонения скорости от среднего значения по сечению аналогична пульсационной составляющей скорости при описании турбулентного течения. Поскольку влияние поправки к средней скорости на осредненное движение оказывается аналогичным влиянию турбулентной вязкости, последние два слагаемых в (1.22) могут быть объединены в одно, описывающее как трение на стенках трубы, так и отклонения скорости от среднего. Замыкающие соотношения для коэффициента трения калибруются в экспериментах [38] и учитывают оба эффекта, хотя явно это в инженерной литературе обычно не указывается.

При осреднении алгебраического соотношения (1.17) следует привести его к виду замыкающего соотношения модели дрейфа (1.5).

Используя (1.17), можно получить

$$\bar{v}_{gz} = \frac{\langle \alpha_g (\alpha_g v_{gz} + \alpha_l v_{lz}) \rangle}{\langle \alpha_g \rangle \langle \alpha_g v_{gz} + \alpha_l v_{lz} \rangle} \langle \alpha_g v_{gz} + \alpha_l v_{lz} \rangle + \frac{\langle \alpha_g \alpha_l v_s \rangle}{\langle \alpha_g \rangle} \quad (1.23)$$

После введения обозначений

$$v_m = \langle \alpha_g v_{gz} + \alpha_l v_{lz} \rangle, \quad C_0 = \frac{\langle \alpha_g (\alpha_g v_{gz} + \alpha_l v_{lz}) \rangle}{\langle \alpha_g \rangle \langle \alpha_g v_{gz} + \alpha_l v_{lz} \rangle}, \quad v_d = \frac{\langle \alpha_g \alpha_l v_s \rangle}{\langle \alpha_g \rangle} \quad (1.24)$$

уравнение (1.23) приводится к виду

$$\bar{v}_{gz} = C_0 v_m + v_d \quad (1.25)$$

где  $v_m = \langle \alpha_g v_{gz} + \alpha_l v_{lz} \rangle = \langle \alpha_g v_{gz} \rangle + \langle \alpha_l v_{lz} \rangle = \langle \alpha_g \rangle \bar{v}_{gz} + \langle \alpha_l \rangle \bar{v}_{lz}$ .

**Уравнение сохранения импульса смеси в терминах модели дрейфа.** Одна из задач данной работы состоит в том, чтобы выяснить, при каких предположениях уравнение (1.22) может быть сведено к единственному уравнению сохранения импульса смеси в модели дрейфа, которое формулируется в неконсервативной форме и в терминах среднеобъемной скорости.

Разность суммы инерционных членов в левой части (1.22) и инерционных членов в левой части (1.9) с учетом (1.25) дает набор слагаемых порядка

$$\begin{aligned} \alpha\gamma, \quad \alpha\beta, \quad \alpha^2\gamma, \quad \alpha^2\gamma^2, \quad \alpha^2\beta, \quad \alpha^2\beta\gamma, \quad \alpha^2\beta^2, \\ \eta\alpha\gamma, \quad \eta\alpha\gamma^2, \quad \eta\alpha\beta, \quad \eta\alpha\beta\gamma, \quad \eta\alpha\beta^2 \end{aligned}$$

где  $\alpha$  – характерная величина средней объемной доли  $\langle\alpha_g\rangle$ ,  $\beta \equiv |C_0 - 1|$ , и  $\gamma \equiv \text{St}/\eta\text{Fr}^2$ . Каждое из слагаемых должно быть мало, чтобы обеспечить малость суммарной невязки.

Поскольку  $\eta \ll 1$  и  $\alpha \leq 1$ , требование малости всех слагаемых эквивалентно выполнению условий

$$\alpha\gamma \ll 1, \quad \alpha\beta \ll 1, \quad \eta\alpha\gamma^2 \ll 1, \quad \eta\alpha\beta\gamma \ll 1, \quad \eta\alpha\beta^2 \ll 1 \quad (1.26)$$

Так как параметр профиля  $C_0$  есть величина порядка 1, можно считать  $\beta \sim 1$  или  $\beta \ll 1$ .

При малой объемной доле  $\alpha \ll 1$ , с учетом последнего утверждения, неравенства (1.26) не накладывают никаких дополнительных ограничений на  $\beta$ . Таким образом, при конечной скорости проскальзывания ( $\gamma \sim 1$ ) уравнение сохранения импульса смеси, записанное в терминах среднеобъемной скорости, является следствием (1.22) в пределе  $\alpha \ll 1$ .

При конечной объемной доле  $\alpha \sim 1$  неравенства (1.26) равносильны  $\beta \ll 1, \gamma \ll 1$ , что означает отсутствие проскальзывания  $\bar{v}_{gz} = \bar{v}_{lz} = v_m$ .

Установлено, что уравнение (1.22) равносильно (1.9) только в случаях: (I) малой объемной доли дисперсной фазы  $\alpha \ll 1$ ; (II) отсутствия межфазного проскальзывания  $|C_0 - 1| \ll 1, \text{St}/\eta\text{Fr}^2 \ll 1$ ; (III) безынерционных течений  $\varepsilon\text{Re} \ll 1$ .

Отдельного внимания заслуживает асимптотический предел  $\text{Re}/\text{Fr}^2 \gg 1$ . В этом случае, часто встречающемся в нефтегазовых приложениях, гидростатическое слагаемое в уравнении закона сохранения импульса смеси является доминирующим. Переопределением масштаба давления  $p^* = p/\varepsilon\text{Fr}^2$  из (1.22)

можно получить модель без волн давления [39, 62]. Данный предел также будем относить к безынерционным течениям.

Проведенный анализ показывает, что модель дрейфа [38, 44] в виде (1.1) - (1.9) для данной конфигурации течения строго следует из законов сохранения в ограниченном наборе предельных случаев (I) - (III) и является по существу моделью эффективной жидкости. Замыкающие соотношения, опубликованные в литературе, получены калибровкой относительно большого набора экспериментальных данных [38, 44] для определяющих параметров, удовлетворяющих хотя бы одному из условий (I) - (III). В то же время, из проведенного анализа следует, что модель дрейфа [37] в виде (1.1), (1.8) является более общей, так как она следует из законов сохранения без каких-либо дополнительных предположений, кроме требования безынерционного проскальзывания  $\varepsilon St \ll 1$ .

### Аналитические решения для параметра профиля и скорости дрейфа

Аналитическое вычисление зависимостей параметра профиля  $C_0$  и скорости дрейфа  $v_d$  от среднеобъемной скорости смеси и средней по сечению объемной доли в общем случае не представляется возможным. В [32, 33] для вычисления параметра профиля авторами явно предполагался вид зависимостей объемной доли и скорости от радиальной координаты. В настоящей работе используется лишь предположение о зависимости объемной доли от радиальной координаты, а профиль скорости жидкости получен как решение уравнений в приближении медленного безынерционного течения.

Предположим дополнительно, что течение безынерционное, так что  $\varepsilon Re \ll 1$ . После переопределения  $p^* = p/\varepsilon Re$  из (1.20) можно получить уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mu \frac{\partial v_{lz}}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{Re}{Fr^2} (\alpha_l \rho_l + \eta \alpha_g \rho_g) \quad (1.27)$$

Масштаб давления выбран из условия, что градиент давления и вязкие члены будут иметь один порядок величины в результирующем уравнении. Такое условие обеспечивает его наименьшую вырожденность [63].

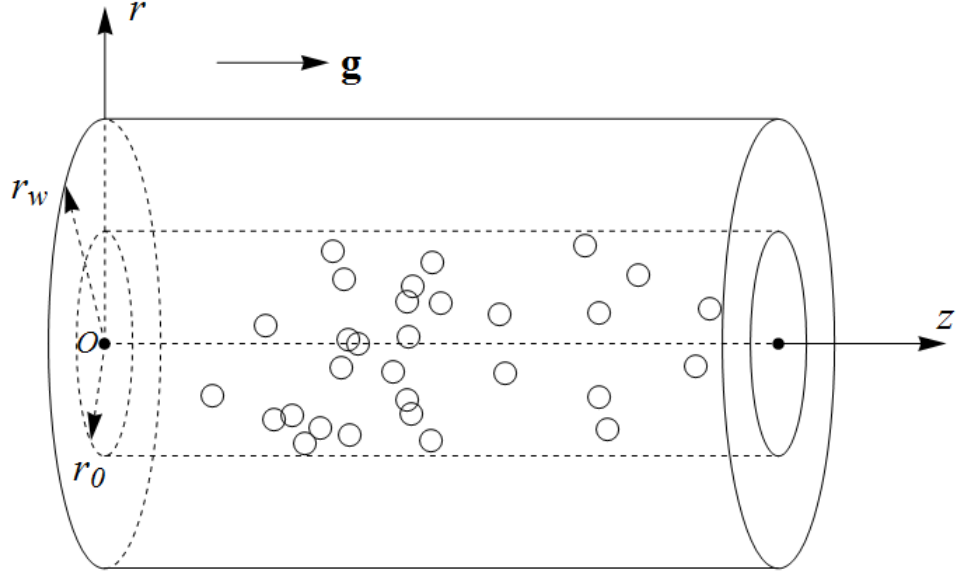


Рис. 1.2: Схема течения дисперсной газожидкостной смеси в круглой трубе.

В результате миграции пузырьков от стенок к центру под действием боковых сил формируется пристеночный слой чистой жидкости, а пузырьки аккумулируются в ядре течения [44]. Тогда, распределение объемной доли газа по сечению трубы можно аппроксимировать кусочно-постоянной зависимостью (см. рис. 1.2)

$$\alpha_g(r) = \begin{cases} \alpha_g^0, & 0 < r < r_0 \\ 0, & r_0 < r < R \end{cases} \quad (1.28)$$

Интегрирование (1.27) с учетом граничных условий (прилипание на стенке трубы и конечность скорости на оси), распределения объемной доли по сечению (1.28) и условия непрерывности  $v_{lz}$  в точке  $r = r_0$  дает

$$v_{lz} = \begin{cases} a(1 - x_0^2) + m_0(b - a)(x^2 - x_0^2), & 0 < x < x_0 \\ a(1 - x^2), & x_0 < x < 1 \end{cases}$$

где  $x = r/R$ ,  $x_0 = r_0/R$ ,  $m_0 = 1/(r_b\mu(\alpha_g^0))$  и

$$a = \frac{R^2}{4} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} \rho_l \right), \quad b = \frac{R^2}{4} \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} (\rho_l - \eta \rho_g) \alpha_g^0$$

Для данного профиля возможно вычисление средних величин, фигурирующих в уравнении (1.24).

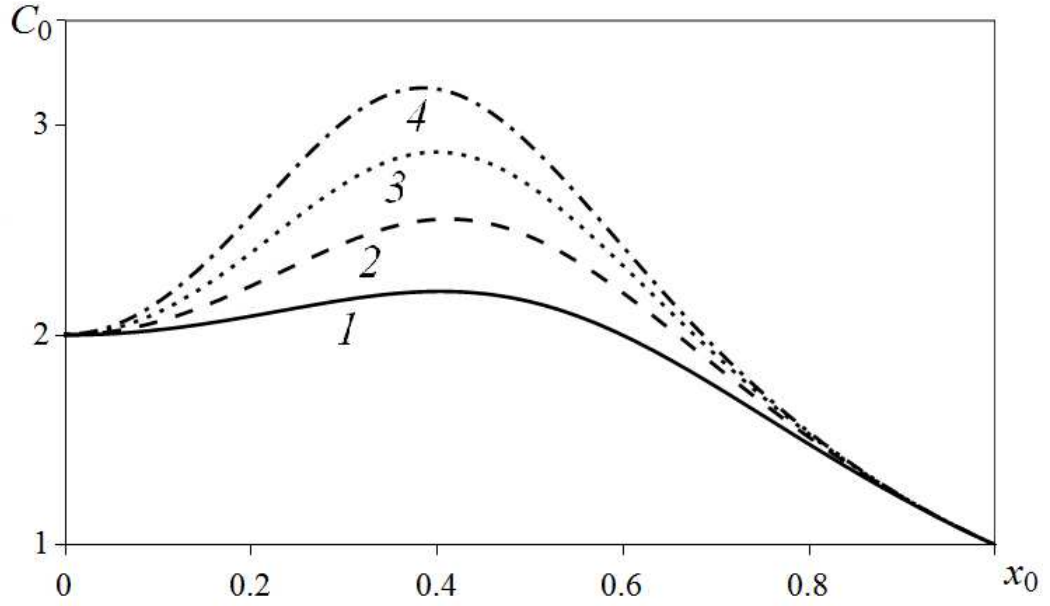


Рис. 1.3: Зависимость параметра профиля  $C_0$  от безразмерного радиуса ядра  $x_0$  для различных объемных долей газа  $\alpha_g^0$  в ядре: 1 –  $\alpha_g^0 = 0.05$ , 2 –  $\alpha_g^0 = 0.1$ , 3 –  $\alpha_g^0 = 0.15$ , 4 –  $\alpha_g^0 = 0.2$ .

Параметр профиля дается формулой

$$C_0 = \frac{2a(1-x_0^2) + m_0(a-b)x_0^2 - 2\gamma\rho_l m_0 \alpha_g^0}{a(1-x_0^4) + m_0(a-b)x_0^4 - 2\gamma\rho_l m_0 \alpha_g^0 x_0^2} \quad (1.29)$$

Скорость дрейфа выражается согласно формуле

$$v_d = -\gamma\rho_l m_0 (1 - \alpha_g^0) = -\gamma v'_d$$

Интерес представляют следующие предельные переходы в (1.29):

1.  $\alpha_g^0 \rightarrow 0 \Rightarrow C_0 \rightarrow 2 - x_0^2$ . При малой объемной доле газа параметр профиля зависит только от радиуса ядра, в котором присутствуют пузырьки. Можно убедиться, что принятому в [44] значению параметра профиля  $C_0 = 1.2$  соответствует относительный радиус ядра, занятого пузырьками газа,  $x_0 \approx 0.9$ .
2.  $x_0 \rightarrow 0 \Rightarrow C_0 \rightarrow 2 - 2\gamma\rho_l m_0 \alpha_g^0 / a$ , что означает, при отсутствии проскальзывания, что на оси трубы скорость в два раза больше средней по сечению, аналогично течению Пуазейля.



3.  $x_0 \rightarrow 1 \Rightarrow C_0 \rightarrow 1$ . В случае однородного распределения пузырьков газа параметр профиля равен единице.

На рис. 1.3 представлена зависимость параметра профиля от безразмерного радиуса ядра, содержащего пузырьки газа (1.29). Для вычисления вязкости смеси как функции объемной доли принимается зависимость [33]:  $\mu(\alpha_g) = (1 - \alpha_g)^{-1}$ . Высокие значения параметра профиля для промежуточных значений радиуса ядра объясняются влиянием вытеснения и тем, что наличие пузырьков газа значительно искажает профиль скорости жидкости, и локальная скорость в ядре оказывается заметно выше, чем в среднем по сечению.

### 1.2.2 Гиперболичность модели дрейфа

Настоящий раздел посвящен установлению условий гиперболичности системы определяющих уравнений модели дрейфа в двух формулировках в диапазоне определяющих параметров, характерных для течений в скважинах и трубопроводах. Системы уравнений рассматриваемых в данной работе моделей нестационарных газожидкостных течений представляются в виде

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = \mathbf{C} \quad (1.30)$$

где  $\mathbf{U}(z, t) = (u_1(z, t), \dots, u_n(z, t))^T$  – вектор неизвестных параметров задачи,  $\mathbf{A}(\mathbf{U}(z, t), z, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{U}(z, t), z, t)$  – матрицы размера  $n \times n$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{U}(z, t), z, t)$  – вектор правых частей системы уравнений. В нашем случае  $n = 3$ , а компонентами вектора  $\mathbf{U}$  являются скорости смеси, объемная доля одной из фаз и давление. В случае невырожденной матрицы  $\mathbf{A}$  система (1.30) может быть сведена к виду

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = \tilde{\mathbf{C}} \quad (1.31)$$

Согласно [64] система (1.31) называется гиперболической, если существует несингулярная матрица  $\mathbf{\Omega}$ , диагонализующая  $\tilde{\mathbf{B}}$ , так что

$$\mathbf{\Omega}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$$

и все собственные значения  $\lambda_k$  матрицы  $\tilde{\mathbf{B}}$  действительны. Если значения  $\lambda_k$  различны, система называется строго гиперболической.

Для решения уравнений (1.30) требуется дополнительно сформулировать достаточное число начальных и граничных условий, отвечающих типу уравнений. Начально-краевая задача для гиперболической системы может оказаться некорректной, если уравнения меняют тип.

Потеря гиперболичности может означать, что сформулированная модель перестает описывать рассматриваемое явление. В численных расчетах в этом случае возникают нефизические осцилляции, что не позволяет получить устойчивое по начальным данным сходящееся по сетке решение. В общем случае для системы (1.30) критерии гиперболичности и устойчивости не совпадают, и гиперболическая система может демонстрировать гидродинамическую неустойчивость [15]. Однако эти задачи становятся эквивалентны при исследовании устойчивости однородного стационарного решения системы (1.30) с правой частью, не зависящей от  $\mathbf{U}$ , а также при рассмотрении высокочастотных возмущений. Условия устойчивости для различных моделей двухфазных одномерных течений исследовались, например, в работах [15, 52, 65] и цитируемой в них литературе. В [52, 65], в частности, показано, что для многожидкостной модели с учетом градиента уровня развитие неустойчивости границы раздела стратифицированного течения связано со сменой режимов: переходом от стратифицированного расслоенного течения к пробковому или кольцевому.

В настоящей работе исследуются границы областей гиперболичности моделей, определяющие диапазон параметров, в котором существует корректная математическая формулировка начально-краевой задачи по Адамару. Исследование устойчивости решений сформулированных гиперболических систем остается за границами данного исследования и требует дополнительного изучения.

Первым этапом установления типа системы уравнений является решение характеристического уравнения. В случае, если его корни вещественны и различны, набор собственных векторов матрицы системы (1.31) является полным,  $\tilde{\mathbf{B}}$  диагонализуется, и система является строго гиперболической. В случае веще-

ственных кратных корней требуется непосредственное нахождение собственных векторов и проверка полученного набора на полноту [29]. Поскольку в общем случае выписать решение характеристического уравнения в явном виде невозможно, помимо аналитического исследования применяются также численные методы установления гиперболичности системы.

Далее приведен характеристический анализ систем уравнений модели дрейфа в двух формулировках, отличающихся формой уравнения закона сохранения импульса смеси. Делаются выводы о знакоопределенности собственных значений, позволяющие определить количество приходящих и исходящих характеристик на границах вычислительной области и определить корректную постановку начально-краевой задачи [29].

### Классическая формулировка

Рассмотрим замыкающие соотношения  $C_0 = C_0(\alpha_g)$  и  $v_d = v_d(\alpha_g)$ , удовлетворяющие (1.7). Характеристическое уравнение системы в этом случае не может быть приведено явно ввиду громоздкости. Коэффициенты уравнения относительно безразмерных характеристических скоростей  $\tilde{\lambda} = \lambda/c_l$  являются функциями пяти безразмерных параметров – объемной доли  $\alpha_g$ , отношений плотностей фаз  $\eta$ , скоростей звука  $K$ , числа Маха по скорости смеси  $M_m = v_m/c_l$  и числа Маха по скорости дрейфа  $M_d = v_d(0)/c_l$ . В диапазоне параметров, характерных для скважинных течений  $(M_m, M_d) \ll 1$ . Следуя процедуре [37], можно получить нулевые члены разложения характеристических скоростей по степеням  $M_m, M_d$  при  $M_m, M_d \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_1 &= O(M_m, M_d) \\ \tilde{\lambda}_{2,3} &= \pm \left[ \left( \frac{\alpha_g}{K^2 \eta} + 1 - \alpha_g \right) (1 - (1 - \eta) \alpha_g C_0(\alpha_g)) \right]^{-1/2} + O(M_m, M_d)\end{aligned}$$

Условие неотрицательности подрадикального выражения является необходимым для глобальной гиперболичности системы (1.1), (1.8). Численные эксперименты показывают, что для достаточно малых значений  $M_m$  и  $M_d$  это условие является необходимым и достаточным. Независимо от конкретного вида замы-

Таблица 1.1: Характерные значения параметров для двух типов газожидкостных течений.

Тип течения	$\rho_l$ , кг/м <sup>3</sup>	$\rho_g$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_l$ , м/с	$c_g$ , м/с	$\eta$	$K$
Вода-воздух	1000	1.23	1500	331	0.00123	0.22
Нефть-газ	900	0.7	1470	430	0.00078	0.29

каний  $C_0 = C_0(\alpha_g)$  и  $v_d = v_d(\alpha_g)$ , удовлетворяющих (1.7), при всех достаточно малых  $M_m$  и  $M_d$  корни характеристического уравнения системы (1.1), (1.8) действительны и различны тогда и только тогда, когда

$$(1 - \eta) \alpha_g C_0(\alpha_g) < 1 \quad (1.32)$$

Рис. 1.4, 1.5 приведены для иллюстрации последнего утверждения. На рис. 1.4 построены используемые замыкающие соотношения. Для параметра профиля используется зависимость

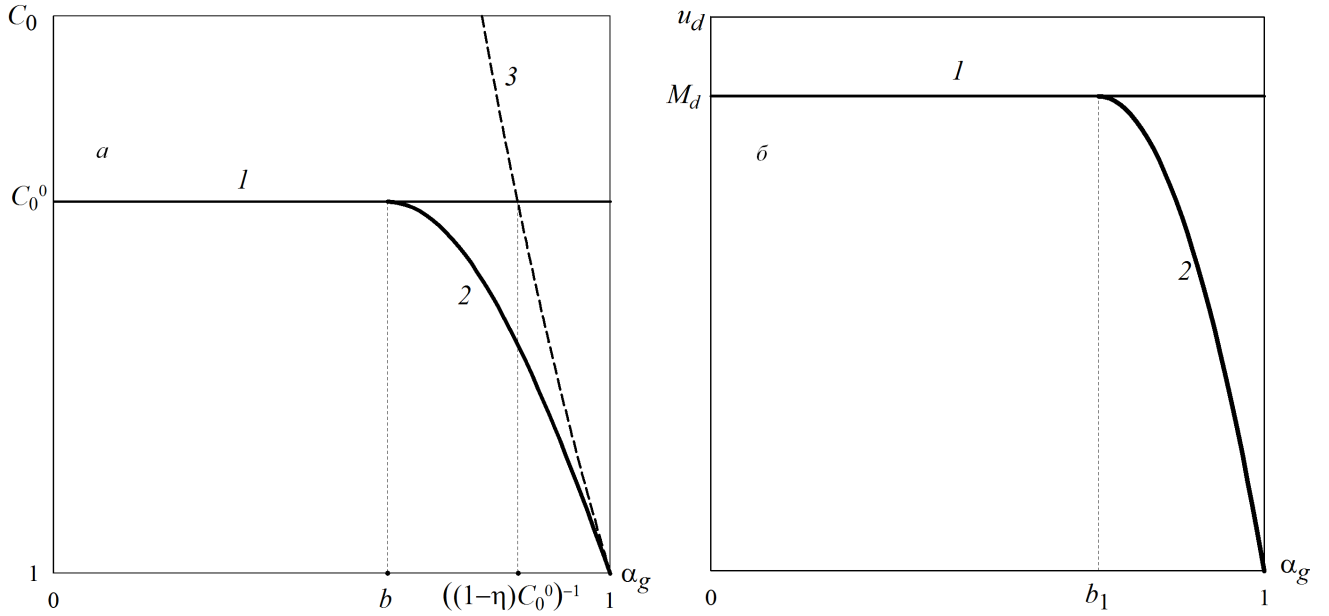
$$C_0(\alpha_g) = C_0^0 \begin{cases} 1, & \alpha_g < b \\ \left(1 + (C_0^0 - 1) \left(\frac{\alpha_g - b}{1 - b}\right)^2\right)^{-1}, & b \leq \alpha_g \leq 1 \end{cases} \quad (1.33)$$

где  $C_0^0 \geq 1, 0 \leq b \leq 1$ .

Для скорости дрейфа справедлива зависимость

$$v_d(\alpha_g)/c_l = M_d \begin{cases} 1, & \alpha_g < b_1 \\ 1 - \left(\frac{\alpha_g - b_1}{1 - b_1}\right)^2, & b_1 \leq \alpha_g \leq 1 \end{cases} \quad (1.34)$$

На рис. 1.5 представлены области гиперболичности системы (1.1), (1.8) для замыкающих соотношений, определенных  $C_0(\alpha_g) = C_0^0$ , (1.34) и (1.33), (1.34). Для  $\eta$  и  $K$  приняты значения для течения нефть-газ из табл. 1.1,  $M_d = 1.5 \cdot 10^{-4}$ ,  $C_0^0 = 1.2$ ,  $b = 0.6$  и  $b_1 = 0.9$ . Согласно результатам расчета, приведенным на рис. 1.5а, граница области гиперболичности системы при малых числах Маха совпадает с границей полученной из (1.32). Из рис. 1.5б следует, что использование замыкания (1.33) обеспечивает гиперболичность системы для всех  $\alpha_g$  и  $M_m$  меньших недостижимого в приложениях критического значения порядка 0.38.



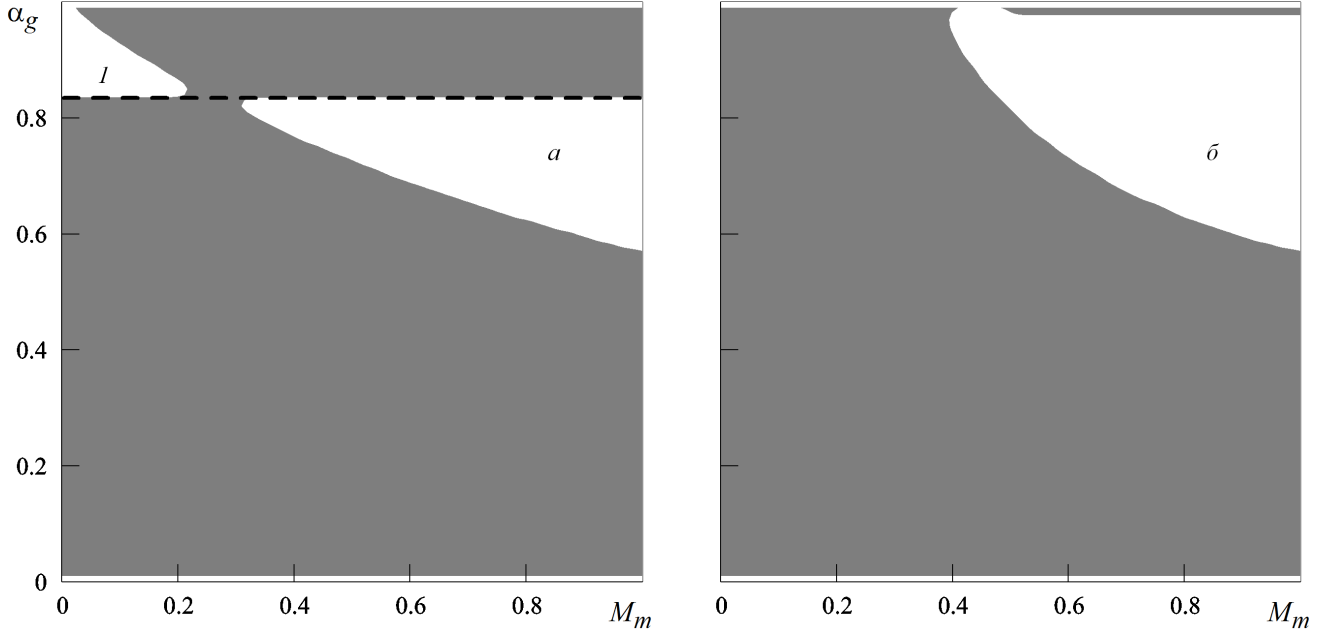
(а) Зависимость параметра профиля  $C_0$  от объемной доли  $\alpha_g$ : 1 –  $C_0 = C_0^0$ ; 2 – зависимость (1.33); 3 – условие (1.32). (б) Зависимость безразмерной скорости дрейфа  $v_d$  от  $\alpha_g$ : 1 –  $1 - v_d = M_d$ ; 2 – зависимость (1.34).

Рис. 1.4: Зависимости параметра профиля и безразмерной скорости дрейфа от объемной доли.

Таким образом, исправление нефизического поведения замыкающего соотношения (1.6) при высоких объемных долях газа также положительно влияет на характеристические свойства системы, расширяя область гиперболичности (1.1), (1.8) в диапазоне параметров, интересном с точки зрения практических приложений. При этом условие (1.32) является менее строгим, чем условие (1.11), накладываемое из физических соображений и обеспечивающее гиперболичность упрощенной системы.

### Формулировка ECLIPSE

Модель без волн давления ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ ) ранее рассматривалась в [39]. Тип системы классифицировался, как смешанный гиперболически-параболический с характеристической скоростью, равной бесконечности, кратности два. Также в работе приведено выражение для единственной конечной характеристической скорости. Свойства обобщения модели дрейфа на случай трехфазного течения с учетом массообмена между фазами рассматривались в [5].



(а) Область гиперболичности для замыкающих соотношений  $C_0 = C_0^0$ , (1.34): - - - граница области гиперболичности, полученная из условия (1.32). (б) Область гиперболичности для замыкающих соотношений (1.33), (1.34).

Рис. 1.5: Области гиперболичности для различных замыкающих соотношений модели дрейфа.

Введем следующие обозначения

$$\frac{1}{\rho_m c_m^2} = \sum_{i=g,l} \frac{\alpha_i}{\rho_i c_i^2}, \quad \omega_i = \alpha_i \frac{\rho_m c_m^2}{\rho_i c_i^2}, \quad \Psi_g = \frac{\partial}{\partial \alpha_g} \alpha_g v_g$$

где  $c_i, c_m$  – скорости звука в фазах и смеси,  $\omega_g + \omega_l = 1$ .

Характеристическое уравнение для системы (1.1), (1.9) имеет вид

$$(\lambda - \Psi_g) ((\epsilon_2 v_m - \epsilon_1 \lambda) (\omega_g v_g + \omega_l v_l - \lambda) - c_m^2) = 0 \quad (1.35)$$

Корень уравнения  $\lambda_1 = \Psi_g$  не зависит от формы уравнения закона сохранения импульса для смеси. Характеристическая скорость  $\lambda_1$  не связана со сжимаемостью фаз и, таким образом, описывает распространение медленных волн объемной доли со скоростью массопереноса. В общем случае  $\lambda_1$  является знакопеременной функцией решения, и соответствующая характеристика может оказаться приходящей на обеих границах области, в которой строится решение.

Разрешая (1.35) для случая нестационарного уравнения закона сохранения импульса для смеси ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ ), получим два оставшихся корня

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left( v_m + \omega_g v_g + \omega_l v_l \pm \sqrt{D} \right), \quad D = (v_m - \omega_g v_g - \omega_l v_l)^2 + 4c_m^2 > 0$$

Таким образом, в общем случае нестационарного уравнения закона сохранения импульса для смеси все собственные значения действительны и различны, и система (1.1), (1.9) - строго гиперболическая. В случае отсутствия проскальзывания  $v_m = v_g = v_l$  выражение для характеристических скоростей переходит в  $\lambda_{2,3} = v_m \pm c_m$ , аналогично характеристикам уравнений одномерного движения сжимаемого газа, что оправдывает название скорость звука в смеси. Зависимость  $c_m$  от  $\alpha_g$  при  $K < 1$  и  $\eta \ll 1$  имеет минимум

$$c_m^{min}/c_l = 2K(\eta^{1/2} + O(\eta^{3/2})), \quad \alpha_g^{min} = \frac{1}{2} (1 + (1 - K^2) \eta) + O(\eta^2)$$

Следовательно, в характерном для скважинных течений диапазоне параметров  $v_m \sim v_i \ll c_m^{min}$  характеристики  $\lambda_{2,3}$  имеют разный знак и описывают возмущения распространяющиеся вниз и вверх по потоку. Таким образом, одна из характеристик оказывается приходящей внутрь области на выходной границе и для корректной постановки краевой задачи для системы уравнений модели дрейфа требуется задание одного граничного условия на выходе.

В случае стационарного уравнения закона сохранения импульса для смеси ( $\epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = 1$ ) уравнение (1.35) становится квадратным. Второй корень имеет вид

$$\lambda_2 = \omega_g v_g + \omega_l v_l - \frac{c_m^2}{v_m}$$

Условия смены знака одной из характеристических скоростей, определяющие аналог звуковой поверхности, для систем с нестационарным и стационарным уравнением на импульс смеси совпадают

$$v_m (\omega_g v_g + \omega_l v_l) = c_m^2 \tag{1.36}$$

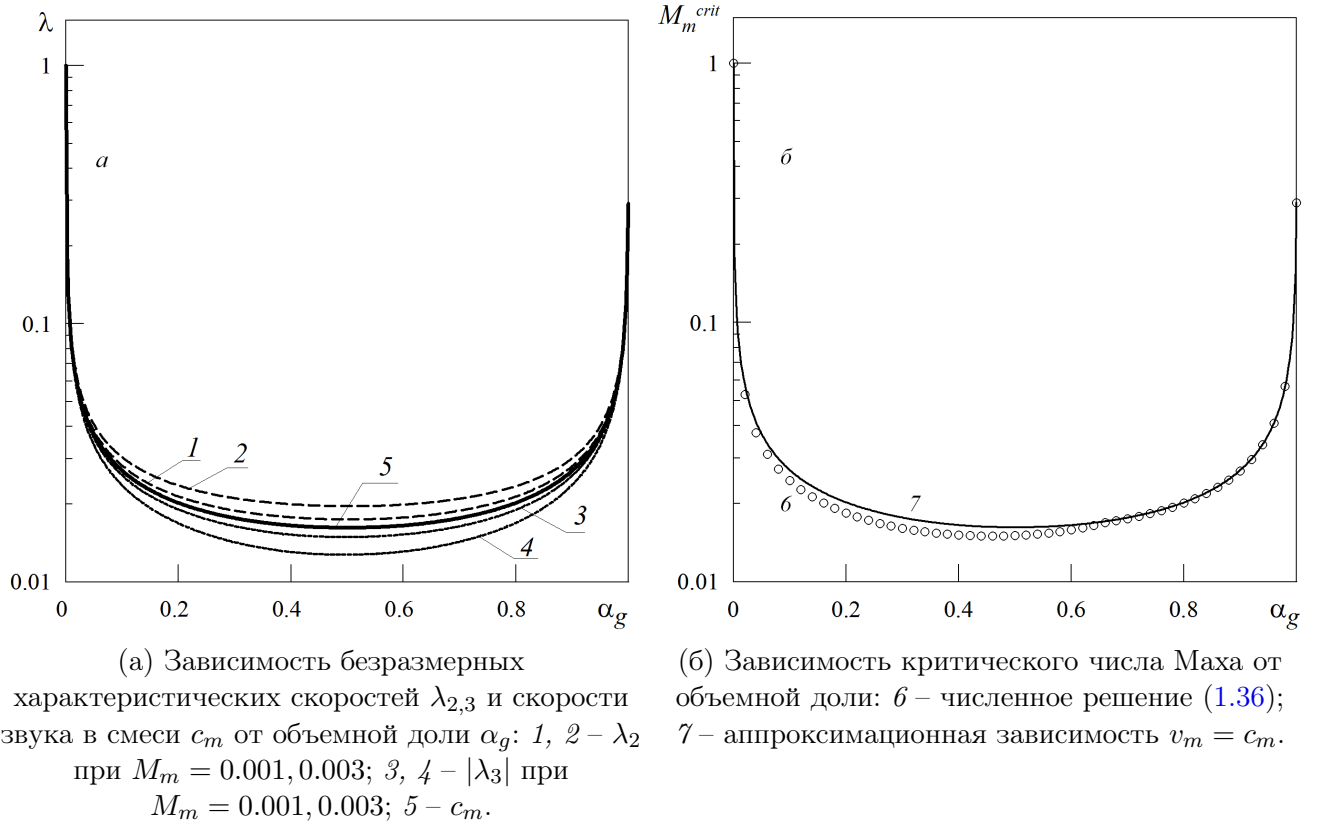


Рис. 1.6: Зависимости характеристических скоростей, скорости звука в смеси и критического числа Маха от объемной доли.

Рис. 1.6 построен для замыкающих соотношений из [44], полученных калибровкой относительно большого набора экспериментальных данных и использующихся при моделировании скважинных течений. Для данного вида замыкающих соотношений скорости фаз и характеристики являются функциями шести безразмерных параметров –  $\alpha_g$ ,  $\eta$ ,  $K$ ,  $M_m$ ,  $M_d = u_d^0/c_l$ , где  $u_d^0 = u_d^0(p) = v_d(0, v_m, p)$ , и безразмерного диаметра трубы  $\hat{d}$  (определен в [44]). Для  $\eta$  и  $K$  использованы значения для течения нефть-газ из табл. 1.1, причем  $M_d = 1.5 \cdot 10^{-4}$  и  $\hat{d} = 47$ , характерны для скважинных течений. На рис. 1.6а представлены зависимости звуковых характеристических скоростей  $\tilde{\lambda}_{2,3} = \lambda_{2,3}/c_l$  от  $\alpha_g$ . На рис. 1.6б представлены зависимость критического числа Маха  $M_m^{crit}$  от объемной доли, полученная численным решением (1.36), и аппроксимационная зависимость  $M_m^{crit} = c_m/c_l$ .

Исключая пространственную производную скорости смеси с помощью (1.9), из суммы уравнений неразрывности (1.1) в случае стационарного уравнения



закона сохранения импульса для смеси имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial p}{\partial z} = C$$

где  $C$  – сумма алгебраических членов.

Следовательно, одно из уравнений (1.1), (1.9) может быть приведено к форме уравнения переноса для давления. Таким образом, в данном случае давление является инвариантом Римана и переносится вдоль характеристики  $dx/dt = \lambda_2$ . Поскольку при характерных для скважинных течений расходах знаки  $\lambda_2$  и скорости смеси не совпадают, для системы со стационарным уравнением закона сохранения импульса смеси однозначно определена постановка граничного условия для давления на выходе из трубы.

Наконец, для случая безынерционного уравнения на импульс смеси ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ ) корень  $\lambda_1$  - единственный в согласии с результатами [39].

### 1.3 Численная реализация и верификация

Настоящий раздел посвящен алгоритму численного решения системы уравнений модели дрейфа и верификации реализации алгоритма относительно аналитических решений.

Для гиперболических систем квазилинейных уравнений первого порядка (1.30), к которым относится обсуждаемая в работе система уравнений модели дрейфа (1.1), (1.9), традиционно применяются явные методы численного интегрирования [64]. Шаг по времени обеспечивающий устойчивость для таких методов определяется условием Куранта-Фридрихса-Леви по характеристическим скоростям. Поскольку при моделировании многофазных течений в скважинах и трубопроводах особый интерес представляют достаточно медленные процессы, характерный временной масштаб которых определяется медленными характеристиками, а не распространением быстрых волн давления, неявные методы численного интегрирования оказываются более предпочтительными, как менее требовательные к шагу по времени. В тоже время, полностью неявные мето-

ды, обеспечивающие устойчивые и эффективные с точки зрения машинного времени способы решения в пластовых симуляторах [66], имеют свои ограничения. В частности, к недостаткам с точки зрения моделирования течения в единственной скважине и исследовательского характера расчетов можно отнести то, что основой численной схемы является Якобиева матрица отображения из вектора искомым переменных в вектор потоков, вычисленная аналитически. Такой подход, оправданный в пластовых симуляторах для моделирования систем масштаба месторождения, где скорость вычислений является критическим показателем, сильно затрудняет усложнение физической модели и повышение порядка аппроксимации численной схемы. Для исследовательских целей желательно использование более гибких численных методов.

В данной работе используется итерационный метод численного решения уравнений модели дрейфа, основанный на полунеявном методе для уравнений со связью по давлению (SIMPLE – Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) [67, 68]. Метод SIMPLE, впервые предложенный для решения параболических уравнений Навье-Стокса [67], может быть адаптирован для применения к многофазным течениям. Два класса подобных алгоритмов, а именно алгоритмы, основанные на сохранении массы (МСВА – Mass Conservation Based Algorithms) [69], и алгоритмы, основанные на сохранении объема (ГСВА – Geometry Conservation Based Algorithms) [70], успешно применяются для решения уравнений описывающих многофазные течения в рамках многоконтинуального подхода. Разница между этими классами определяется способом конструирования уравнения на поправку давления. В работе произведена адаптация алгоритма МСВА-SIMPLE для решения уравнений модели дрейфа и специфических для скважинных симуляторов задач. Ниже представлено краткое описание метода SIMPLE, а также две задачи, иллюстрирующие корректность реализации численного алгоритма. Аналитические решения тестовых задач вынесены в Приложение В.

В основе метода лежит представление давления и скорости в виде суммы предполагаемых распределений  $p^*$  и  $v_m^*$  и поправок к ним  $p'$  и  $v_m'$  на каждом

шаге по времени. Все зависящие от давления величины также представляются в виде суммы предполагаемых значений, вычисленных по  $p^*$  и поправок. Связь между поправками давления и скорости может быть получена линеаризацией уравнения (1.9)

$$v'_m = -\frac{\Delta t}{\rho_m} \frac{\partial p'}{\partial z}, \quad (1.37)$$

где  $\Delta t$  - шаг дискретизации по времени. Итерационная процедура состоит из следующих шагов:

1. Выбор предполагаемого распределения давления. На первой итерации выбирается решение с предыдущего шага по времени, затем с предыдущей итерации.
2. Решение уравнения (1.9) относительно  $v_m$  с использованием  $p^*$  и получение  $v_m^*$ .
3. Решение уравнения на поправку давления, которое конструируется как взвешенная сумма уравнений неразрывности.
4. Исправление распределения давления суммированием предполагаемого значения и поправки  $p = p^* + p'$ .
5. Вычисление поправки к скорости по формуле (1.37) и исправление распределения скорости смеси  $v_m = v_m^* + v'_m$ .
6. Вычисление скоростей фаз по формулам модели дрейфа (1.5) и решение уравнений неразрывности относительно объемных долей.
7. Подстановка полученного решения в уравнения и проверка дисбалансов.

В случае, если дисбалансы оказываются больше наперед заданных значений, итерация повторяется.

Итерационный алгоритм реализован для аппроксимации уравнений с первым порядком по временной и пространственной координатам на неоднородной разнесенной сетке. Вычислительная область разбивается на ячейки переменной длины. Скорости и потоки вычисляются на гранях ячеек, в то время как

давление и объемные доли вычисляются в центрах ячеек. При необходимости значения этих величин на гранях ячеек вычисляются линейной интерполяцией или сносом из центров в соответствии с направлением скорости. Реализованы три типа граничных условий с возможностью переключения между ними в течение расчета – вход, выход, непроницаемая стенка. На входе задаются значения скорости смеси и объемных долей. При решении уравнения на импульс используется заданное значение скорости. При решении уравнения на поправку давления используется равенство нулю поправки скорости и градиента поправки давления. При решении уравнений неразрывности используются заданные значения объемных долей и скорости фаз вычисленные по замыкающим соотношениям модели дрейфа. На выходе считается заданным давление, объемные доли и скорости являются результатом вычислений. При решении уравнения на поправку давления явно используется равенство поправки на грани ячейки нулю. Граничное условие типа стенка используется при моделировании закрытия скважины. При задании условия типа стенка на границе вычислительной области задаются нулевые потоки для каждой из фаз. При решении уравнения на импульс используется заданное нулевое значение скорости смеси; при решении уравнения на поправку давления используется равенство нулю поправки скорости и градиента поправки давления; при решении уравнений неразрывности явно используются нулевые значения потоков через грань ячейки.

### 1.3.1 Восстановление давления при закрытии скважины.

Рассматривается вертикальная скважина длиной  $L = 3000$  м постоянного сечения с диаметром  $d = 0.1$ , м соединенная с пластом. Жидкость, поступающая из пласта, считается слабосжимаемой с плотностью  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup> и скоростью звука 1000 м/с. Считается, что толщина пласта много меньше длины скважины. Приток  $q$  пропорционален разности пластового давления  $p_r = 350$  бар и давления в скважине в точке соединения с пластом  $p_{wf}$  в соответствии с формулой

$$q = PI(p_r - p_{wf}) \quad (1.38)$$

где  $PI = 4.4 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{с}/\text{Па}$  – коэффициент продуктивности пласта.

В момент времени  $t = t_0$  скважина, в которой установилось стационарное однофазное течение, закрывается на поверхности. Давление в точке соединения постепенно повышается до пластового, и при этом приток затухает. Для такой задачи возможно линеаризовать уравнения [71] и получить аналитическое решение для зависимости давления от времени (см. Приложение В.1). На Рис. 1.7 показано сравнение численного и аналитического решения для кривых восстановления давления на устье скважины  $p_{wh}$  и в точке соединения скважины с пластом  $p_{wf}$ . В качестве масштаба давления выбрано давление в пласте  $p_r$ , характерный масштаб времени вычислен по длине  $L$  и характерной скорости течения до закрытия  $U$ , определяемой из (1.38). Как видно из рисунка, численное решение находится достаточно близко к результату, полученному аналитически.

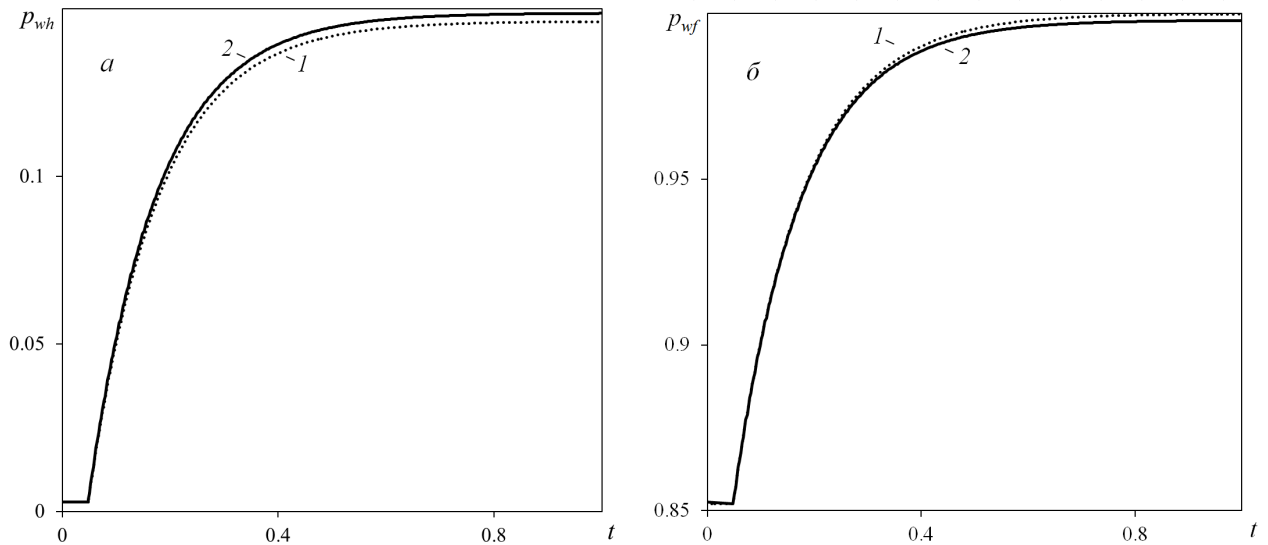


Рис. 1.7: Зависимость устьевого давления от времени (а). Зависимость забойного давления от времени (б). Кривые 1 – численное решение, 2 – аналитическое решение.

### 1.3.2 Гравитационная сегрегация.

Интерес к моделированию разнонаправленных течений, вызванных контрастом плотности, определяется влиянием, которое перераспределение фаз может оказывать на результаты гидродинамических исследований скважин. Рассмотрим вертикальную трубу постоянного сечения, которая заполнена неподвиж-

ными несжимаемыми жидкостью и газом. Более плотная жидкость занимает верхнюю половину трубы, менее плотный газ – нижнюю. Оба конца трубы закрыты. Перераспределение начинается в момент  $t = 0$  и продолжается до того момента, пока фазы полностью не поменяются местами. Данная искусственная формулировка позволяет получить аналитические решения для распределения объемных долей вдоль трубы (см. Приложение В.2), проконтролировать сходимость численных решений к аналитическим по сетке и проверить сохранение полного объема каждой из фаз по окончании сегрегации. Согласно результатам расчетов, представленным на Рис. 1.8, предложенные численные решения сходятся по сетке к аналитическому. Невысокая скорость сходимости объясняется тем, что использованы численные аппроксимации первого порядка по пространству и времени.

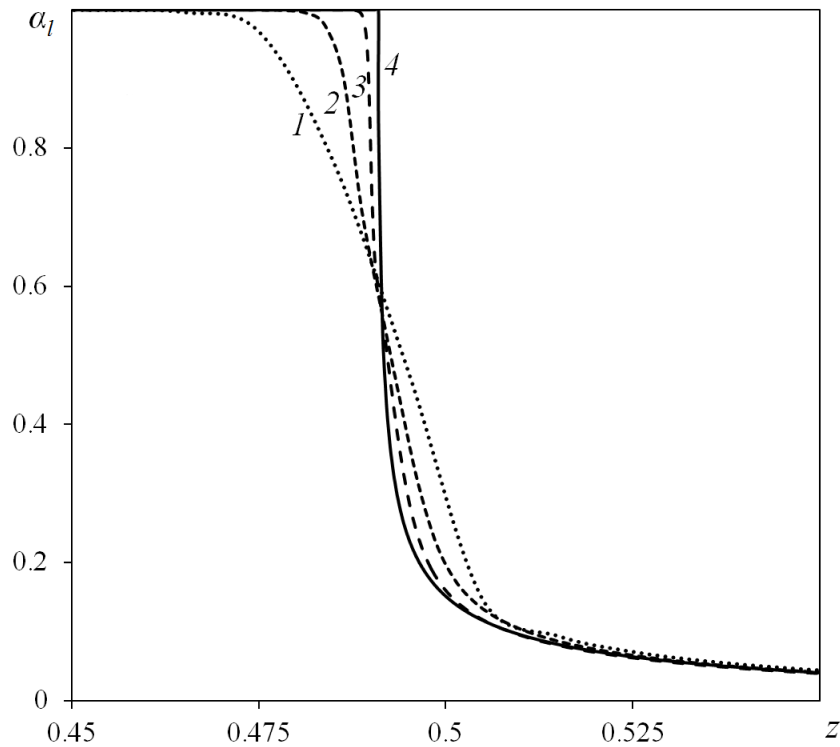


Рис. 1.8: Сегрегация газ-жидкость, распределение объемной доли жидкости по скважине при  $t = 36$  с. Аналитическое и численные решения, полученные при различном числе ячеек  $N$ . Кривые 1 –  $N = 100$ , 2 –  $N = 1000$ , 3 –  $N = 4000$ , 4 – аналитическое решение.

## 1.4 Приложение модели дрейфа к описанию пробкового режима течения, вызванного сложной геометрией трубопровода

Рассмотрим пробковый режим течения в W-образном трубопроводе на примере экспериментальных данных, приведенных в [49]. Подробное описание экспериментальной установки и значения параметров, не упоминаемые здесь явно могут быть найдены в цитируемой работе. Расход жидкости на выходе из системы и давления в определенных точках трубопровода в зависимости от времени являются наиболее важными характеристиками процесса с точки зрения практических приложений. В [49] измеренные значения расхода и давления для различных моментов времени приведены лишь для нескольких экспериментов. Экспериментальные данные для распределения объемных долей фаз также могли бы быть полезны для понимания процесса, однако не были приведены в оригинальной статье. Основное внимание в данной работе уделяется экспериментам 3, 4, и 9, где наблюдался ярко выраженный пробковый режим течения. В настоящей работе принимается та же нумерация экспериментов, что и в [49].

### 1.4.1 Описание эксперимента

**Трубопровод.** Экспериментальный трубопровод состоял из 4 прозрачных ПВХ трубок длиной 3.84 м и диаметром 51.8 мм, соединенных гибкими перемычками такого же диаметра и длиной 0.314 м, емкости для накопления газа и тройника с входами для жидкости, газа и соединения с емкостью. В численных расчетах емкость моделировалась как прямая труба объема равного объему емкости в эксперименте, расположенная за точкой подачи жидкости и газа. Конструкция трубопровода позволяла изменять углы наклона отдельных участков к горизонту. В экспериментах использовались два набора углов наклона  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  и  $\theta_4$  секций  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  и  $l_4$ , соответственно (см. Рис. 1.9 и Таб. 1.2). Измерения давления в различные моменты времени производилось в двух точках трубопровода, соответствующие значения давления обозначены  $P_1$  и  $P_2$  (см. Рис. 1.9).

Поскольку шероховатость труб используемых в эксперименте не была указана авторами, в численных расчетах использовалось среднее значение для ПВХ труб –  $4.25 \cdot 10^{-6}$  м.

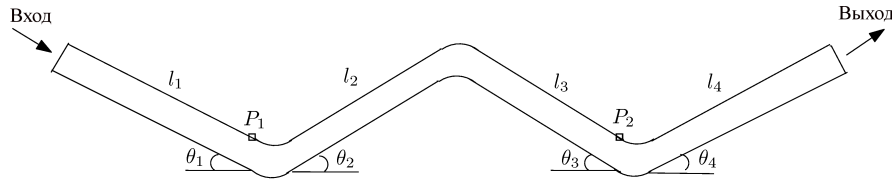


Рис. 1.9: Схема трубопровода, использованного в эксперименте.

Таблица 1.2: Конфигурации трубопровода, использованные в эксперименте.

Угол	Конфигурация 1	Конфигурация 2
$\theta_1$	$-15.0^\circ$	$-25.7^\circ$
$\theta_2$	$+15.0^\circ$	$+25.7^\circ$
$\theta_3$	$-15.0^\circ$	$-25.4^\circ$
$\theta_4$	$+13.6^\circ$	$+24.1^\circ$

**Свойства фаз.** В качестве жидкости и газа в эксперименте использовались водопроводная вода и атмосферный воздух [49]. В численных расчетах плотность воздуха в зависимости от давления вычислялась согласно уравнению идеального газа

$$\rho = \frac{p}{RT},$$

где  $R = 287.06$  Дж/кг/К – газовая постоянная воздуха,  $T$  – температура. Зависимость плотности воды от давления рассчитывалась согласно [72]. Плотности воды и воздуха при стандартных условиях принимались равными  $\rho_l = 997.8$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_g = 1.195$  кг/м<sup>3</sup>, вязкости воды  $\mu_l = 0.99$  сП и воздуха  $\mu_g = 1.82 \cdot 10^{-2}$  сП, поверхностное натяжение на границе раздела  $0.073$  Н/м. За стандартные условия приняты давление  $101325$  Па и температура  $21$  °С.

**Начальные и граничные условия.** В начальный момент времени трубопровод был заполнен покоящимся воздухом. В выходном сечении поддерживалось постоянные атмосферные давление и температура. В течение эксперимента в систему подавались постоянные расходы жидкой и газовой фаз. Значения тем-



ператур, давлений, расходов и использованные наборы углов наклона секций трубопровода к горизонту приведены в Таб. 1.3.

Таблица 1.3: Условия эксперимента

Эксперимент No.	$T$ , °C	$P_0$ , Па	$Q_g^{in}$ , $10^{-4}$ кг/с	$Q_l^{in}$ , кг/с	Конфигурация
1	22.0	97826	3.23	0.27	1
2	22.4	97657	12.09	0.14	2
3	21.2	97590	1.57	0.26	1
4	22.2	97657	3.15	0.26	1
5	22.2	97623	3.16	0.71	1
6	22.9	96982	12.09	0.12	1
7	22.8	97049	12.16	0.30	1
8	20.4	98467	1.55	0.11	2
9	22.7	98130	3.13	0.27	2
10	21.4	99143	3.14	0.50	2
11	20.6	97252	6.34	0.11	2

#### 1.4.2 Сеточная сходимость и настройка замыкающих соотношений

В качестве меры сравнения различных результатов моделирования между собой и с экспериментальными данными были выбраны следующие характеристики течения:

1. Время прихода жидкости на выход из трубопровода
2. Средняя по нескольким периодам амплитуда колебаний расхода
3. Средний период колебаний расхода
4. Средняя масса жидкости, покидающей систему за один период
5. Общий массовый расход за период времени, для которого доступны экспериментальные данные

Выбор обусловлен важностью перечисленных характеристик в целевых приложениях, связанных с процессом очистки скважин. Например, пиковое значение расхода и средняя масса жидкости покидающая скважину за период могут влиять на выбор поверхностного оборудования для проведения данной технологической операции. Заметим, что в случае установившегося периодического процесса с постоянными входными расходами и большого времени наблюдения

средняя масса жидкости, вышедшей из системы за один период и общий накопленный расход определяются исключительно количеством жидкости, подаваемым на вход установки. Однако, в случае сравнения с экспериментальными данными для эксперимента конечной длительности или реального процесса с расходами, зависящими от времени указанные величины могут отличаться от предельных значений.

В качестве базовой для расчетов была принята неоднородная сетка с ячейками размером в  $\Delta x = 0.239$  м и  $\Delta x = 0.314$  м для участков, соответствующих трубам и гибким переключкам между ними. Таким образом, трубопровод длиной  $L = 62.8$  м был разбит на  $N_0 = 290$  контрольных объемов. Численное решение уравнений модели дрейфа было получено на сетках из  $N = 2^n N_0$  контрольных объемов для  $n = \overline{0, 5}$  при сохранении числа Куранта-Фридрихса-Леви. С помощью экстраполяции Ричардсона (см. [73]) были получены бессеточные значения физических параметров и вычислена относительная ошибка значений, полученных на различных сетках, относительно бессеточных значений. Полагается, что для достаточно мелкого разбиения сетки  $h$  значение полученной из численного расчета величины  $s_h$  связано с истинным бессеточным значением  $s_0$  соотношением

$$s_h = s_0 + Ch^y,$$

где  $C = const$  не зависит от  $h$ ,  $y$  – порядок сходимости, также не зависящий от  $h$ . В таком случае значение  $s_0$  может быть вычислено по решениям на двух последовательных сетках  $h_1, h_2$ , где  $h_2 = rh_1, r < 1$ , следующим образом

$$s_0 = s_{h_1} + \frac{s_{h_2} - s_{h_1}}{1 - r^y}.$$

На Рис. 1.10а показано среднее значение  $R$  вектора ошибок по отношению к бессеточному решению для расчетов, соответствующих эксперименту No. 9, с набором настроечных параметров ORIGINAL из Таб. A.1 и различным числом ячеек пространственной сетки. В логарифмических координатах наклон прямой, аппроксимирующей зависимость ошибки от числа контрольных объемов по методу наименьших квадратов, дает эффективный порядок сходимости

сти численного решения  $y$  относительно выбранной метрики. В данном случае  $y \sim 0.69$ , что несколько ниже теоретического значения (порядка аппроксимации) 1. Рис. 1.10б иллюстрирует сеточную сходимость на примере зависимости расхода жидкости на выходе из трубопровода от времени.

В данной работе при настройке эмпирических замыканий было выбрано пороговое значение средней ошибки относительно эксперимента в 5%. На основании предварительного исследования сеточной сходимости было установлено, что для рассматриваемых задач средняя ошибка численного решения относительно бессеточного опускается ниже порогового значения для сетки сгущенной в 8 ( $n = 3$ ) раз относительно базовой. Расчеты с измененными значениями настроечных параметров проводились на сетке  $n = 3$ , так как при этом ошибка численного решения относительно точного оказывается заведомо меньше ошибки точного решения относительно эксперимента.

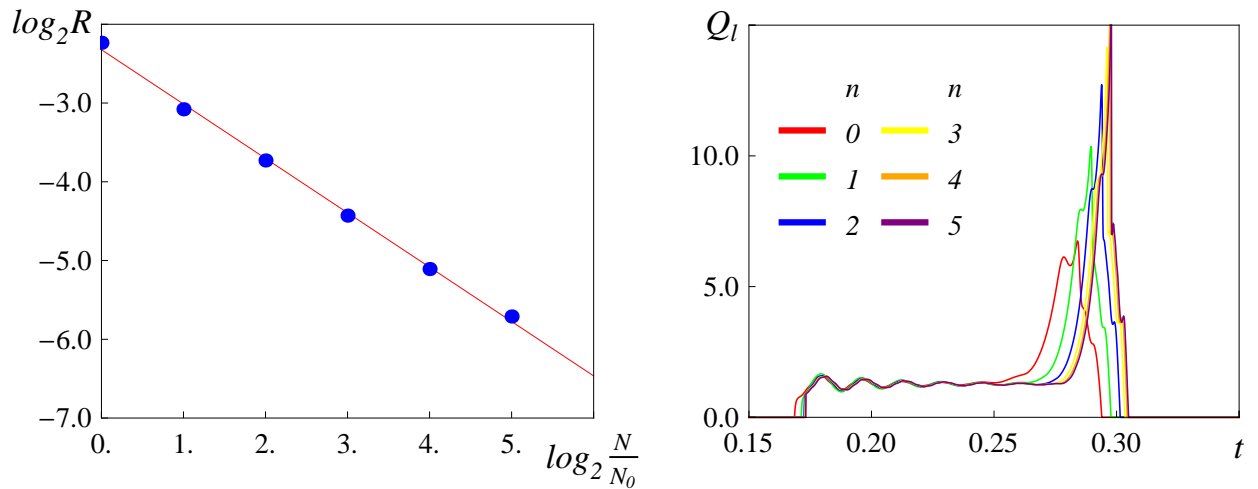


Рис. 1.10: Сеточная сходимость. Зависимость средней ошибки от числа ячеек, эксперимент No. 9 (a); численное решение для зависимости расхода жидкости на выходе из трубопровода от времени, полученное на сетках с  $N = 2^n N_0$  ячейками, эксперимент No. 9, первый цикл колебаний (б).

В качестве стартовых вектора настроечных параметров при оптимизации замыкающих соотношений модели дрейфа были выбраны набор ORIGINAL для восходящих течений и SHI-04 для нисходящих (см. Таб. A.1). Вектор настроечных параметров ORIGINAL был предложен в [74] по результатам калибровки замыканий на большом наборе данных для течений вода-воздух в вертикальных

трубах. Набор SHI-04 был получен после включение в базу экспериментальных данных измерений по течениям в наклонных трубах с последующей перекалибровкой замыканий [44].

Анализ чувствительности результатов моделирования к изменению различных настроечных параметров показывает, что наиболее сильное влияние на результаты оказывает изменение амплитуды скорости дрейфа в восходящих участках течения. С физической точки зрения данное наблюдение может быть обосновано следующим образом. После выплеска жидкой пробки, которым заканчивается цикл колебаний, в системе остается некоторая масса жидкости, зависящая от эффективного проскальзывания между фазами в период резкого возрастания выходного расхода. Остаточная масса и, соответственно, уровень жидкости определяют время необходимое для того, чтобы газ полностью вытеснил жидкость из входной секции трубопровода и произошел следующий выплеск.

Наилучшее совпадение по трем экспериментам 3, 4 и 9 получено со следующими наборами настроечных параметров замыкающих соотношений:

- Нисходящие течения: набор из [45] (SHI-04 в Таб. A.1);
- Восходящие течения: набор из [74] (ORIGINAL в Таб. A.1) с измененными значениями  $n_1 = 1.06$  и  $n_2 = 1.94$ , отвечающими за зависимость скорости дрейфа от угла наклона трубы к горизонту (см. (A.3)).

Полученный вектор настроечных параметров является универсальным для всех экспериментов, рассматриваемых в работе.

### 1.4.3 Результаты

Результаты моделирования с полученным вектором настроечных параметров показаны на Рис. 1.13. Для количественного сравнения численного решения уравнений модели дрейфа и экспериментальных данных использовалась та же метрика, что и при исследовании сеточной сходимости при фиксированных замыканиях. Вычисленные значения ошибок для различных характеристик про-

цесса относительно эксперимента приведены в Таб. 1.4. В качестве характерных масштабов расхода и давления выбраны расход на входе в трубопровод  $Q_l^{in}$  и давление на выходе, заданные в эксперименте. Характерный масштаб времени вычислен по полной длине трубопровода  $L$  и характерной скорости жидкости, определяемой по  $U = Q_l^{in} / \rho_l S$ , где  $S$  – площадь сечения трубы.

Таблица 1.4: Относительная ошибка моделирования относительно экспериментальных данных, %.

Эксп. No.	Время прихода жидкости	Амплитуда колебаний расхода	Период	Масса жидкости за период	Общий массовый расход	Средняя ошибка
3	0.77	8.45	2.97	2.87	0.10	3.03
4	0.24	11.63	2.93	1.26	1.04	3.42
9	3.20	0.41	2.70	2.04	2.16	2.10

Сравнение результатов моделирования для давлений  $P_1$  и  $P_2$  с экспериментальными данными приведено на Рис. 1.13. Вычисленные зависимости давлений от времени также находятся в неплохом согласии с экспериментом.

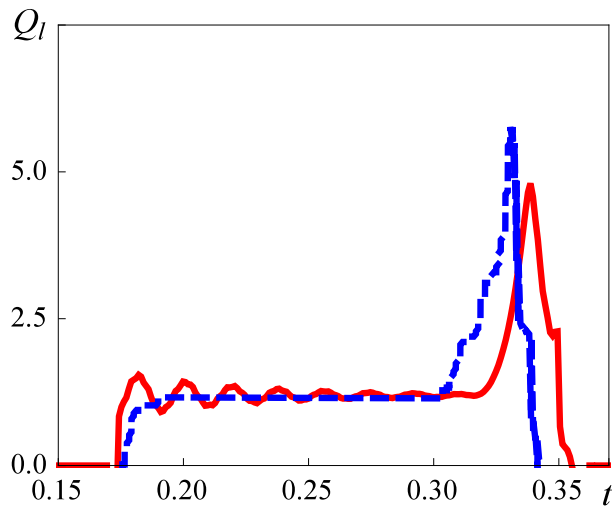


Рис. 1.11: Сравнение экспериментальных данных и результатов моделирования, эксперимент No. 3, первый цикл.

На Рис. 1.11 показано детальное сравнение экспериментальных данных и результатов моделирования для первого периода колебаний расхода жидкости на выходе из системы эксперимента 3. Численное решение демонстрирует некоторые осцилляции расхода в промежуток времени, следующий за моментом

первого прихода жидкости на выход, не наблюдающиеся в экспериментальных данных.

Настройка замыкающих соотношений модели дрейфа выполнялась на экспериментах 3, 4 и 9, в которых наблюдался ярко выраженный сформировавшийся пробковый режим течения и доступно наибольшее количество данных. Предиктивные возможности настроенной модели могут быть протестированы на наборе экспериментов, не использовавшихся для настройки. Единственной величиной, приведенной в оригинальной экспериментальной работе [49] для всех 11 экспериментов является период колебаний расхода и давлений. В Таб. 1.5 приведено сравнение экспериментальных периодов с полученными численным решением уравнений модели дрейфа. Результаты в Таб. 1.5 вычислены для решений на сетке, идентичной использованной для расчетов, представленных на Рис. 1.11-1.13, с использованием того же вектора настроечных параметров и одинаковым числом шагов по времени для всех расчетов.

Таблица 1.5: Сравнение экспериментальных данных и результатов моделирования для периода пробкового течения

Эксперимент No.	Тип	Период эксперимент, с	Период моделирование, с	Относительная ошибка, %
1	–	–	–	–
2	–	–	–	–
3	I	92.1	89.3	3.0
4	II	59.0	60.7	3.0
5	I	45.2	50.8	12.3
6	II	–	–	–
7	II	12.0	19.7	64.4
8	I	182.5	193.7	6.1
9	I	95.4	98.0	2.7
10	I	89.2	88.8	0.4
11	II	75.2	62.0	17.6

Заметим, что для экспериментов 3, 4 и 9 экспериментальные периоды приведенные в Таб. 1.5 вычислены по оцифрованным кривым зависимостей расхода и давления от времени, использованным при настройке замыкающих соотношений, описанной ранее и не совпадают с указанными в [49]. Поскольку именно оцифрованные данные использовались для построения целевой функции при настройке замыканий, замена представляется оправданной с точки зрения со-

гласованности сравнения. Относительное отличие между периодами полученными по кривым зависимостей расхода и давления от времени и приведенными в [49] не превышает 2%.

В экспериментах 1, 2 пробковый режим течения не наблюдался. Некоторые колебания расхода были объяснены в [49] неустойчивостью течения в выходной секции трубопровода. Результаты моделирования находятся в согласии с экспериментальными наблюдениями. В эксперименте 1 расход жидкости и давления  $P_1$  и  $P_2$  достигают стационарного значения после некоторого начального периода установления течения. Для эксперимента 2 результаты моделирования демонстрируют коротко-периодические осцилляции расхода и давлений около стационарных значений (см. Рис. 1.12). Следуя терминологии оригинальной экспериментальной работы данные колебания не могут быть классифицированы как пробковый режим течения, вызванный геометрией трубопровода.

В эксперименте 6 наблюдались сложные апериодические колебания расхода и давлений около средних значений. Эта особенность также неплохо воспроизводится численным решением. Тем не менее, выделение основного периода колебаний оказывается невозможным как для экспериментальных данных, так и для результатов моделирования (см. Рис. 1.12).

Согласие результатов моделирования с экспериментом очевидно оказывается наилучшим для экспериментов 3, 4 и 9, использованных при построении целевой функции при настройке замыкающих соотношений модели дрейфа. Моделирование экспериментов 5, 8 и 10 также дает хорошее, или по крайней мере приемлемое совпадение с данными. Наибольшее расхождение наблюдается для экспериментов 7 и 11, в которых расход газа был относительно высок. Данное наблюдение позволяет определить диапазон параметров течения, в котором замыкания модели дрейфа требуют дальнейшего улучшения.

Следуя классификации, предложенной в [49], рассматриваемые эксперименты можно разделить два класса. Класс I характеризуется наличием продолжительного промежутка времени между моментом появления жидкости на выходе из трубопровода и резким возрастанием расхода (выплеском), в течение которо-

го расход и давления остаются приблизительно постоянными (см. эксперименты 3 и 9 на Рис. 1.13а, 1.13б, 1.13д, 1.13е). В экспериментах, относимых к классу II этот промежуток отсутствует (эксперимент 4, Рис. 1.13в, 1.13г). Модель дрейфа с настроенными замыкающими соотношениями успешно воспроизводит наблюдаемый тип пробкового режима для всех экспериментов. Разница между предсказанными и наблюдаемыми значениями периодов в среднем выше для типа II, который оказывается более чувствительным к параметрам модели и, как указывалось авторами [49], экспериментальным условиям.

Изложенные в главе 1 результаты опубликованы в печатных работах [1–5, 7–9, 11, 13].



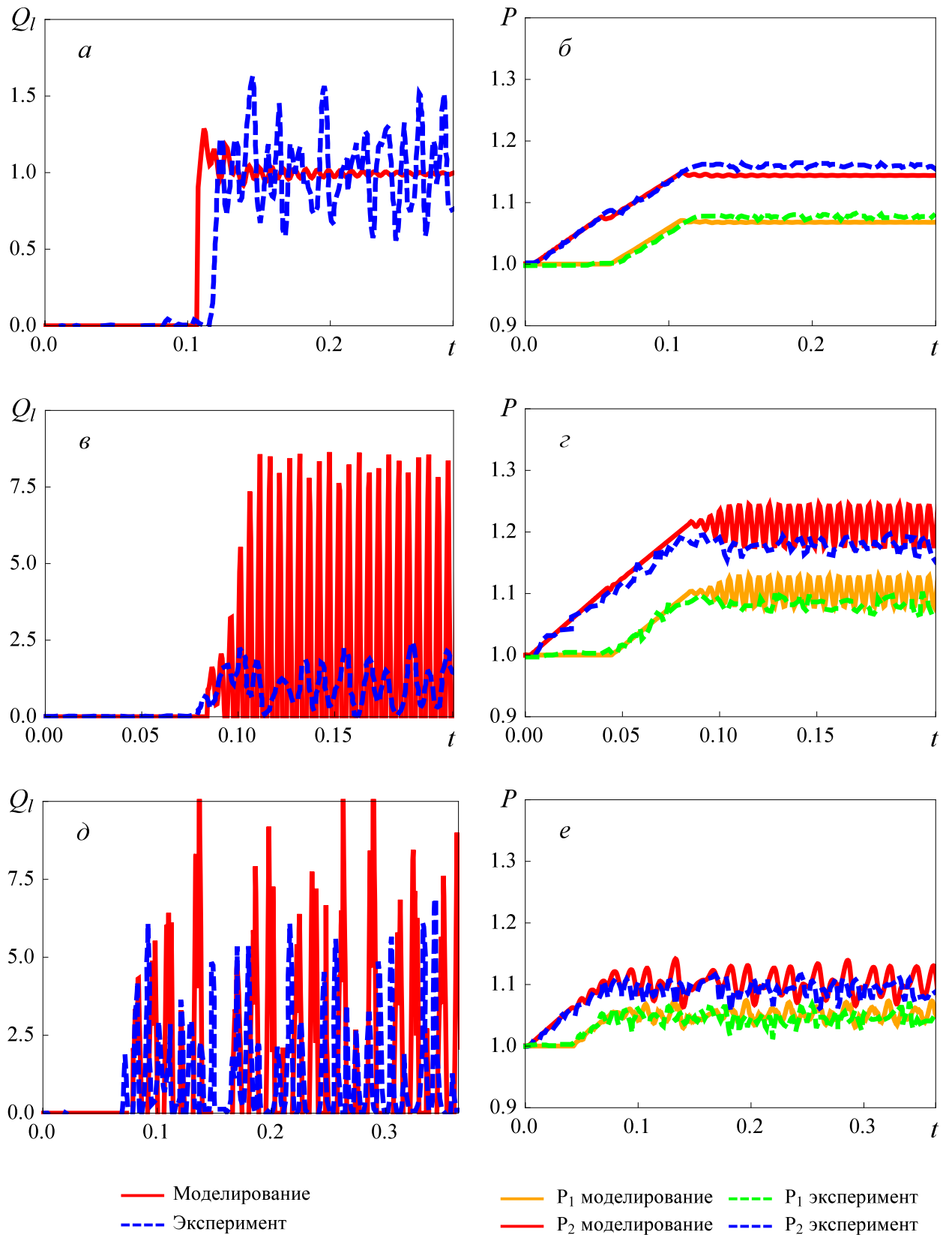


Рис. 1.12: Сравнение экспериментальных данных и результатов моделирования, эксперименты No. 1, 2, б. *a*, *в*, *д* – зависимость массового расхода жидкости на выходе из трубопровода от времени; *б*, *г*, *е* – зависимость давлений в точках  $P_1$ ,  $P_2$  от времени: - - - эксперимент, — — моделирование.

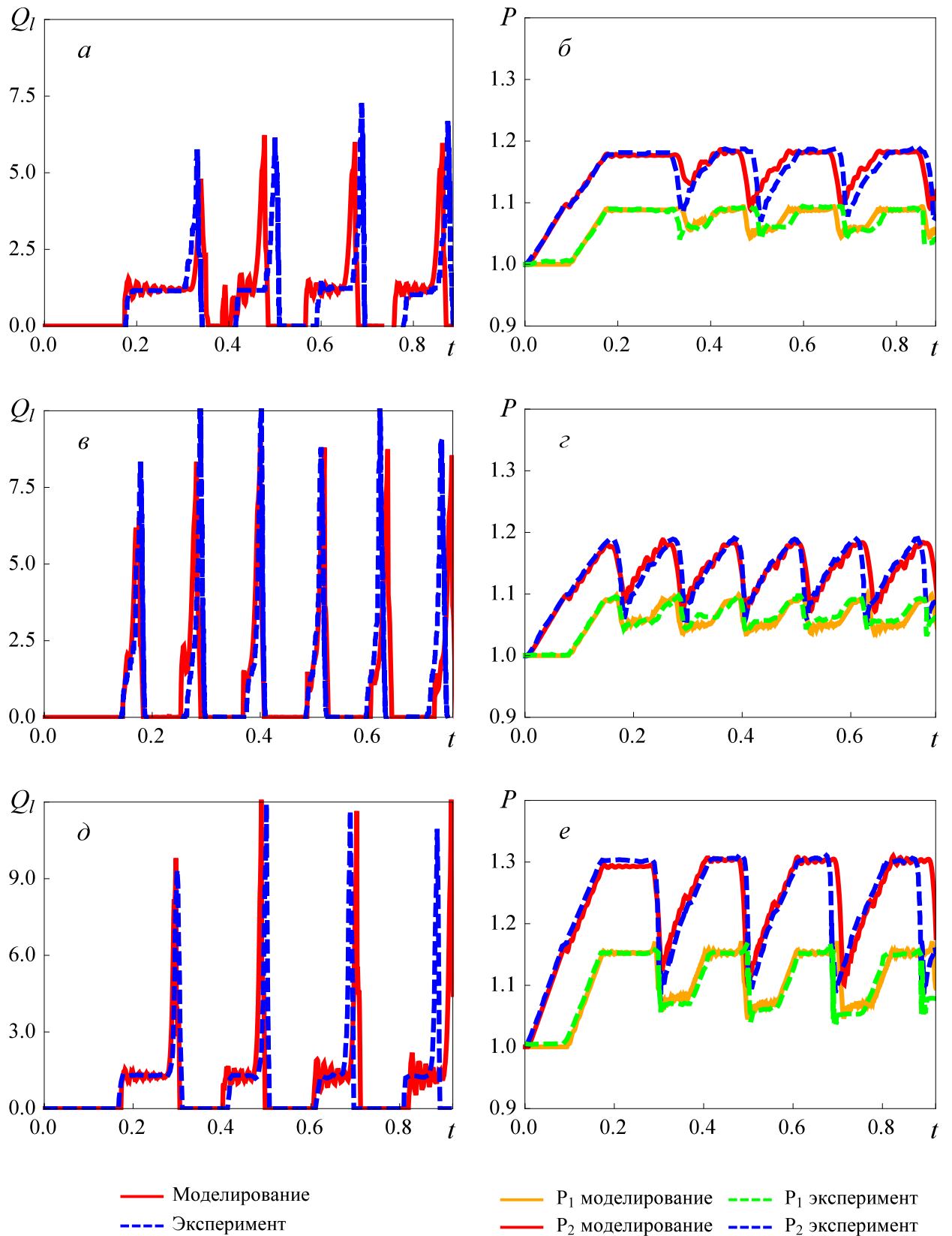


Рис. 1.13: Сравнение экспериментальных данных и результатов моделирования, эксперименты No. 3, 4, 9. *а, в, д* – зависимость массового расхода жидкости на выходе из трубопровода от времени; *б, г, е* – зависимость давлений в точках  $P_1, P_2$  от времени: - - - эксперимент, — — моделирование.

## Глава 2

# Модели переноса твердой фазы в трубопроводах

В данной главе рассматриваются задачи о переносе твердой фазы в трубопроводах потоком жидкости. Во введении формулируются задачи главы и приводится обзор литературы по рассматриваемым вопросам. Раздел 2.2 описывает модель образования осадка твердой фазы при течении суспензии в трубопроводе. В разделе 2.3 описываются рассматриваются задачи о гидравлическом транспорте твердых тел.

### 2.1 Обзор литературы

В первых исследованиях [75, 76] по теме гидравлического транспорта зернистых материалов была установлена классификация возможных режимов течения суспензии в горизонтальных трубопроводах, считающаяся верной и общепринятой до сих пор. Согласно этой классификации, возможно выделить 4–5 режимов:

- *Гомогенное течение* имеет место, как правило, при относительно высоких расходах, небольшой разности плотностей несущей и твердой фазы и/или относительно небольших размерах твердых частиц. Подобный режим течения успешно описывается в рамках модели эффективной жидкости.
- *Гетерогенное течение* формируется в случае, если эффекты осаждения частиц твердой фазы становятся более заметными по сравнению с эффек-

тами турбулентного перемешивания. Для гетерогенного режима необходимы, по сравнению с гомогенным, низкие расходы, более высокая разность плотностей, большие размеры частиц, большие концентрации твердой фазы.

– *Течение с формированием осадка* имеет место, если эффекты осаждения доминируют над турбулентным перемешиванием. Суспензия над слоем осадка может быть как гомогенной, так и гетерогенной. Последний случай более распространен. Определение осадка в некоторой степени условно и предполагает существование области с концентрацией твердой фазы, близкой к максимально возможной концентрации случайной упаковки. Также могут быть выделены как минимум два подрежима:

- Течение с движущимся осадком – результирующая сила, действующая на осадок достаточна для его проскальзывания относительно стенки.
- Течение со стационарным осадком.

В случае, если осадок движется, внутри него может присутствовать относительное сдвиговое перемещение частиц, как правило внутри слоев скользящих друг относительно друга. Для формирования движущегося осадка необходимы, по сравнению со стационарным, более высокие расходы, меньшие разности в плотностях, и более низкие концентрации. На границе осадка и суспензии имеют место процессы осаждения и ресуспензирования.

– В *полностью расслоенном течении* все твердые частицы заключены в осадке, над которым течет чистая несущая жидкость. Между слоями может происходить незначительный обмен массой за счет сальтации, т.е. временного отрыва частиц от поверхности и переноса потоком на небольшое расстояние с последующим осаждением.

Исторически, наибольший интерес для исследователей представляли переходы между режимами течения, описываемые в терминах критических или переходных скоростей течения. Также предметом исследования являлась зависимость перепада давления на единицу длины трубопровода от различных

параметров суспензии и режима эксплуатации. Особое внимание к критическим скоростям и перепадам давления обусловлено в первую очередь практически соображениями. Поддержание низкой скорости течения необходимо для минимизации мощности, требуемой для прокачивания суспензии. В то же время скорость должна быть несколько выше критической, при которой начинается формирование осадка твердой фазы на стенках трубы и, как следствие, резко возрастают потери на трение. Ввиду чрезвычайной важности данной характеристики, для нее было предложено огромное число корреляций. В работе [77] проанализированы 44 модели из опубликованных в литературе на 2014 г. Было показано, что эмпирические корреляции допускают перекалибровку на расширенном наборе экспериментальных данных, значительно улучшающую точность предсказаний. Также рассмотрение множества моделей позволило установить значительные пробелы в экспериментальной базе приведенных исследований, существующие не смотря на десятилетия изучения двухфазных течений в трубопроводах.

В задачах связанных с течением суспензий в открытых каналах и переносом донных отложений естественными потоками для оценки градиента концентрации используется уравнение диффузии (см. например [78]). Распределение концентрации твердой фазы считается сформировавшимся в результате установления динамического равновесия между гравитационным осаждением и турбулентным ресуспензированием. Коэффициент диффузии частиц твердой фазы в турбулентном потоке часто полагается, в духе аналогии Рейнольдса, пропорциональным коэффициенту турбулентной диффузии, описывающему перенос импульса. Данный подход был адаптирован для трубных течений и получил развитие в двух направлениях.

В первую очередь, в последовавших работах были предприняты попытки уточнения замыкающих соотношений для уравнения на концентрацию для включения в модель эффектов стесненного осаждения и феноменологического учета влияния концентрации на интенсивность турбулентных пульсаций. В работе [78] был экспериментально установлен экспоненциальный характер зави-

симости концентрации от высоты при течении суспензии с относительно низкой концентрацией твердой фазы в канале прямоугольного сечения. Однако для течений с высокой загрузкой твердой фазы градиент концентрации оказался гораздо ниже предсказанного. Значительное улучшение модели было достигнуто с помощью использования поправки для скорости гравитационного осаждения типа [79] со степенной зависимостью скорости стесненного осаждения от объемной доли несущей фазы с показателем степени зависящим от числа Рейнольдса обтекания отдельной частицы. В [80] рассматривалась полидисперсная смесь частиц твердой фазы и было получено общее решение обобщения уравнения конвекции-диффузии на случай нескольких классов частиц. Работа [81] была посвящена уточнению зависимости коэффициента диффузии от отношения диаметров частиц твердой фазы и трубы и глобального числа Рейнольдса. Также была предложена новая корреляция для критической скорости течения и приведено сравнение с более ранними теоретическими и экспериментальными данными [82].

С другой стороны, ряд исследователей предпринимали попытки усложнения рассматриваемой модели с целью непосредственного учета взаимодействия частиц в течениях с конечной концентрацией твердой фазы и обратного влияния локальной концентрации на распределение скорости. В [83, 84] для нахождения равновесного распределения объемной доли твердой примеси по сечению трубопровода предлагалось уравнение выражающее баланс между силами действующими на частицу со стороны турбулентных вихрей, силой тяжести и силами межчастичных взаимодействий, вызванных столкновениями частиц движущихся в слоях жидкости с различными скоростями и исследованных в [85, 86]. Также совместно решались уравнения законов сохранения импульса для каждой из фаз, замкнутые явными зависимостями турбулентных напряжений от средних скоростей течения, объемной доли твердой фазы и координат в сечении трубы. Авторы [87] рассмотрели три условные зоны течения: движущийся осадок в нижней части трубы, сдвиговый слой над осадком и турбулентный слой в верхней части трубы. В осадке предполагалось отсутствие сдвига и при-

мерное равенство концентрации твердой фазы концентрации рыхлой упаковки. Также полагалось, что в сдвиговом слое частицы поддерживаются во взвешенном состоянии за счет комбинированного эффекта взаимодействия с турбулентными вихрями и межчастичных взаимодействий. Концентрация твердой фазы считалась линейной функцией высоты. Предполагалось, что в верхнем слое частицы поддерживаются исключительно турбулентной диффузией. Для вычисления профиля скорости течения вслед за [86] привлекалось дополнительное предположение о пропорциональности сдвиговых напряжений, вызванных взаимодействием частиц твердой фазы, нормальным напряжениям.

Современным примером развития данного подхода в направлении уточнения замыкающих соотношений является работа [88]. Модель для зависимости усредненной концентрации твердой фазы от координат в сечении основана на представлениях о структуре турбулентного течения, предложенных в [89], и эмпирических корреляциях из [90].

В большинстве экспериментальных и теоретических работ на тему гидравлического транспорта непроницаемых тел используется модель несжимаемой ньютоновской жидкости в турбулентном режиме течения в зазоре между длинной телом и стенками трубы (см. например, [91, 92]). Целью таких исследований обычно является построение модели, позволяющей определить такие практически значимые параметры процесса, как скорость движения тела и перепад давления, необходимый для его транспортировки. Для случая ламинарного течения ньютоновской жидкости в зазоре известны аналитические решения задач о концентрическом и эксцентрическом движении нейтрально-плавучих тел [93, 94].

Для практических приложений предпочтительным с точки зрения баланса между сложностью модели и точности предсказаний является описание течения жидкости в зазоре в терминах средних напряжений и средней скорости без привлечения моделей турбулентности. Для замыкания подобных моделей привлекаются дополнительные предположения или эмпирические зависимости.

В работе [91] для построения модели транспорта капсулы использовались корреляции для коэффициента трения в круглых трубах. Авторы предполагали, что средние напряжения на стенках трубы и капсулы пропорциональны квадратам средней по сечению скорости и разности скорости капсулы и средней по сечению скорости соответственно. Данный подход легко реализуем и показывает неплохое согласие при сравнении с экспериментальными данными, однако не самосогласован.

В работах [93, 95] для замыкания системы уравнений постулировался профиль средней скорости течения в зазоре между капсулой и трубой. В [93] для построения аналитической модели транспорта нейтрально плавучей капсулы было привлечено сильное предположение о подобии профиля скорости в зазоре при транспорте капсулы профилю скорости при течении чистой жидкости. В работе [95] было введено эффективное проскальзывание на поверхности капсулы, учитывающее изменение скорости жидкости в вязком подслое, толщина которого предполагалась пренебрежимо малой по сравнению с радиусами трубы и капсулы.

Постулирование распределения турбулентной вязкости использовалось в [92] для решения задач о движении плотов в русловом потоке и контейнеров в трубопроводе. В [96] аналогичные соображения привлекались для вычисления перепада давления при течении в кольцевом зазоре с движущимся ядром. Данный подход приводит к решению интегральных или обыкновенных дифференциальных уравнений и сшивке решений для различных областей на заранее неизвестных границах. При выводе результирующих систем уравнений используется множество дополнительных предположений, и чувствительность к ним результатов плохо поддается оценке.

Во многих технологических процессах также имеет место перемещение в трубах различных пористых агрегатов. Для деревообрабатывающей промышленности представляют интерес задачи, связанные с движением волокнистых суспензий [97, 98]. Ключевой особенностью таких суспензий является формирование пространственной сети соприкасающихся волокон, имеющей конечную



прочность при относительно невысоких объемных долях твердой фазы. Для таких течений в некотором диапазоне расходов через трубопровод имеет место стержневое течение суспензии с пористым проницаемым ядром, отделенным от стенки трубы зазором чистой несущей жидкости. В [99] была построена модель стержневого течения волокнистой суспензии без эффектов плавучести для ньютоновской несущей жидкости и нелинейно упругого твердого скелета ядра течения. В работе [100] решение осесимметричной задачи о стержневом течении, также не учитывающее эффекты плавучести, было получено на основе уравнений Бринкмана [101], обобщающих уравнения Дарси на случай относительно высоких пористости и проницаемости [102].

Использование волокнистых суспензий в качестве несущей жидкости для транспортирования гранулированных материалов, таких как каменный уголь, было предложено в 80-х гг. прошлого века [103]. В этом случае ядро течения имеет более сложную структуру по сравнению с имеющей место при движении волокнистой суспензии. Транспортируемый материал может быть как равномерно распределен внутри поддерживающей его сети волокон, так и сконцентрирован в ядре течения, окруженном волокнистой суспензией. В [104] была построена осесимметричная модель перемещения гранулированного материала в центральном ядре.

Движение пористых тел в жидкости тесно связано с более общей задачей о течении жидкости в смешанных областях, где часть рассматриваемого пространства заполнена насыщенной пористой средой. Теоретические работы в этой области можно разделить на две группы относительно используемых для описания течения уравнений и граничных условий. К первой группе относятся работы, использующие уравнения Дарси внутри и Навье-Стокса вне пористой среды при условии отсутствия скольжения на границе раздела пористая среда-чистая жидкость (см., например, [105]) или с эмпирическим условием, связывающим нормальную производную со скачком касательной скорости и допускающее ненулевое проскальзывание на границе [106]. Вторая группа включает в себя работы, основанные на использовании уравнений Бринкмана [101] и условий

непрерывности напряжений на границе пористой среды и свободного потока. Задача о корректной постановке граничных условий на поверхности пористой среды представляет отдельный большой интерес (см., например, [107, 108]). В данной работе используется первый подход с условием на скачок касательной скорости [106].

В отличие от исследований, упомянутых выше, одной из задач данной работы является построение модели гидравлического транспорта длинного пористого проницаемого тела неньютоновской жидкостью. Относительно близкой к рассматриваемому классу течений является задача о движении неньютоновской жидкости в кольцевом зазоре с движущимся внутренним ядром. В работе [109] было получено обобщение решения для кольцевого течения Куэтта с наложенным внешним градиентом давления несжимаемой жидкости со степенной реологией. Предельным случаем рассматриваемой в настоящей работе задачи о транспорте цилиндрического тела в трубе является задача об осаждении тел цилиндрической формы относительно покоящейся жидкости, которая важна с точки зрения приложений к измерениям реологических параметров неньютоновских жидкостей [110].

## 2.2 Модель образования осадка при течении суспензии

В настоящей работе предлагается математическая модель для нахождения распределения частиц твердой фазы в сечении трубы. Распределение описывается квазистационарным уравнением конвекции-диффузии для локальной концентрации частиц. Данный подход позволяет моделировать образование и эрозию осадка твердых частиц на стенках трубы. Модель описывающая распределение твердой фазы по сечению может быть использована в качестве эффективного замыкающего соотношения для систем уравнений законов сохранения записанных на масштабе длины трубопровода. С точки зрения удобства численного решения уравнений модели представляется целесообразной реализация предлагаемой подмодели для распределения твердой фазы по сечению в

отдельном программном модуле, пригодном для сопряжения с существующими одномерными нестационарными симуляторами многофазных течений в трубах.

Ключевые предположения, используемые при построении моделей рассматриваемого типа могут быть сформулированы следующим образом:

- В каждом сечении трубы присутствуют гетерогенный слой суспензии и осадок. Объемная доля твердой фазы в осадке равняется максимальной объемной доле плотной упаковки  $\phi_{max}$ .
- Время релаксации распределения твердой фазы по сечению много меньше характерного времени переноса на масштабе длины трубопровода.
- Распределение твердой фазы по сечению устанавливается балансом между гравитационным осаждением и турбулентным ресуспензированием.

В приведенных предположениях уравнение для распределения твердой фазы по сечению имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial y} \phi_s v_S = \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon_s \frac{\partial \phi_s}{\partial y} \right), \quad (2.1)$$

где  $y$  – координата, отсчитываемая от нижней точки сечения,  $\phi_s$  – локальная, усредненная по хорде концентрация твердой фазы,  $v_S$  – скорость стесненного осаждения,  $\varepsilon_s$  – коэффициент турбулентной диффузии. Скорость стесненного осаждения [79] и коэффициент турбулентной диффузии [88] считаются функциями объемной доли

$$v_S(\phi_s) = v_S^0 f_1(\phi_s), \quad \varepsilon_s(\phi_s) = U_0 D \varepsilon_s^0(\delta, \text{Re}, s) f_2(\phi_s), \quad (2.2)$$

где  $v_S^0$  – скорость осаждения одиночной частицы,  $U_0$  – средняя по сечению скорость течения суспензии,  $D$  – диаметр трубы,  $\delta = d_p/D$  – отношение диаметров частицы и трубы,  $\text{Re}$  – глобальное число Рейнольдса, вычисленное по средней скорости течения, диаметру трубы и вязкости несущей жидкости,  $s$  – отношение плотностей твердой фазы и несущей жидкости.

Граничные условия для (2.1) ставятся следующим образом

$$\phi_s(y_b) = \phi_0, \quad \left( \varepsilon_s \frac{\partial \phi_s}{\partial y} + \phi_s v_S \right) \Big|_{y=D} = 0, \quad (2.3)$$

где  $y_b$  – заранее неизвестная высота осадка,  $\phi_0$  – заранее неизвестная объемная доля твердой фазы при  $y = y_b$ . Второе из условий (2.3) выражает равенство нулю потока твердой фазы  $y = D$ .

Интегрируя (2.1) с учетом последнего условия можно получить следующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения относительно объемной доли

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial y} + \text{Pe} f(\phi_s) = 0, \phi_s(y_b) = \phi_0, \quad (2.4)$$

где  $\text{Pe} = v_S^0 / (U_0 D \varepsilon_s^0)$  – число Пекле,  $f(\phi_s) = \phi_s f_1(\phi_s) / f_2(\phi_s)$ ,  $y = y^* / D$  и  $y_b = y_b^* / D$  – безразмерные координата и высота осадка.

На решение  $\phi_s(y)$  задачи (2.4) накладывается условие нормировки

$$\int_0^{y_b} \phi_{max} S(y) dy + \int_{y_b}^1 \phi_s(y) S(y) dy = \langle \phi_s \rangle, \quad (2.5)$$

где  $S(y) = \sqrt{1 - (1 - 2y)^2}$  – длина хорды,  $\langle \phi_s \rangle$  – средняя по сечению объемная доля твердой фазы. При заданных значениях числа Пекле  $\text{Pe}$  и средней объемной доли  $\langle \phi_s \rangle$  последнее уравнение является алгебраическим уравнением относительно двух неизвестных – высоты осадка  $y_b$  и  $\phi_0$ . При наличии осадка ненулевой высоты должно выполняться равенство объемной доли  $\phi(y_b)$  объемной доле плотной упаковки  $\phi_{max}$ . Таким образом, при решении (2.5) для  $y_b > 0$  принимается  $\phi_0 = \phi_{max}$ . В случае нулевой высоты осадка  $y_b = 0$  уравнение (2.5) разрешается относительно  $\phi_0$ .

Поскольку  $f(\phi_s) > 0$  решения (2.4) монотонно убывают на интервале  $[y_b, 1]$ . Следовательно, левая часть уравнения (2.5) является монотонно возрастающей функцией высоты осадка для  $y_b > 0$  и  $\phi_0$  для  $y_b = 0$  а значит, решение (2.5) существует и единственно.

В случае произвольной формы замыкающих соотношений для скорости стесненного осаждения и коэффициента диффузии уравнение (2.5) может быть разрешено только численно. В данной работе для решения задачи Коши для ОДУ(2.4) используется классический метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Полученное решение интегрируется с помощью квадратурных формул Гаусса-

Лежандра. Для решения результирующего уравнения (2.5) применяется метод Риддера, не требующий вычисления производных функции стоящей в левой части уравнения.

Предлагаемая модель может быть использована для замыкания систем уравнений законов сохранения для двухфазных течений жидкость-твердые частицы, записанных на масштабе длины трубопровода относительно осредненных по сечению объемных долей и скоростей фаз. Результатом решения таких систем будут значения средних скорости течения  $U$  и объемной доли  $\langle \phi_s \rangle$ . По заданным распределениям скорости и объемной доли в каждом сечении может быть решена задача о распределении твердой фазы и образовании осадка, решение которой, в свою очередь замкнет уравнения для средних характеристик процесса.

На Рис. 2.1 показаны результаты сравнения результатов вычислений по изложенной модели с экспериментальными данными из [111]. Поскольку в данном случае в неизменном виде используются замыкающие соотношения [79,88] сравнение проведено для верификации реализации численного алгоритма решения (2.4), (2.5). Сравнение показывает хорошее совпадение с результатами [88] и экспериментальными данными.

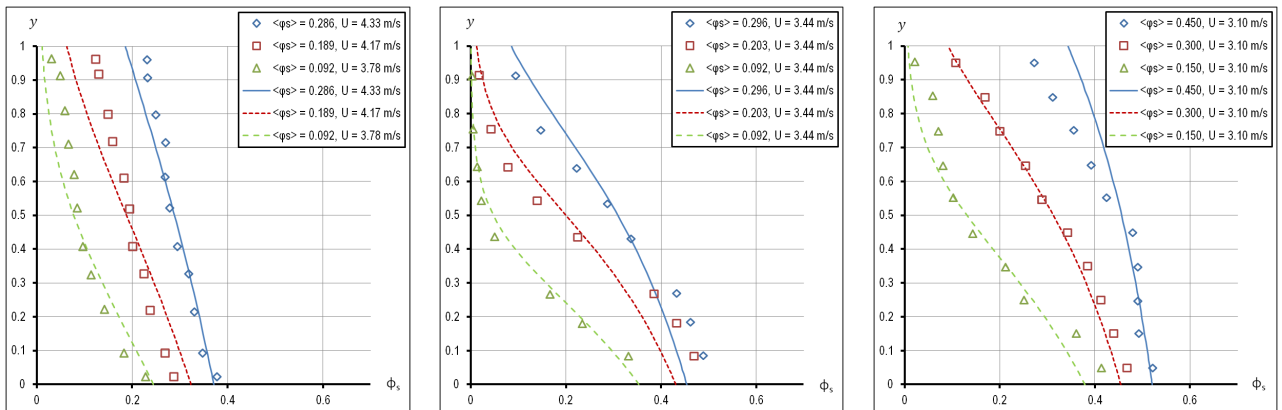


Рис. 2.1: Распределения объемной доли твердых частиц по сечению трубы для различных средних скоростей течения, объемных долей твердой фазы диаметров частиц и трубы: (а) –  $d_p = 165 \mu\text{m}$ ,  $D = 0.0515 \text{ m}$ ; (б) –  $d_p = 480 \mu\text{m}$ ,  $D = 0.0515 \text{ m}$ ; (в) –  $d_p = 290 \mu\text{m}$ ,  $D = 0.0532 \text{ m}$ .

## 2.3 Гидравлический транспорт твердых тел в трубе

Раздел посвящен моделям гидравлического транспорта длинных цилиндрических тел, переносимых потоком жидкости в трубе и организован следующим образом. В подразделе 2.3.1 рассматривается задача о транспорте пористого проницаемого тела вязкой жидкостью со степенной реологией в вертикальной трубе в ламинарном режиме течения в зазоре между капсулой и стенкой трубы. В подразделе 2.3.2 предлагается модификация модели концентрического транспорта нейтрально-плавучей непроницаемой капсулы несжимаемой ньютоновской жидкостью в турбулентном режиме течения в зазоре.

### 2.3.1 Транспорт пористого проницаемого тела жидкостью со степенной реологией в вертикальной трубе

Данный подраздел организован следующим образом. В первой части описывается постановка задачи и формулируются уравнения законов сохранения массы и импульса для несущей жидкости и скелета тела. На основе предположений об осесимметричности и стационарности течения выводится упрощенная замкнутая система уравнений с граничными условиями и формулируются задачи об обтекании тела и задача о распределении напряжений и его переходе в пластическое состояние. Во второй части строится полуаналитическое решение задачи об обтекании и находятся профиль скорости жидкости в зазоре и скорость движения тела. В третьей части с помощью полученного решения гидродинамической задачи исследуется напряженно-деформированное состояние твердого скелета, формулируются условия перехода тела из упругого в пластическое состояние и находится зависимость предельного радиуса тела, при котором твердый скелет остается в упругом состоянии, от определяющих параметров задачи.

#### Постановка задачи

Рассматривается осесимметричное стационарное движение длинного проницаемого цилиндрического тела в вертикальной трубе (Рис. 2.2). Течение несущей

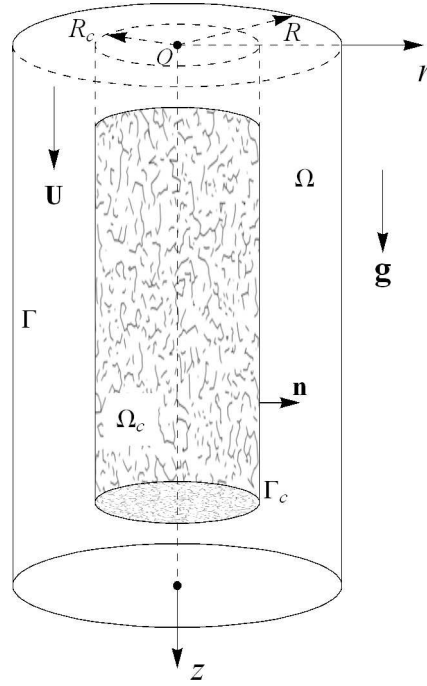


Рис. 2.2: Схема течения.

щей жидкости вне тела (область  $\Omega$  на Рис. 2.2) описывается уравнениями движения вязкой несжимаемой жидкости. В общем случае законы сохранения массы и импульса в дифференциальной форме для несжимаемой жидкости в зазоре между телом и стенкой трубы имеют вид

$$\nabla \mathbf{v}_l = 0, \quad (2.6)$$

$$\rho_l \frac{d_l \mathbf{v}_l}{dt} = -\nabla p + \rho_l \mathbf{g} + \nabla \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{r} \in \Omega \quad (2.7)$$

Несущая жидкость полагается неньютоновской со степенной зависимостью между тензорами вязких напряжений  $\boldsymbol{\tau}$  и скоростей деформации  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  [112]

$$\boldsymbol{\tau} = K \left| \sqrt{2\dot{\boldsymbol{\gamma}} : \dot{\boldsymbol{\gamma}}} \right|^{n-1} \dot{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (2.8)$$

где  $K$  – коэффициент консистенции жидкости,  $n$  – индекс течения.

В качестве граничного условия на стенке трубы используются условие прилипания

$$\mathbf{v}_l = 0, \quad \mathbf{r} \in \Gamma. \quad (2.9)$$

Ядро течения (область  $\Omega_c$  на Рис. 2.2), состоящее из движущегося твердого скелета и фильтрующей через него несущей жидкости, описывается в рамках многоконтинуального подхода при помощи уравнений фильтрации. Полагается, что собственными вязкими напряжениями в жидкой фазе можно пренебречь по сравнению с силой вязкого межфазного взаимодействия. В общем случае законы сохранения массы и импульса в дифференциальной форме для твердого скелета и жидкости в пористом теле имеют вид [19]

$$\partial_t \phi_i + \nabla (\phi_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad (2.10)$$

$$\phi_s \rho_s \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} = -\phi_s \nabla p + \nabla \boldsymbol{\sigma} + \phi_s \rho_s \mathbf{g} + \mathbf{F}, \quad (2.11)$$

$$\phi_l \rho_l \frac{d_l \mathbf{v}_l}{dt} = -\phi_l \nabla p + \phi_l \rho_l \mathbf{g} - \mathbf{F}, \quad \mathbf{r} \in \Omega_c, \quad (2.12)$$

где  $\phi_i, \rho_i, \mathbf{v}_i$  – объемные доли, плотности материалов и скорости фаз, индекс  $i = s$  обозначает твердую фазу, а индекс  $i = l$  – жидкость,  $p$  – давление в жидкости,  $\boldsymbol{\sigma}$  – приведенный тензор напряжений в твердой фазе,  $\mathbf{g}$  – вектор ускорения силы тяжести,  $\mathbf{F}$  – межфазная сила,  $\phi_s + \phi_l = 1$ .

Твердый скелет пористого тела считается линейно-упругим, зависимость тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  от тензора деформаций  $\boldsymbol{\gamma}$  дается [113]

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda Tr(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\gamma}, \quad (2.13)$$

где  $Tr(\cdot)$  – след тензора,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор,  $\boldsymbol{\gamma}$  – тензор деформации,  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ламе. Материал скелета несжимаем.

Межфазная сила вязкого взаимодействия скелета и насыщающей жидкости задается как

$$\mathbf{F} = \frac{K}{k} \phi_l |\mathbf{W}|^{n-1} \mathbf{W}, \quad (2.14)$$

где  $\mathbf{W} = \phi_l (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s)$  – скорость фильтрации,  $k$  – модифицированная проницаемость. Подстановка выражения для межфазной силы (2.14) в уравнение (2.12), в случае, когда инерционными слагаемыми можно пренебречь, приводит к известному выражению закона Дарси для степенной жидкости [112, 114]. Модифи-



фицированная проницаемость пористой среды  $k$  является функцией истинной проницаемости  $k_0$  по ньютоновской жидкости, пористости среды  $\phi_l$  и индекса течения  $n$  [112, 115].

Системы уравнений законов сохранения для двух зон течения – насыщенной пористого тела (2.10) - (2.12) и чистой жидкости (2.6) - (2.7) – сопрягаются на поверхности тела  $\Gamma_c$  с помощью граничных условий, выражающих сохранение потоков массы и импульса через границу твердого скелета. Условия непрерывности нормальных к поверхности тела потоков массы жидкости и полного импульса имеют вид [19]

$$(\mathbf{v}_l^+ - \mathbf{v}_s) \mathbf{n} = \phi_l (\mathbf{v}_l^- - \mathbf{v}_s) \mathbf{n}, \quad (2.15)$$

$$\phi_l \rho_l (\mathbf{v}_l^+ - \mathbf{v}_l^-) [(\mathbf{v}_l^- - \mathbf{v}_s) \mathbf{n}] = (-p^+ \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} + p^- \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_c, \quad (2.16)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешний вектор нормали к поверхности тела, индекс «+» обозначает величины с внешней стороны от поверхности, «-» – с внутренней. Условие (2.16) получено с учетом (2.15). Условие непрерывности потока массы твердой фазы на поверхности тела выполняется тождественно, поскольку нормальные скорости поверхности тела и твердой фазы на поверхности совпадают.

В качестве условий сохранения потока импульса жидкости через границу тела используются условие непрерывности давления и полуэмпирическое условие для касательной компоненты скорости

$$p^+ = p^-, \quad (2.17)$$

$$\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{v}_l^{\tau+} = \alpha k^{-\frac{1}{n+1}} (\mathbf{v}_l^{\tau+} - \mathbf{v}_s^{\tau} - \mathbf{W}^{\tau-}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_c, \quad (2.18)$$

где индекс  $\tau$  обозначает касательную к поверхности  $\Gamma_c$  составляющую скорости.

Условие, аналогичное (2.18), для касательной компоненты скорости на плоской границе пористой среды в случае ньютоновской жидкости было впервые предложено и экспериментально подтверждено в [106]. Теоретическое обоснование данного условия было дано позднее в [116]. Обобщение условия для касательной компоненты скорости, учитывающее, что для степенной жидкости

проницаемость в законе Дарси и межфазной силе имеет размерность длины в степени  $n + 1$ , было предложено в [117]. Безразмерный коэффициент  $\alpha$ , являющийся для случая ньютоновской жидкости свойством пористой среды [106], для степенной жидкости может также зависеть от индекса  $n$ .

Авторы [106] предполагали, что касательная компонента расхода в пористой среде претерпевает изменение от величины скорости внешнего потока чистой жидкости до скорости фильтрации в узкой области вблизи границы раздела. Размер переходной области определяется проницаемостью пористой среды, т. е. характерным размером порового канала  $\sim \sqrt{k_0}$ , где  $k_0$  – истинная проницаемость. В работах [118, 119] на основе аналитических и численных исследований течений Куэтта и Пуазейля в канале, частично заполненном модельной пористой средой, составленной из расположенных перпендикулярно потоку в узлах квадратной решетки цилиндров, было установлено, что глубина проникновения  $h_p$  внешнего свободного течения в пористую среду в действительности по порядку совпадает с характерным размером порового канала  $h_p \sim (0.1 - 4.3) \cdot \sqrt{k_0}$  в широком диапазоне объемных долей твердой фазы и геометрических параметров решетки. Использование условия (2.18) предполагает, что влияние малой по сравнению с характерным геометрическим размером задачи переходной зоны вблизи поверхности пористой среды учитывается только для внешнего течения, а поправка к распределению скорости фильтрации, в свою очередь малой по сравнению со скоростью внешнего течения, не принимается во внимание. Малость поправки к скорости фильтрации за счет проникновения внешнего потока также подразумевается при записи уравнения закона сохранения импульса насыщающей жидкости (2.12), в котором вязкими напряжениями, значительными вблизи границы раздела, пренебрегается по сравнению с силой межфазного взаимодействия.

Отметим также, что в пределе  $k \rightarrow 0$  условия для нормальной и касательной компонент скорости жидкости на поверхности тела (2.15), (2.18) вырождаются к условию прилипания  $\mathbf{v}_l^+ = \mathbf{v}_s$ ,  $\mathbf{r} \in \Gamma_c$ .

Полный объемный расход через трубопровод считается заданным, так что в любом сечении справедливо равенство

$$\int_{A_c} dA (\phi_l \mathbf{v}_l + \phi_s \mathbf{v}_s) + \int_A dA \mathbf{v}_l = \pi R^2 \mathbf{U} = const, \quad (2.19)$$

где  $\mathbf{U}$  – средняя по сечению скорость течения,  $A_c$  и  $A$  – части сечения, занятые пористым телом и чистой жидкостью соответственно.

В качестве масштаба длины задачи выбирается радиус трубы  $R$ , масштаба скорости – средняя скорость течения  $U = |\mathbf{U}|$ , масштаба напряжений – номинальные вязкие напряжения в несущей жидкости  $K (U/R)^n$ . Далее размерные переменные обозначены звездочкой, там где требуется отличить их от безразмерных переменных.

Течение считается осесимметричным и установившимся. Предполагается, что скорости фаз и, соответственно, скорость фильтрации имеют единственные отличные от нуля компоненты  $v_i$  и  $W$ , направленные вдоль оси трубы, при этом скелет тела движется как целое с постоянной скоростью  $v_s = const$ . Тело считается достаточно длинным и однородным, концевыми эффектами пренебрегается, так что распределение скоростей, смещений и напряжений одинаковы в каждом сечении трубы и не зависят от координаты  $z$ . В этом случае уравнения сохранения массы и импульса жидкости в зазоре (2.6) - (2.7) в безразмерном виде в цилиндрических координатах преобразуются к виду

$$\partial_z v_l = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \tau_{rz}) = -P_z, \quad \tau_{rz} = |\partial_r v_l|^{n-1} \partial_r v_l, \quad (2.21)$$

$$\partial_r p = 0, \quad (2.22)$$

где приведенный продольный градиент давления  $P_z$ , числа Рейнольдса  $Re_0$  и Фруда  $Fr_0$  определены соотношениями

$$P_z = -\partial_z p + \frac{Re_0}{Fr_0^2}, \quad Re_0 = \frac{\rho_l U^{2-n} R^n}{K}, \quad Fr_0 = \frac{U}{\sqrt{gR}}.$$

Уравнения фильтрации (2.10) - (2.12) с учетом выражения для межфазной силы (2.14) в принятых предположениях преобразуются к виду

$$\partial_z v_i = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \sigma_{rz}) = -P_z - S, \quad (2.24)$$

$$\partial_r \sigma_{rr} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0, \quad (2.25)$$

$$W = k^{\frac{1}{n}} |P_z|^{\frac{1}{n}-1} P_z, \quad (2.26)$$

$$\partial_r p = 0, \quad (2.27)$$

где

$$S = \frac{\phi_s (\rho_s - \rho_l) g R^{n+1}}{K U^n} = \phi_s (s - 1) \frac{\text{Re}_0}{\text{Fr}_0^2}, \quad s = \frac{\rho_s}{\rho_l}.$$

На боковой поверхности тела условие непрерывности потока массы (2.15) удовлетворяется тождественно, из условий непрерывности полного потока импульса (2.16) и непрерывности давления (2.17) следуют граничные условия для напряжений в скелете

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r_c) = \sigma_{rr}(r_c) = 0, \quad \sigma_{rz}(r_c) = \tau_{rz}(r_c), \quad (2.28)$$

где  $r_c = R_c/R$ . Условие прилипания (2.9) и граничное условие для касательной компоненты скорости (2.18) преобразуются следующим образом

$$v_l(1) = 0, \quad v_l(r_c + 0) - \alpha^{-1} k^{\frac{1}{n+1}} \partial_r v_l(r_c + 0) = v_s + W. \quad (2.29)$$

Уравнение (2.19), выражающее условие постоянства полного расхода, преобразуется к виду

$$1 = 2 \int_{r_c}^1 r dr v_l + r_c^2 (v_s + W). \quad (2.30)$$

Определяющими параметрами задачи являются относительный радиус тела  $r_c$ , индекс течения  $n$ , параметр  $\alpha$ , безразмерные проницаемость тела (число Дарси)  $k$ , коэффициенты Ламэ  $\lambda, \mu$  и параметр  $S$ . Параметр  $S$  характеризует плавучесть тела и является отношением равнодействующей силы тяжести и си-

лы Архимеда к номинальной силе трения, действующей на тело. Дальнейшее рассмотрение проведено для  $n$  и  $S$  удовлетворяющих неравенствам  $0 < n \leq 1$ ,  $S \geq 0$ . Первое неравенство означает, что рассматриваются только псевдопластические жидкости, эффективная вязкость которых уменьшается при увеличении скорости сдвига. Второе неравенство ограничивает рассмотрение случаями, когда плотность материала скелета выше плотности жидкости  $s \geq 0$  и средняя по сечению скорость направлена в ту же сторону, что и вектор ускорения силы тяжести (см. фиг. 2.2).

Из уравнений (2.22), (2.27) и условия (2.17) следует, что  $p = p(z)$  для всех  $r \in [0, 1]$ . Согласно (2.20) и (2.23) скорость жидкости  $v_l = v_l(r)$  во всей области течения. Таким образом, левые части уравнений (2.21) и (2.26) являются функциями радиальной координаты, а правые – продольной. Уравнения могут быть выполнены только в том случае, если обе части являются постоянными величинами. Следовательно, градиент давления постоянен во всей области течения  $P_z = const$ ,  $r \in [0, 1]$ , а скорости жидкости и фильтрации постоянны внутри насыщенного тела  $v_l = const$ ,  $W = const$ ,  $r \in [0, r_c)$ . Отметим, что постоянство скорости фильтрации является естественным следствием принятой формы уравнения закона сохранения импульса жидкости внутри пористого тела, в котором вязкими напряжениями пренебрегается по сравнению с силой межфазного взаимодействия.

Интегрированием уравнения сохранения импульса смеси (2.24) по объему тела может быть получено граничное условие для касательного напряжения в скелете при  $r = r_c$ , которое можно трактовать как равенство нулю равнодействующей сил, приложенных к телу. Граничное значение  $\sigma_{rz}(r_c)$  при этом выражается через приведенный перепад давления  $P_z$ . Далее, используя (2.28), можно получить граничное условие для касательного напряжения в жидкости в зазоре  $\tau_{rz}$ , не содержащее упругих напряжений в скелете

$$\tau_{rz}(r_c) = -\frac{r_c}{2}(P_z + S). \quad (2.31)$$

При этом система уравнений (2.21), (2.26), (2.29), (2.30), (2.31) оказывается замкнутой системой алгебраических и дифференциальных уравнений относительно распределения скорости жидкости в кольцевом зазоре  $v_l(r)$ , скорости твердого скелета тела  $v_s$ , скорости фильтрации  $W$  и приведенного градиента давления  $P_z$ , и определяет задачу об обтекании тела. Упругая задача о нахождении напряжений в скелете, сводящаяся к решению системы уравнений (2.24), (2.25), (2.13), связана с задачей об обтекании только через граничное значение напряжения на боковой поверхности (2.28) и может быть решена после разрешения уравнений внешней задачи.

### Задача об обтекании тела

Интегрирование уравнения (2.21) с граничным условием (2.31) дает распределение напряжения в кольцевом зазоре

$$\tau_{rz}(r) = -\frac{1}{2} \left( P_z r + \frac{S r_c^2}{r} \right). \quad (2.32)$$

Соответствующее распределение скорости, удовлетворяющее граничному условию на стенке трубы, дается уравнением

$$v_l(r) = \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} \int_r^1 \left| P_z r' + \frac{S r_c^2}{r'} \right|^{\frac{1}{n}-1} \left( P_z r' + \frac{S r_c^2}{r'} \right) dr'. \quad (2.33)$$

Скорость твердого скелета тела при этом задана уравнением

$$v_s = v_l(r_c + 0) - \alpha^{-1} k^{\frac{1}{n+1}} \partial_r v_l(r_c + 0) - k^{\frac{1}{n}} |P_z|^{\frac{1}{n}-1} P_z, \quad (2.34)$$

следующим из (2.26) и (2.29).

Интегрируя по частям в (2.30) с учетом (2.29), (2.26) и приведенного распределения скорости (2.33), можно получить

$$\int_{r_c}^1 r^2 \left| P_z r + \frac{S r_c^2}{r} \right|^{\frac{1}{n}-1} \left( P_z r + \frac{S r_c^2}{r} \right) dr + r_c^{\frac{1}{n}+2} \alpha^{-1} k^{\frac{1}{n+1}} |P_z + S|^{\frac{1}{n}-1} (P_z + S) - 2^{\frac{1}{n}} = 0. \quad (2.35)$$

При фиксированных значениях параметров  $r_c, S, n, k$  выражение (2.35) является алгебраическим уравнением относительно  $P_z$ . По известному значению  $P_z$ , согласно (2.32) и (2.33), могут быть определены распределения напряжения и скорости жидкости в зазоре, а также, согласно (2.26) и (2.34), скорости фильтрации и твердого скелета. Таким образом, будет найдено полное решение задачи об обтекании тела.

Обратимся к решению уравнения (2.35). Рассмотрим поведение левой части (2.35) как функции  $f(P_z)$ . В точке  $P_z = -S$  значение функции отрицательно

$$f(-S) = -S^{\frac{1}{n}} \int_{r_c}^1 r^{2-\frac{1}{n}} (r^2 - r_c^2)^{\frac{1}{n}} dr - 2^{\frac{1}{n}} < 0.$$

Асимптотики  $f(P_z)$  на бесконечности определяются соотношением

$$f(P_z) \sim |P_z|^{\frac{1}{n}-1} P_z \left( n(1+3n)^{-1} \left( 1 - r_c^{3+\frac{1}{n}} \right) + r_c^{2+\frac{1}{n}} \alpha^{-1} k^{\frac{1}{n+1}} \right), P_z \rightarrow \pm \infty$$

При  $P_z \rightarrow +\infty$  значение  $f(P_z)$  положительно. Непосредственной проверкой можно убедиться, что  $f'(P_z) > 0$  на всей действительной оси. Следовательно, решение уравнения (2.35) существует, единственно и заключено на интервале  $(-S, +\infty)$ .

Анализ выражения для скорости жидкости в зазоре (2.33) показывает что в случае, если решение (2.35) принадлежит интервалу  $(-S, -r_c^2 S)$  распределение скорости жидкости в зазоре имеет экстремум в точке  $r_1 = r_c (-S/P_z)^{\frac{1}{2}}$ . Минимальное значение  $S_1$ , при котором решение (2.35) принадлежит обозначенному интервалу определяется уравнением  $f(-r_c^2 S_1) = 0$ , откуда

$$S_1 = 2 \left( r_c^{\frac{2}{n}} \int_{r_c}^1 r^{2-\frac{1}{n}} (1-r^2)^{\frac{1}{n}} dr + r_c^{2+\frac{1}{n}} \alpha^{-1} k^{\frac{1}{n+1}} (1-r_c^2)^{\frac{1}{n}} \right)^{-n}.$$

Вычисление второй производной скорости жидкости в зазоре приводит к выводу, что для решений из интервала  $(-S, r_c^2 S)$  функция  $v_l(r)$  выпукла вниз, для решений из интервала  $(S, +\infty)$  выпукла вверх, а для решений из интервала  $(r_c^2 S, S)$  имеет точку перегиба. Решение уравнений  $f(r_c^2 S_2) = 0$  и  $f(S_3) = 0$  дает значения  $S$ , при которых решение (2.35) переходит из одного интервала в

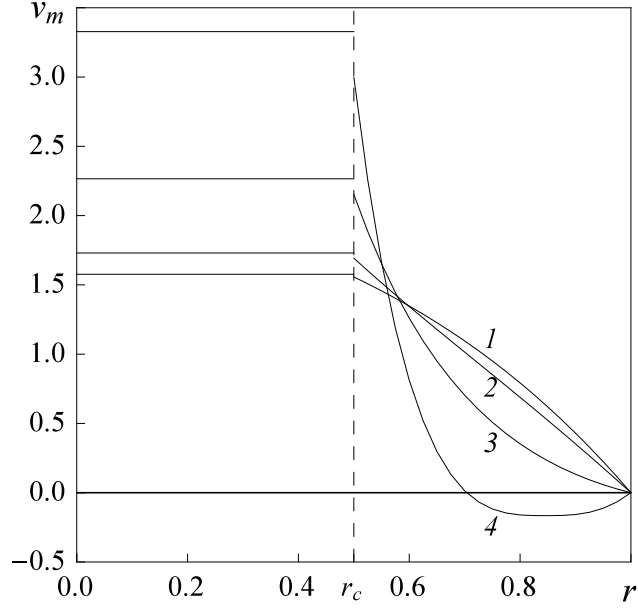


Рис. 2.3: Распределение среднеобъемной скорости течения по сечению трубы для различных значений  $S$ , кривые (1 – 4):  $S = 1.64, 5.18, 15.57, 36.11$ . Нумерация кривых соответствует режимам течения из таб. 2.1.

другой

$$S_2 = 2 \left( r_c^{\frac{2}{n}} \int_{r_c}^1 r^{2-\frac{1}{n}} (1+r^2)^{\frac{1}{n}} dr + r_c^{2+\frac{1}{n}} \alpha^{-1} k^{\frac{1}{n+1}} (1+r_c^2)^{\frac{1}{n}} \right)^{-n},$$

$$S_3 = 2 \left( \int_{r_c}^1 r^{2-\frac{1}{n}} (r^2+r_c^2)^{\frac{1}{n}} dr + 2^{\frac{1}{n}} r_c^{2+\frac{1}{n}} \alpha^{-1} k^{\frac{1}{n+1}} \right)^{-n}.$$

Для любых значений  $r_c, k$  и  $n$  справедливы неравенства  $S_3 < S_2 < S_1$ . В таб. 2.1 приведена классификация различных режимов течения относительно монотонности и выпуклости распределения скорости в зазоре в зависимости от значения  $S$ . Рис. 2.3 иллюстрирует распределения среднеобъемной скорости течения (плотности объемного расхода на единицу площади)  $v_m = \phi_s v_s + \phi_l v_l$  по сечению трубы для различных режимов течения при фиксированных  $r_c = 0.5$ ,  $k = 10^{-3}$ ,  $\alpha = 1.0$  и  $n = 0.5$ . Вычисленные критические значения параметра плавучести  $S_1 = 23.48$ ,  $S_2 = 7.04$ ,  $S_3 = 3.27$ . Вне тела среднеобъемная скорость совпадает со скоростью жидкости,  $v_m = v_l$  при  $r > r_c$ , на боковой поверхности тела  $r = r_c$  имеет разрыв равный, согласно (2.29), величине

$$[v_m] = \alpha^{-1} k^{\frac{1}{n+1}} \partial_r v_l (r_c + 0).$$



Таблица 2.1: Классификация режимов течения относительно монотонности и выпуклости распределения скорости в зазоре. Нумерация режимов соответствует кривым 1 – 4 на Рис. 2.3.

Режим	$S$	$P_z$	Знак $\partial_r v_l$	Знак $\partial_{rr}^2 v_l$
1	$(0, S_3)$	$(S, +\infty)$	–	–
2	$(S_3, S_2)$	$(r_c^2 S, S)$	–	$\pm$
3	$(S_2, S_1)$	$(-r_c^2 S, r_c^2 S)$	–	+
4	$(S_1, +\infty)$	$(-S, -r_c^2 S)$	$\pm$	+

На Рис. 2.4 приведены результаты численного решения (2.35) для различных значений  $S, n$  и фиксированных  $k = 10^{-7}, \alpha = 1.0$ . Приведенный перепад давления монотонным образом зависит от индекса течения  $n$  и плавучести тела  $S$ . Меньшим  $n$  (эффективной вязкости жидкости быстрее падающей с увеличением скорости сдвига) и большим  $S$  (телам обладающим большей по модулю отрицательной плавучестью) соответствуют меньшие перепады давления. Зависимость  $P_z$  от радиуса тела  $r_c$  оказывается немонотонной для всех значений  $S$  и  $n$ .

На Рис. 2.5 показаны зависимости скорости скелета (2.34) от радиуса  $r_c$  для различных значений  $S, n$  и фиксированных  $k = 10^{-7}, \alpha = 1.0$ . Совместное действие эффектов осаждения и распределения скорости по сечению трубы приводит к тому, что скорость твердого скелета выше средней скорости течения  $v_s > 1$  для всех радиусов тела, заметно отличных от радиуса трубы (см. Рис. 2.5). Отрицательная плавучесть, соответствующая  $S > 0$ , влечет осаждение тела относительно несущей жидкости под действием силы тяжести. При фиксированном радиусе  $r_c$ , скорость тела монотонно растет с увеличением  $S$ . Кроме того, тело движется в ядре течения, где локальная скорость несущей жидкости выше средней по сечению, что также приводит к эффективному проскальзыванию твердой фазы относительно среднего потока. Последнее утверждение иллюстрирует кривая 1 на Рис. 2.5б, представляющая зависимость скорости скелета от относительного радиуса тела в случае нейтральной плавучести  $S = 0$ , когда гравитационное осаждение не имеет места.

Интерес также представляют частные случаи, в которых решение может быть построено явно в аналитическом виде. В случае нейтрально плавучего

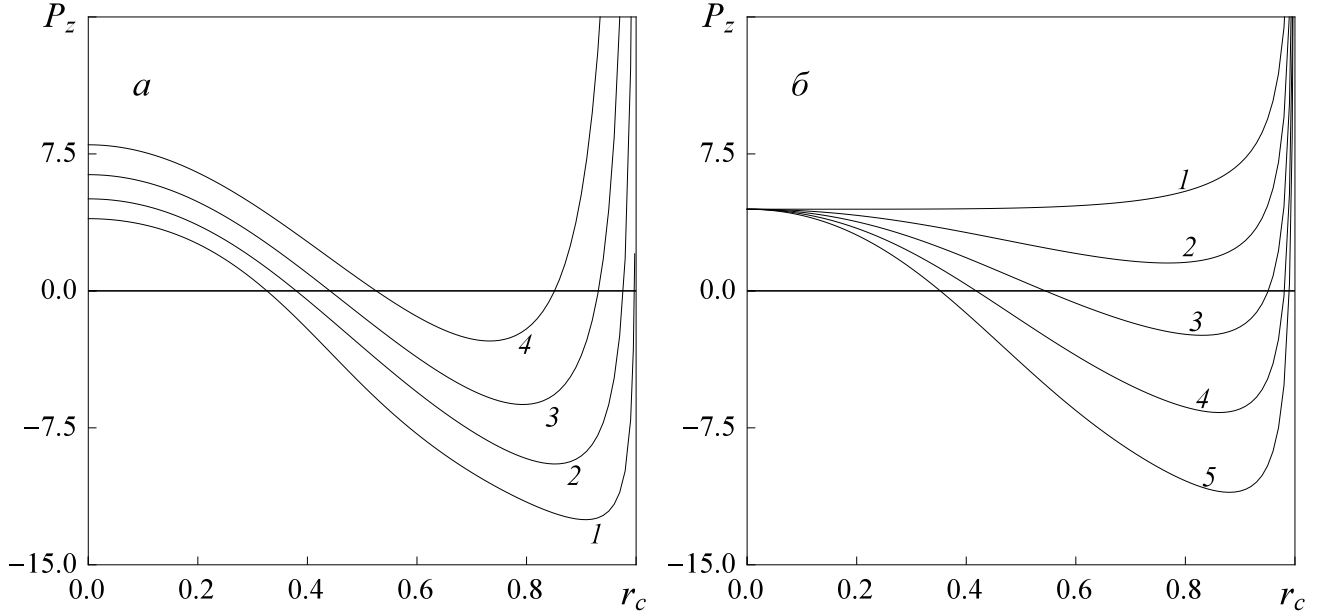


Рис. 2.4: Зависимость приведенного перепада давления  $P_z$  от радиуса тела при фиксированном  $S = 20.0$ , кривые (1 – 4):  $n = 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  (а); при фиксированном  $n = 0.5$ , кривые (1 – 5):  $S = 0.0, 5.0, 10.0, 15.0, 20.0$  (б).

тела  $S = 0$  и произвольного  $n$  решение (2.35) принимает вид

$$P_z = 2 \left( \frac{n}{3n+1} \left( 1 - r_c^{3+\frac{1}{n}} \right) + r_c^{2+\frac{1}{n}} \alpha^{-1} k^{\frac{1}{n+1}} \right)^{-n}.$$

В случае ньютоновской жидкости  $n = 1$  и произвольного значения  $S$  решение уравнения (2.35) имеет вид

$$P_z = \frac{8 - 2S \left( r_c^2 (1 - r_c^2) + 2r_c^3 \alpha^{-1} k^{\frac{1}{2}} \right)}{1 - r_c^4 + 4r_c^3 \alpha^{-1} k^{\frac{1}{2}}}.$$

В пределе нейтрально плавучего непроницаемой тела  $S, k \rightarrow 0$  это решение вырождается к известному результату [93].

При  $r_c \rightarrow 0$  решение уравнения (2.35) совпадает с известным выражением для перепада давления в течении Пуазейля степенной жидкости, скорость скелета при этом принимает значение скорости жидкости на оси трубы для соответствующего решения. В пределе  $r_c \rightarrow 1$  перепад давления и скорость скелета, согласно предлагаемой модели, стремятся к конечным значениям  $P_z \rightarrow P_z^1 = 2\alpha^n k^{-\frac{n}{n+1}} - S$  и  $v_s \rightarrow v_s^1 = 1 - k^{\frac{1}{n}} |P_z^1|^{\frac{1}{n}-1} P_z^1$ . Однако, стоит отметить,

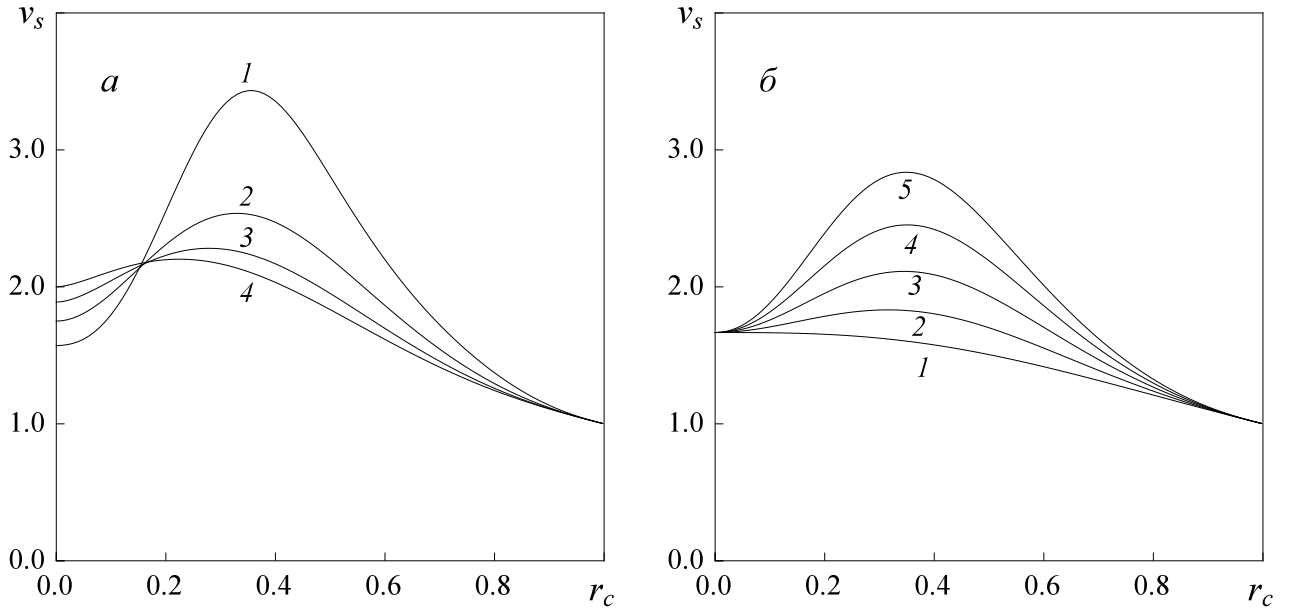


Рис. 2.5: Зависимость скорости скелета  $v_s$  от радиуса тела  $r_c$ . Нумерация кривых и значения параметров как на Рис. 2.4.

что предположение о малости размера переходной зоны, в которой распределение скорости фильтрации выходит на постоянную величину, лежащее в основе граничного условия (2.18), нарушается при ширине зазора порядка характерного размера порового канала  $|1 - r_c| \sim k^{\frac{1}{n+1}}$ , и задача о движении тела с радиусом близким к радиусу трубы требует отдельного рассмотрения.

Зависимость  $P_z(S)$ , задаваемая уравнением (2.35) монотонна. Следовательно, зависимость размерного градиента давления от размерной средней скорости течения или, что равносильно, размерного полного расхода, задаваемая решением (2.35) также оказывается монотонной. Таким образом, при фиксированных прочих параметрах соответствие между перепадом давления и расходом оказывается взаимно однозначным, и с помощью построенной модели также можно описать задачу о транспорте тела с фиксированным перепадом давления на единицу длины трубы.

Из вырождения условий на поверхности тела к условию прилипания в пределе  $k \rightarrow 0$  следует, что построенная модель также корректно описывает задачу об обтекании непроницаемого тела.

Задаче об осаждении цилиндрического тела в покоящейся жидкости, являющейся предельным случаем рассматриваемой задачи о транспорте при  $U \rightarrow +0$ , отвечает асимптотический предел  $S \rightarrow +\infty$ . В этом случае в качестве масштабов напряжений и скорости вместо номинальных вязких напряжений и средней скорости течения могут быть выбраны величины  $\phi_s (\rho_s - \rho_l) gR$  и  $(\phi_s (\rho_s - \rho_l) gR^{n+1}/K)^{\frac{1}{n}}$ , тогда напряжения и скорости перенормируются следующим образом  $P'_z = P_z/S$ ,  $\tau'_{rz} = \tau_{rz}/S$ ,  $v'_i = v_i/S^{\frac{1}{n}}$ . Уравнения для распределений напряжения и скорости в зазоре, скорости твердого скелета и приведенного перепада давления могут быть получены из (2.32) - (2.35) предельным переходом  $S \rightarrow +\infty$  при условии конечности  $P'_z$ ,  $\tau'_{rz}$ ,  $v'_i$ . Уравнение для приведенного перепада давления принимает вид

$$\int_{r_c}^1 r^2 \left| P'_z r + \frac{r_c^2}{r} \right|^{\frac{1}{n}-1} \left( P'_z r + \frac{r_c^2}{r} \right) dr + r_c^{\frac{1}{n}+2} \alpha^{-1} k^{\frac{1}{n+1}} |P'_z + 1|^{\frac{1}{n}-1} (P'_z + 1) = 0. \quad (2.36)$$

В частном случае ньютоновской жидкости  $n = 1$  решение (2.36) может быть получено аналитически. Дополнительно предполагая, что тело непроницаемо  $k = 0$ , можно получить следующее выражение для скорости осаждения

$$v_s = -\frac{r_c^2}{2} \left( \frac{1 - r_c^2}{1 + r_c^2} + \ln r_c \right),$$

совпадающее с известным результатом [120, 121].

Сравнение результатов расчетов для осаждения длинного непроницаемого цилиндра оседающего в трубке, заполненной степенной жидкостью, полученных с помощью численного решения (2.36) для произвольного  $n \leq 1$  и  $k = 0$ , с численными результатами, приведенными в [110] в табличном виде, также показывает совпадение с относительной ошибкой не более 5%. На рис. 2.6 в качестве примера приведено сравнение численных результатов данной работы и [110] для скорости деформации на поверхности тела отнесенной к номинальной скорости деформации, вычисленной по скорости осаждения и радиусу трубы.

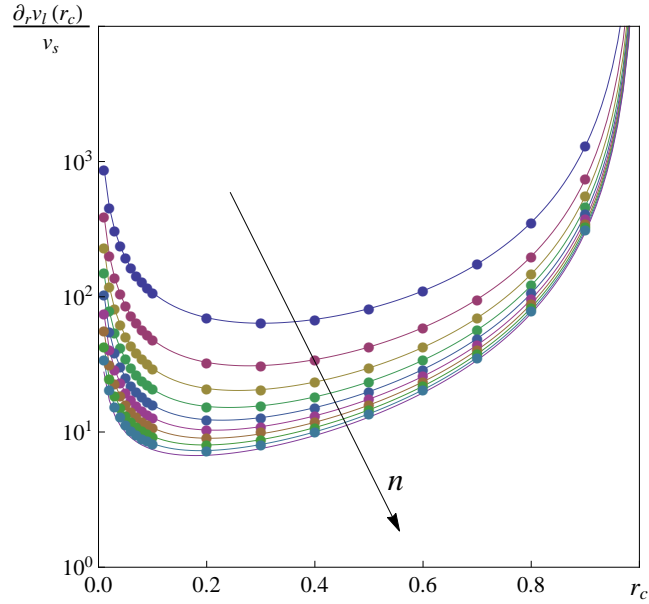


Рис. 2.6: Сравнение результатов расчета (сплошные линии) для относительной скорости деформации на поверхности тела с опубликованными в [110] данными (точки) для различных относительных радиусов тела и индексов течения  $n = 0.1 - 1.0$ .

### Задача о напряжениях в скелете и переходе в пластическое состояние

Решение уравнений упругости (2.24), (2.25), удовлетворяющие граничным условиям (2.28), имеет вид

$$\sigma_{rz} = -\frac{r}{2} (P_z + S), \quad u_z = -\frac{r^2}{4\mu} (P_z + S). \quad (2.37)$$

Остальные компоненты тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и вектора смещений  $\mathbf{u}$  равны нулю. Таким образом, напряженное состояние скелета соответствует одноосному сдвигу.

В случае, если скорость течения и напряжения в скелете, вызванные взаимодействием с насыщающей и обтекающей в зазоре жидкостью, достаточно велики, возможен переход части тела из упругого в пластическое состояние. Для сдвига, определяемого выражением (2.37), различные критерии пластичности, такие как условия максимального касательного напряжения (Треска), октаэдрического напряжения (Мизеса), максимального приведенного напряже-

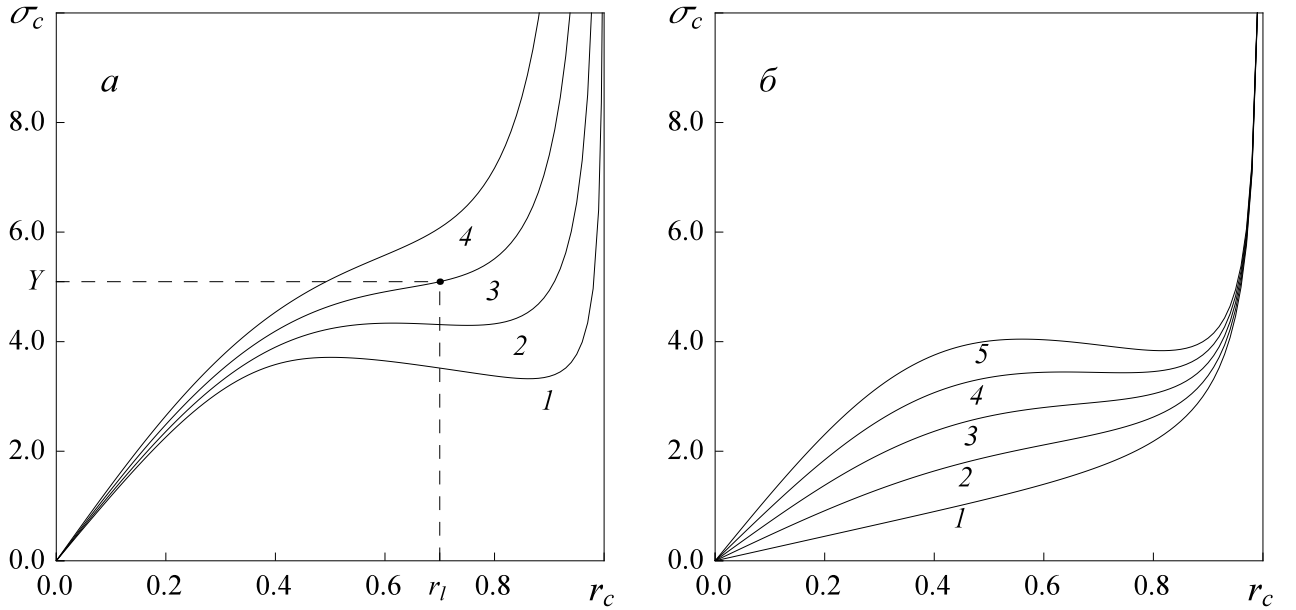


Рис. 2.7: Зависимость напряжения на поверхности тела  $\sigma_c$  от радиуса тела  $r_c$ . Нумерация кривых и значения параметров как на Рис. 2.4.

ния [122], эквивалентны и в размерной форме могут быть приведены к виду

$$|\sigma_{rz}^*| = \tau_y,$$

где  $\tau_y$  – предельное сдвиговое напряжение, которое считается свойством скелета. Поскольку напряжение растет с удалением от оси трубы и справедливо неравенство  $P_z + S > 0$  (см. разд. 2.3.1), условие, связывающее предельный радиус тела  $r_c$  с приведенным перепадом давления  $P_z$ , при которых начинается пластическое течение внешнего слоя тела, формулируется как

$$\frac{r_c}{2} (P_z(r_c) + S) = Y, \quad (2.38)$$

где  $Y = \tau_y R^n / KU^n$  – заданное безразмерное предельное сдвиговое напряжение.

Совместное решение уравнений (2.35), (2.38) относительно  $r_c$  и  $P_z$  позволяет найти предельный радиус тела  $r_c(Y, S, n, k)$ , при котором оно остается в упругом состоянии и движется как целое.

На Рис. 2.7 приведены зависимости модуля касательного напряжения на боковой поверхности тела  $\sigma_c = |\sigma_{rz}(r_c)|$  от безразмерного радиуса  $r_c$ . Для некоторых значений параметров  $S$  и  $n$  приведенные зависимости немонотонны (кри-

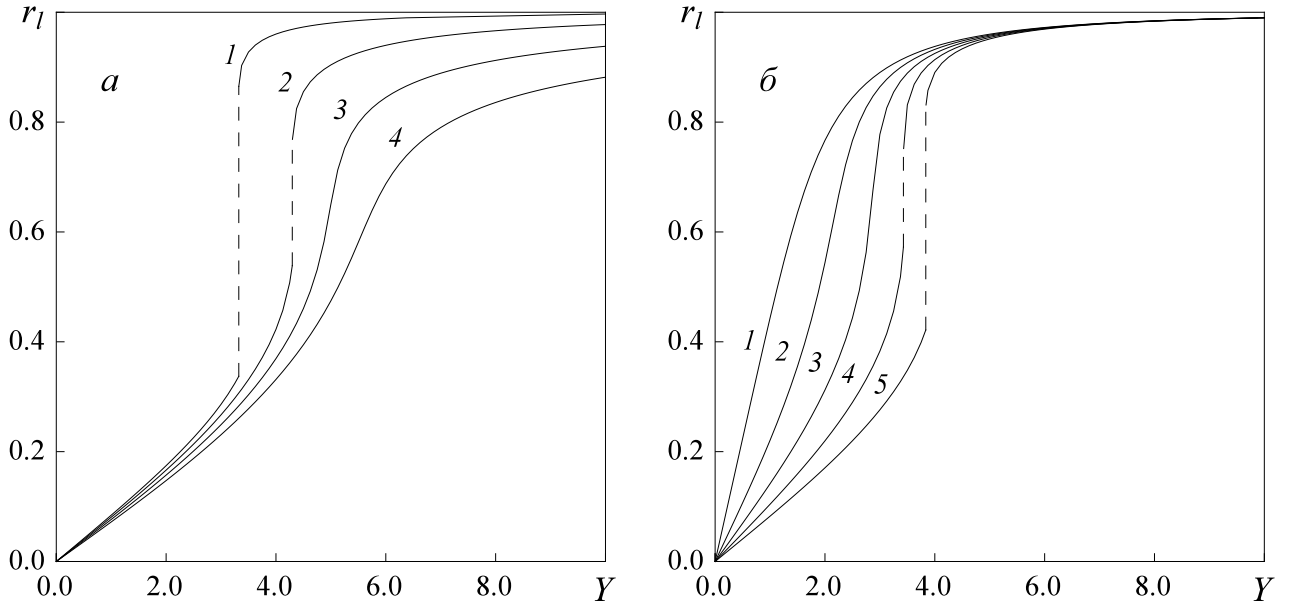


Рис. 2.8: Зависимость предельного радиуса тела  $r_l$  от предельного сдвигового напряжения  $Y$ . Нумерация кривых и значения параметров как на Рис. 2.4.

вые 1, 2 на Рис. 2.7а и 4, 5 на Рис. 2.7б), что приводит к неединственности решения уравнения (2.38) в некотором диапазоне  $Y$ . В таких случаях за предельный радиус тела  $r_l$  принимается максимальный из корней (2.38).

Рис. 2.8 иллюстрирует найденную зависимость предельного радиуса от безразмерного предельного сдвигового напряжения  $Y$ . Для значений  $S$  и  $n$ , соответствующих немонотонным зависимостям напряжения  $\sigma_c$  от радиуса (кривые 1, 2 на Рис. 2.7а, 2.8а и 4, 5 на Рис. 2.7б, 2.8б) зависимости  $r_c(Y)$  имеют разрыв в точках, где  $Y$  равняется минимальному значению функции  $\sigma_c(r_c)$ .

Как следует из Рис. 2.7а, 2.8а, для фиксированного значения  $S$  при увеличении  $n$  напряжение  $\sigma_c$  растет, а предельный радиус  $r_c$ , соответственно, уменьшается. При фиксированных прочих условиях, в жидкости с меньшим  $n$ , а следовательно эффективной вязкостью, быстрее падающей с ростом скорости сдвига, касательные напряжения вблизи стенки тела также оказываются меньше.

Аналогичное наблюдение можно сделать относительно Рис. 2.7б, 2.8б. При фиксированном значении  $n$  и увеличении  $S$  напряжение  $\sigma_c$  растет, а предельный радиус  $r_c$  уменьшается. Высокие значения  $S$ , соответствующие большим отношениям равнодействующей сил тяжести и Архимеда к номинальной силе

трения, приложенной к скелету, приводят к более высоким скоростям тела и производным скорости жидкости вблизи его поверхности (см. Рис. 2.3, 2.56), а следовательно к более высокому сдвиговому напряжению.

### 2.3.2 Транспорт нейтрально-плавучей капсулы турбулентным потоком ньютоновской жидкости

В данном разделе рассматривается задача о концентрическом транспорте нейтрально-плавучей непроницаемой капсулы несжимаемой ньютоновской жидкостью в турбулентном режиме течения в зазоре между капсулой и стенкой трубы. В отличие от предыдущего раздела распределение напряжений и деформации капсулы не рассматриваются.

В настоящей работе используется один из подходов, упоминаемых во введении к главе и предполагающий постулирование профиля скорости несущей жидкости в зазоре. В работах [93, 95] предполагалось, что распределение скорости по сечению подчиняется степенному закону вида  $v_l = v_{max} (1 - r)^k$ , где  $r$  – как и ранее безразмерная радиальная координата,  $v_{max}$  – максимальная скорость течения на оси трубы,  $k$  – безразмерный показатель степени. Экспериментальные данные для распределения средней скорости течения по сечению трубы в турбулентном режиме в действительности хорошо описываются степенными профилями, однако показатель степени является убывающей функцией числа Рейнольдса  $Re$  [123]. В отличие от цитируемой литературы, далее используется не степенной, а универсальный логарифмический профиль скоростей. Преимущество использования асимптотического логарифмического закона распределения скорости заключается в том, что, как и в случае течения жидкости в трубе без капсул, результаты полученные с его помощью могут быть экстраполированы для произвольно больших чисел Рейнольдса [123].

Уравнения законов сохранения импульса капсулы и жидкости в зазоре в предположении длинной капсулы имеют вид

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \tau_{rz}) = -\frac{1}{4} \lambda_s Re, \quad (2.39)$$



$$\tau_{rz}(r_c) = -\frac{r_c}{8}\lambda_s \text{Re}. \quad (2.40)$$

где  $\text{Re} = UR/\nu$  – число Рейнольдса,  $\lambda_s$  – коэффициент трения,  $\nu$  – кинематическая вязкость несущей жидкости. Под  $\tau_{rz}$  понимается сумма ламинарного и турбулентного касательных напряжений.

Интегрируя (2.39) с учетом (2.40) можно получить линейное распределение касательного напряжения по радиальной координате

$$\tau_{rz}(r) = -\frac{r}{8}\lambda_s \text{Re}.$$

Условие постоянства полного расхода принимает вид

$$1 = 2 \int_{r_c}^1 r dr v_l + r_c^2 v_s. \quad (2.41)$$

Следуя [95], на поверхности капсулы примем условие эффективного проскальзывания

$$v_s = v_l(r_c) + C \sqrt{\frac{|\tau_{rz}(r_c)|}{\text{Re}}}, \quad (2.42)$$

где  $C \approx 12$  – безразмерная постоянная.

Для распределения скорости жидкости в зазоре принимается универсальный логарифмический профиль [123]

$$v_l(r) = u_* \left( A \ln \left( \frac{1-r}{y_*} \right) + B \right),$$

где  $A \approx 2.5$ ,  $B \approx 5.5$  – безразмерные постоянные,  $u_* = \sqrt{\tau_{rz}(1)}$  – безразмерная скорость трения на стенке трубы,  $y_* = (\text{Re}u_*)^{-1}$ .

Подстановка полученного распределения напряжений в (2.42) с учетом определения скорости трения и профиля скорости жидкости в зазоре дает

$$v_s = u_* \left( A \ln \left( \frac{1-r_c}{y_*} \right) + B + C\sqrt{r_c} \right).$$

При заданном числе Рейнольдса  $\text{Re}$  и радиусе капсулы  $r_c$  скорость капсулы и скорость жидкости в зазоре оказываются выражены через скорость трения на стенке трубы. Используя условие постоянства полного расхода (2.41), можно

получить нелинейное алгебраическое уравнение относительно  $u_*$ . При этом за верхний предел интегрирования в (2.41) принимается значение  $r$ , при котором скорость жидкости равняется нулю [123]. По скорости трения, найденной численным решением данного уравнения восстанавливаются скорость капсулы  $v_s$  и коэффициент трения  $\lambda_s$ . В частном случае  $r_c = 0$  таким образом может быть получен универсальный закон сопротивления Прандтля для гладких труб.

На Рис. 2.9 приведено сравнение экспериментальных данных [91] для движения капсул в трубах и результатов вычислений. Коэффициент трения  $\lambda_s$  отнесен к коэффициенту трения для течения чистой жидкости  $\lambda_l$  при том же числе Рейнольдса, вычисленному по универсальному закону сопротивления Прандтля. Результаты расчетов находятся в неплохом согласии с экспериментальными данными. Расхождение на Рис. 2.9б может быть объяснено тем, что для относительно небольших чисел Рейнольдса отклонение действительного профиля скорости от универсального логарифмического оказывается значительным.

Изложенные в главе 2 результаты опубликованы в печатных работах [6, 10, 12].

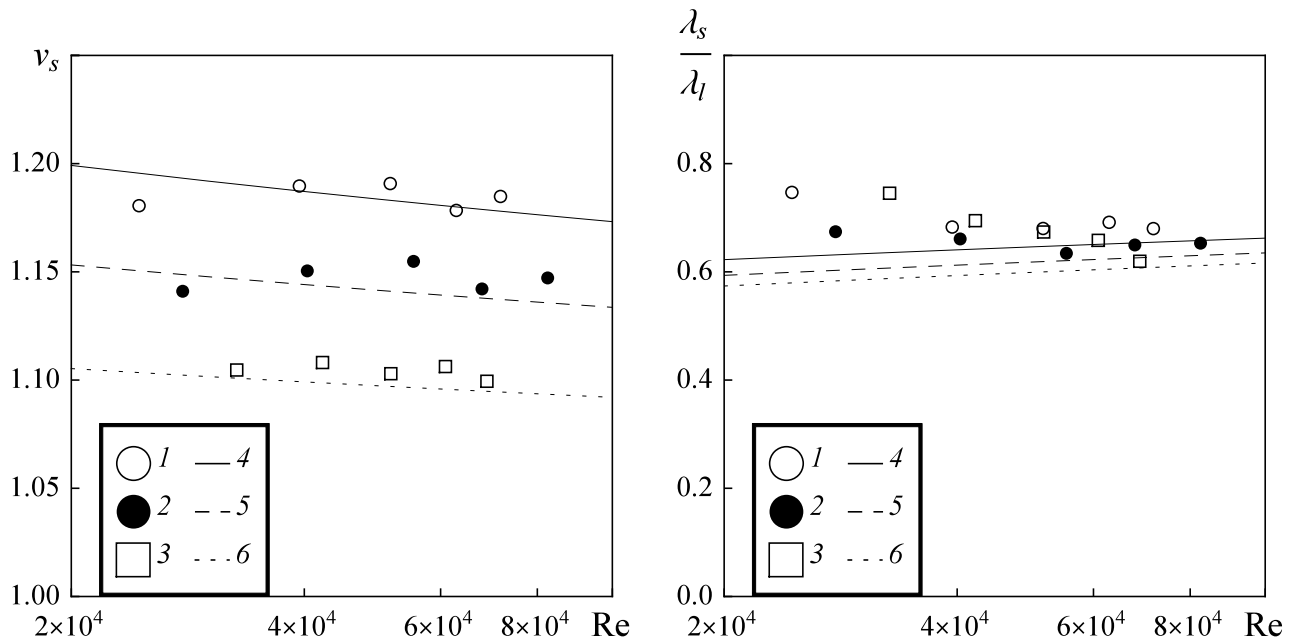


Рис. 2.9: Сравнение экспериментальных данных (1, 2, 3) и теоретических результатов (4, 5, 6) для капсул различных радиусов  $r_c$ : 1, 4 – 0.8, 2, 5 – 0.85, 3, 6 – 0.9. (а) – скорость движения капсулы; (б) – отношение перепадов давления на единицу длины трубы при движении капсулы и течения чистой жидкости.

## Заключение

В работе рассмотрены несколько задач связанных с описанием многофазных течений в трубопроводах. Первая глава посвящена модели дрейфа для нестационарных газожидкостных течений в длинных трубопроводах. Во второй главе приведены результаты исследования задач о гидравлическом транспорте твердой фазы в трубах.

Представлен вывод асимптотических уравнений модели дрейфа для течения разреженной газожидкостной дисперсной смеси в круглой трубе в приближении длинного канала как предел полных уравнений законов сохранения, записанных для каждой фазы в многоконтинуальном приближении. В такой постановке задача ранее не рассматривалась в литературе. Определены ключевые предположения, при которых модель дрейфа в формулировке, содержащей алгебраическое соотношение для скоростей фаз и одно уравнение сохранения импульса смеси в терминах среднеобъемной скорости, строго следует из законов сохранения. Для вывода соотношения дрейфа для скоростей фаз, когда одна из фаз является дисперсной, а другая – непрерывной, следует лишь предположить, что масштаб задачи много больше масштаба релаксации скоростей фаз. Для вывода единственного уравнения сохранения импульса смеси следует дополнительно предположить, что объемная доля дисперсной фазы мала, либо проскальзыванием фаз можно пренебречь, либо справедливо предположение о безынерционном режиме течения, когда ускорением смеси в целом можно пренебречь. В то же время показано, что известная модель дрейфа в классической формулировке, в которой единственное уравнение закона сохранения импульса смеси записано в виде суммы уравнений сохранения импульса фаз, следует из законов сохранения лишь при наложении условия, что масштаб задачи много

больше масштаба релаксации скоростей фаз и, таким образом, является более общей. Получены аналитические выражения для коэффициентов модели замыкающих соотношений модели дрейфа.

Проведен характеристический анализ системы уравнений модели дрейфа в классической формулировке для замыкающих соотношений с параметром профиля и скоростью дрейфа, зависящими от объемной доли газа и обеспечивающими корректное вырождение системы к уравнениям одномерного движения сжимаемого газа при объемной доле, стремящейся к единице. Вычислены члены нулевого порядка в разложениях характеристических скоростей по степеням чисел Маха, посчитанных по скорости смеси и скорости дрейфа. Впервые без дополнительных предположений получено необходимое условие глобальной гиперболичности системы. В численных экспериментах установлено, что при малых числах Маха условие также является и достаточным. Характеристический анализ системы уравнений модели дрейфа в формулировке ECLIPSE проведен впервые и для произвольных замыкающих соотношений. Получены аналитические выражения для характеристических скоростей и показано, что система является строго гиперболической. Одна из характеристик не зависит от сжимаемости фаз и отвечает медленным возмущениям объемной доли, распространяющимся со скоростью массопереноса, две другие характеристики отвечают быстрым возмущениям давления. Определен аналог звуковой поверхности для системы и сделаны выводы о знакоопределенности собственных значений и корректной постановке начально-краевой задачи.

Предложена численная схема решения уравнений модели дрейфа на основе метода SIMPLE. Проведены расчеты и представлены результаты для гравитационной сегрегации газа и жидкости в вертикальной трубе, восстановления давления при закрытии добывающей скважины, и показано хорошее согласие с аналитическими решениями для указанных случаев.

Продемонстрирована возможность описания сильно нестационарного пробкового течения с помощью модели дрейфа. Путем обобщения зависимости скорости дрейфа от угла наклона секции трубопровода к горизонту и локального

направления течения оказывается возможным достичь хорошего совпадения между результатами моделирования и экспериментальными данными. Изменение настроечных параметров модели дрейфа произведено универсальным образом для всех экспериментов, рассматриваемых в работе. Предиктивные возможности модели протестированы с помощью сравнения предсказанных периодов колебаний расхода с экспериментально измеренными значениями, не использованными при настройке модели. Сравнение показывает, что результаты моделирования хорошо воспроизводят качественные особенности течения, однако точность количественных предсказаний для рассматриваемого набора данных меняется эксперимента к эксперименту. Приложение модели дрейфа к описанию пробкового режима течения в трубопроводах W-образной геометрической конфигурации с несколькими секциями переменного угла наклона к горизонту ранее не рассматривалось.

Построена осесимметричная стационарная модель транспорта и перехода в пластическое состояние длинного упругого пористого проницаемого тела, переносимого потоком несжимаемой жидкости со степенной реологией в вертикальной трубе. Задача о транспорте пористых тел неньютоновскими жидкостями ранее не рассматривалась. Получены полуаналитические решения для распределения скорости течения жидкости в зазоре между телом и стенкой трубы, перепада давления на единицу длины трубы, скорости движения тела и касательных напряжений на боковой поверхности тела. Проведена классификация возможных режимов течения жидкости в зазоре между телом и стенкой трубы, и показана возможность формирования противотока в этой области. В терминах безразмерного числа плавучести определены границы полученных режимов течения.

Найдено решение для распределения упругих напряжений и смещений в твердом скелете тела. На основе известных критериев пластичности исследована зависимость предельного радиуса тела, при котором скелет остается в упругом состоянии, от предельного сдвигового напряжения скелета, показателя степени в реологическом соотношении несущей жидкости и параметра плавучести.

чести. Показано, что предельный радиус монотонно возрастает с увеличением предельного сдвигового напряжения и монотонно падает с увеличением показателя степени и параметра плавучести тела. Вопрос о возможном превышении напряжениями, вызванными действием несущего потока на транспортируемое тело, предела текучести и переходе тела в пластическое состояние рассмотрен впервые.

Проведено обобщение аналитической модели осесимметричного стационарного транспорта непроницаемого нейтрально-плавучего тела ньютоновской жидкостью в турбулентном режиме течения в зазоре на случай произвольно высоких чисел Рейнольдса.

Основные результаты работы формулируются следующим образом:

1. В терминах безразмерных определяющих параметров получены условия, при которых модель дрейфа для задачи о пузырьковом режиме течения газо-жидкостной смеси в длинной трубе в классической формулировке и формулировке с уравнением закона сохранения импульса смеси в терминах среднеобъемной скорости следует из законов сохранения. В предположении справедливости полученных в работе условий модель дрейфа в двух формулировках получена как асимптотический предел уравнений законов сохранения, записанных в многоконтинуальном приближении.
2. Установлено необходимое условие гиперболичности системы уравнений модели дрейфа в классической формулировке с предложенными в работе модельными замыкающими соотношениями, обеспечивающими корректное вырождение системы к уравнениям одномерного движения сжимаемого газа. Показано, что при малых числах Маха полученное условие является достаточным. Для системы уравнений модели дрейфа в формулировке с уравнением закона сохранения импульса смеси в терминах среднеобъемной скорости и произвольными замыкающими соотношениями показана безусловная гиперболичность и получены явные выражения для характеристических скоростей.

3. Разработаны и реализованы численный алгоритм и комплекс программ для решения уравнений модели дрейфа. Проведено численное исследование пробкового режима течения, вызванного сложной геометрией трубопровода. Предложен способ обобщения эмпирических замыкающих соотношений модели дрейфа. Получены значения настроечных параметров замыкающих соотношений модели дрейфа, обеспечивающие предсказание результатов лабораторных экспериментов по пробковому режиму течения с точностью приемлемой для характерных задач нефтегазовой промышленности.
4. Построена осесимметричная стационарная модель транспорта и перехода в пластическое состояние длинного твердого пористого проницаемого тела, переносимого потоком несжимаемой жидкости со степенной реологией в вертикальной трубе. Проведена классификация и определены границы возможных режимов течения в терминах безразмерных определяющих параметров. Исследована зависимость предельного радиуса тела, при котором твердый скелет остается в упругом состоянии, от определяющих параметров задачи. Проведено обобщение модели осесимметричного стационарного транспорта непроницаемого нейтрально-плавучего тела ньютоновской жидкостью в турбулентном режиме течения в зазоре на случай произвольно высоких чисел Рейнольдса.

## Литература

1. *Осипцов А.А., Синьков К.Ф., Спесивцев П.Е.* Обоснование модели дрейфа для двухфазных течений в круглой трубе // *Изв. РАН. МЖГ.* — 2014. — № 5. — С. 60–73.
2. О гиперболичности одномерных моделей нестационарного двухфазного течения в трубопроводе / В. Д. Жибаядов, Н. А. Лебедева, А.А. Осипцов, К.Ф. Синьков // *Изв. РАН. МЖГ.* — 2016. — № 1. — С. 55–68.
3. *Spesivtsev P., Sinkov K., Osipov A.* Modeling of wellbore phase segregation during shut-in using the drift-flux model // *8<sup>th</sup> International Conference on Multiphase Flow.* — Jeju, Korea: 2013. — May 26 – June 1.
4. *Spesivtsev P., Sinkov K., Osipov A.* Comparison of drift-flux and multi-fluid approaches to modeling of multiphase flow in oil and gas wells // *7<sup>th</sup> International Conference on Computational and Experimental Methods in Multiphase and Complex Flow.* — A Coruña, Spain: 2013. — July 3–5. — Pp. 89–100.
5. *Spesivtsev P., Sinkov K., Osipov A.A.* The Hyperbolic Nature of a System of Equations Describing Three-phase Flows in Wellbores // *14<sup>th</sup> European conference on the mathematics of oil recovery.* — Catania, Italy: 2014. — September 8–11.
6. *Sinkov K. F., Spesivtsev P. E., Osipov A.A.* Simulation of particles transport in multiphase pipe flow for cleanup of oil and gas wells // *19<sup>th</sup> International Conference on Hydrotransport / BHR Group.* — Golden, Colorado, USA: 2014. — 24 – 26 September. — Pp. 5–16.



7. *Синьков К.Ф., Спесивцев П.Е.* Характеристический анализ одномерных уравнений модели дрейфа для двухфазных течений в канале // Труды 54-й научной конференции МФТИ "Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук". — Т. Аэрофизика и космические исследования. — 2011. — С. 100–102.
8. *Синьков К.Ф., Спесивцев П.Е.* Описание сегрегации несжимаемых жидкостей в закрытой трубе с помощью модели дрейфа // Труды 55-й научной конференции МФТИ "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук". — Т. Аэрофизика и космические исследования. — Т. 2. — 2012. — С. 90–92.
9. *Синьков К.Ф., Спесивцев П.Е., Осипцов А.А.* Моделирование пробкового режима двухфазного течения, вызванного геометрией трубопровода // "Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность". — г. Звенигород, МО: 2014. — 25 февраля – 4 марта. — С. 222–225.
10. *Синьков К.Ф., Спесивцев П.Е., Осипцов А.А.* Развитие модели течения суспензии в трубопроводах с учетом образования осадка // XVII школа-семинар "Современные проблемы аэрогидродинамики". — г. Сочи, пансионат "Буревестник" МГУ им. М. В. Ломоносова: 2014. — 20 – 30 августа. — С. 100–101.
11. *Лебедева Н. А., Жибаедов В. Д., Синьков К.Ф.* Исследование гиперболичности одномерных нестационарных моделей газожидкостных течений в трубопроводе // VII международная конференция "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике". — Новосибирск: 2015. — 7 – 11 сентября. — С. 135.
12. *Синьков К.Ф., Лебедева Н. А.* Модель гидравлического транспорта и разрушения длинной капсулы в трубе // 5-я Всероссийская научная конференция "Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред". — Москва: 2015. — 15 – 17 декабря. — С. 414–416.

13. *Sinkov K., Kharlashkin A., Spesivtsev P.* Modeling of the transient terrain-induced and severe slugging problems using the drift-flux model // 9<sup>th</sup> International Conference on Multiphase Flow. — Firenze, Italy: 2016. — May 22 – 27. — P. 87.
14. *Bratland O.* Pipe flow 2: Multi-phase flow assurance. — drbratland. com. — 2009.
15. *Ramshaw J.D., Trapp J.A.* Characteristics, stability, and short-wavelength phenomena in two-phase flow equation systems // *Nucl. Sc. and Eng.* — 1978. — Vol. 66, no. 1. — Pp. 93–102.
16. The dynamic two-fluid model OLGA: Theory and application / K. Bendiksen, D. Maines, R. Moe, S. Nuland // *SPE Production Engineering.* — 1991. — Vol. 6, no. 2. — Pp. 171–180.
17. *Wallis G.B.* One-dimensional two-phase flow. — McGraw-Hill, 1969. — 408 pp.
18. *Bonizzi M., Andreussi P., Banerjee S.* Flow regime independent, high resolution multi-field modelling of near-horizontal gas-liquid flows in pipelines // *Int. J. Multiphase Flow.* — 2009. — Vol. 35, no. 1. — Pp. 34–46.
19. *Нугматуллин Р. И.* Динамика многофазных сред, Ч. 1. — М.: Наука, 1987. — 464 с.
20. *Lhuillier D., Chang C., Theofanous T.G.* On the quest for a hyperbolic effective-field model of disperse flows // *J. Fluid Mech.* — 2013. — Vol. 731. — Pp. 184–194.
21. *Рахматуллин Х.А.* Основы газовой динамики взаимопроникающих движений сплошных сред // *ПММ.* — 1956. — Т. 20, № 2. — С. 184–195.
22. *Stuhmiller J.H.* The influence of interfacial pressure forces on the character of two-phase flow model equations // *Int. J. Multiphase Flow.* — 1977. — Vol. 3, no. 6. — Pp. 551–560.

23. *Ndjinga M.* Influence of interfacial pressure on the hyperbolicity of the two-fluid model // *Comptes Rendus Mathématique*. — 2007. — Vol. 344, no. 6. — Pp. 407–412.
24. *Kumbaro A., Ndjinga M.* Influence of interfacial pressure term on the hyperbolicity of a general multifluid model // *J. Computational Multiphase Flows*. — 2011. — Vol. 3, no. 3. — Pp. 177–196.
25. *Baer M.R., Nunziato J.W.* A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // *Int. J. Multiphase Flow*. — 1986. — Vol. 12, no. 6. — Pp. 861–889.
26. *Romenski E., Toro E.F.* Compressible two-phase flows: two-pressure models and numerical methods // *Comput. Fluid Dyn. J.* — 2004. — Vol. 13. — Pp. 403–416.
27. *Gallouët T., Hérard J.-M., Seguin N.* Numerical modeling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. — 2004. — Vol. 14, no. 05. — Pp. 663–700.
28. Prediction of the transition from stratified to slug flow or roll-waves in gas-liquid horizontal pipes / U. Kadri, R.F. Mudde, R.V.A. Oliemans et al. // *Int. J. Multiphase Flow*. — 2009. — Vol. 35, no. 11. — Pp. 1001–1010.
29. *Рождественский Б. Л., Яценко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978. — 688 с.
30. О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы уравнений двухскоростного движения двухфазных сред / Л.А. Клебанов, А.Е. Крошили, Б.И. Нигматулин, Р.И. Нигматулин // *ПММ*. — 1982. — Т. 46, № 1. — С. 83–95.
31. *Zuber N.* On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime // *Chem. Eng. Sc.* — 1964. — Vol. 19, no. 11. — Pp. 897–917.

32. Zuber N., Findlay J. A. Average volumetric concentration in two-phase flow systems // *J. Heat Transfer, Trans. ASME. Ser. C.* — 1965. — Vol. 87, no. 4. — Pp. 453–468.
33. Ishii M. One-dimensional drift-flux model and constitutive equations for relative motion between phases in various two-phase flow regimes: Tech. Rep. ANL 77-47. — Ill. (USA): Argonne National Laboratory, 1977. — 7.
34. Невский Ю. А., Осипцов А. Н. Моделирование гравитационной конвекции суспензий // *Письма в ЖТФ.* — 2009. — Т. 35, № 7. — С. 98–105.
35. Осипцов А. А., Боронин С.А. Двухконтинуальная модель течения суспензии в трещине гидроразрыва // *Докл. РАН.* — 2010. — Т. 431, № 6. — С. 758–761.
36. Осипцов А. А., Боронин С.А. Влияние миграции частиц на течение суспензии в трещине гидроразрыва // *Изв. РАН. МЖГ.* — 2014. — № 2. — С. 80–94.
37. Evje S., Flåtten T. On the wave structure of two-phase models // *SIAM J. Appl. Math.* — 2007. — Vol. 67, no. 2. — Pp. 487–511.
38. Hasan A. R., Kabir C. S. Fluid Flow and Heat Transfer in Wellbores. — Society of Petroleum Engineers, 2002. — 181 pp.
39. Transient simulation of two-phase flows in pipes / J.M. Masella, Q.H. Tran, D. Ferre, C. Pauchon // *Int. J. Multiphase Flow.* — 1998. — Vol. 24, no. 5. — Pp. 739–755.
40. Théron B. — Ecoulements diphasiques instationnaires en conduite horizontale. — Master's thesis, INP Toulouse, France, 1989.
41. Benzoni-Gavage S. — Analyse numérique des modèles hydrodynamiques d'écoulements diphasiques instationnaires dans les réseaux de production pétrolière. — Master's thesis, ENS Lyon, France, 1991.

42. *Gavrilyuk S.L., Fabre J.* Lagrangian coordinates for a drift-flux model of a gas-liquid mixture // *Int. J. Multiphase Flow.* — 1996. — Vol. 22, no. 3. — Pp. 453–460.
43. *Varadarajan P. A., Hammond P. S.* Numerical scheme for accurately capturing gas migration described by 1D multiphase drift flux model // *Int. J. Multiphase Flow.* — 2015. — Vol. 73. — Pp. 57–70.
44. Drift-Flux Modeling of Multiphase Flow in Wellbores / H. Shi, J. A. Holmes, L. J. Durlofsky et al. // *SPE Journal.* — 2005. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 24–33.
45. Drift-flux parameters for three-phase steady-state flow in wellbores. SPE-89836-PA / H. Shi, J. A. Holmes, L. R. Diaz et al. // *SPE Journal.* — 2005. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 130–137.
46. Optimized Parameters and Extension of a 2-Phase Flow-Regime-Independent Flow Model / Y. Li, W. Bailey, K. Rashid et al. // 15<sup>th</sup> International Conference on Multiphase Production Technology / BHR Group. — 2011.
47. *Osiptsov A. A., Starostin A. B., Krasnopolsky B. I.* Development of a multi-fluid model for multiphase flows in oil and gas wells during cleanup // 9<sup>th</sup> EFMC. — Italy, Rome: 2012.
48. *Taitel Y., Shoham O., Brill J.P.* Transient two-phase flow in low velocity hilly terrain // *Int. J. Multiphase Flow.* — 1990. — Vol. 16, no. 1. — Pp. 69–77.
49. *De Henau V., Raithby G. D.* A Study of Terrain-Induced Slugging in Two-Phase Flow Pipelines // *Int. J. Multiphase Flow.* — 1995. — Vol. 21, no. 3. — Pp. 365–379.
50. Severe slugging in pipeline/riser systems. SPE-16846-PA / J. Fabre, L. Peresson, J. Corteville et al. // *SPE Production Engineering.* — 1990. — Vol. 5. — Pp. 299–305.

51. *Baliño J.L., Burr K.P., Nemoto R.H.* Modeling and simulation of severe slugging in air-water pipeline-riser systems // *Int. J. Multiphase Flow.* — 2010. — Vol. 36, no. 8. — Pp. 643–600.
52. *Barnea D., Taitel Y.* Interfacial and structural stability of separated flow // *Int. J. Multiphase Flow.* — 1994. — Vol. 20. — Pp. 387–414.
53. Slug initiation and evolution in two-phase horizontal flow / P. M. Ujang, C. J. Lawrence, C. P. Hale, G. F. Hewitt // *Int. J. Multiphase Flow.* — 2006. — Vol. 32, no. 5. — Pp. 527–552.
54. Thermal simulation with multisegment wells. SPE-78131-PA / T. W. Stone, J. Bennett, D. H. S. Law, J. A. Holmes // *SPE Reservoir Evaluation & Engineering.* — 2002. — Vol. 5, no. 3. — Pp. 206–218.
55. *Malekzadeh R., Belfroid S.P.C., Mudde R.F.* Transient drift flux modelling of severe slugging in pipeline-riser systems // *Int. J. Multiphase Flow.* — 2012. — Vol. 46. — Pp. 32–37.
56. *Llewellyn E. W., Mader H. M., Wilson S. D. R.* The rheology of a bubbly liquid // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* — 2002. — Vol. 458. — Pp. 987–1016.
57. *Brady J.F., Khair A.S., Swaroop M.* On the bulk viscosity of suspensions // *J. Fluid Mech.* — 2006. — Vol. 554. — Pp. 109–123.
58. *Левуш В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит-ры, 1959. — 699 с.
59. *Maxey M.R., Riley J.J.* Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow // *Phys. Fluids.* — 1983. — Vol. 26. — Pp. 883–896.
60. *Magnaudet J., Legendre D.* The viscous drag force on a spherical bubble with a time-dependent radius // *Physics of Fluids (1994-present).* — 1998. — Vol. 10, no. 3. — Pp. 550–554.

61. *Осипцов А. А.* Стационарное пленочное течение сильновязкой тяжелой жидкости с массоподводом // *Изв. РАН. МЖГ.* — 2003. — № 6. — С. 24–31.
62. *Низматуллин Р. И.* Динамика многофазных сред, Ч. 2. — М.: Наука, 1987. — 360 с.
63. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967. — 311 с.
64. *Kulikovskii A. G., V. Pogorelov N., Yu. Semenov A.* Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems (Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics). — Chapman and Hall/CRC, 2000. — 560 pp.
65. *Barnea D., Taitel Y.* Kelvin-Helmholtz stability criteria for stratified flow: viscous versus non-viscous (inviscid) approaches // *Int. J. Multiphase Flow.* — 1993. — Vol. 19, no. 4. — Pp. 639–649.
66. *Holmes J. A., T. Barkve, Lund O.* Application of a Multisegment Well Model to Simulate Flow in Advanced Wells // European Petroleum Conference. — The Hague, Netherlands: 1998. — 20-22 October.
67. *Patankar S. V.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. — Hemisphere Publ., 1980. — 197 pp.
68. *Ferziger J. H., Perić M.* Computational Methods for Fluid Dynamics. — Springer, 2002.
69. *Moukalled F., M. Darwish, B. Sekar.* A pressure-based algorithm for multiphase flow at all speeds // *J. Comp. Physics.* — 2003. — Vol. 190, no. 2. — Pp. 550–571.
70. *Moukalled F.* The Geometric Conservation Based Algorithms For Multi-Fluid Flow At All Speeds: Tech. Rep. F61775-01-W-E005, SPC 01-4005: European Office of Aerospace Research and Development, 2002.

71. *Мирзаджанзаде А.Х., Ентов В.М.* Гидродинамика в бурении. — Недра, 1985. — 196 с.
72. NIST Chemistry WebBook. — <http://webbook.nist.gov/>. — 2016.
73. *Roache P.J.* Verification and validation in computational science and engineering. — Hermosa Publishers, 1998.
74. Drift-flux modeling of Multiphase flow in wellbores. SPE-84228-PA / H. Shi, J. A. Holmes, L. J. Durlofsky et al. // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. — Denver, Colorado, U.S.A.: 2003. — October 5–8. — Pp. 1–11.
75. *Durand R., Condolios E.* Experimental investigation of the transport of solids in pipes // *Deuxieme Journée de l'hydraulique, Société Hydrotechnique de France.* — 1952.
76. Hydraulic conveying of solids in horizontal pipes / D.M. Newitt, J.F. Richardson, M. Abbott, R.B. Turtle // *Trans. Inst. Chem. Eng.* — 1955. — Vol. 33. — Pp. 93–113.
77. Solids transport models comparison and fine-tuning for horizontal, low concentration flow in single-phase carrier fluid / F. B. Soepyan, S. Cremaschi, C. Sarica et al. // *AIChE J.* — 2014. — Vol. 60, no. 1. — Pp. 76–122.
78. *S.M. Daniel.* Flow of suspensions in a rectangular channel: Ph.D. thesis / University of Saskatchewan. — 1965.
79. *Richardson J., Zaki W.* Fluidization and sedimentation—Part I // *Trans. Inst. Chem. Eng.* — 1954. — Vol. 32. — Pp. 38–58.
80. *Karabelas A.J.* Vertical distribution of dilute suspensions in turbulent pipe flow // *AIChE J.* — 1977. — Vol. 23, no. 4. — Pp. 426–434.
81. *Walton I.C.* Eddy diffusivity of solid particles in a turbulent liquid flow in a horizontal pipe // *AIChE J.* — 1995. — Vol. 41, no. 7. — Pp. 1815–1820.



82. *Oroskar A.R., Turian R.M.* The critical velocity in pipeline flow of slurries // *AIChE J.* — 1980. — Vol. 26, no. 4. — Pp. 550–558.
83. *Roco M.C., Shook C.A.* Modeling of slurry flow: the effect of particle size // *Canad. J. Chem. Eng.* — 1983. — Vol. 61, no. 4. — Pp. 494–503.
84. *Shook C.A., Roco M.C.* Slurry flow: principles and practice. — Elsevier, 1990.
85. *Bagnold R.A.* Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear // *Proc. R. Soc. of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* — 1954. — Vol. 225, no. 1160. — Pp. 49–63.
86. *Bagnold R.A.* The flow of cohesionless grains in fluids // *Phil. Trans. R. Soc. of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* — 1956. — Vol. 249, no. 964. — Pp. 235–297.
87. *Wilson K.C., Pugh F.J.* Dispersive-force modelling of turbulent suspension in heterogeneous slurry flow // *Canad. J. Chem. Eng.* — 1988. — Vol. 66, no. 5. — Pp. 721–727.
88. *Eskin D.* A simple model of particle diffusivity in horizontal hydrotransport pipelines // *Chemical Engineering Science.* — 2012. — Vol. 82. — Pp. 84–94.
89. *Колмогоров А.Н.* О локальной структуре турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *ДАН СССР.* — 1941. — Т. 30. — С. 9–13.
90. *Turian R. M., Yuan T.-F.* Flow of slurries in pipelines // *AIChE J.* — 1977. — Vol. 23, no. 3. — Pp. 232–243.
91. *Van den Kroonenberg H. H.* A mathematical model for concentric horizontal capsule transport // *Canad. J. Chem. Eng.* — 1978. — Vol. 56, no. 5. — Pp. 538–543.
92. *Гиневский А. С., Колесников А. В.* К теории движения плотов в русловом потоке и контейнеров в напорном трубопроводе. Парадокс Прандтля // *Изв. АН СССР. МЖГ.* — 1980. — № 6. — С. 88–98.

93. *Charles M. E.* The pipeline flow of capsules. Part 2: Theoretical analysis of the concentric flow of cylindrical forms // *Canad. J. Chem. Eng.* — 1963. — Vol. 41, no. 2. — Pp. 46–51.
94. *Kruyer J., Redberger P. J., Ellis H. S.* The pipeline flow of capsules. Part 9 // *J. Fluid Mech.* — 1967. — Vol. 30, no. 3. — Pp. 513–531.
95. *Kennedy R.J.* Towards an analysis of plug flow through pipes // *Canad. J. Chem. Eng.* — 1966. — Vol. 44, no. 6. — Pp. 354–356.
96. *Polderman H.G., Velraeds G., Knol W.* Turbulent lubrication flow in an annular channel // *J. Fluids Eng.* — 1986. — Vol. 108, no. 2. — Pp. 185–192.
97. *Lundell F., Söderberg L. D., Alfredsson P. H.* Fluid mechanics of papermaking // *Ann. Rev. Fluid Mech.* — 2011. — Vol. 43. — Pp. 195–217.
98. Fibre suspensions in Hagen–Poiseuille flow: Transition from laminar plug flow to turbulence / A. Nikbakht, A. Madani, J. A. Olson, D. M. Martinez // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* — 2014. — Vol. 212. — Pp. 28–35.
99. *Бабкин В. А.* Стержневое течение волокнистой суспензии // *Изв. АН СССР. МЖГ.* — 1972. — № 4. — С. 65–71.
100. *Jäsberg A.* The flow behaviour of fibre suspensions in straight tubes: new experimental techniques and multiphase modeling: Ph.D. thesis / Dept. of Phys., Univ. of Jyväskylä, Finland. — 2007. — 157 pp.
101. *Brinkman H. C.* A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // *Appl. Sc. Res.* — 1949. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 27–34.
102. Momentum transport at a fluid–porous interface / B. Goyeau, D. Lhuillier, D. Gobin, M. G. Velarde // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* — 2003. — Vol. 46, no. 21. — Pp. 4071–4081.

103. *Walmsley M. R. W.* The flow behaviour of particulate Solids and capsules in wood pulp fibre suspensions: Ph. D. thesis / Sch. of Eng., Univ. of Auckland, New Zeland. — 1988. — 252 pp.
104. *Бабкин В. А.* Волокнистая суспензия как несущая среда при транспортировании зернистых материалов // *Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова.* — 1998. — Т. 223. — С. 112–117.
105. *Шановалов В. М.* Обтекание полупроницаемой частицы вязкой жидкостью // *ПМТФ.* — 2009. — Т. 50, № 4. — С. 48–53.
106. *Beavers G. S., Joseph D. D.* Boundary conditions at a naturally permeable wall // *J. Fluid Mech.* — 1967. — Vol. 30, no. 1. — Pp. 197–207.
107. *Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S.* Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – I. Theoretical development // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* — 1995. — Vol. 38, no. 14. — Pp. 2635–2646.
108. *Minale M.* Momentum transfer within a porous medium. I. Theoretical derivation of the momentum balance on the solid skeleton // *Phys. Fluids (1994-present).* — 2014. — Vol. 26, no. 12. — P. 123101.
109. *Malik R., Shenoy U. V.* Generalized annular Couette flow of a power-law fluid // *Ind. & Eng. Chem. Res.* — 1991. — Vol. 30, no. 8. — Pp. 1950–1954.
110. *Park N. A., Irvine Jr T. F.* Measurements of rheological fluid properties with the falling needle viscometer // *Rev. Sc. Instruments.* — 1988. — Vol. 59, no. 9. — Pp. 2051–2058.
111. *Gillies R.G., Shook C.A.* Concentration distributions of sand slurries in horizontal pipe flow // *Part. Sc. and Tech.* — 1994. — Vol. 12, no. 1. — Pp. 45–69.
112. *Shenoy A. V.* Non-Newtonian fluid heat transfer in porous media // *Adv. Heat Transfer.* — 1994. — Vol. 24. — Pp. 102–191.
113. *Лурье А. И.* Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 940 с.

114. *Бернадинер М.Г., Ентов В.Н.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. — М.: Наука, 1975. — 199 с.
115. *Christopher R. H., Middleman S.* Power-law flow through a packed tube // *Ind. & Eng. Chem. Fund.* — 1965. — Vol. 4, no. 4. — Pp. 422–426.
116. *Saffman P. G.* On the boundary condition at the surface of a porous medium // *Stud. Appl. Math.* — 1971. — Vol. 50, no. 2. — Pp. 93–101.
117. *Rao A. R., Mishra M.* Peristaltic transport of a power-law fluid in a porous tube // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* — 2004. — Vol. 121, no. 2. — Pp. 163–174.
118. *James D. F., Davis A. M. J.* Flow at the interface of a model fibrous porous medium // *J. Fluid Mech.* — 2001. — Vol. 426. — Pp. 47–72.
119. *Мосина Е.В., Чернышев И.В.* Условие скольжения на поверхности модельной волокнистой пористой среды // *Письма в ЖТФ.* — 2009. — Т. 35, № 5. — С. 103–110.
120. *Lohrenz J., Swift G.W., Kurata F.* An experimentally verified theoretical study of the falling cylinder viscometer // *AIChE J.* — 1960. — Vol. 6, no. 4. — Pp. 547–550.
121. *Chhabra R. P.* Bubbles, drops, and particles in non-Newtonian fluids. — Boca Raton: CRC Press, 2006. — 771 pp.
122. *Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.* Математическая теория пластичности. — М.: Физматлит, 2001, 2003. — 704 с.
123. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.
124. *Harmathy T. Z.* Velocity of large drops and bubbles in media of infinite or restricted extent // *AIChE J.* — 1960. — June. — Vol. 6, no. 2. — Pp. 281–288.

125. *Wallis G. B., Makkenchery S.* The hanging film phenomenon in vertical annular two-phase flow // *J. Fluids Eng.* — 1974. — Vol. 96, no. 3. — Pp. 297–298.
126. *Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д.* Нефтегазовая гидромеханика. — М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. — 544 с.
127. *Korn G. A., Korn T. M.* Mathematical handbook for scientists and engineers. — McGraw-Hill, 1968. — 832 pp.
128. *Жуковский Н. Е.* Полное собрание сочинений, Т. 8. — М., Л.: Гл. ред. авиационной литературы, 1937. — 146 с.
129. *Gelfand I. M.* Several problems of the theory of quasilinear equations // *Russian Mathematical Surveys.* — 1959. — Т. 14, № 86. — С. 87–158.

## Список иллюстраций

1.1	Схема двухфазного течения в трубопроводе. . . . .	13
1.2	Схема течения дисперсной газо-жидкостной смеси в круглой трубе.	31
1.3	Зависимость параметра профиля от безразмерного радиуса ядра для различных объемных долей газа в ядре. . . . .	32
1.4	Зависимости параметра профиля и безразмерной скорости дрейфа от объемной доли. . . . .	37
1.5	Области гиперболичности для различных замыкающих соотношений модели дрейфа. . . . .	38
1.6	Зависимости характеристических скоростей, скорости звука в смеси и критического числа Маха от объемной доли. . . . .	40
1.7	Зависимости устьевого и забойного давления от времени. . . . .	45
1.8	Сегрегация газ-жидкость, распределение объемной доли жидкости.	46
1.9	Схема трубопровода, использованного в эксперименте. . . . .	48
1.10	Сеточная сходимость. . . . .	51
1.11	Сравнение экспериментальных данных и результатов моделирования, эксперимент No. 3, первый цикл. . . . .	53
1.12	Сравнение экспериментальных данных и результатов моделирования, эксперименты No. 1, 2, 6. . . . .	57
1.13	Сравнение экспериментальных данных и результатов моделирования, эксперименты No. 3, 4, 9. . . . .	58
2.1	Распределения объемной доли твердых частиц по сечению трубы. .	69
2.2	Схема течения. . . . .	71
2.3	Распределение среднеобъемной скорости течения по сечению трубы для различных значений параметра плавучести. . . . .	80

2.4	Зависимость приведенного перепада давления от радиуса тела. . .	82
2.5	Зависимость скорости скелета от радиуса тела. . . . .	83
2.6	Сравнение результатов расчета для относительной скорости деформации на поверхности тела с опубликованными данными. . . .	85
2.7	Зависимость напряжения на поверхности тела от радиуса тела. . .	86
2.8	Зависимость предельного радиуса тела от предельного сдвигового напряжения. . . . .	87
2.9	Сравнение экспериментальных данных и теоретических результатов для капсул различных радиусов. . . . .	90
A.1	Конфигурации течения . . . . .	116
B.1	Нормированный поток и характеристическая скорость для сегрегации газ-жидкость. . . . .	127
B.2	Схематическое изображение поля характеристик в плоскости координата-время для сегрегации газ-жидкость. . . . .	129

## Список таблиц

1.1	Характерные значения параметров для двух типов газожидкостных течений. . . . .	36
1.2	Конфигурации трубопровода, использованные в эксперименте. . .	48
1.3	Условия эксперимента . . . . .	49
1.4	Относительная ошибка моделирования относительно экспериментальных данных. . . . .	53
1.5	Сравнение экспериментальных данных и результатов моделирования для периода пробкового течения . . . . .	54
2.1	Классификация режимов течения относительно монотонности и выпуклости распределения скорости в зазоре. . . . .	81
A.1	Наборы параметров замыкающих соотношений модели дрейфа. . .	115



# Приложение А

## Замыкающие соотношения модели дрейфа

**Функциональный вид замыкающих соотношений модели дрейфа.** В настоящей работе используются замыкающие соотношения модели дрейфа предложенные в [44, 45, 74]. Для полноты изложения ниже кратко приведены основные соотношения, определяющие используемые замыкания. Детальное описание и обоснование предлагаемой модели могут быть найдены в [44, 45, 74] и цитируемой в этих работах литературе.

Согласно [74] параметр профиля задается соотношением

$$C_0 = \begin{cases} A, & \beta \leq B, \\ \frac{A}{1 + (A - 1) \left( \frac{\beta - B}{1 - B} \right)^2}, & B < \beta < 1, \\ 1, & \beta \geq 1, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

где  $A$  и  $B$  – настроечные параметры,  $\beta$  – функция объемной доли и скорости смеси, заданная соотношением

$$\beta = \max \left( \alpha_g, F_v \frac{\alpha_g |v_m|}{v_{sgf}} \right),$$

где  $F_v$  также настроечный параметр, а  $v_{sgf}$  – скорость захлебывания (flooding velocity), имеющая смысл плотности объемного расхода газа, при которой тонкий кольцевой слой жидкости на стенке трубы удерживается в стационарном

состоянии

$$v_{sgf} = \alpha_g v_g(v_l = 0, \alpha_g \rightarrow 1).$$

Выражение для скорости дрейфа  $v_d$  может быть получено комбинированием экспериментальных данных для предельных случаев всплытия единственного пузырька в неподвижной жидкости (малые объемные доли газа) и кольцевого течения с высоким расходом газа и тонким неподвижным слоем жидкости на стенках трубы (высокие объемные доли газа). Для промежуточных значений  $\alpha_g$  должна быть выполнена интерполяция. В обоих случаях скорость жидкости считается равной нулю. Из определения среднеобъемной скорости смеси и выражения для скорости газа следует

$$v_d = (1 - \alpha_g C_0) v_g(v_l = 0).$$

Используя последнее уравнение мы можем связать скорость дрейфа  $v_d$  с экспериментальными значениями скорости газа для неподвижной жидкости  $v_g(v_l = 0)$ .

Для малых значений  $\alpha_g$  используется скорость всплытия отдельного пузырька. Согласно [124] она выражается как

$$v_g(v_l = 0, \alpha_g \rightarrow 0) = 1.53 v_c,$$

где характеристическая скорость  $v_c$  имеет вид

$$v_c = \left( \frac{\sigma g (\rho_l - \rho_g)}{\rho_l^2} \right)^{1/4},$$

и  $\sigma$  - поверхностное натяжение на границе раздела газ-жидкость.

С другой стороны, для высоких значений  $\alpha_g$  может быть использовано эмпирическое соотношение для скорости захлебывания, при которой тонкий кольцевой слой жидкости удерживается на стенках трубы потоком газа, полученное в [125]

$$v_g(v_l = 0, \alpha_g \rightarrow 1) = \text{Ku} \left( \frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{1/2} v_c,$$

где  $Ku$  – критическое число Кутателадзе, которое вычисляется как функция безразмерного диаметра  $\hat{D}$ , определяемого как

$$\hat{D} = \sqrt{\frac{g(\rho_l - \rho_g)}{\sigma} d}.$$

Метод, по которому производится интерполяция между этими двумя предельными случаями, следует [17] и приведен в [74]. Согласно [44], окончательное выражение для скорости дрейфа  $v_d$  имеет вид

$$v_d = \frac{(1 - \alpha_g C_0) C_0 K(\alpha_g) v_c}{\alpha_g C_0 \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}} + 1 - \alpha_g C_0} m(\theta), \quad (\text{A.2})$$

где

$$K(\alpha_g) = \begin{cases} 1.53/C_0, & \alpha_g \leq a_1, \\ \frac{a_2 - \alpha_g}{a_2 - a_1} 1.53/C_0 + \frac{\alpha_g - a_1}{a_2 - a_1} Ku, & a_1 < \alpha_g < a_2, \\ Ku, & \alpha_g \geq a_2, \end{cases}$$

где  $a_1$  и  $a_2$  – предельные значения объемной доли, определяющие область интерполяции между двумя крайними случаями всплытия одного пузыря в стоячей жидкости и зависания тонкого слоя жидкости на стенках трубы.

Зависимость скорости дрейфа от угла наклона учитывается с помощью множителя  $m(\theta)$ , задаваемого в виде

$$m(\theta) = m_0 (\cos \theta)^{n_1} (1 + \sin \theta)^{n_2}. \quad (\text{A.3})$$

Таким образом, согласно [44, 45], вектор настроечных параметров замыканий модели дрейфа для газожидкостных течений содержит 8 значений

$$X_p = [A, B, F_v, a_1, a_2, m_0, n_1, n_2]. \quad (\text{A.4})$$

Таблица A.1: Наборы параметров замыкающих соотношений модели дрейфа [44, 45, 74].

Параметр	$A$	$B$	$F_v$	$a_1$	$a_2$	$m_0$	$n_1$	$n_2$
ORIGINAL	1.2	0.3	1.0	0.2	0.4	1.0	0.5	2.0
SHI-04	1.0	–	–	0.06	0.21	1.85	0.21	0.95

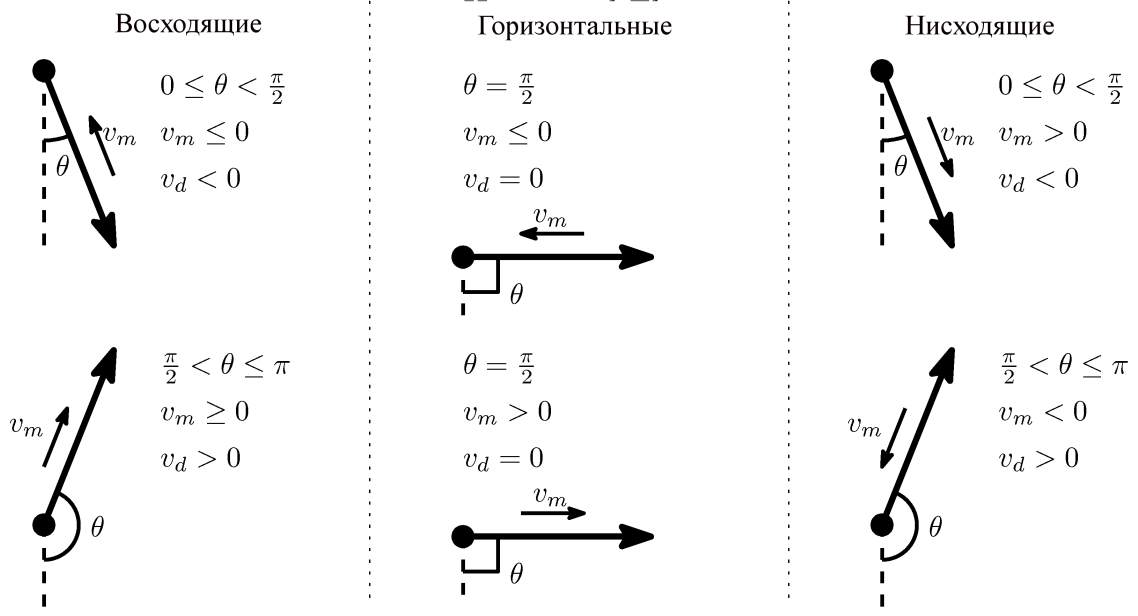


Рис. А.1: Конфигурации течения

**Конфигурации течения.** Важная особенность замыкающих соотношений модели дрейфа, используемых в данной работе, заключается в том, что они допускают различные знаки скоростей фаз и скорости смеси. Таким образом, в рамках модели дрейфа могут быть смоделированы разнонаправленные течения в процессе гравитационной сегрегации в вертикальных трубах и других нестационарных процессах. При пробковом режиме течения, вызванном сложной геометрией трубопровода, условия, приводящие к разнонаправленному течению жидкости и газа, имеют место в определенные моменты времени в некоторых точках трубопровода. В зависимости от направления скорости смеси выделяются следующие возможные конфигурации течения:

1. Восходящие течения. В данной конфигурации скорость газа выше скорости жидкости. В случае низкого полного расхода скорость жидкости может иметь знак противоположный знаку скорости газа.
2. Горизонтальные течения. Скорость дрейфа равняется нулю, течения жидкости и газа сонаправлены, однако в общем случае  $C_0 \neq 1$  не совпадают.
3. Нисходящие течения. В данной конфигурации в случае сонаправленного течения скорость жидкости по абсолютному значению превосходит ско-

рость газа, для низких расходов газ может двигаться в направлении противоположном среднему движению смеси.

Перечисленные конфигурации течения схематически изображены на Рис. A.1. Отметим, что приведенная классификация является достаточно грубой и физические условия и природа течения могут значительно отличаться для различных течений, отнесенных к одному типу. Тем не менее, в данной работе для учета основных отличительных особенностей восходящих, нисходящих и горизонтальных течений предлагается использовать различные вектора настраиваемых параметров модели дрейфа для каждой конфигурации.

# Приложение В

## Аналитические решения

В приложение В вынесено подробное описание вывода аналитических решений для задач из разделов 1.3.1 и 1.3.2.

### В.1 Задача о восстановлении давления

В соответствии со сделанными при постановке задачи в разделе 1.3.1 предположениями (толщина пласта много меньше глубины скважины, соединение скважины с пластом на максимальной глубине  $L$ ), при выводе аналитического решения пласт моделируется граничным условием, связывающим скорость и давление в точке  $z = L$

$$v(L, t) = -\alpha (p_r - p(L, t)),$$

где  $\alpha = PI/S$  (ср. с уравнением (1.38)). Заметим, что граничная скорость, заданная этим выражением отрицательна, т. к. в работе принято положение начала координат на поверхности. Граничное условие на поверхности перед закрытием  $p(0, t) = p_{wh}^0$ .

Линеаризованные уравнения движения слабосжимаемой жидкости в нашем случае имеют вид (см. [71, 126])

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial v}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} &= g. \end{aligned}$$

Стационарное решение последних уравнений с описанными граничными условиями имеет вид

$$\begin{aligned} v^0(z, t) &= v_0 \equiv -\alpha (p_r - p_{wf}^0), \\ p^0(z, t) &= p_{wh}^0 + \rho_0 g z, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

где  $p_{wf}^0 = p_{wh}^0 + \rho_0 g L$  - забойное давление перед закрытием.

После закрытия граничное условие на поверхности  $z = 0$  заменяется на  $v(0, t) = 0$ . Представим искомые скорость и давление в виде суммы стационарного решения и поправки к нему

$$\begin{aligned} v(z, t) &= v^0(z, t) + v'(z, t), \\ p(z, t) &= p^0(z, t) + p'(z, t). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Система уравнений для поправок скорости и давления к стационарному решению записывается как

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial v'}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.4})$$

с начальными

$$\begin{aligned} v'(z, 0) &= 0, \\ p'(z, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} v'(0, t) &= -v_0, \\ v'(L, t) &= \alpha p'(L, t). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Здесь и далее время  $t$  отсчитывается от момента закрытия скважины.

Система уравнений (B.3) - (B.4) может быть сведена к волновому уравнению для одной из поправок. Дифференцируя (B.3) по  $z$ , (B.4) по  $t$  и исключая смешанные производные поправки давления получим

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{B.7})$$

Из начальных условий (B.5), используя (B.3), получим

$$\begin{aligned} v'(z,0) &= 0, \\ \frac{\partial v'}{\partial t}(z,0) &= 0. \end{aligned} \tag{B.8}$$

Дифференцируя второе из граничных условий (B.6) по  $t$  и исключая производную  $p$  с помощью уравнения (B.3) получим

$$\begin{aligned} v'(0,t) &= -v_0, \\ \frac{\partial v'}{\partial t}(L,t) + \alpha\rho_0c^2\frac{\partial v'}{\partial z}(L,t) &= 0. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Сформулированная задача оказалась сведена к начально-краевой задаче для линейного волнового уравнения. Так как граничные условия содержат производные искомой функции по времени, для получения аналитического решения разумно использовать интегральное преобразование, позволяющее свести задачу (B.7) - (B.9) к краевой задаче для ОДУ в частотной области. Поскольку начальные условия не согласованы с граничными, ожидается, что в решении будут присутствовать импульсные функции и использование преобразования Лапласа

$$V'(z, \sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} v'(z, t) dt$$

представляется наиболее целесообразным.

Применение преобразования к уравнению (B.7) и граничным условиям (B.9) с учетом выражения для преобразования производной (см. [127]) и начальных условий (B.8) приводит к краевой задаче для ОДУ

$$\begin{aligned} \sigma^2 V'(z, \sigma) - c^2 \frac{d^2}{dz^2} V'(z, \sigma) &= 0, \\ V'(0, \sigma) &= -\frac{v_0}{\sigma}, \\ \sigma V'(L, \sigma) + \delta c \frac{d}{dz} V'(L, \sigma) &= 0, \end{aligned}$$



где  $\delta = \alpha\rho_0c$ . Решение для образа поправки скорости

$$V'(z, \sigma) = \frac{v_0}{\sigma} \left( \frac{\cosh \frac{\sigma}{c}L + \delta \sinh \frac{\sigma}{c}L}{\sinh \frac{\sigma}{c}L + \delta \cosh \frac{\sigma}{c}L} \sinh \frac{\sigma}{c}z - \cosh \frac{\sigma}{c}z \right). \quad (\text{B.10})$$

Применяя преобразование непосредственно к уравнению (B.3) можно получить связь между образами поправок скорости и давления

$$P'(z, \sigma) = -\frac{\rho_0c^2}{\sigma} \frac{d}{dz} V'(z, \sigma). \quad (\text{B.11})$$

Подстановка (B.10) в (B.11) дает решение для образа поправки давления

$$P'(z, \sigma) = -\frac{\rho_0cv_0}{\sigma} \left( \frac{\cosh \frac{\sigma}{c}L + \delta \sinh \frac{\sigma}{c}L}{\sinh \frac{\sigma}{c}L + \delta \cosh \frac{\sigma}{c}L} \cosh \frac{\sigma}{c}z - \sinh \frac{\sigma}{c}z \right). \quad (\text{B.12})$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа от (B.10) и (B.12) можно получить явные выражения для скорости и давления как функций координаты и времени. Далее приведены решения для давления в двух точках  $z = 0$  и  $z = L$  (на устье и забое скважины соответственно). Прямое вычисление обратного преобразования как интеграла от образа в комплексной плоскости [127] затруднительно, поэтому для получения искомым решений в данном случае используется разложение в ряд и почленное обращение преобразования Лапласа. Подстановка определения гиперболических функций и алгебраические преобразования (B.12) дают для устьевого давления

$$P'(0, \sigma) = -\frac{\rho_0cv_0}{\sigma} \frac{1 + \frac{1-\delta}{1+\delta}e^{-\frac{2\sigma L}{c}}}{1 - \frac{1-\delta}{1+\delta}e^{-\frac{2\sigma L}{c}}}. \quad (\text{B.13})$$

Поскольку величина

$$\frac{1-\delta}{1+\delta}e^{-\frac{2\sigma L}{c}} < 1,$$

выражение (B.13) может быть переписано в виде сходящегося ряда

$$P'(0, \sigma) = -\rho_0 c v_0 \left( \frac{1}{\sigma} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^n \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{2\sigma L n}{c}} \right). \quad (\text{B.14})$$

Прямым вычислением легко убедиться, что образ функции Хевисайда  $\theta(t)$  со сдвигом  $\tau$  имеет вид

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sigma t} \theta(t - \tau) dt = \frac{1}{\sigma} e^{-\sigma \tau},$$

Следовательно, почленное обращение преобразования Лапласа дает

$$p'(0, t) = -\rho_0 c v_0 \left( \theta(t) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^n \theta\left(t - \frac{2Ln}{c}\right) \right). \quad (\text{B.15})$$

Аналогичные вычисления для забойного давления приводят к выражению

$$p'(L, t) = -\frac{2\rho_0 c v_0}{1+\delta} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^n \theta\left(t - \frac{L(2n+1)}{c}\right). \quad (\text{B.16})$$

Уравнения (B.15), (B.16) вместе с (B.2) и (B.1) полностью определяют поведение давления в двух интересующих нас точках.

Последовательные слагаемые в уравнениях (B.15), (B.16) отвечают последовательным приходам скачка давления, распространяющегося по скважине со скоростью звука  $c$  и отражающегося на ее концах. На устье скважины отражение происходит без потерь, на забое скважины коэффициент отражения

$$\frac{1-\delta}{1+\delta} < 1.$$

Характерная величина скачка определяется выражением  $\rho_0 c |v_0|$  в полном согласии с известной формулой Жуковского для гидравлического удара [128]. Заметим, что введенная величина  $\delta$  имеет смысл отношения характерного значения скачка давления к начальной депрессии на пласт:

$$\delta = \alpha \rho_0 c = \frac{PI}{A} \rho_0 c = \frac{\rho_0 c |v_0|}{p_r - p_{wf}^0}.$$

Также можно убедиться, что

$$\begin{aligned} p'(L) &\rightarrow -\frac{2\rho_0 c v_0}{1+\delta} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^n = -\frac{2\rho_0 c v_0}{1+\delta} \frac{1}{1 - \frac{1-\delta}{1+\delta}} = -\frac{\rho_0 c v_0}{\delta} = \\ &= -\frac{A v_0}{P I} = p_r - p_{wf}^0 \end{aligned}$$

при  $t \rightarrow +\infty$ , то есть на больших временах забойное давление выходит на уровень пластового.

## В.2 Задача о сегрегации

Уравнения модели дрейфа для течения двух несжимаемых фаз имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_g + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_g v_g = 0, \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_l + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_l v_l = 0, \quad (\text{B.18})$$

$$\rho_m \frac{\partial v_m}{\partial t} + \rho_m v_m \frac{\partial v_m}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_m g - \frac{2f \rho_m v_m |v_m|}{d}, \quad (\text{B.19})$$

Замыкающие соотношения для скоростей фаз  $v_g = v_g(\alpha_l, v_m)$ ,  $v_l = v_l(\alpha_l, v_m)$  не содержат давления  $p$ , так как считается, что плотности и поверхностные натяжения не зависят от давления.

Начальные распределения объемных долей:

$$\alpha_g(z, 0) = \begin{cases} 0, & z \leq \frac{L}{2} \\ 1, & z > \frac{L}{2} \end{cases}, \quad \alpha_l(z, 0) = \begin{cases} 1, & z \leq \frac{L}{2} \\ 0, & z > \frac{L}{2} \end{cases}.$$

Начальная скорость смеси  $v_m(z, 0) = 0$ . Заметим, что замыкающие соотношения модели дрейфа обеспечивают нулевые скорости фаз при нулевой скорости смеси и объемной доле равной нулю или единице. Таким образом

$$v_g(\alpha_l(z, 0), v_m(z, 0)) = v_l(\alpha_l(z, 0), v_m(z, 0)) = 0.$$

Начальное распределение давления - гидростатическое:

$$p(z,0) = p_0 + \int_0^z \rho_m(z',0) g dz',$$

где  $p_0$  - начальное значение давления в точке  $z = 0$ .

Граничные условия на непроницаемых стенках

$$\begin{aligned} \alpha_g(0,t) v_g(\alpha_l(0,t), v_m(0,t)) &= \alpha_l(0,t) v_l(\alpha_l(0,t), v_m(0,t)) = 0, \\ \alpha_g(L,t) v_g(\alpha_l(L,t), v_m(L,t)) &= \alpha_l(L,t) v_l(\alpha_l(L,t), v_m(L,t)) = 0. \end{aligned}$$

Суммируя (B.17) и (B.18) и принимая во внимание соотношение  $\alpha_g + \alpha_l = 1$  и определение скорости смеси  $v_m = \alpha_g v_g + \alpha_l v_l$ , получим:

$$\frac{\partial v_m}{\partial z} = 0. \quad (\text{B.20})$$

Поскольку оба конца трубы закрыты, скорость смеси на них равна нулю, как сумма плотностей объемных расходов  $v_m(0,t) = v_m(L,t) = 0$ . Используя последнее утверждение и (B.20), получим  $v_m(z,t) = 0$ . Следовательно, система уравнений (B.17) - (B.19) может быть сведена к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_l + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_l v_l(\alpha_l, 0) = 0, \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_m g. \quad (\text{B.22})$$

Как упоминалось выше, уравнение (B.21) не содержит  $p$ , следовательно, распределение давления  $p(z,t)$  может быть найдено из уравнения (B.22) после нахождения распределения объемной доли  $\alpha_l(z,t)$ .

Отметим, что система уравнений (B.20) - (B.22), являющаяся строгим следствием системы уравнений модели дрейфа с формулировкой закона сохранения импульса смеси в терминах среднеобъемной доли (B.17) - (B.19) при заданных граничных условиях и свойствах фаз, также может быть получена из системы уравнений модели дрейфа в приближении безынерционного течения. Аналогич-

ные уравнения выводятся и из системы уравнений двухжидкостной модели в том же приближении [17, 62].

Таким образом, исходная задача оказалась сведена к начально-краевой задаче для одного квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha + \frac{\partial}{\partial z}f(\alpha) = 0, (z,t) \in [0,L] \times [0, +\infty), \quad (\text{B.23})$$

где  $\alpha \equiv \alpha_l$ ,  $f(\alpha) = \alpha v_l(\alpha, 0)$ , с начальными

$$\alpha(z, 0) = \begin{cases} 1, & z \leq \frac{L}{2} \\ 0, & z > \frac{L}{2} \end{cases}, \quad (\text{B.24})$$

и краевыми условиями

$$f(\alpha(0,t)) = f(\alpha(L,t)) = 0. \quad (\text{B.25})$$

Для достаточно малых времен (пока возмущения от начального разрыва не достигли границ) решение (B.23) - (B.25) совпадает с решением задачи о распаде разрыва

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha + \frac{\partial}{\partial z}f(\alpha) = 0, (z,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty), \quad (\text{B.26})$$

$$\alpha(z, 0) = \begin{cases} \alpha^- = 1, & z \leq \frac{L}{2} \\ \alpha^+ = 0, & z > \frac{L}{2} \end{cases}. \quad (\text{B.27})$$

Может быть показано, что решение задачи о распаде разрыва для одного квазилинейного уравнения существует и единственно [129].

Введем автомодельную переменную  $\zeta = \frac{z - \frac{L}{2}}{t}$ . Будем искать самоподобное решение  $\alpha(\zeta)$  задачи (B.26) - (B.27). Из уравнения (B.26) получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(\zeta - \lambda(\alpha)) \frac{d\alpha}{d\zeta} = 0, \quad (\text{B.28})$$

где  $\lambda(\alpha) = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}$  - характеристическая скорость, с граничными условиями

$$\begin{aligned}\alpha(\zeta) &\rightarrow \alpha^- = 1, \zeta \rightarrow -\infty, \\ \alpha(\zeta) &\rightarrow \alpha^+ = 0, \zeta \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Из уравнения (B.28) можно заключить, что решение (B.26) - (B.27) конструируется из решений трех типов

- постоянное  $\frac{d\alpha}{d\zeta} = 0$
- волна разрежения  $\zeta = \lambda(\alpha)$
- разрывный переход (ударная волна).

Для волн разрежения допустимо использовать только те области  $\alpha$ , где  $\lambda(\alpha)$  изменяется монотонно, в противном случае зависимость  $\alpha(\zeta)$  будет многозначной.

Разрывный переход  $\alpha^1 \rightarrow \alpha^2$  в некоторой точке  $\zeta = \omega$  должен удовлетворять

$$1. \text{ условию Ренкина-Гюгонио } -\omega(\alpha^2 - \alpha^1) + f(\alpha^2) - f(\alpha^1) = 0$$

и дополнительным условиям (см. [129]):

2.  $\lambda(\alpha^1) < \omega < \lambda(\alpha^2)$ ;
3.  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$  являются соседними нулями функции

$$\Phi(\alpha) = f(\alpha) - \omega\alpha - (f(\alpha^1) - \omega\alpha^1).$$

Для задачи о сегрегации газ-жидкость используем оптимизированный набор параметров SHI-04 (см. Таб. A.1) для замыкающих соотношений. Так как в этом наборе  $A = 1$ , параметр профиля  $C_0(\alpha_l, v_m) \equiv 1$ , что значительно упрощает аналитические выкладки. Используя (A.2) получим

$$f(\alpha) = -(1 - \alpha)v_d(\alpha, 0) = \frac{\alpha(1 - \alpha)K(\alpha)v_c}{\delta + \alpha(1 - \delta)}, \quad (\text{B.29})$$

где  $\delta = \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}}$  и

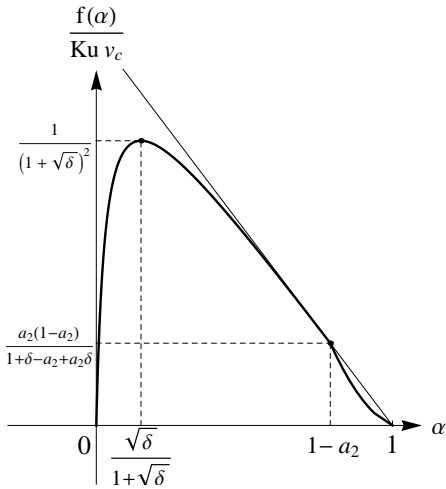
$$K(\alpha) = \begin{cases} \text{Ku}(\hat{D}), & \alpha \leq 1 - a_2, \\ \frac{1.53 - \text{Ku}(\hat{D})}{a_2 - a_1} (\alpha - (1 - a_2)) + \text{Ku}(\hat{D}), & 1 - a_2 < \alpha < 1 - a_1, \\ 1.53, & 1 - a_1 \leq \alpha. \end{cases}$$

Дифференцируя (B.29) по  $\alpha$  получим

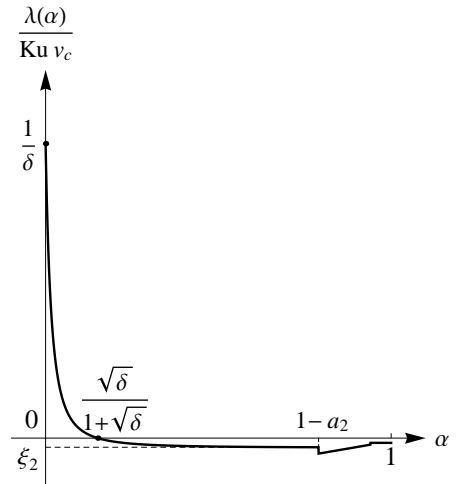
$$\lambda(\alpha) = -\frac{\alpha^2(1-\delta) + 2\alpha\delta - \delta}{(\delta + (1-\delta)\alpha)^2} K(\alpha) v_c + \frac{\alpha(1-\alpha)}{\delta + (1-\delta)\alpha} K'(\alpha) v_c,$$

где

$$K'(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha \leq 1 - a_2, \alpha \geq 1 - a_1, \\ \frac{1.53 - \text{Ku}(\hat{D})}{a_2 - a_1}, & 1 - a_2 < \alpha < 1 - a_1. \end{cases}$$



(а) Нормированный поток  $f(\alpha)$ .



(б) Нормированная характеристическая скорость  $\lambda(\alpha)$ .

Рис. В.1: Нормированные поток (а) и характеристическая скорость (б) для сегрегации газ-жидкость. Графики построены для  $\text{Ku} = 3$  и  $\delta = \sqrt{\frac{1}{1000}}$ .

Во-первых, заметим, что разрывный переход  $\alpha^- = 0 \rightarrow \alpha^* = 1 - a_2$  в точке

$$\zeta = \omega = \frac{f(\alpha^*) - f(\alpha^-)}{\alpha^* - \alpha^-}$$

допустим (см. рисунок B.1a). Во-вторых, учтем, что при изменении  $\alpha$  от  $\alpha^*$  до  $\alpha^- = 1$  характеристическая скорость монотонно растет, следовательно, возможен переход из  $\alpha^*$  в  $\alpha^-$  волной разрежения (см. рисунок B.1б).

Поскольку  $\alpha < \alpha^*$ , зависимость  $\alpha(\zeta)$  может быть получена из уравнения

$$-\frac{\alpha^2(1-\delta) + 2\alpha\delta - \delta}{(\delta + (1-\delta)\alpha)^2} = \xi,$$

где  $\xi = \frac{\zeta}{\text{Kuv}_c}$ . Имеем:

$$\alpha(\xi) = \frac{\sqrt{\delta}}{1-\delta} \left( \frac{1}{\sqrt{1+\xi(1-\delta)}} - \sqrt{\delta} \right). \quad (\text{B.30})$$

Как уже упоминалось, разрывный переход  $\alpha^- = 0 \rightarrow \alpha^* = 1 - a_2$  имеет место в точке

$$\xi_1 = \frac{\omega}{\text{Kuv}_c} = -\frac{\alpha^*}{\delta + \alpha^*(1-\delta)}. \quad (\text{B.31})$$

В волне разрежения объемная доля достигает  $\alpha^*$  в точке (см. уравнение (B.30))

$$\xi_2 = -\frac{\alpha^{*2}(1-\delta) + 2\alpha^*\delta - \delta}{(\delta + (1-\delta)\alpha^*)^2}. \quad (\text{B.32})$$

Так как  $\xi_1 < \xi_2$ , распределение  $\alpha(\xi)$  для  $\xi_1 < \xi < \xi_2$  дополняется постоянным значением  $\alpha = \alpha^*$ .

Из уравнения (B.30) также получим, что  $\alpha\left(\frac{1}{\delta}\right) = 0$ . Значит, переход от волны разрежения к постоянному решению  $\alpha = \alpha^+$  происходит в точке

$$\xi_3 = \frac{1}{\delta}. \quad (\text{B.33})$$

Окончательно имеем:

1.  $\alpha = \alpha^-$ ,  $\xi < \xi_1$ ;
2. ударная волна  $\alpha^- \rightarrow \alpha^*$ ,  $\xi = \xi_1$ ;
3.  $\alpha = \alpha^*$ ,  $\xi_1 \leq \xi < \xi_2$ ;
4. волна разрежения  $\xi_2 \leq \xi < \xi_3$ ;



5.  $\alpha = \alpha^+, \xi \geq \xi_3$ .

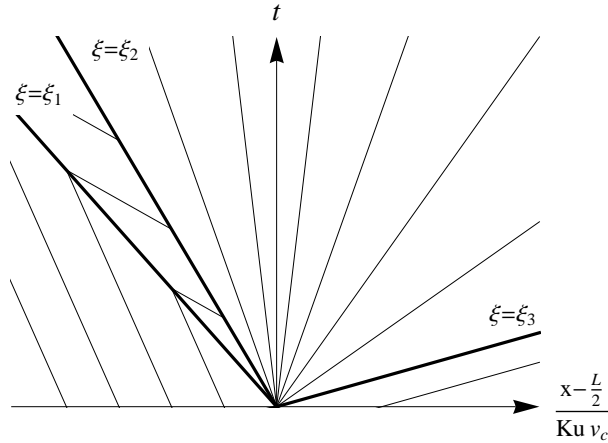


Рис. В.2: Схематическое изображение поля характеристик в плоскости координата-время для сегрегации газ-жидкость.

В явном виде:

$$\alpha(z,t) = \begin{cases} 1, & \xi < \xi_1, \\ 1 - a_2, & \xi_1 \leq \xi < \xi_2, \\ \frac{\sqrt{\delta}}{1 - \delta} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \xi(1 - \delta)}} - \sqrt{\delta} \right), & \xi_2 \leq \xi < \xi_3, \\ 0, & \xi_3 \leq \xi, \end{cases} \quad (\text{В.34})$$

где  $\xi = \frac{z - \frac{L}{2}}{Ku v_c t}$  и  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  определены уравнениями (В.31) - (В.33).

На рисунке В.2 схематически изображено поле характеристик в плоскости координата-время для сегрегации газ-жидкость. Веер характеристик соответствует волне разрежения, области постоянного наклона соответствуют областям постоянного решения. Жирные линии разделяют эти области.

Как упоминалось выше, построенные решения верны, только пока возмущения от разрыва в начальных условиях не достигли границ области. Теоретически, возможно построение полного решения начально-краевой задачи (В.23) - (В.25). Такая задача связана с техническими сложностями при рассмотрении взаимодействия скачков объемной доли и волн разрежения и их отражения от

границ области. Получение конечных аналитических выражений затруднительно. Более того, в таких решениях нет необходимости для достижения текущих целей верификации численных результатов и проверки сеточной сходимости.