МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.547

Шерстюков Владимир Борисович

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, КОРНИ КОТОРЫХ ЛЕЖАТ В НЕКОТОРОМ УГЛЕ

Специальность: 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена на кафедре высшей математики
Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ».

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Малютин Константин Геннадьевич, профессор кафедры высшей математики естественно-научного факультета Юго-Западного государственного университета, г. Курск;

доктор физико-математических наук
Попов Антон Юрьевич, ведущий научный сотрудник кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова;

доктор физико-математических наук, профессор
Хабибуллин Булат Нурмиевич, заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии факультета математики и информационных технологий Башкирского государственного университета.

Ведущая организация:
ФГАОУ ВПО «Южный федеральный университет» (Ростов-на-Дону).

Защита состоится 17 февраля 2017 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: 119234, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8-й этаж) и на сайте механико-математического факультета: http://mech.math.msu.su

Автореферат разослан « » января 2017 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.85
на базе МГУ имени М. В. Ломоносова,
доктор физ.-матем. наук, профессор В. В. Власов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Основы теории целых функций как самостоятельного раздела анализа были заложены в фундаментальных исследованиях К. Вейерштрасса, М. Г. Миттаг-Леффлера, Ж. Адамара, Э. Бореля. В работах классиков особое внимание традиционно уделялось изучению функций с «асимптотически правильным» поведением. Решающий вклад в построение соответствующей теории целых функций *вполне регулярного роста* был сделан Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером во второй четверти прошлого века. В дальнейшем эта теория развивалась А. А. Гольдбергом, И. В. Островским, В. С. Азариным, А. А. Кондратюком, М. Н. Шереметой и другими авторами. Целые функции вполне регулярного роста изучены наиболее полно, встречаются в большом количестве работ и имеют разнообразные применения. Однако, современные исследования вопросов полноты и представления рядами в функциональных пространствах, проблем теории аналитического продолжения, задач теории дифференциальных операторов бесконечного порядка и операторов типа свертки требуют систематического изучения целых функций, не обладающих сколь-нибудь правильным поведением. Поэтому актуальной является разработка методов решения задач, связанных с нахождением экстремальных значений для основных асимптотических характеристик роста целых функций из весьма общих и естественных классов. Существенный вклад в эту тематику внесли основополагающие исследования Ж. Валирона, А. Данжуа, Б. Я. Левина, А. А. Гольдберга, А. А. Кондратюка. В последнее время благодаря, в первую очередь, работам Б. Н. Хабибуллина, А. Ю. Попова, Г. Г. Брайчева и их учеников возникают новые теоретические направления, что сохраняет устойчивый интерес к экстремальным задачам для индикаторов и типов целых функций конечного порядка с заданными асимптотическими характеристиками распределения нулей.

С другой стороны, как показывают исследования В. Бернштейна, С. Мандельбройта, А. Ф. Леонтьева, В. В. Напалкова, А. Ф. Гришина, Ю. Ф. Коробейника, А. В. Братищева, А. М. Гайсина, К. Г. Малютина и других математиков, в теории интерполяции и рядов Дирихле типичной является ситуация, когда в качестве узлов интерполяции или показателей системы экспонент выбираются нули целой функции с предписанным поведением в нулях ее производных. Такой выбор, обусловленный существом дела, выдвигает на повестку дня следующие естественные вопросы. Насколько сильно влияет на регулярность роста целой функции $L(\lambda)$ с нулями $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ поведение в нулях ее производных? Возможно ли, учитывая по сути только степень этого влияния, раскладывать обратную величину $1/L(\lambda)$ в ряд простых дробей специальной структуры? (Разложение обратной величины целой функции на простые дроби является не менее важным аналитическим инструментом, чем представление целой функции бесконечным произведением, также составленным по ее нулям.) В каких случаях можно описывать полные и представляющие системы экспонент с показателями в нулях «порождающей» функции в терминах, связанных только с поведением последовательности значений ее производных? Этот круг вопросов тесно связан с такими классическими и современными результатами, включая нерешенные задачи теории целых функций, как известная проблема А. Ф. Леонтьева о целых функциях вполне регулярного роста; теорема М. Г. Крейна о представлении обратной величины целой функции рядом простых дробей; серия результатов А. Ф. Леонтьева, Ю. Ф. Коробейника, А. В. Абанина, С. Н. Мелихова о разложении аналитических в выпуклой области функций в ряды экспонент и знаменитая теорема Берлинга – Мальявена о радиусе полноты. Сюда же примыкают избранные вопросы теории негармонических рядов Фурье и абстрактных дифференциальных уравнений (Ж.-П. Кахан, Л. Шварц, А. Ф. Леонтьев, А. М. Седлецкий, И. В. Тихонов, Ю. С. Эйдельман). В той или иной степени эти связи нашли отражение в настоящей работе.

Особо подчеркнем, что несмотря на более чем столетнее развитие теории целых функций как самостоятельной дисциплины, не все ее разделы разработаны достаточно полно. Так, еще мало изучены асимптотические свойства целых функций, не отличающихся «правильным» поведением.

При этом, значительный интерес представляют задачи с ограничениями на расположение нулей, часто возникающие как в самой теории, так и в ее приложениях. Диссертация частично восполняет указанный пробел. Объединительной чертой исследованного в работе цикла задач является требование, чтобы нули рассматриваемых целых функций располагались на заданном множестве. Как правило, это множество может быть помещено в некоторый угол. Отметим, что никаких исходных дополнительных предположений о регулярности роста функций не делается. Тем самым, достигается необходимая общность постановок задач и расширяется сфера приложения полученных результатов.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ. Цель работы состоит в изучении асимптотических свойств целых функций с ограничениями на расположение корней и в применении установленных результатов к вопросам аппроксимации аналитических функций в областях комплексной плоскости.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем.

1. Исследован вопрос о регулярности роста канонических произведений с вещественными симметричными нулями, играющих заметную роль в теории рядов Дирихле и в экстремальных задачах теории аналитического продолжения. Найдено точное условие регулярности роста таких произведений в терминах обобщенного индекса конденсации последовательности нулей.

2. Изучены асимптотические свойства произвольной целой функции экспоненциального типа с простыми нулями в зависимости от поведения в нулях ее производной. Даны достаточные условия регулярности роста функции, корни которой образуют последовательность с нулевым индексом конденсации.

3. Доказан цикл теорем (уточняющих результаты А. Ф. Леонтьева, Ю. Ф. Коробейника, А. В. Абанина) о разложении аналитических в выпуклой области функций в ряды экспонент. Выявлена особая роль, которую в теории представляющих систем экспонент играют разложения на простые дроби величины, обратной к «порождающей» функции.

4. Найдена точная нижняя грань типов при порядке $\rho \in (0, 1)$ всевозможных целых функций, нули которых расположены на одном луче или в угле фиксированного раствора и имеют заданные верхнюю и нижнюю плотности. Проведено (совместно с Г. Г. Брайчевым) полное исследование полученной экстремальной величины как функции параметров задачи. В качестве приложения даны новые оценки для радиусов кругов полноты систем экспонент с показателями, лежащими в угле или на нескольких лучах.

5. Для целой функции с простыми нулями, расположенными в некоторой полосе комплексной плоскости, получен критерий того, что обратная величина функции раскладывается в специальный ряд простых дробей. Результат является новым даже в случае целой функции с вещественными нулями и решает известную проблему в теории мероморфных функций, восходящую к работе М. Г. Крейна 1947 г. Дано применение рядов Крейна к специальным классам целых функций.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ. В диссертационной работе используются разнообразные методы и приемы из теории целых функций и функционального анализа, привлекаются общие методы теории полных и представляющих систем в пространствах аналитических функций. Разработан специальный «параметрический» метод исследования асимптотического поведения канонических произведений, основанный на тонких свойствах считающей функции корней. При изучении аппроксимационных свойств систем экспонент в областях комплексной плоскости применяются как известные, так и новые результаты о разложении мероморфных функций на простые дроби.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Диссертация носит теоретический характер и способствует развитию теории целых функций и теории аппроксимации в комплексной плоскости. Ее материал представляет интерес для специалистов, работающих в области теории функций, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений и теории вероятностей. Результаты диссертации могут быть востребованы в исследованиях, проводимых в Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН, Институте математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН, Южном математическом институте Владикавказского научного центра РАН, МГУ имени М. В. Ломоносова, Башкирском государственном ниверситете, Южном федеральном университете, Московском педагогическом государственном университете и других отечественных и зарубежных математических центрах.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Сообщения о результатах диссертации были сделаны на научных семинарах

механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

- по спектральной теории дифференциальных операторов под руководством академика РАН В. А. Садовничего, 2016 г.;
- по обратным задачам анализа, математической физики и естествознания под руководством академика РАН В. А. Садовничего и профессора А. И. Прилепко, 2008 г.;
- по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН Б. С. Кашина, чл.-корр. РАН С. В. Конягина, профессора Б. И. Голубова, профессора М. И. Дьяченко, 2010, 2016 гг.;
- по негармоническому анализу и целым функциям под руководством профессора А. М. Седлецкого и профессора В. В. Власова (в последние годы — профессора А. М. Седлецкого и д.ф.-м.н. А. Ю. Попова), неоднократно, 2002–2015 гг.;
- по теории тригонометрических и ортогональных рядов под руководством профессора М. К. Потапова, профессора М. И. Дьяченко, профессора Т. П. Лукашенко, профессора В. А. Скворцова, 2016 г.;
- по операторным моделям в математической физике под руководством профессора А. А. Шкаликова, профессора И. А. Шейпака, доцента А. М. Савчука и А. А. Владимирова, 2015 г.;
- по теории приближений и граничным свойствам функций под руководством профессора Е. П. Долженко, 2010 г.;

- по теории приближений аналитическими функциями под руководством профессора П. В. Парамонова и д.ф.-м.н. К. Ю. Федоровского, 2016 г.;

Математического института имени В. А. Стеклова РАН

- по комплексному анализу (Семинаре Гончара) под руководством чл.-корр. РАН Е. М. Чирки, профессора А. И. Аптекарева, 2016 г.;
- по теории приближений под руководством профессора С. А. Теляковского, 2012 г.;

а также на научных семинарах

- кафедры высшей математики МИФИ под руководством профессора В. А. Осколкова, 2001, 2003 гг.;
- кафедры математического анализа Южного федерального университета под руководством профессора Ю. Ф. Коробейника и профессора А. В. Абанина, 2009 г.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

- Саратовская зимняя математическая школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», г. Саратов, неоднократно, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014 гг.;
- «Теория операторов. Комплексный анализ и математическое моделирование», г. Волгодонск, неоднократно, 2005, 2007, 2009, 2011 гг.;
- «Математика. Экономика. Образование», п. Абрау-Дюрсо, 2006, 2008 гг.;
- Казанская летняя научная школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», г. Казань, 2007 г.;
- «Analysis and Topology», г. Львов, 2008 г.;

- «Европа и современная Россия. Интегративная функция педагогической науки в едином образовательном пространстве», г. Прага, 2008 г.;
- Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы», г. Воронеж, 2009, 2015 гг.;
- «Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования», г. Москва, 2009 г.;
- «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования», г. Владикавказ, 2010 г.;
- «Теория приближений», посвященная 90-летию С. Б. Стечкина, г. Москва, 2010 г.;
- «Физика и технические приложения волновых процессов», г. Челябинск, 2010 г.;
- «Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания», г. Обнинск, 2011 г.;
- «Системы компьютерной математики и их приложения», г. Смоленск, 2012, 2013 гг.;
- «Теория приближений функций и родственные задачи анализа», посвященная памяти доктора физико-математических наук, профессора П. П. Коровкина, г. Калуга, 2015 г.;
- «Математика и информатика», г. Москва, 2016 г.

ПУБЛИКАЦИИ. Основные результаты диссертации полностью опубликованы в шестнадцати работах, список которых приведен в конце автореферата. Тринадцать работ из этого списка опубликованы в ведущих научных изданиях, рекомендованных ВАК. Две статьи выполнены в соавторстве. Центральные результаты совместных работ, выносимые на защиту, принадлежат автору. Вклад соавторов (Г. Г. Брайчев и Е. В. Сумин) подробно оговаривается в тексте диссертации и отделен от результатов автора.

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ РАБОТЫ. Диссертация изложена на 224 страницах. После Введения следует основной текст, разбитый на три главы. Каждая глава посвящена отдельной задаче. Главы делятся на параграфы, некоторые из параграфов — на пункты. Принята сквозная нумерация параграфов. Нумерация утверждений, примеров, формул и т. д. ведется по параграфам. В конце каждой главы помещен небольшой раздел с комментариями и дополнительными ссылками. Итоги выполненного исследования подведены в Заключении. Текст завершается списком литературы, в котором в алфавитном порядке идут сначала работы на русском языке, а затем — источники на иностранных языках. Библиография состоит из 174 наименований.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Во ВВЕДЕНИИ описано общее направление исследования; обоснованы актуальность, научная новизна и теоретическая значимость работы; дано краткое изложение содержания диссертации. Основной текст диссертационной работы разбит на три главы, разные по темам, но связанные по смыслу и характеру результатов. Выделим наиболее принципиальные из них. Нумерация теорем в автореферате совпадает с их нумерацией в тексте диссертации; нумерация же формул в автореферате принята сквозной и не зависит от нумерации формул в диссертации.

Общую задачу, поставленную в ГЛАВЕ 1 (§§ 1–9), можно сформулировать так: исследовать регулярность роста целой функции экспоненциального типа с простыми нулями в зависимости от поведения в нулях ее производной. Параграфы 1–7 посвящены каноническим произведениям с вещественными симметричными нулями. В § 1 подробно излагается история вопроса и формулируются два центральных результата первой главы (теоремы 1.1 и 1.2). Рассматриваются бесконечные произведения

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

где $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность положительных чисел

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ \ldots \ < \lambda_n < \ldots \ , \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty, \tag{2}$$

имеющая конечную *верхнюю плотность*

$$\overline{\Delta}(\Lambda) \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n}, \qquad 0 < \overline{\Delta}(\Lambda) < +\infty. \tag{3}$$

Нижняя плотность последовательности Λ, т. е. число

$$\underline{\Delta}(\Lambda) \equiv \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n},$$

может не совпадать с верхней плотностью, и в этом случае последовательность называют *неизмеримой*. Если же выполнено равенство $\overline{\Delta}(\Lambda) = \underline{\Delta}(\Lambda)$, то существует обычный предел $\lim\limits_{n\to\infty} (n/\lambda_n)$, который называют *плотностью* последовательности Λ и обозначают $\Delta(\Lambda)$. В таком случае последовательность Λ считается *измеримой*.

Справедливы следующие факты. Каноническое произведение (1) при условиях (2), (3) задает целую функцию экспоненциального типа $\sigma(\Lambda)$, где $0 < \sigma(\Lambda) \leqslant \pi\, \overline{\Delta}(\Lambda)$. Для *индикатора* функции $L(\lambda)$ верна оценка

$$h_L(\theta) \equiv \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln |L(re^{i\theta})|}{r} \geqslant \sigma(\Lambda)\, |\sin\theta|.$$

Функция $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост тогда и только тогда, когда

$$\overline{\Delta}(\Lambda) = \underline{\Delta}(\Lambda) = \Delta(\Lambda),$$

т. е. когда последовательность Λ измерима. В этом случае тип и индикатор вычисляются точно:

$$\sigma(\Lambda) = \pi\, \Delta(\Lambda), \qquad h_L(\theta) = \sigma(\Lambda)\, |\sin\theta| = \pi\, \Delta(\Lambda)\, |\sin\theta|.$$

Функции вида (1) находят широкое применение в задачах анализа, не относящихся напрямую к целым функциям, например, в задачах аппроксимации и аналитического продолжения рядов экспонент. В классических работах первой половины XX века, посвященных теории таких рядов [1, 2], и в более поздних исследованиях часто используется величина

$$\delta(\Lambda) \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} \; = \; -\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\neq n} \ln \left| 1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda_k^2} \right|, \tag{4}$$

[1] Bernstein V. Leçons sur les progrès récents de la théorie séries de Dirichlet. – Paris: Gauthier-Villars, 1933. – 320 p.

[2] Мандельбройт С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. – М.: ИЛ, 1955. – 268 с.

называемая *индексом конденсации* последовательности Λ. Отметим, что характеристики, подобные (4), вводят и для более широкого класса последовательностей, ставя им в соответствие по определенному правилу канонические произведения. В нашем случае для функций (1) величина (4) всегда является неотрицательной [3], а для последовательностей, ведущих себя наиболее «регулярно», имеет место равенство

$$\delta(\Lambda) = 0. \tag{5}$$

В частности, равенство (5) заведомо выполнено, если в определении (3) существует не верхний, а обычный предел, и при этом последовательность Λ имеет положительный шаг

$$h(\Lambda) \equiv \varliminf_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0. \tag{6}$$

Возникает естественный вопрос: что можно сказать об асимптотическом поведении последовательности Λ и функции $L(\lambda)$, если верно равенство (5)? Будет ли в таком случае существовать предел

$$\Delta(\Lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n}, \tag{7}$$

и тем самым автоматически выполняться равенство

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln|L(re^{i\theta})|}{r} = \pi\,\Delta(\Lambda)\,|\sin\theta|, \qquad \theta \in (0,\,\pi) \cup (\pi,\,2\pi)\,, \tag{8}$$

означающее полную регулярность роста функции (1)? Этот вопрос возник в начале 70-х годов прошлого века, а в 1983 г. А. В. Братищев [4] дал на него отрицательный ответ. Однако, в работе Братищева не была выписана явно последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, для которой выполняется равенство (5), а отношение n/λ_n предела не имеет (фактически, доказано лишь существование такой последовательности). Кроме того, не было найдено условие в духе (5), обеспечивающее справедливость предельных соотношений (7), (8). Именно все это и сделано в §§ 1–7 диссертации.

[3] Попов А. Ю. Точная оценка индекса конденсации // Mathematica Montisnigri. – 1999. – Т. 11. – С. 67–103.

[4] Братищев А. В. К одной задаче А. Ф. Леонтьева // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 270, № 2. – С. 265–267.

После работы Братищева стало ясно, что даже при дополнительном ограничении (6) нельзя охарактеризовать наличие плотности у последовательности Λ в терминах стандартного индекса конденсации $\delta(\Lambda)$. Потребовалось модифицировать понятие индекса конденсации так, чтобы с помощью новой характеристики можно было твердо гарантировать измеримость последовательности Λ.

Итак, пусть Λ — последовательность положительных чисел, подчиненная условиям (2), (3), и $L(\lambda)$ — каноническое произведение (1). Пусть $\omega(r)$ — положительная функция, определенная при $r \geqslant a$ с фиксированным $a > 0$. *Индексом ω-конденсации* (или *весовым индексом конденсации*) последовательности Λ назовем значение

$$\delta(\omega, \Lambda) \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}. \tag{9}$$

Похожие характеристики встречались и ранее. Так, А. Ф. Леонтьев использовал [5] величину

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n \ln \lambda_n} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}.$$

Затем в работах А. М. Гайсина [6, 7], посвященных решению некоторых проблем Пойа, вводилось специальное понятие весовой конденсации, фактически эквивалентное определению (9).

Рассматриваем *весовые функции* $\omega(r)$ со свойствами:

(i) $\omega(r)$ определена, непрерывна и строго возрастает при $r \geqslant a > 0$;

(ii) $\omega(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$;

(iii) $\omega(r)$ вогнута (не обязательно строго) при $r \geqslant a$.

При выполнении (i)–(iii) вопрос о том, будет ли более «гибкое» по сравнению с (5) условие $\delta(\omega, \Lambda) < +\infty$ достаточным для измеримости последовательности Λ, решается в терминах сходимости интеграла от $\omega(r)$, напоминающего интеграл из теории квазианалитических функций.

[5]Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.

[6]Гайсин А. М. Об одной гипотезе Полиа // Известия АН СССР, сер. матем. – 1994. – Т. 58, № 2. – С. 73–92.

[7]Гайсин А. М. Решение проблемы Пойа // Матем. сборник. – 2002. – Т. 193, № 6. – С. 39–60.

Теорема 1.1. *Пусть функция $\omega(r)$ со свойствами* (i)–(iii) *подчинена требованию*

$$\int\limits_a^\infty \frac{\omega(r)}{r^2}\,dr < +\infty. \tag{10}$$

Тогда всякая последовательность Λ вида (2), *имеющая конечную верхнюю плотность* (3) *и удовлетворяющая условию*

$$\delta(\omega,\Lambda) < +\infty, \tag{11}$$

будет измеримой.

Требование (10), предъявляемое к весовой функции $\omega(r)$, является ключевым для теоремы 1.1. Его точность установлена при дополнительном предположении о правильном изменении $\omega(r)$. Напомним, что положительная измеримая при $r \geqslant a$ функция $\omega(r)$ называется *правильно меняющейся* (на бесконечности) [8], если для каждого значения $t > 0$ существует предел

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)}.$$

Точность требования (10) на весовую функцию $\omega(r)$ в теореме 1.1 подтверждает следующий результат.

Теорема 1.2. *Пусть функция $\omega(r)$ со свойствами* (i)–(iii) *правильно меняется на бесконечности и подчинена требованию*

$$\int\limits_a^\infty \frac{\omega(r)}{r^2}\,dr = +\infty.$$

Тогда найдется неизмеримая последовательность Λ вида (2) *с положительным шагом* (6), *имеющая конечную верхнюю плотность* (3) *и удовлетворяющая условию* (11). *Более того, для любых чисел α, β, связанных соотношением $0 \leqslant \alpha < \beta$, означенную неизмеримую последовательность Λ можно конструктивно построить так, чтобы*

$$\underline{\Delta}(\Lambda) = \alpha < \beta = \overline{\Delta}(\Lambda),$$

[8] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.

и при этом

$$\delta(\omega, \Lambda) = 0$$

с тем, что $\delta(\Lambda) = 0$ *для стандартного индекса конденсации* (4).

Параграфы $2, 4, 5$ носят технический характер. Центральные теоремы 1.1 и 1.2 доказаны в § 3 и § 6 соответственно. В § 7 к этим теоремам сделаны полезные добавления и разобраны подкрепляющие примеры.

Параграф 8 диссертации посвящен известной задаче А. Ф. Леонтьева о регулярности роста целой функции экспоненциального типа с произвольно расположенным множеством простых нулей, имеющим нулевой индекс конденсации. Точнее, речь идет о следующем вопросе [9, 10]. Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с последовательностью простых нулей $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и индикатором $h_L(\theta)$, удовлетворяющая условию (ср. с условием (5)):

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} + h_L(\arg \lambda_n) \right\} = 0. \tag{12}$$

Нужно выяснить, является ли $L(\lambda)$ функцией вполне регулярного роста. Последнее свойство в соответствие с общим определением [11] равносильно существованию равномерного по $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ предела

$$\lim_{\substack{r\to+\infty \\ r\notin E}} \frac{\ln\left|L\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r} = h_L(\theta).$$

Здесь E — некоторое общее для всех θ множество положительных чисел *нулевой относительной меры*, т. е. такое, что пересечение $E \cap (0, r)$ измеримо по Лебегу при каждом $r > 0$, и его мера есть $o(r)$ при $r \to +\infty$.

В важном частном случае, когда $L(\lambda)$ есть функция (1), условие (12) равносильно соотношению

$$\delta(\Lambda) = h_L(0) = 0.$$

Таким образом, теоремы 1.1 и 1.2, доказанные в первой главе диссертации, дают развернутый ответ на первоначальный вопрос А. Ф. Леонтьева

[9]Леонтьев А. Ф. Об условиях разложимости аналитических функций в ряды Дирихле // Известия АН СССР, сер. матем. – 1972. – Т. 36, № 6. – С. 1282–1295.

[10]Леонтьев А. Ф. 1.11. Представление функций рядами экспонент // Исследования по линейным операторам и теории функций, 99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа. Зап. научн. сем. ЛОМИ. – Л.: Наука, Ленингр. отд., 1978. – Т. 81. – С. 255–257.

[11]Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

для канонических произведений (1). В полном же объеме проблема пока не решена. Ее история в подробностях изложена в § 8. Там же вопрос решается положительно, если функция $L(\lambda)$ «не слишком мала» на некоторой прямой.

Теорема 8.3. *Пусть целая функция экспоненциального типа* $L(\lambda)$ *с множеством простых нулей* $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и положительным индикатором* $h_L(\theta)$ *удовлетворяет условию* (12). *Пусть на некоторой прямой, проходящей через точку* $\lambda = 0$, *для функции* $L(\lambda)$ *выполнена оценка*

$$\inf\{\,|L(\lambda)|\exp\omega(|\lambda|):\ \lambda\in S\,\} > 0. \tag{13}$$

Здесь S *— относительно плотное по мере множество на этой прямой* [12], *а* $\omega(r)$ *— положительная неубывающая при* $r \geqslant a$ *функция, подчиненная требованию* (10). *Тогда* $L(\lambda)$ *является функцией вполне регулярного роста.*

Оценка вида (13) заведомо выполнена для функции, модуль которой отделен от нуля на соответствующей прямой. Такие целые функции фигурируют в следующем утверждении.

Теорема 8.4. *Пусть четная или нечетная целая функция экспоненциального типа* $L(\lambda)$ *с множеством простых нулей* $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и положительным индикатором* $h_L(\theta)$ *удовлетворяет условию* (12). *Пусть при каких-либо* $0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi$ *и* $D > 0$ *множество* Λ *содержится в «гиперболической полосе»*

$$\Gamma(\theta_0, D) \equiv \left\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re}\left(\lambda e^{-i\theta_0}\right)^2 \leqslant D\right\}.$$

Тогда $L(\lambda)$ *является функцией вполне регулярного роста.*

В заключительном § 9 методы и результаты предыдущего параграфа применяются к вопросам представления аналитических в ограниченной выпуклой области функций рядами экспонент. Установлена серия фактов, в некотором смысле усиливающих известные ранее результаты

[12] Множество S, расположенное на некоторой прямой, называется *относительно плотным по мере* на ней, если существуют такие положительные числа l и δ, что для любого отрезка длины l на этой прямой лебегова мера пересечения S с означенным отрезком не меньше, чем δ.

А. Ф. Леонтьева[5], Ю. Ф. Коробейника [13], А. В. Абанина [14]. Отличительной особенностью доказательств теорем § 9 является привлечение разложений на простые дроби соответствующих мероморфных функций. Приведем один типичный результат.

Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ с опорной функцией $h(-\theta) \equiv \sup\limits_{z\in G} \operatorname{Re}(ze^{i\theta})$. Возьмем какую-либо последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно различных комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности и составим систему экспонент

$$\left\{e^{\lambda_n z}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \qquad z\in G. \tag{14}$$

Построим, следуя А. Ф. Леонтьеву, целую функцию экспоненциального типа $L(\lambda)$ с простыми нулями λ_n, $n\in\mathbb{N}$, индикатором $h_L(\theta) = h(\theta)$, и образуем систему функций

$$\psi_n(t) = \frac{1}{L'(\lambda_n)} \int\limits_0^\infty \frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\, e^{-\lambda t}\, d\lambda, \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{15}$$

где интегрирование происходит по лучу $\arg\lambda = \theta$. Как доказано в монографии[5], функции $\psi_n(t)$ регулярны вне $\overline{G}$, и (15) — биортогональная к (14) система. Далее, каждой функции $f(z)$, аналитической на $\overline{G}$ (т. е. аналитической в некоторой окрестности этого компакта), сопоставляется ряд

$$f(z) \sim \sum_{n=1}^\infty c_n\, e^{\lambda_n z}, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(t)\,\psi_n(t)\,dt, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{16}$$

где Γ — контур, охватывающий $\overline{G}$, на котором и внутри которого $f(z)$ является аналитической функцией.

В [5] установлен следующий критерий: *для того чтобы ряд экспонент* (16) *сходился в области* G *к своей функции* $f(z)$, *какова бы ни была аналитическая на* $\overline{G}$ *функция* $f(z)$, *необходимо и достаточно,*

[13] Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // Успехи матем. наук. – 1981. – Т. 36, вып. 1. – С. 73–126.

[14] Абанин А. В. Геометрические критерии представления аналитических функций рядами обобщенных экспонент // Доклады РАН. – 1992. – Т. 323, № 5. – С. 807–810.

чтобы любая целая функция экспоненциального типа $\Phi(\lambda)$ *с индикатором* $< h(\theta)$ *допускала разложение в ряд Лагранжа*

$$\Phi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{17}$$

Оказывается, можно обеспечить сходимость ряда (16) в области G к своей функции $f(z)$, проверив выполнение условия (17) только для одной функции $\Phi(\lambda) \equiv 1$.

Теорема 9.2. *Пусть* G *— ограниченная выпуклая область в* $\mathbb{C}$, $0 \in G$, и $h(-\theta)$ *— ее опорная функция. Пусть* $L(\lambda)$ *— целая функция экспоненциального типа с индикатором* $h(\theta)$ *и множеством простых нулей* $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$. *Следующие утверждения равносильны.*

1. *Ряд* (16), *составленный по произвольной аналитической на* $\overline{G}$ *функции* $f(z)$, *сходится абсолютно и равномерно на компактах области* G *к своей функции* $f(z)$.

2. *Справедливо разложение*

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию (12).

Две другие теоремы 9.4, 9.6 из § 9 в близком ключе дополняют некоторые результаты работ [13,14] и связаны с разложением в ряды по системе (14) функций, аналитических в области G.

В ГЛАВЕ 2 (§§ 10–15) решена следующая задача. Пусть все нули целой функции расположены в некотором угле фиксированного раствора $\leqslant \pi$ и имеют заданные (верхнюю и нижнюю) плотности при некотором показателе $\rho \in (0,\, 1)$. Какое наименьшее значение может принимать тип при порядке ρ такой функции? История задачи и ее применение к вопросам полноты систем экспонент изложены в §§ 10, 14, 15.

Экстремальным задачам для индикаторов и типов целых функций, нули которых расположены произвольно или на одном луче и имеют заданный диапазон изменения верхней и нижней плотностей (обычных, усредненных, максимальных и т. д.), посвящена обширная литература, начиная с классического мемуара Ж. Валирона [15]. Особенно активно тематика развивалась во второй половине прошлого века в исследованиях Б. Я. Левина, Р. Редхеффера, М. И. Андрашко, А. А. Гольдберга, Н. В. Говорова, А. А. Кондратюка, Б. Н. Хабибуллина. Новые результаты разными методами получены в последнее время Б. Н. Хабибуллиным, А. Ю. Поповым, А. Э. Еременко и П. М. Юдицким, Г. Г. Брайчевым.

Дадим формализованную постановку задачи и приведем основные результаты второй главы. Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — стремящаяся к бесконечности последовательность комплексных чисел, расположенная в угле

$$\Gamma_\theta \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\arg\lambda| \leqslant \theta\}$$

фиксированного раствора $2\theta \in [0,\, \pi]$. Пусть заданы числа

$$\rho \in (0,\, 1), \qquad \beta > 0, \qquad \alpha \in [0,\, \beta].$$

Предполагаем, что Λ имеет *верхнюю ρ-плотность*

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \beta$$

и *нижнюю ρ-плотность*

$$\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} \geqslant \alpha.$$

Рассматриваются всевозможные канонические произведения

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{18}$$

построенные по таким последовательностям Λ. Бесконечное произведение (18) определяет целую функцию нормального *ρ-типа*

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho(\Lambda) \equiv \varlimsup_{r\to+\infty} \ r^{-\rho} \ln \max_{|\lambda|=r} |L(\lambda)|.$$

При заданных условиях требуется указать наименьшее возможное значение для величины σ_ρ. Таким образом, ставится экстремальная задача отыскания точной нижней грани

$$s_\theta(\alpha, \beta; \rho) \equiv \inf\left\{\sigma_\rho = \sigma_\rho(\Lambda) : \, \Lambda \subset \Gamma_\theta,\, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta,\, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha\right\}. \tag{19}$$

[15] Valiron G. Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière // Annales de la faculte des sciences de Toulouse Ser. 3. – 1913. – T. 5. – P. 117–257.

В «базовом» случае $\theta = 0$ (нули расположены на одном луче) значение экстремальной величины (19) дает следующий основной результат § 10.

Теорема 10.1. *Для произвольного* $\rho \in (0,\,1)$ *и любых чисел* $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\,\beta]$ *справедливо равенство*

$$s(\alpha,\,\beta;\,\rho) \equiv s_0(\alpha,\,\beta;\,\rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{a\,(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{\beta\,a^{-\rho} - \alpha\,x^{-\rho}}{x+1}\,dx. \quad (20)$$

Нижняя грань $s(\alpha,\,\beta;\,\rho)$ *достигается на некоторой строго возрастающей к* $+\infty$ *последовательности* $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ *с плотностными характеристиками* $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$.

Заметим, что при $\alpha = 0$, когда в постановке задачи отсутствует ограничение на нижнюю ρ-плотность нулей функций (18), из теоремы 10.1 получаем доказанное А. Ю. Поповым [16] соотношение

$$s(\beta;\,\rho) \equiv s(0,\,\beta;\,\rho) \equiv \inf\left\{\sigma_\rho = \sigma_\rho(\Lambda):\ \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\} =$$
$$= \beta\,C(\rho) \equiv \beta\,\max_{a>0} a^{-\rho}\ln(1+a). \quad (21)$$

С другой стороны, при $\alpha = \beta$ равенство (20) дает известный со времен Валирона результат о ρ-типе целой функции $L(\lambda)$ вида (18) с измеримой относительно показателя $\rho \in (0,\,1)$ последовательностью положительных нулей:

$$s(\beta,\,\beta;\,\rho) = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}.$$

Теорема 10.1 доказана в параграфах 10, 11 оригинальным методом, отличным от примененного в [16].

Подробному изучению поведения экстремальной величины $s(\alpha,\beta;\rho)$ как функции параметров α, β, ρ отведены §§ 12, 13. Эта часть исследований проходила совместно с Г. Г. Брайчевым. Соавторами для функции $s(\alpha,\beta;\rho)$ получены весьма точные двусторонние оценки и найдена асимптотическая формула при $\rho \to +0$, описаны также особенности случая $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ по сравнению с общим случаем расположения нулей $\Lambda \subset \mathbb{C}$.

[16] Попов А. Ю. Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. – 2005. – № 1. – С. 31–36.

Результаты § 14 относятся к целым функциям экспоненциального типа (полным в круге системам экспонент) с нулями (показателями), одинаково расположенными на нескольких лучах. В частности, показано (теорема 14.1), что наименьшее значение экспоненциального типа канонических произведений (1) с вещественными нулями $\pm\Lambda = (\pm\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty, \tag{22}$$

$$\overline{\Delta}(\Lambda) = \beta, \qquad \underline{\Delta}(\Lambda) \geqslant \alpha, \tag{23}$$

дается формулой

$$\max_{a>0} \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{a}}\, \ln \frac{1+a}{1+a(\alpha/\beta)^2} \,+\, 2\alpha\, \mathrm{arctg}\, \frac{\beta + a\alpha}{(\beta-\alpha)\sqrt{a}} \right\}. \tag{24}$$

Это утверждение обобщает предшествующие результаты Р. М. Редхеффера [17] и А. Ю. Попова [18], полученные без учета нижней плотности нулей. Благодаря теореме 14.1 установлено (теорема 14.3), что величина (24) дает оценку сверху для радиуса полноты систем экспонент с вещественными симметричными показателями, подчиненными ограничениям (23). Оценка снизу для радиуса полноты получена с применением недавнего результата Б. Н. Хабибуллина [19]. Наиболее общее утверждение содержится в теореме 14.2. Для того чтобы ее сформулировать, зафиксируем два числа $\beta > 0,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ и рассмотрим класс $P(\alpha,\, \beta)$, состоящий по определению из всевозможных последовательностей $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ вида (22) с характеристиками (23). Пусть $\Lambda \in P(\alpha,\, \beta)$ и $m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$. Свяжем с $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательность

$$\Lambda^{(m)} \equiv \bigcup_{j=0}^{m-1} \left(\lambda_n e^{\frac{2\pi j}{m} i}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Рассмотрим систему (кратных) экспонент

$$E_{\Lambda^{(m)}} \equiv \left\{ z^{n-1} e^{\lambda z} :\, \lambda \in \Lambda^{(m)},\ n = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, \Lambda^{(m)}(\lambda) \right\}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

---

[17] Redheffer R. M. On even entire functions with zeros having a density // Trans. Amer. Math. Soc. – 1954. – V. 77. – P. 32–61.

[18] Попов А. Ю. О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. – 1999. – № 5. – С. 48–52.

[19] Хабибуллин Б. Н. Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции // Матем. сборник. – 2009. – Т. 200, № 2. – С. 129–158.

где через $\Lambda^{(m)}(\lambda)$ обозначено число вхождений точки λ в последовательность $\Lambda^{(m)}$. Говорят, что система $E_{\Lambda^{(m)}}$ *полна в круге*

$$K_R \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}, \qquad R > 0,$$

если она полна в пространстве $A(K_R)$ функций, аналитических в этом круге, наделенном топологией равномерной сходимости на компактах из K_R. Символ $R(\Lambda^{(m)})$ обозначает *радиус круга полноты* последовательности $\Lambda^{(m)}$, т. е. точную верхнюю грань радиусов кругов K_R, в которых полна система $E_{\Lambda^{(m)}}$. Положим

$$R(\alpha,\, \beta\,;\, m) \equiv \inf_{\Lambda \in P(\alpha,\, \beta)} R(\Lambda^{(m)}).$$

Требуется оценить величину $R(\alpha,\, \beta\,;\, m)$, т. е. с приемлемой точностью найти радиус наибольшего из кругов, в которых заведомо полна любая система экспонент, множество показателей которой порождено какой-либо последовательностью Λ из класса $P(\alpha,\, \beta)$ посредством поворотов на углы $2\pi j/m$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, относительно точки нуль.

Теорема 14.2. *При любых $\beta > 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ и целом $m \geq 2$ справедливы оценки*

$$R(\alpha,\, \beta\,;\, m) \leqslant s\left(\alpha, \beta\,; \frac{1}{m}\right),$$

$$R(\alpha,\, \beta\,;\, m) \geqslant \max\left\{\beta\, m\, \exp\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right),\ \mu_m\, s\left(\alpha, \beta\,; \frac{1}{m}\right)\right\},$$

где величина $s\left(\alpha, \beta\,; \frac{1}{m}\right)$ дается формулой (20) *при $\rho = 1/m$, а*

$$\mu_m \equiv \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{2m}\right) \frac{1}{\pi} \sin\frac{\pi}{m}.$$

В частности,

$$\frac{\beta\, m}{e} \leqslant R(\beta\,; m) \equiv R(0,\, \beta\,; m) \leqslant \beta\, C\left(\frac{1}{m}\right),$$

где в соответствие с (21) *обозначено*

$$C\left(\frac{1}{m}\right) = \max_{a>0}\, \frac{\ln(1+a)}{\sqrt[m]{a}}.$$

Оценки, приведенные в теореме 14.2, подробно обсуждаются; даны численные иллюстрации. Отметим также, что результаты этого параграфа связаны с исследованиями Л. А. Рубела [20], П. Мальявена и Л. А. Рубела [21], Р. М. Редхеффера [22] (см. также обзор Б. Н. Хабибуллина [23]).

В заключительном § 15 второй главы величина (19) вычислена и исследована для значений параметра $\theta \in (0, \pi/2]$. Сформулируем центральный результат.

Теорема 15.1. *Пусть заданы четыре числа* $\rho \in (0, 1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$, $\theta \in [0, \pi/2]$. *Тогда справедлива формула*

$$s_\theta(\alpha, \beta; \rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\rho} \cos \rho\,\theta +$$

$$+ \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \left(\beta\, a^{-\rho} - \alpha\, x^{-\rho}\right) \frac{x + \cos\theta}{x^2 + 2x\cos\theta + 1}\, dx.$$

Точная нижняя грань (19) *достигается для некоторой целой функции* (18) *с последовательностью нулей* Λ, *расположенной на лучах* $\arg\lambda = \pm\,\theta$, *причем* $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$.

Задачу о вычислении $s_\theta(\alpha, \beta; \rho)$ поставил при $\alpha = 0$ (т. е. без учета нижней ρ-плотности нулей) и решил А. Ю. Попов [24], отыскав величину

$$s_\theta(\beta; \rho) \equiv s_\theta(0, \beta; \rho) = \frac{\beta}{2} \max_{a>0} a^{-\rho} \ln(a^2 + 2a\cos\theta + 1), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2.$$

Метод, использованный в работе [24], не применим при $\alpha > 0$.

Для канонических произведений вида (18), последовательности нулей $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ которых измеримы, т. е. имеют *ρ-плотность*

$$\Delta_\rho(\Lambda) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \beta,$$

[20] Rubel L. A. Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V. 83, № 2. – P. 417—429.

[21] Malliavin P., Rubel L. A. On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France. – 1961. – V. 89. – P. 175–206.

[22] Redheffer R. M. Completeness of sets of complex exponentials // Advances in Math. – 1977. – V. 24, № 1. – P. 1–62.

[23] Хабибуллин Б. Н. Полнота систем экспонент и множества единственности. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2006. – 172+xvi с.

[24] Попов А. Ю. Развитие теоремы Валирона-Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ-плотностью корней // Труды крымской осенней матем. школы-симпозиума, СМФН. – 2013. – Т. 49. – С. 132–164.

из теоремы 15.1 получаем соотношение

$$s_\theta(\beta,\beta;\rho)=\frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta.$$

Отметим, что экстремальная величина $s_\theta(\beta,\beta;\rho)$ достигается, если все нули функции (18) расположены на лучах $\arg\lambda=\pm\,\theta$ и на каждом из них образуют измеримые последовательности с равными ρ-плотностями $(=\beta/2)$. При этом, $s_\theta(\beta,\beta;\rho)$ заведомо не достигается, если указанные ρ-плотности различны.

Основной результат § 15 — теорема 15.1 — позволяет получать новые теоремы единственности для целых функций и теоремы о полноте систем экспонент. Так, естественным развитием одного результата Б. Н. Хабибуллина [19] является следующее утверждение.

Теорема 15.3. *Пусть* $\rho\in(0,\,1)$, *и пусть* $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — *последовательность комплексных чисел конечной верхней* ρ*-плотности* $\beta>0$ *и нижней* ρ*-плотности* $\geqslant\alpha\in[0,\,\beta]$, *расположенная в некотором угле раствора* $2\theta\leqslant\pi$. *Если тип при порядке* ρ *целой функции* f, *обращающейся в нуль на* Λ, *меньше величины*

$$\frac{2^\rho\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\rho/2)}{\Gamma((1-\rho)/2)}\,s_\theta(\alpha,\,\beta;\,\rho)\;=\;\frac{\sin\pi\rho}{\pi}\,\Gamma(\rho)\,\Gamma^2(1-\rho/2)\,s_\theta(\alpha,\,\beta;\,\rho),$$

где $s_\theta(\alpha,\,\beta;\,\rho)$ *выписана в теореме* 15.1, *то* $f\equiv0$ *на* $\mathbb{C}$.

Отметим, что все результаты § 14 о полноте систем экспонент, порождаемых последовательностями $\Lambda\subset\mathbb{R}_+$, без труда переносятся на случай $\Lambda\subset\Gamma_\theta$, $\theta\in[0,\,\pi/2]$. Укажем еще одно из следствий теоремы 15.1, относящееся к четным целым функциям экспоненциального типа, которые играют важную роль в различных разделах комплексного анализа, например, в теории рядов Дирихле.

Теорема 15.4. *Пусть* $\beta>0$, $\alpha\in[0,\beta]$, $\theta\in[0,\pi/4]$, *и пусть*

$$L(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right),\qquad |\arg\lambda_n|\leqslant\theta,\tag{25}$$

причем

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|}=\beta,\qquad \varliminf_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|}\geqslant\alpha.$$

Тогда экспоненциальный тип

$$\sigma(\Lambda) \equiv \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-1} \ln \max_{|\lambda|=r} |L(\lambda)|$$

функции (25) *удовлетворяет точному неравенству*

$$\sigma(\Lambda) \geqslant \pi\alpha \cos\theta + \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^2}^{a} \left(\frac{\beta}{\sqrt{a}} - \frac{\alpha}{\sqrt{x}}\right) \frac{x+\cos 2\theta}{x^2+2x\cos 2\theta+1}\,dx. \quad (26)$$

Без учета нижней плотности нулей ($\alpha = 0$) оценка (26) принимает более простой вид

$$\sigma(\Lambda) \geqslant \frac{\beta}{2} \max_{a>0} \frac{\ln\left(a^2+2a\cos 2\theta+1\right)}{\sqrt{a}}.$$

Если же последовательность нулей канонического произведения (25) имеет плотность ($\alpha = \beta$), то оценка (26) превращается в неравенство

$$\sigma(\Lambda) \geqslant \pi\beta \cos\theta.$$

Все оценки точны. Очевидно, интеграл в (26) вычисляется через элементарные функции при любом $\alpha \in [0, \beta]$, но итоговое выражение столь громоздко, что вряд ли целесообразно его приводить.

ГЛАВА 3 (§§ 16–20) посвящена вопросу о разложении на простые дроби величины, обратной к целой функции. Классические результаты о представлении мероморфных функций рядами простых дробей принадлежат М. Г. Миттаг-Леффлеру и приводятся во многих учебниках по комплексному анализу. Различные сведения о свойствах простых дробей содержит богатая идеями монография Э. Бореля [25]. Подчеркнем, что теоремы Миттаг-Леффлера носят общий характер и нуждаются в дополнительных уточнениях в разных специальных ситуациях, значимых для приложений. Именно о такой ситуации идет речь в третьей главе.

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция, имеющая бесконечно много нулей, причем все они простые. Занумеруем нулевое множество функции в порядке неубывания модулей и обозначим полученную последовательность через

[25] Borel E. Sur quelques points de la théorie des fonctions // Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. — 1895. – 3 série. – T. 12. – P. 9–55.

$\Lambda(L)=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Вопрос о разложении на простые дроби величины, обратной к $L(\lambda)$, имеет богатую историю, излагаемую в § 16. Основополагающей является работа М. Г. Крейна [26]. Важную роль в появлении этапной статьи [26] сыграли исследования по теории эрмитовых операторов и проблеме моментов [27], [28]. В связи с [26] (см. также [11]) возникла задача об описании тех мероморфных функций $F(\lambda)=1/\,L(\lambda)$, которые при фиксированном $p\in\mathbb{Z}_+$ могут быть представлены в виде

$$F(\lambda)\equiv\frac{1}{L(\lambda)}\;=\;P(\lambda)\,+\,\frac{a_0}{\lambda}\,+\,\lambda^p\sum_{\lambda_n\neq 0}\frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)}\tag{27}$$

с некоторым полиномом $P(\lambda)$ и коэффициентом a_0, вычисляемым по правилу

$$a_0\;=\begin{cases}1/L'(0), & 0\in\Lambda(L),\\ 0, & 0\notin\Lambda(L).\end{cases}\tag{28}$$

Предполагается, что ряд Крейна (27) сходится абсолютно и равномерно на компактах комплексной плоскости, не содержащих точек последовательности $\Lambda(L)$. Последнее, как нетрудно проверить, равносильно сходимости числового ряда

$$\sum_{\lambda_n\neq 0}\frac{1}{|L'(\lambda_n)|\;|\lambda_n|^{p+1}}.$$

Различные вопросы, связанные с рядами Крейна, рассматривались в работах Л. де Бранжа, М. В. Келдыша, А. А. Гольдберга, И. В. Островского, П. Кусиса, Г. Педерсена, Ю. Ф. Коробейника, А. А. Боричева и М. Л. Содина, Л. С. Маергойза, А. Г. Бакана и других математиков. Но до недавнего времени ситуация с характеризацией целых функций $L(\lambda)$, допускающих разложение (27), оставалась запутанной, и общая картина не складывалась даже для «базового» случая $\Lambda(L)\subset\mathbb{R}$.

В диссертации задача о справедливости представления (27) решена для целых функций с нулями, расположенными в полосе комплексной

[26]Крейн М. Г. К теории целых функций экспоненциального типа // Известия АН СССР, сер. матем. – 1947. – Т. 11, № 4. – С. 309–326.

[27]Крейн М. Г. Об одном замечательном классе эрмитовых операторов // Доклады АН СССР. – 1944. – Т. 44, № 5. – С. 191–195.

[28]Hamburger H. L. Hermitian transformation of defficiency-index (1,1), Jacobi matrices and undetermined moment problems // Amer. J. of Math. – 1944. – V. 66, № 4. – P. 489–522.

плоскости. В ходе проведенного исследования выяснилось, что ключевую роль играют лишь наличие экспоненциальной оценки сверху на рост модуля функции и неотрицательность ее индикатора. Другие ограничения не нужны. Попутно разобран вопрос о вычислении коэффициентов полинома $P(\lambda)$, фигурирующего в (27). Таким образом, для целой функции $L(\lambda)$ с простыми нулями, лежащими в полосе, в самых естественных терминах получен критерий разложимости обратной величины $1/L(\lambda)$ в ряд Крейна (27) фиксированного порядка $p \in \mathbb{Z}_+$.

Приведем основной результат третьей главы.

Теорема 16.4. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, расположенным в некоторой полосе комплексной плоскости. Пусть коэффициент a_0 определен формулой* (28), *и $p \in \mathbb{Z}_+$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если величина $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ допускает разложение* (27), *где $P(\lambda)$ — некоторый полином, а ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$, то выполнены условия*

(i) *$L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с неотрицательным индикатором $h_L(\theta)$;*

(ii) *сходится ряд* $\displaystyle\sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}}$.

При этом, если $p = 0$, то $P(\lambda) \equiv 0$, а если $p \in \mathbb{N}$, то $P(\lambda)$ вычисляется по формуле

$$P(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{p-1} \frac{F^{(m)}(0)}{m!}\,\lambda^m, & 0 \notin \Lambda(L), \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{p-1} \frac{\left(\lambda\, F(\lambda)\right)^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\,\lambda^m, & 0 \in \Lambda(L). \end{cases} \tag{29}$$

2. *Если выполнены условия* (i), (ii), *то величина $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ раскладывается в ряд* (27), *сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$, где полином $P(\lambda) \equiv 0$ при $p = 0$, и $P(\lambda)$ определен формулой* (29) *при $p \in \mathbb{N}$.*

Этот центральный результат третьей главы доказан в § 18 с учетом общих свойств рядов Крейна, приведенных в § 17.

Как показано в лемме 17.4, в предположениях теоремы 16.4 при выполнении условий (i), (ii) имеют место суммационные соотношения

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^m} = \begin{cases} -\dfrac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}, & 0 \notin \Lambda(L), \\[2ex] -\dfrac{(\lambda\,F(\lambda))^{(m)}\,(0)}{m!}, & 0 \in \Lambda(L), \end{cases} \tag{30}$$

с произвольным $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant p+1$.

Конкретизация основной теоремы в случаях четной и нечетной функций дана в § 19. Некоторые приложения общих теорем о разложении на простые дроби представлены в § 20. Здесь рассмотрены специальные классы бесконечных произведений вида (1) и (18), в частности, функция

$$L_s(\lambda) = \lambda \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n^s}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad s > 1,$$

из работы Харди [29].

Отдельно изучен вопрос о разложении в ряд типа Крейна величины, обратной к функции Бесселя произвольного индекса $\nu > -1$, и описано применение универсальных соотношений (30) к вычислению сумм, составленных по нулям этой функции. Интерес к подобным суммам восходит к Эйлеру и Рэлею. Благодаря теореме 16.4 мы доказываем общее утверждение, которое обобщает или уточняет известные результаты А. Р. Форсайта [30] и И. Н. Снеддона [31].

Теорема 20.3. *Пусть* $J_\nu(\lambda)$ — *функция Бесселя первого рода* :

$$J_\nu(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\nu+2n}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \nu > -1,$$

и $\gamma_{\nu,n}$ — *ее положительные нули, образующие последовательность*

$$0 < \gamma_{\nu,1} < \gamma_{\nu,2} < \ldots < \gamma_{\nu,n} < \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_{\nu,n} = +\infty.$$

[29] Hardy G. H. On the function $P_s(x)$ // Quart. J. of Math. – 1905. – V. 37. – P. 146–172.

[30] Forsyth A. R. The expression of Bessel functions of positive order as products, and of their inverse powers as sums of rational fractions // Messenger of Mathematics. Ed. by J. W. L. Glaisher. – 1920–1921. V. L. – P. 129—149.

[31] Sneddon I. N. On some infinite series involving the zeros of Bessel functions of the first kind // Proc. of the Glasgow Math. Assoc. – 1960. – V. 4, № 3. – P. 144—156.

Определим величины

$$a_{\nu,2m} = \left(\frac{\lambda^\nu}{J_\nu(\lambda)}\right)^{(2m)}(0), \qquad m = 0,\, 1,\, \ldots\, . \tag{31}$$

Зададим число p формулой

$$p = \left[\frac{2\nu+1}{4}\right] + 1, \tag{32}$$

где квадратные скобки означают целую часть. Пусть полином $P(\lambda)$ определяется по правилу

$$P(\lambda) \equiv 0, \qquad -1 < \nu < -\frac{1}{2},$$

$$P(\lambda) = \sum_{m=0}^{p-1} a_{\nu,2m} \frac{\lambda^{2m}}{(2m)!}, \qquad \nu \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Тогда справедливо разложение

$$\frac{1}{J_\nu(\lambda)} = \lambda^{-\nu}P(\lambda) - 2\lambda^{2p-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})\,\gamma_{\nu,n}^{2p-\nu-1}\,(\lambda^2-\gamma_{\nu,n}^2)},$$

сходящееся абсолютно и равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$, не содержащем точек $\lambda = 0$ и $\lambda = \pm\gamma_{\nu,n}$. При этом для любого $\nu > -1$ выполняются суммационные соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})\,\gamma_{\nu,n}^{2m-\nu+1}} = \frac{a_{\nu,2m}}{2\,(2m)!}, \qquad m = p,\, p+1,\, \ldots\, ,$$

где величины $a_{\nu,2m}$ и число p определены в (31) *и* (32) *соответственно.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследованы асимптотические свойства целых функций экспоненциального типа с ограничениями на расположение и поведение нулей. Особое внимание уделено каноническим произведениям с вещественными симметричными нулями и целым функциям порядка меньше единицы с нулями в угле. Доказаны новые теоремы о регулярности роста целых функций экспоненциального типа. Дано полное решение экстремальной задачи о наименьшем возможном типе при порядке

$\rho \in (0,\, 1)$ целых функций с нулями заданных плотностей, расположенными на луче или в угле раствора $\leqslant \pi$. Получен цикл теорем для полных в круге и для абсолютно представляющих в выпуклой области систем экспонент. Охарактеризовано множество целых функций с нулями в полосе, допускающих разложение в ряд Крейна, и дано приложение результата к специальным классам функций.

Дальнейшие перспективные направления исследований по данной тематике определяются, в первую очередь, связями с теорией интерполяции, аналитического продолжения, представления функций рядами, и состоят в следующем.

1. Нахождение точного условия регулярности роста целых функций произвольного конечного порядка (в частности, целых функций порядка $\rho \in (0,\, 1)$ с нулями на луче), выраженного в терминах обобщенного индекса конденсации нулей.

2. Развитие теории экстремальных задач для асимптотических характеристик роста целых функций с ограничениями на нулевое множество. В частности, решение задачи о наименьшем возможном типе для целых функций порядка $\rho \in (0,\, 1)$ с нулями, расположенными в угле раствора $> \pi$, и для целых функций порядка $\rho > 1$ с нулями на луче.

3. Всестороннее изучение проблемы представления обратной величины целой функции с произвольно расположенными нулями рядом типа Крейна. Применение полученных результатов в теории дифференциальных уравнений и задачах математической физики.

В течение работы над диссертацией автор ощущал многолетнюю поддержку своего учителя Ю. Ф. Коробейника. Постоянный интерес к исследованиям проявлял Г. Г. Брайчев, благодаря научным контактам с которым получены многие результаты. Большое влияние на исследования автора оказали А. Ю. Попов и А. М. Седлецкий. Результаты диссертации обсуждались с А. В. Абаниным, И. В. Тихоновым, А. Б. Костиным. Всем упомянутым коллегам выражаю свою искреннюю благодарность.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Шерстюков В. Б. Представление обратной величины целой функции рядом простейших дробей и экспоненциальная аппроксимация // Матем. сборник. — 2009. – Т. 200, № 3. – С. 147–160.

2. Шерстюков В. Б. Разложение обратной величины целой функции с нулями в полосе в ряд Крейна // Матем. сборник. — 2011. – Т. 202, № 12. – С. 137–156.

3. Шерстюков В. Б. Распределение нулей канонических произведений и весовой индекс конденсации // Матем. сборник. — 2015. – Т. 206, № 9. – С. 139–180.

4. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. матем. — 2011. – Т. 75, № 1. – С. 3–28.

5. Шерстюков В. Б. Об одной задаче Леонтьева и представляющих системах экспонент // Матем. заметки. — 2003. – Т. 74, вып. 2. – С. 301–313.

6. Шерстюков В. Б. О некоторых признаках полной регулярности роста целых функций экспоненциального типа // Матем. заметки. — 2006. – Т. 80, вып. 1. – С. 119–130.

7. Шерстюков В. Б. О регулярности роста канонических произведений с вещественными нулями // Матем. заметки. — 2007. – Т. 82, вып. 4. – С. 621–630.

8. Шерстюков В. Б. К вопросу о γ-достаточных множествах // Сиб. матем. журнал. — 2000. – Т. 41, № 4. – С. 935–943.

9. Шерстюков В. Б. Нетривиальные разложения нуля и представление аналитических функций рядами простых дробей // Сиб. матем. журнал. — 2007. – Т. 48, № 2. – С. 458–473.

10. Шерстюков В. Б. Двойственная характеризация абсолютно представляющих систем в индуктивных пределах банаховых пространств // Сиб. матем. журнал. — 2010. – Т. 51, № 4. – С. 930–943.

11. Шерстюков В. Б. К проблеме Леонтьева о целых функциях вполне регулярного роста // Изв. Сарат. ун-та. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. – Т. 13, вып. 2, ч. 1. – С. 30–35.

12. Шерстюков В. Б. Минимиальное значение типа целой функции порядка $\rho \in (0,\, 1)$, все нули которой лежат в угле и имеют заданные плотности // Уфимск. матем. журнал. — 2016. – Т. 8, вып. 1. – С. 113–126.

13. Сумин Е. В., Шерстюков В. Б. Применение рядов Крейна к вычислению сумм, содержащих нули функций Бесселя // Журнал вычислит. матем. и матем. физ. — 2015. – Т. 55, № 4. – С. 47–54.

14. Шерстюков В. Б. О разложении мероморфных функций специального вида на простейшие дроби // Analysis Mathematica. — 2007. – Т. 33. С. 63–81.

15. Шерстюков В. Б. Об одном подклассе целых функций вполне регулярного роста // Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование. – Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2006. – С. 131–138.

16. Шерстюков В. Б. Обобщенный индекс конденсации последовательности положительных чисел // Исследования по современному анализу и математическому моделированию. – Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН и РСО-А, 2008. – С. 75–84.