НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МИФИ»

На правах рукописи
УДК 517.547

Шерстюков Владимир Борисович

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, КОРНИ КОТОРЫХ ЛЕЖАТ В НЕКОТОРОМ УГЛЕ

Специальность: 01.01.01 — вещественный, комплексный
и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В работе систематизированы и подробно изложены результаты автора, полученные в последнее десятилетие. Исследования относятся к классическому направлению теории целых функций одной переменной, изучающему связь между асимптотическим поведением целой функции и распределением ее корней на комплексной плоскости. Результаты применяются к теории полных и представляющих систем экспонент в пространствах аналитических функций.

Актуальность темы. В работах классиков теории целых функций особое внимание традиционно уделялось изучению функций с «асимптотически правильным» поведением. Решающий вклад в построение соответствующей теории целых функций *вполне регулярного роста* был сделан Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером во второй четверти прошлого века (см. [72], [38], [160], [166], [167]). Обобщение теории Левина-Пфлюгера методом рядов Фурье дано А. А. Кондратюком [56]. Целые функции вполне регулярного роста изучены наиболее полно, встречаются в большом количестве работ и имеют разнообразные применения. Однако, исследования вопросов полноты и представления рядами в функциональных пространствах, проблем теории аналитического продолжения, задач теории дифференциальных операторов бесконечного порядка и операторов типа свертки требуют систематического изучения целых функций, не обладающих сколь-нибудь правильным поведением. Поэтому актуальной является разработка методов решения задач, связанных с нахождением экстремальных значений тех или иных асимптотических характеристик роста представителей весьма общих и естественных классов целых функций. Существенный вклад в эту тематику внесли основополагающие исследования Ж. Валирона, Б. Я. Левина, А. А. Гольдберга, А. А. Кондратюка. В последнее время благодаря, в основном, работам Б. Н. Хабибуллина, А. Ю. Попова, Г. Г. Брайчева вновь наметился устойчивый интерес к экстремальным задачам для индикаторов и типов целых функций конечного порядка с заданными асимптотическими характеристиками распределения нулей.

С другой стороны, как показывают исследования В. Бернштейна, С. Мандельбройта, А. Ф. Леонтьева, В. В. Напалкова, А. Ф. Гришина, Ю. Ф. Коробейника, А. В. Братищева, А. М. Гайсина и других математиков, в теории интерполяции и рядов Дирихле типичной является ситуация, когда в качестве узлов интерполяции или показателей системы экспонент выбираются нули целой функции с предписанным поведением в нулях ее производных. Такой выбор, обусловленный существом дела, выдвигает на повестку дня следующие естественные вопросы. Насколько сильно поведение производных целой функции $L(\lambda)$ на нулевом множестве самой функции влияет на регулярность роста последней? Возможно ли, учитывая степень этого влияния, раскладывать обратную величину $1/L(\lambda)$ в ряд простых дробей специальной структуры? (Разложение такого сорта можно рассматривать как альтернативу представлению целой функции бесконечным произведением, также составленным по ее нулям.) В каких случаях можно описывать полные и представляющие системы экспонент с показателями в нулях «порождающей» функции в терминах, связанных только с поведением последовательности значений ее производных? Этот круг вопросов тесно связан с такими классическими и современными результатами, а также нерешенными задачами теории целых функций, как известная проблема А. Ф. Леонтьева о целых функциях вполне регулярного роста; теорема М. Г. Крейна о представлении обратной величины целой функции рядом простых дробей; серия результатов А. Ф. Леонтьева, Ю. Ф. Коробейника, А. В. Абанина, С. Н. Мелихова о разложении аналитических в выпуклой области функций в ряды экспонент и знаменитая теорема Берлинга – Мальявена о радиусе полноты. Сюда же примыкают избранные вопросы теории негармонических рядов Фурье и абстрактных дифференциальных уравнений (Ж.-П. Кахан, Л. Шварц, А. Ф. Леонтьев, А. М. Седлецкий, И. В. Тихонов). В той или иной степени эти связи нашли отражение в настоящей работе.

Особо подчеркнем, что несмотря на более чем столетнее развитие теории целых функций как самостоятельной дисциплины, не все ее разделы разработаны достаточно полно. Так, еще мало изучены асимптотические свойства целых функций, не отличающихся «правильным» поведением. При этом, значительный интерес представляют задачи с ограничениями на расположение нулей, часто возникающие как в самой теории, так и в ее приложениях. Диссертация частично восполняет указанный пробел. Объединительной чертой исследованного в работе цикла задач является требование, чтобы нули рассматриваемых целых функций располагались на заданном множестве. Как правило, это множество может быть помещено в некоторый угол. Отметим, что никаких исходных дополнительных предположений о регулярности роста функций не делается. Тем самым, достигается необходимая общность постановок и расширяется сфера применения результатов.

Цель работы. Цель работы состоит в изучении асимптотических свойств целых функций с ограничениями на расположение корней и в применении полученных результатов к вопросам аппроксимации аналитических функций в областях комплексной плоскости.

Методы исследования. В диссертационной работе используются разнообразные приемы и методы из теории целых функций и функционального анализа, применяются методы теории полных и представляющих систем.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем.

1. Исследован вопрос о регулярности роста канонических произведений с вещественными симметричными нулями, играющих заметную роль в теории рядов Дирихле и экстремальных задачах теории аналитического продолжения. Найдено точное условие регулярности роста таких произведений в терминах обобщенного индекса конденсации последовательности нулей.

2. Изучены асимптотические свойства произвольной целой функции экспоненциального типа, корни которой являются простыми и образуют последовательность с нулевым индексом конденсации. Даны достаточные условия регулярности роста функции в зависимости от поведения в нулях ее производной.

3. Доказан цикл теорем (уточняющих известные ранее результаты А. Ф. Леонтьева, Ю. Ф. Коробейника, А. В. Абанина) о разложении аналитических в выпуклой области функций в ряды экспонент. Выявлена особая роль, которую в теории представляющих систем экспонент играют разложения на простые дроби величи-

ны, обратной к «порождающей» функции.

4. Найдена точная нижняя грань типов при порядке $\rho \in (0, 1)$ всевозможных целых функций, нули которых расположены на одном луче или в угле фиксированного раствора и имеют заданные верхнюю и нижнюю плотности. Проведено (совместно с Г. Г. Брайчевым) полное исследование полученной экстремальной величины как функции параметров задачи. В качестве приложения даны новые оценки для радиусов кругов полноты систем экспонент с показателями, лежащими в угле или на нескольких лучах.

5. Для целой функции с простыми нулями, расположенными в некоторой полосе комплексной плоскости, получен критерий того, что обратная величина функции раскладывается в специальный ряд простых дробей. Результат является новым даже в случае целой функции с вещественными нулями и решает известную проблему в теории мероморфных функций, восходящую к работе М. Г. Крейна 1947 г. Дано применение рядов Крейна к специальным классам целых функций.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер и способствует развитию теории целых функций и теории аппроксимации в комплексной области. Ее материал представляет интерес для специалистов, работающих в области теории функций, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений и теории вероятностей. Результаты диссертации могут быть востребованы в исследованиях, проводимых в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Институте математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН, Южном математическом институте Владикавказского научного центра РАН, МГУ им. М. В. Ломоносова, Башкирском, Харьковском, Львовском госуниверситетах, Южном федеральном университете и других отечественных и зарубежных математических центрах.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались:

1) на XII-XVII Саратовских зимних иатематических школах «Современные проблемы теории функций и их приложения», г. Саратов, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014 гг.;

2) на Международных научных конференциях «Теория операторов. Комплексный анализ и математическое моделирование», г. Волгодонск, 2005, 2007, 2009, 2011 гг.;

3) на XIV и XVI Международных конференциях «Математика. Экономика. Образование», п. Абрау-Дюрсо, 2006, 2008 гг.;

4) на VIII Международной Казанской летней научной школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», г. Казань, 2007 г.;

5) на Международной конференции «Analysis and Topology», г. Львов, 2008 г.;

6) на V Международной конференции «Европа и современная Россия. Интегративная функция педагогической науки в едином образовательном пространстве», г. Прага, 2008 г.;

7) на Воронежских зимних математических школах «Современные методы теории функций и смежные проблемы», г. Воронеж, 2009, 2015 гг.;

8) на Международной научно-образовательной конференции «Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессиональ-

ного образования», г. Москва, 2009 г.;

9) на Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования», г. Владикавказ, 2010 г.;

10) на Международной конференции «Теория приближений», посвященной 90-летию С. Б. Стечкина, г. Москва, 2010 г.;

11) на IX Международной научно-технической конференции «Физика и технические приложения волновых процессов», г. Челябинск, 2010 г.;

12) на V Международной конференции «Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания», г. Обнинск, 2011 г.;

13) на XIII (посвященной 75-летию профессора Э. И. Зверовича) и XIV (посвященной 90-летию профессора М. Б. Балка) Международных научных конференциях «Системы компьютерной математики и их приложения», г. Смоленск, 2012, 2013 гг.;

14) на Международной научной конференции «Теория приближений функций и родственные задачи анализа», посвященной памяти доктора физико-математических наук, профессора П. П. Коровкина, г. Калуга, 2015 г.;

15) на Международной конференции «Математика и информатика», г. Москва, 2016 г.

Сообщения о результатах диссертации были сделаны:

1) на научном семинаре мехмата МГУ по спектральной теории дифференциальных операторов под руководством академика РАН, профессора В. А. Садовничего, 2016 г.;

2) на научном семинаре мехмата МГУ по обратным задачам анализа, математической физики и естествознания под руководством академика РАН, профессора В. А. Садовничего и профессора А. И. Прилепко, 2008 г.;

3) на научном семинаре мехмата МГУ по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН Б. С. Кашина, чл.-корр. РАН С. В. Конягина, профессора Б. И. Голубова, профессора М. И. Дьяченко, 2010, 2016 гг.;

4) на научном семинаре Математического института им. В. А. Стеклова РАН по комплексному анализу (Семинаре Гончара) под руководством чл.-корр. РАН Е. М. Чирки, профессора А. И. Аптекарева, 2016 г.;

5) на научном семинаре Математического института им. В. А. Стеклова РАН по теории приближений под руководством профессора С. А. Теляковского, 2012 г.;

6) неоднократно на научном семинаре мехмата МГУ по негармоническому анализу и целым функциям под руководством профессора А. М. Седлецкого и профессора В. В. Власова (в последние годы — профессора А. М. Седлецкого и д.ф.-м.н. А. Ю. Попова), 2002–2015 гг.;

7) на научном семинаре мехмата МГУ по теории тригонометрических и ортогональных рядов под руководством профессора М. К. Потапова, профессора М. И. Дьяченко, профессора Т. П. Лукашенко, профессора В. А. Скворцова, 2016 г.;

8) на научном семинаре мехмата МГУ по операторным моделям в математической физике под руководством профессора А. А. Шкаликова, профессора И. А. Шейпака, доцента А. М. Савчука и А. А. Владимирова, 2015 г.;

9) на научном семинаре мехмата МГУ по теории приближений и граничным свойствам функций под руководством профессора Е. П. Долженко, 2010 г.;

10) на научном семинаре мехмата МГУ по теории приближений аналитическими функциями под руководством профессора П. В. Парамонова и д.ф.-м.н. К. Ю. Федоровского, 2016 г.;

11) на научном семинаре кафедры высшей математики МИФИ под руководством профессора В. А. Осколкова, 2001, 2003 гг.;

12) на научном семинаре кафедры математического анализа ЮФУ под руководством профессора Ю. Ф. Коробейника и профессора А. В. Абанина, 2009 г.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в шестнадцати основных работах [20], [109], [118]–[131], четырнадцать из которых — [20], [109], [118], [119], [121]–[124], [126]–[131] — в ведущих научных изданиях, рекомендованных ВАК. Две статьи [20], [109] из этого списка выполнены в соавторстве. Центральные результаты работ [20], [109] принадлежат автору, вклад соавторов подробно оговаривается в тексте диссертации.

Опишем теперь структуру работы. После Введения следует основной текст, разбитый на три главы. Каждая глава посвящена отдельной задаче. Итоги выполненного исследования подведены в Заключении. Текст завершается списком литературы, в котором в алфавитном порядке идут сначала работы на русском языке, а затем — источники на иностранных языках. Главы делятся на параграфы, некоторые из параграфов — на пункты. Принята сквозная нумерация параграфов. Нумерация утверждений, примеров, формул и т. д. ведется по параграфам. В конце каждой главы помещен небольшой раздел с комментариями и дополнительными ссылками.

Изложим содержание диссертации.

Общую задачу, поставленную в главе 1 (§§ 1–9), можно сформулировать так: исследовать регулярность роста целой функции экспоненциального типа с простыми нулями в зависимости от поведения в нулях ее производной. Параграфы 1–7 посвящены каноническим произведениям с вещественными симметричными нулями. В § 1 подробно излагается история вопроса и формулируются два центральных результата первой главы (теоремы 1.1 и 1.2). Рассматриваются бесконечные произведения

$$L(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right),\qquad \lambda\in\mathbb{C},\tag{0.1}$$

где $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая поседовательность положительных чисел, имеющая конечную верхнюю плотность

$$\overline{\Delta}(\Lambda)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n},\qquad 0<\overline{\Delta}(\Lambda)<+\infty.\tag{0.2}$$

Функции (0.1) при условии (0.2) являются целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего $\pi\,\overline{\Delta}(\Lambda)$. Они находят широкое применение в задачах анализа, даже не относящихся к целым функциям, например, в задачах аппроксимации и аналитического продолжения рядов экспонент. В классических работах первой половины XX века, посвященных теории таких рядов, и в более поздних исследованиях часто используется величина

$$\delta(\Lambda) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} \; = -\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\neq n} \ln \left| 1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda_k^2} \right|, \qquad (0.3)$$

называемая индексом конденсации последовательности Λ. Отметим, что характеристики, подобные (0.3), вводят и для более широкого класса последовательностей, ставя им в соответствие по определенному правилу канонические произведения. В нашем случае для функций вида (0.1) величина (0.3) всегда является неотрицательной, а для последовательностей, ведущих себя наиболее «регулярно», имеет место равенство

$$\delta(\Lambda) = 0. \qquad (0.4)$$

В частности, равенство (0.4) заведомо выполнено, если в определении (0.2) существует не верхний, а обычный предел, и при этом последовательность Λ имеет положительный шаг

$$h(\Lambda) = \varliminf_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0. \qquad (0.5)$$

Возникает естественный вопрос: что можно сказать об асимптотическом поведении последовательности Λ и функции $L(\lambda)$, если верно равенство (0.4)? Будет ли в таком случае существовать предел

$$\Delta(\Lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = d, \qquad (0.6)$$

и тем самым автоматически выполняться равенство

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln|L(re^{i\theta})|}{r} \; = \pi\, d\, |\sin\theta|, \qquad \theta \in (0,\, \pi) \cup (\pi,\, 2\pi)\,, \qquad (0.7)$$

означающее полную регулярность роста функции (0.1)? Этот вопрос был поставлен в начале 70-х годов прошлого века, а в 1983 г. А. В. Братищев [23] дал на него отрицательный ответ. Однако, в работе Братищева не была предъявлена последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, для которой выполняется равенство (0.4), а отношение n/λ_n предела не имеет (фактически, доказано лишь существование такой последовательности). Кроме того, не было дано какое-либо условие (в духе (0.4), но, разумеется, более сильное), обеспечивающее справедливость предельных соотношений (0.6), (0.7). Именно все это и сделано в §§ 1–7 диссертации. В основной теореме 1.1 найдено условие, гарантирующее выполнение равенств (0.6), (0.7). Очень важно, что это условие, являющееся естественным усилением (0.4), в определенном смысле неулучшаемо (теорема 1.2). Приведем одно весьма грубое, но наглядное следствие из теорем 1.1 и 1.2, раскрывающее суть происходящего.

Если существует такое число $q > 1$, что для производной канонического произведения (0.1) *выполняется асимптотическая оценка*

$$\ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} = O\left(\frac{\lambda_n}{(\ln \lambda_n)^q}\right), \qquad n \to \infty,$$

то последовательность n/λ_n имеет предел при $n \to \infty$, а значит и справедливо равенство (0.7)*. С другой стороны, существует последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, имеющая положительный шаг* (0.5)*, для которой*

$$\ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} = o\left(\frac{\lambda_n}{\ln \lambda_n}\right), \qquad n \to \infty,$$

но последовательность n/λ_n и функция $r^{-1} \ln |L(re^{i\theta})|$ не имеют пределов соответственно при $n \to \infty$ и $r \to +\infty$ (каково бы ни было число $0 \le \theta \le 2\pi$).

Общий ответ на вопрос о существовании пределов (0.6), (0.7) дается в терминах сходимости интеграла

$$\int_a^\infty \frac{\omega(r)}{r^2}\, dr,$$

где $\omega(r)$ — функция, выступающая в роли мажоранты

$$\ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} = O\left(\omega(\lambda_n)\right), \qquad n \to \infty,$$

и ведущая себя достаточно «регулярно». Для того чтобы облечь полученные результаты в наиболее простую форму, в работе вводится понятие обобщенного (весового) индекса конденсации.

Параграфы $2, 4, 5$ носят технический характер. Центральные теоремы 1.1 и 1.2 доказаны в § 3 и § 6 соответственно. В § 7 к этим теоремам сделаны полезные добавления и разобраны подкрепляющие примеры.

Параграф 8 диссертации посвящен известной задаче А. Ф. Леонтьева о регулярности роста целой функции экспоненциального типа с произвольно расположенным множеством простых нулей, имеющим нулевой индекс конденсации. Точнее, речь идет о следующем вопросе. Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с последовательностью простых нулей $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и индикатором $h_L(\theta)$, удовлетворяющая условию (ср. с (0.4))

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} + h_L(\arg \lambda_n) \right\} = 0.$$

Нужно выяснить, является ли $L(\lambda)$ функцией вполне регулярного роста. Вопрос решается положительно, если функция $L(\lambda)$ «не слишком мала» на некоторой прямой (теорема 8.3). В качестве наиболее наглядного результата § 8 выделено следствие из теоремы 8.4, в котором дано положительное решение задачи для четной функции, не имеющей нулей в каком-либо угле раствора $\pi/2$.

В заключительном § 9 полученные утверждения применяются к вопросам представления аналитических в ограниченной выпуклой области функций рядами экспонент. Установлена серия фактов (теоремы 9.2, 9.4, 9.6), в некотором смысле усиливающих известные ранее результаты А. Ф. Леонтьева, Ю. Ф. Коробейника, А. В. Абанина. Отличительной особенностью метода доказательства теорем § 9 является привлечение разложений на простые дроби соответствующих мероморфных функций.

В главе 2 (§§ 10–15) решена следующая задача. Пусть все нули целой функции расположены в угле фиксированного раствора $\leq \pi$ и имеют заданные плотности при некотором показателе $\rho < 1$. Какое наименьшее значение может принимать тип при порядке ρ такой функции? История задачи и ее применение к вопросам полноты систем экспонент изложены в §§ 10, 14, 15.

Экстремальным задачам для индикаторов и типов целых функций, нули которых расположены произвольно или на одном луче и имеют заданный диапазон изменения верхней и нижней плотностей (обычных, усредненных, максимальных и т. д.), посвящена обширная литература, начиная с классического мемуара Ж. Валирона [173]. Особенно активно тематика развивалась во второй половине прошлого века в исследованиях Б. Я. Левина [72], [73], Р. Редхеффера [168], М. И. Андрашко [6], А. А. Гольдберга [33]–[36], Н. В. Говорова [32], А. А. Кондратюка [51]–[55], Б. Н. Хабибуллина [115]. Новые результаты разными методами получены в последнее время Б. Н. Хабибуллиным [117], А. Ю. Поповым [98]–[101], А. Э. Еременко и П. М. Юдицким [152], Г. Г. Брайчевым [14]–[17].

Дадим формализованную постановку задачи и приведем основной результат второй главы. Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — стремящаяся к бесконечности последовательность комплексных чисел, расположенная в угле

$$\Gamma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\arg \lambda| \leq \theta\}$$

фиксированного раствора $2\theta \in [0,\, \pi]$. Пусть заданы числа

$$\rho \in (0,\, 1), \qquad \beta > 0, \qquad \alpha \in [0,\, \beta].$$

Предполагаем, что Λ имеет верхнюю ρ-плотность

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \beta$$

и нижнюю ρ-плотность

$$\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} \geq \alpha.$$

Рассматриваются всевозможные канонические произведения

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{0.8}$$

построенные по таким последовательностям Λ. Бесконечное произведение (0.8) определяет целую функцию нормального ρ-типа

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho(\Lambda) \equiv \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|\lambda|=r} |L(\lambda)|.$$

При заданных условиях требуется указать наименьшее возможное значение для величины σ_ρ. Таким образом, ставится экстремальная задача отыскания точной нижней грани

$$s_\theta(\alpha,\beta;\rho) \equiv \inf\left\{\sigma_\rho = \sigma_\rho(\Lambda) : \Lambda \subset \Gamma_\theta,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta,\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha\right\}. \tag{0.9}$$

В теореме 10.1 (случай $\theta = 0$ расположения нулей на одном луче) и теореме 15.1 (случай $\theta \in (0, \pi/2]$ расположения нулей в угле) доказано, что величина (0.9) находится по формуле

$$s_\theta(\alpha,\beta;\rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta + \max_{a>0}\int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a}\left(\beta\,a^{-\rho} - \alpha\,x^{-\rho}\right)\frac{x+\cos\theta}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx, \tag{0.10}$$

причем точная нижняя грань (0.9) достигается для некоторой функции (0.8) с последовательностью нулей Λ, расположенной на лучах $\arg\lambda = \pm\,\theta$ (соответственно, на одном положительном луче при $\theta = 0$) так, что $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$.

Теорема 10.1 доказана в параграфах 10, 11.

Подробному изучению поведения экстремальной величины $s_0(\alpha,\beta;\rho)$ как функции параметров α, β, ρ отведены §§ 12, 13. Эта часть исследований проходила совместно с Г. Г. Брайчевым. Соавторами для функции $s_0(\alpha,\beta;\rho)$ получены весьма точные двусторонние оценки и найдена асимптотическая формула при $\rho \to +0$, описаны также особенности случая $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ по сравнению с общим случаем расположения нулей $\Lambda \subset \mathbb{C}$.

Результаты § 14 относятся к целым функциям экспоненциального типа (полным в круге системам экспонент) с нулями (показателями), одинаково расположенными на нескольких лучах. В частности, доказано, что наименьшее значение экспоненциального типа канонических произведений (0.1) с вещественными нулями $\pm\Lambda = (\pm\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\overline{\Delta}(\Lambda) = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n} = \beta, \qquad \underline{\Delta}(\Lambda) = \varliminf_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n} \geq \alpha, \tag{0.11}$$

дается формулой

$$\max_{a>0}\left\{\frac{\beta}{\sqrt{a}}\,\ln\frac{1+a}{1+a(\alpha/\beta)^2} + 2\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta+a\alpha}{(\beta-\alpha)\sqrt{a}}\right\}. \tag{0.12}$$

(Утверждение обобщает предшествующие результаты Р. М. Редхеффера [168] и А. Ю. Попова [93], полученные без учета нижней плотности нулей.) Отсюда выводится (теорема 14.3), что величиной (0.12) оценивается сверху радиус полноты систем экспонент с вещественными симметричными показателями, подчиненными ограничениям (0.11). Оценка снизу получается с применением недавнего результата Б. Н. Хабибуллина [117]. Отметим, что результаты этого параграфа связаны с исследованиями Л. А. Рубела [170], П. Мальявена и Л. А. Рубела [165], Р. М. Редхеффера [169] (см. также обзор Б. Н. Хабибуллина [116]).

Заключительный § 15 второй главы содержит доказательство формулы (0.10) для значений параметра $\theta \in (0, \pi/2]$ и исследование величины $s_\theta(\alpha,\beta;\rho)$.

Глава 3 (§§ 16–20) посвящена вопросу о разложении на простые дроби величины, обратной к целой функции. Классические результаты о представлении мероморфных функций рядами простых дробей принадлежат М. Г. Миттаг-Леффлеру и приводятся во многих учебниках по комплексному анализу. Различные сведения о свойствах простых дробей содержит богатая идеями монография Э. Бореля [142]. Подчеркнем, что теоремы Миттаг-Леффлера носят общий характер и нуждаются в дополнительных уточнениях в разных специальных ситуациях, значимых для приложений. Именно о такой ситуации идет речь в третьей главе.

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция, имеющая бесконечно много нулей, причем все они простые. Занумеруем нулевое множество функции в порядке неубывания модулей и обозначим полученную последовательность через $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Вопрос о разложении на простые дроби величины, обратной к $L(\lambda)$, имеет богатую историю, излагаемую в § 16. Основополагающей является работа М. Г. Крейна [67]. Важную роль в появлении статьи [67] сыграли исследования по теории эрмитовых операторов и проблеме моментов [66], [154]. В связи с [67] (см. также [72; гл. V, § 6]) возникла задача об описании тех мероморфных функций $F(\lambda) = 1/\,L(\lambda)$, которые при фиксированном $p \in \mathbb{Z}_+$ могут быть представлены в виде

$$F(\lambda) \equiv \frac{1}{L(\lambda)} \;=\; P(\lambda) \,+\, \frac{a_0}{\lambda} \,+\, \lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda - \lambda_n)} \tag{0.13}$$

с некоторым полиномом $P(\lambda)$ и коэффициентом a_0, вычисляемым по правилу

$$a_0 \;=\begin{cases} 1/L'(0), & 0 \in \Lambda(L), \\ 0, & 0 \notin \Lambda(L). \end{cases}$$

Предполагается, что ряд (0.13) сходится абсолютно и равномерно на компактах комплексной плоскости, не содержащих точек последовательности $\Lambda(L)$.

Различные вопросы, связанные с рядами Крейна (0.13), рассматривались в работах Л. де Бранжа, М. В. Келдыша, А. А. Гольдберга, И. В. Островского, П. Кусиса, Г. Педерсена, Ю. Ф. Коробейника, А. А. Боричева и М. Л. Содина, Л. С. Маергойза, А. Г. Бакана и других математиков. Но до недавнего времени ситуация с характеризацией целых функций $L(\lambda)$, допускающих разложение (0.13), оставалась запутанной, и общая картина не складывалась даже для «базового» случая $\Lambda(L) \subset \mathbb{R}$.

В диссертации задача о справедливости представления (0.13) решена для целых функций с нулями, расположенными в полосе комплексной плоскости. Приведем вариант основного результата третьей главы, сочетающий в себе теорему 16.4 и лемму 17.4.

Пусть $L(\lambda)$ *— целая функция с множеством простых нулей* $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *расположенных в некоторой полосе комплексной плоскости. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если величина* $F(\lambda) \equiv 1/L(\lambda)$ *допускает разложение* (0.13) *с фиксированным* $p \in \mathbb{Z}_+$, *то* $L(\lambda)$ *есть целая функция экспоненциального типа с неотрица-*

тельным индикатором $h_L(\theta)$, *и сходится ряд*

$$\sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}}. \tag{0.14}$$

При этом, если $p=0$, *то* $P(\lambda)\equiv 0$, *а если* $p\in\mathbb{N}$, *то полином* $P(\lambda)$ *вычисляется по формуле*

$$P(\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{p-1} \dfrac{F^{(m)}(0)}{m!}\,\lambda^m, & 0\notin\Lambda(L), \\[2ex] \sum\limits_{m=0}^{p-1} \dfrac{(\lambda\,F(\lambda))^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\,\lambda^m, & 0\in\Lambda(L). \end{cases} \tag{0.15}$$

2. *Обратно, если* $L(\lambda)$ *есть целая функция экспоненциального типа с неотрицательным индикатором* $h_L(\theta)$, *и для некоторого* $p\in\mathbb{Z}_+$ *сходится ряд* (0.14), *то справедливо представление* (0.13), *где* $P(\lambda)\equiv 0$ *при* $p=0$, *и* $P(\lambda)$ *определен формулой* (0.15) *при* $p\in\mathbb{N}$. *Кроме того, имеют место суммационные соотношения*

$$\sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^m} = \begin{cases} -\dfrac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}, & 0\notin\Lambda(L), \\[2ex] -\dfrac{(\lambda\,F(\lambda))^{(m)}(0)}{m!}, & 0\in\Lambda(L), \end{cases} \tag{0.16}$$

с произвольным $m\in\mathbb{N}$, $m\geqslant p+1$.

Этот центральный результат третьей главы доказан в § 18 с учетом общих свойств рядов Крейна, приведенных в § 17. Конкретизация основной теоремы в случаях четной и нечетной функций дана в § 19. Некоторые приложения общих теорем о разложении на простые дроби представлены в § 20. Здесь рассмотрены специальные классы бесконечных произведений вида (0.1) и (0.8). Отдельно изучен вопрос о разложении в ряд типа Крейна величины, обратной к функции Бесселя произвольного индекса $\nu>-1$, и описано применение соотношений (0.16) к вычислению сумм, составленных по нулям этой функции. Эта часть § 20 написана на основе совместных работ [133], [109]. Формула (0.16), отмеченная в [133], и основные результаты [109] принадлежат автору; помощь соавторов состояла в сборе и обработке разрозненной информации о бесселевых функциях и проверке численных расчетов. Укажем, что теорема 20.3 обобщает или уточняет результаты А. Р. Форсайта [153] и И. Н. Снеддона [171].

В течение всей работы над диссертацией автор ощущал поддержку своего учителя заслуженного деятеля науки РФ Ю. Ф. Коробейника. Постоянный интерес к исследованиям проявляли А. Ю. Попов и Г. Г. Брайчев, благодаря научным контактам с которыми получены многие результаты. Большое влияние на работу автора оказал А. М. Седлецкий. Результаты диссертации активно обсуждались с А. В. Абаниным, И. В. Тихоновым, А. Б. Костиным. Всем упомянутым коллегам выражаю свою искреннюю благодарность.

Глава 1

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ КАНОНИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И ОБОБЩЕННЫЙ ИНДЕКС КОНДЕНСАЦИИ

В этой главе изучаются вопросы регулярности роста целой функции экспоненциального типа $L(\lambda)$ с простыми нулями в зависимости от поведения в нулях производной $L'(\lambda)$. Параграфы §§ 1–7 посвящены каноническим произведениям с вещественными симметричными нулями. Найдено точное условие наличия вполне регулярного роста у таких произведений в терминах обобщенного индекса конденсации нулей. В § 8 изучается задача А. Ф. Леонтьева о регулярности роста целой функции экспоненциального типа с произвольно расположенным множеством простых нулей, имеющим нулевой индекс конденсации. В частности, дается решение задачи для четной функции, не имеющей нулей в каком-либо угле раствора $\pi/2$. В заключительном § 9 полученные результаты применяются к вопросам представления аналитических в ограниченной выпуклой области функций рядами экспонент.

§ 1. Постановка задачи. Формулировка результатов

Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность положительных чисел вида:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ \ldots \ < \lambda_n < \ldots \ , \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty. \tag{1.1}$$

Предполагаем, что Λ имеет конечную положительную *верхнюю плотность*

$$\overline{\Delta}(\Lambda) \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n}, \qquad 0 < \overline{\Delta}(\Lambda) < +\infty. \tag{1.2}$$

Нижняя плотность последовательности Λ, т. е. число

$$\underline{\Delta}(\Lambda) \equiv \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n}, \tag{1.3}$$

может не совпадать с верхней плотностью, и в этом случае последовательность называют *неизмеримой*. Если же выполнено равенство $\overline{\Delta}(\Lambda) = \underline{\Delta}(\Lambda)$, то существует обычный предел $\lim\limits_{n\to\infty}(n/\lambda_n)$, который называют *плотностью* последовательности Λ и обозначают $\Delta(\Lambda)$. В таком случае последовательность Λ считается *измеримой*.

Рассмотрим каноническое произведение

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.4}$$

построенное по последовательности Λ. Справедливы следующие факты (см. [76; гл. I, § 2, 4, гл. II, § 4]). Каноническое произведение (1.4) определяет целую функцию экспоненциального типа σ, где $0 < \sigma \le \pi\,\overline{\Delta}(\Lambda)$. Для *индикатора* функции $L(\lambda)$ верна оценка

$$h_L(\theta) \equiv \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln|L(re^{i\theta})|}{r} \ge \sigma\,|\sin\theta|. \tag{1.5}$$

Функция $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост тогда и только тогда, когда

$$\overline{\Delta}(\Lambda) = \underline{\Delta}(\Lambda) = \Delta(\Lambda),$$

т. е. когда последовательность Λ измерима. В этом случае тип и индикатор вычисляются точно:

$$\sigma = \pi\,\Delta(\Lambda), \qquad h_L(\theta) = \sigma\,|\sin\theta| = \pi\,\Delta(\Lambda)\,|\sin\theta|.$$

Поскольку функции вполне регулярного роста представляют значительный интерес для приложений (см., например, [76], [78], [72], [8], [38], [160], [63]), то при работе с каноническим произведением (1.4) важно учитывать наличие или отсутствие плотности у последовательности Λ.

Будем изучать связь между измеримостью последовательности нулей канонического произведения (1.4) и поведением в нулях производной $L'(\lambda)$. Для этого используем важную характеристику — *весовой индекс конденсации*. Напомним основные сведения, связанные с данным понятием.

В известной монографии [139; гл. I, § 7, 8] В. Бернштейн исследовал различные характеристики типа «разреженности» и «сгущаемости» для числовых последовательностей. В связи с этим он использовал некое (нетривиальное) понятие *индекса конденсации* и показал [139; приложение II], что для измеримой последовательности Λ вида (1.1), выражающей положительные нули канонического произведения (1.4), индекс конденсации вычисляется по правилу

$$\delta(\Lambda) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}. \tag{1.6}$$

Через некоторое время А. Ф. Леонтьев обратил внимание на универсальный характер величины (1.6), перенеся на нее название «индекс конденсации». Поэтому всюду далее *стандартным индексом конденсации* будем называть именно величину (1.6), вычисленную для числовой последовательности (1.1) конечной верхней плотности (1.2).

Характеристики, подобные $\delta(\Lambda)$, встречались во многих работах, посвященных теории рядов Дирихле, вопросам интерполяции и аналитического продолжения, оценкам роста целых функций и инвариантным подпространствам аналитических функций (см., например, [82], [64], [24]–[26], [94], [95], [97], [69], [70]). В частности, в [94], [97] показано, что величина (1.6) всегда неотрицательна, и найден диапазон изменения $\delta(\Lambda)$, если заданы плотности (1.2), (1.3) и *шаг*

$$h(\Lambda) \equiv \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0 \tag{1.7}$$

последовательности Λ.

Заметим, кстати, что еще В. Бернштейн установил в [139; приложение II], что у измеримой последовательности Λ вида (1.1) с положительным шагом $h(\Lambda)$ индекс конденсации $\delta(\Lambda)$ равен нулю. Затем, в связи с работами А. Ф. Леонтьева [75; с. 1291], [77; задача 2], возник обратный вопрос: будет ли измеримой всякая последовательность (1.1) с конечной верхней плотностью $\overline{\Delta}(\Lambda)$ при условии, что $\delta(\Lambda) = 0$? Ответ на вопрос оказался отрицательным — в работе [23] А. В. Братищев указал конструкцию примера неизмеримой последовательности (1.1) с конечной верхней плотностью $\overline{\Delta}(\Lambda)$, положительным шагом $h(\Lambda)$ и нулевым индексом конденсации $\delta(\Lambda)$. Эта конструкция не является явной — она содержит элементы, трудно воплощаемые на практике, однако после работы [23] стало ясно, что даже при дополнительном ограничении (1.7) нельзя охарактеризовать наличие плотности у последовательности Λ в терминах стандартного индекса конденсации $\delta(\Lambda)$. Потребовалось модифицировать понятие индекса конденсации так, чтобы с помощью новой характеристики можно было твердо гарантировать измеримость последовательности Λ.

Итак, пусть Λ — последовательность положительных чисел, подчиненная условиям (1.1), (1.2), и $L(\lambda)$ — каноническое произведение (1.4). Пусть $\omega(r)$ — положительная функция, определенная при $r \geq a$ с фиксированным $a > 0$. *Индексом ω-конденсации* (или *весовым индексом конденсации*) последовательности Λ назовем значение

$$\delta(\omega, \Lambda) \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}. \tag{1.8}$$

Похожие характеристики встречались и ранее. Так, А. Ф. Леонтьев использовал [76; гл. II, § 6] величину

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n \ln \lambda_n} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}.$$

Затем в работах А. М. Гайсина (см., например, [30], [31]), посвященных решению некоторых проблем Пойа, вводилось специальное понятие весовой конденсации, фактически эквивалентное определению (1.8).

В нашей задаче применение весового индекса конденсации выглядит весьма естественным. Поясним на примере простого перехода от стандартного индекса (1.6) к чуть более общему индексу

$$\delta_p(\Lambda) \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^p} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} \tag{1.9}$$

с фиксированным $p > 0$. Индекс (1.9) есть частный случай основного определения (1.8) с весовой функцией $\omega(r) = r^p$. При $p = 1$, согласно утверждению А. В. Братищева [23], существуют неизмеримые последовательности Λ, у которых величина $\delta_1(\Lambda) = \delta(\Lambda)$ конечна и даже равна нулю. Нетрудно убедиться, что при $p > 1$ индекс (1.9) равен нулю всякий раз, когда стандартный индекс конечен, и, в частности, конструкция А. В. Братищева снова дает неизмеримые последовательности Λ с $\delta_p(\Lambda) = 0$. Но, оказывается, при $0 < p < 1$ картина принципиально меняется: любая последовательность Λ с индексом $\delta_p(\Lambda) < +\infty$ уже будет измеримой. Этот результат есть проявление общего правила, действующего для индексов ω-конденсации с вогнутыми функциями $\omega(r)$.

Точнее, рассматриваем *весовые функции* $\omega(r)$ со свойствами:

(i) $\omega(r)$ определена, непрерывна и строго возрастает при $r \geq a > 0$;

(ii) $\omega(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$;

(iii) $\omega(r)$ вогнута (не обязательно строго) при $r \geq a$, т. е.

$$\omega\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) \geq \frac{\omega(r_1) + \omega(r_2)}{2} \quad \text{для любых} \quad r_1,\, r_2 \geq a.$$

Значение $a > 0$ может быть своим для каждой функции $\omega(r)$.

При выполнении (i)–(iii) вопрос о том, достаточно ли условие $\delta(\omega, \Lambda) < +\infty$ для измеримости последовательности Λ, решается в терминах сходимости некоего интеграла от $\omega(r)$, напоминающего интеграл из теории квазианалитических функций.

Теорема 1.1. *Пусть функция $\omega(r)$ со свойствами* (i)–(iii) *подчинена требованию*

$$\int\limits_a^\infty \frac{\omega(r)}{r^2}\, dr < +\infty. \tag{1.10}$$

Тогда всякая последовательность Λ вида (1.1), *имеющая конечную верхнюю плотность* (1.2) *и удовлетворяющая условию*

$$\delta(\omega, \Lambda) < +\infty, \tag{1.11}$$

будет измеримой.

Подчеркнем, что теорема 1.1 не требует ограничения (1.7) на шаг последовательности Λ. Стоит оговориться также, что условие (1.11) фигурирует в теореме как достаточное; его необходимость отнюдь не утверждается: в отличие от классического случая не исключено существование измеримых последовательностей Λ с шагом $h(\Lambda) > 0$, у которых $\delta(\omega, \Lambda) = +\infty$ (см. пример 2.1 из § 2).

Требование (1.10), предъявляемое к весовой функции $\omega(r)$, является ключевым для теоремы 1.1. Его точность будет установлена при дополнительном предположении о правильном изменении $\omega(r)$. Напомним [106], что положительная измеримая при $r \geq a$ функция $\omega(r)$ называется *правильно меняющейся* (на бесконечности), если существует такое число $p \in \mathbb{R}$, что для каждого значения $t > 0$ выполнено предельное соотношение

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} = t^p. \tag{1.12}$$

Известно, что соотношение (1.12) является равномерным по $t \in [\varepsilon,\, 1/\varepsilon]$ при любом $\varepsilon \in (0, 1)$. Число p называют *порядком* правильно меняющейся функции $\omega(r)$. Правильно меняющаяся функция нулевого порядка называется *медленно меняющейся.*

Точность требования (1.10) на весовую функцию $\omega(r)$ в теореме 1.1 подтверждает следующий результат.

Теорема 1.2. *Пусть функция $\omega(r)$ со свойствами* (i)–(iii) *правильно меняется на бесконечности и подчинена требованию*

$$\int\limits_a^\infty \frac{\omega(r)}{r^2}\,dr = +\infty. \tag{1.13}$$

Тогда найдется неизмеримая последовательность Λ вида (1.1) *с положительным шагом* (1.7), *имеющая конечную верхнюю плотность* (1.2) *и удовлетворяющая условию* (1.11). *Более того, для любых чисел α, β, связанных соотношением $0 \le \alpha < \beta$, означенную неизмеримую последовательность Λ можно конструктивно построить так, чтобы*

$$\underline{\Delta}(\Lambda) = \alpha < \beta = \overline{\Delta}(\Lambda), \tag{1.14}$$

и при этом

$$\delta(\omega, \Lambda) = 0 \tag{1.15}$$

с тем, что $\delta(\Lambda) = 0$ для стандартного индекса конденсации (1.6).

Отметим типичные примеры допустимых весовых функций. Так, ясно, что $\omega(r) = \ln r$ и такие функции, как $\omega(r) = r^p$ при $0 < p < 1$ или

$$\omega(r) = \frac{r}{(\ln r)^q} \tag{1.16}$$

при $q > 1$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1. Если же $0 < q \leqslant 1$, то весовая функция (1.16) дает расходящийся интеграл (1.13) и подпадает под требования теоремы 1.2. Кроме того, простейшая весовая функция $\omega(r) = r$, определяющая стандартный индекс кондесации (1.6), также принадлежит случаю теоремы 1.2, и вместо неявной конструкции А. В. Братищева [23] возникает целая серия конкретных примеров с дополнительной информацией (1.14).

Конечно, большинство встречающихся на практике весовых функций обладает правильным изменением. Тем не менее, стоит иметь в виду, что из (i)–(iii), вообще говоря, не вытекает свойство правильного изменения функции $\omega(r)$, независимо от того, какому из требований (1.10) или (1.13) она подчинена. Подробный разбор соответствующих примеров будет дан в § 4. Сейчас отметим только, что можно построить функцию $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii), подчиненную требованию (1.13), так, чтобы при любом $t > 1$ выполнялось соотношение

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} = 1 < t = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)}. \tag{1.17}$$

Такая функция ведет себя весьма нерегулярно, хотя и удовлетворяет всем предположениям теоремы 1.2, кроме (1.12). Для подобных «нерегулярных» весов вопрос о существовании неизмеримых последовательностей Λ вида (1.1), имеющих конечную верхнюю плотность (1.2) и удовлетворяющих условию (1.11), остается открытым. Отметим, наконец, что если весовая функция $\omega(r)$ удовлетворяет всем без исключения предположениям теоремы 1.2, то она является правильно меняющейся функцией первого порядка, т. е. соотношение (1.12) выполняется с $p = 1$.

Таким образом, обе теоремы являются «рабочими» и имеют свои области применения.

Теоремы 1.1 и 1.2 являются основными результатами первой главы. Доказательства проводятся в несколько этапов и опираются на серию вспомогательных утверждений.

§ 2. Некоторые вспомогательные результаты

Начнем с доказательства одного факта, представляющего собой ослабленную версию теоремы 1.1.

Предложение 2.1. *Пусть* $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — *последовательность вида* (1.1) *с конечной верхней плотностью* (1.2). *Если для производной канонического произведения* (1.4) *выполняется оценка*

$$|L'(\lambda_n)| \geq M\,\lambda_n^{-p}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

с некоторыми положительными константами M, p, *то последовательность* Λ *измерима.*

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что вместо (2.1) справедлива оценка

$$|L'(\lambda_n)| \geq M\,\lambda_n^{3}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Действительно, если (2.2) не выполнено, добавим к последовательности Λ конечное число различных новых точек. Например, достаточно взять на промежутке $0 < r < \lambda_1$ дополнительно $\geq (p+3)/2$ различных точек. Новая последовательность удовлетворяет условию вида (2.2) и наследует асимптотические свойства исходной последовательности.[1]

---

[1]Пусть выполнена оценка (2.1), и $0 < \mu_1 < \ldots < \mu_s < \lambda_1$, где $2s \geq p+3$. Положим

$$\widetilde{L}(\lambda) = L(\lambda)\prod_{k=1}^{s}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu_k^2}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Поскольку при всех $k = 1, \ldots, s$ и $n \in \mathbb{N}$ верны неравенства

$$\lambda_n^2 - \mu_k^2 \geq \left(1 - \left(\frac{\mu_s}{\lambda_1}\right)^2\right)\lambda_n^2, \qquad \mu_k^2 \leq \mu_s^2,$$

то в точках $\lambda_n \geq 1$ для $\widetilde{L}'(\lambda_n)$ справедлива оценка

$$\left|\widetilde{L}'(\lambda_n)\right| = |L'(\lambda_n)|\prod_{k=1}^{s}\frac{\lambda_n^2 - \mu_k^2}{\mu_k^2} \geq M\,\mu_s^{-2s}\left(1 - \left(\frac{\mu_s}{\lambda_1}\right)^2\right)^s \lambda_n^{2s-3} \geq \widetilde{M}\,\lambda_n^{p}.$$

Здесь $\widetilde{M} = M\left(\lambda_1^2 - \mu_s^2\right)^s(\lambda_1\mu_s)^{-2s} > 0$.

Определим функцию

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{L(\lambda)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)} \frac{2\lambda_n}{\lambda^2 - \lambda_n^2} \tag{2.3}$$

и установим, что $\Phi(\lambda) \equiv 0$. Поставленная задача будет решена в несколько этапов.

Отметим вначале, что начиная с некоторого номера,

$$\frac{1}{\lambda_n} \le \frac{2\,\overline{\Delta}(\Lambda)}{n} \tag{2.4}$$

по определению верхней плотности (1.2).

Покажем теперь, что ряд, фигурирующий в (2.3), сходится равномерно на компактах области $\mathbb{C} \setminus \pm\Lambda$. Возьмем произвольный компакт K, не содержащий точек из $\pm\Lambda$, и пусть $d > 0$ — расстояние от K до $\pm\Lambda$. Используя оценки (2.2), (2.4), получаем для всех $\lambda \in K$ и достаточно больших n соотношение

$$\frac{1}{|L'(\lambda_n)|} \frac{\lambda_n}{|\lambda^2 - \lambda_n^2|} \le \frac{1}{M\,\lambda_n^3} \cdot \frac{\lambda_n}{d^2} \le \frac{A}{n^2}, \qquad A \equiv \frac{1}{M} \left(\frac{2\,\overline{\Delta}(\Lambda)}{d} \right)^2.$$

Такая оценка гарантирует равномерную сходимость на K ряда, фигурирующего в (2.3). Тем самым, функция $\Phi(\lambda)$, определенная формулой (2.3), является аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \pm\Lambda$, причем особенности в точках $\pm\lambda_n$ будут не выше полюсов первого порядка. Но вычеты в этих точках равны нулю. Поэтому $\Phi(\lambda)$ есть целая функция переменной λ.

Покажем, что $\Phi(\lambda)$ является функцией экспоненциального типа. Это потребует некоторых усилий. Сначала положим

$$\Psi(\lambda) = L(\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)} \frac{2\lambda_n}{\lambda^2 - \lambda_n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)} \frac{\lambda_n}{\lambda^2 - \lambda_n^2} L(\lambda), \tag{2.5}$$

учитывая связь

$$\Phi(\lambda) = \frac{1 - \Psi(\lambda)}{L(\lambda)}, \qquad \Psi(\lambda) = 1 - L(\lambda)\,\Phi(\lambda), \tag{2.6}$$

из которой ясно, что функция $\Psi(\lambda)$ тоже является целой. Следуя [76; гл. II, § 4], рассмотрим функции

$$L_n(\lambda) = \prod_{k \ne n} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Сравнивая с (1.4), имеем

$$\frac{\lambda_n}{\lambda^2 - \lambda_n^2} L(\lambda) = -\frac{1}{\lambda_n} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2} \right)^{-1} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right) = -\frac{L_n(\lambda)}{\lambda_n}.$$

Но тогда от (2.5) можно перейти к записи

$$\Psi(\lambda) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)} \, \frac{L_n(\lambda)}{\lambda_n}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.7}$$

При всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливы оценки

$$|L_n(\lambda)| = \prod_{k\neq n} \left| 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right| \le \prod_{k\neq n} \left(1 + \frac{|\lambda|^2}{\lambda_k^2} \right) \le \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{|\lambda|^2}{\lambda_k^2} \right) = L(i|\lambda|).$$

Возьмем значение σ_0, большее экспоненциального типа σ канонического произведения (1.4). Тогда при всех n и некотором $B_0 > 0$ будет выполнено

$$|L_n(\lambda)| \;\le\; L(i|\lambda|) \le B_0 \, e^{\sigma_0|\lambda|}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.8}$$

Применяя оценки (2.2), (2.4), запишем для больших n соотношение

$$\frac{1}{|L'(\lambda_n)|} \, \frac{1}{\lambda_n} \;\le\; \frac{1}{M \, \lambda_n^4} \;\le\; \frac{(2\,\overline{\Delta}(\Lambda))^4}{M} \, \frac{1}{n^4}. \tag{2.9}$$

Мажорируя таким образом в (2.7) и учитывая (2.8), заключаем, что

$$|\Psi(\lambda)| \le B \, e^{\sigma_0|\lambda|}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

с некоторой константой $B > 0$. Следовательно, целая функция $\Psi(\lambda)$ имеет экспоненциальный тип. Для дальнейшего удобно сразу оценить ее индикатор.

Для всех λ, лежащих вне полосы $|\operatorname{Im}\lambda| < 1$, имеем

$$|\lambda^2 - \lambda_n^2| = |\lambda - \lambda_n| \; |\lambda + \lambda_n| \ge 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому при всех $|\operatorname{Im}\lambda| \ge 1$ для функции $\Psi(\lambda)$, определенной формулой (2.5), выполняется соотношение

$$|\Psi(\lambda)| \;\le\; 2\,|L(\lambda)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{|L'(\lambda_n)|}.$$

Числовой ряд сходится благодаря (2.2), (2.4). В итоге

$$|\Psi(\lambda)| \le C\,|L(\lambda)|, \qquad |\operatorname{Im}\lambda| \ge 1, \tag{2.10}$$

с некоторой константой $C > 0$. Принимая во внимание непрерывность индикаторов, выводим из (2.10) оценку

$$h_\Psi(\theta) \le h_L(\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{2.11}$$

Вернемся теперь к функции $\Phi(\lambda)$.

Рассмотрим соотношения (2.6). Фигурирующие там целые функции $L(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ имеют экспоненциальный тип. Поэтому целая функция $\Phi(\lambda)$ тоже имеет экспоненциальный тип (см. [72; гл. I, § 9]).

Оценим индикатор функции $\Phi(\lambda)$, основываясь на информации об индикаторах функций $L(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$. Нужный результат будет извлечен из второго соотношения (2.6), но для того чтобы корректно применить правило «индикатор произведения равен сумме индикаторов», придется установить, что $\Phi(\lambda)$ есть функция вполне регулярного роста [72; гл. III, § 4]. С этой целью покажем, что функция $\Phi(\lambda)$ ограничена на мнимой оси.

Первое слагаемое $1/L(\lambda)$ в определении (2.3) ограничено на мнимой оси, так как

$$L(ir) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right) \geq 1, \qquad r \geq 0,$$

согласно (1.4). Оценивая второе слагаемое в (2.3), при всех $r \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$ запишем

$$\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}\,\frac{\lambda_n}{|(ir)^2 - \lambda_n^2|} = \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}\,\frac{\lambda_n}{r^2 + \lambda_n^2} \leq \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}\,\frac{1}{\lambda_n}.$$

Привлекая (2.9), получаем ограниченность на мнимой оси суммы ряда, фигурирующего в (2.3). В результате функция $\Phi(\lambda)$ будет ограниченной на мнимой оси. Последнее, как известно, гарантирует, что $\Phi(\lambda)$ есть целая функция вполне регулярного роста [72; гл. V, § 4, теорема 11]. Теперь можно оценить индикатор функции $\Phi(\lambda)$.

На основании второго соотношения (2.6) имеем

$$h_{L\Phi}(\theta) = h_{1-\Psi}(\theta) \leq \max\{0,\, h_\Psi(\theta)\},$$

причем $\max\{0,\, h_\Psi(\theta)\} \leq h_L(\theta)$ в силу оценок (1.5) и (2.11). Поскольку $\Phi(\lambda)$ есть целая функция вполне регулярного роста, то

$$h_{L\Phi}(\theta) = h_L(\theta) + h_\Phi(\theta).$$

В результате $h_L(\theta) + h_\Phi(\theta) \leq h_L(\theta)$ и $h_\Phi(\theta) \leq 0$ при всех $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Отсюда следует, что $\Phi(\lambda)$ есть целая функция нулевого экспоненциального типа. Но, как уже установлено, величина $|\Phi(\lambda)|$ ограничена на мнимой прямой. По принципу Фрагмена–Линделефа функция $\Phi(\lambda)$ будет тождественной константой: $\Phi(\lambda) \equiv D$. Проводя дополнительные рассуждения, можно показать, что $D = 0$ и $\Phi(\lambda) \equiv 0$, но эта информация нам не потребуется.

Для завершения доказательства воспользуемся одной теоремой М. Г. Крейна, связанной с разложением обратной величины целой функции в ряд простых дробей. Выпишем нули $\pm\Lambda$ функции $L(\lambda)$ в виде последовательности $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ по правилу:

$$\mu_{2n-1} = \lambda_n, \qquad \mu_{2n} = -\lambda_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Обращаясь к (2.3), с учетом соотношения $\Phi(\lambda) \equiv D$, нечетности производной $L'(\lambda)$ и оценки (2.9) получаем

$$\frac{1}{L(\lambda)} = D + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)} \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_n} - \frac{1}{\lambda + \lambda_n} \right) = D + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\mu_m)} \frac{1}{\lambda - \mu_m},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\mu_m)|} \frac{1}{|\mu_m|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\mu_{2n-1})|} \frac{1}{|\mu_{2n-1}|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\mu_{2n})|} \frac{1}{|\mu_{2n}|}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty.$$

По теореме М. Г. Крейна [67; теорема 4] функция $L(\lambda)$ принадлежит классу Картрайт (см. также [72; гл. V, § 6]), вследствие чего последовательность Λ измерима. Предложение 2.1 доказано.

При дальнейшей работе с каноническим произведением (1.4) будем развивать метод, предложенный А. Ю. Поповым в [94]. При $r \geq 0$ положим

$$d(r) = \min_{n \in \mathbb{N}} |r - \lambda_n|, \qquad L^*(r) = \frac{|L(r)|}{d(r)},$$

доопределяя $L^*(r)$ в точках λ_n по непрерывности. Для положительной функции $L^*(r)$ введем характеристику

$$\delta^*(\omega, \Lambda) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{1}{\omega(r)} \ln \frac{1}{L^*(r)}, \tag{2.12}$$

вычисляемую по всем значениям $r \to +\infty$. Поскольку $L^*(\lambda_n) = |L'(\lambda_n)|$, то $\delta^*(\omega, \Lambda) \geq \delta(\omega, \Lambda)$.

В случае $\omega(r) = r$ определение (2.12) принимает вид

$$\delta^*(\Lambda) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{1}{r} \ln \frac{1}{L^*(r)}$$

и было введено А. Ю. Поповым. В работах [94], [97] показано, что величина $\delta^*(\Lambda)$ совпадает со стандартным индексом конденсации (1.6) и всегда неотрицательна:

$$\delta^*(\Lambda) = \delta(\Lambda) \geq 0.$$

Общий вопрос о взаимосвязи характеристик (1.8) и (2.12) оказывается более тонким. Для наглядности обратимся к простым примерам.

Пример 2.1. Рассмотрим последовательность $\Lambda_0 = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, у которой $\lambda_n = n\,\pi$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Эта последовательность измерима с плотностью $\Delta(\Lambda_0) = 1/\pi$ и имеет шаг $h(\Lambda_0) = \pi$. Построив по Λ_0 каноническое произведение (1.4), получим функцию

$$L_0(\lambda) = \frac{\sin \lambda}{\lambda} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{(n\,\pi)^2} \right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Поскольку
$$L_0'(\lambda) = \left(\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right)' = \frac{\lambda\cos\lambda - \sin\lambda}{\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$
то при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем
$$L_0'(n\,\pi) = \frac{(-1)^n}{n\,\pi}.$$
Видим, что Λ_0 удовлетворяет условию (2.1) с $M = p = 1$. Далее,
$$\ln\frac{1}{|L_0'(n\,\pi)|} = \ln n\,\pi, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Поэтому
$$\delta(\Lambda_0) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n\,\pi}\ln n\,\pi = 0,$$
что согласуется с общим результатом В. Бернштейна о равенстве нулю индекса конденсации измеримой последовательности с положительным шагом. Легко понять, что обобщенный индекс конденсации последовательности Λ_0 будет всегда неотрицательным, но в зависимости от веса может принимать любые значения вплоть до $+\infty$. Например,
$$\delta(\ln r,\, \Lambda_0) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n\,\pi}\ln n\,\pi = 1,$$
$$\delta(\ln\ln r,\, \Lambda_0) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\ln n\,\pi}\ln n\,\pi = +\infty.$$

Пусть теперь $\omega(r)$ — произвольный вес, определенный при $r \geq \pi$ и удовлетворяющий условию (ii). Сравним характеристики $\delta(\omega, \Lambda_0)$ и $\delta^*(\omega, \Lambda_0)$. Первая из них вычисляется по формуле
$$\delta(\omega, \Lambda_0) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\omega(n\,\pi)}\ln n\,\pi. \tag{2.13}$$

Для вычисления второй характеристики заметим, что при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ на отрезке $r \in [n\,\pi,\ (n+1)\pi]$ выполнено соотношение
$$d(r) = \min_{m\in\mathbb{N}} |r - m\,\pi| = \begin{cases} r - n\,\pi, & r \in [n\,\pi,\ (n+1/2)\pi], \\ (n+1)\pi - r, & r \in [(n+1/2)\pi,\ (n+1)\pi]. \end{cases}$$
Поэтому для функции
$$L_0^*(r) = \frac{|L_0(r)|}{d(r)} = \frac{|\sin r|}{r\,d(r)}$$
при каждом $n \in \mathbb{N}$ имеем
$$\ln\frac{1}{L_0^*(r)} = \ln\frac{r(r - n\,\pi)}{|\sin r|} = \ln\frac{r(r - n\,\pi)}{\sin(r - n\,\pi)}, \qquad r \in [n\,\pi,\ (n+1/2)\pi];$$
$$\ln\frac{1}{L_0^*(r)} = \ln\frac{r((n+1)\pi - r)}{|\sin r|} = \ln\frac{r((n+1)\pi - r)}{\sin((n+1)\pi - r)}, \qquad r \in [(n+1/2)\pi,\ (n+1)\pi].$$

Поскольку при всех $x \in [0, \pi/2]$ справедливо неравенство

$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{\pi}{2},$$

то для каждого $n \in \mathbb{N}$ получим

$$\ln r \le \ln \frac{1}{L_0^*(r)} \le \ln \frac{\pi r}{2}, \qquad r \in [n\,\pi,\ (n+1)\pi].$$

Тем самым, последняя оценка справедлива при всех $r \ge \pi$. Отсюда с учетом (ii) находим, что

$$\delta^*(\omega, \Lambda_0) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\omega(r)} \ln \frac{1}{L_0^*(r)} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\omega(r)} \ln r.$$

Сравним полученную формулу

$$\delta^*(\omega, \Lambda_0) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\omega(r)} \ln r \tag{2.14}$$

с формулой (2.13).

Выбирая в соотношениях (2.13), (2.14) в качестве веса функцию $\omega(r) = \ln r$, приходим к равенству $\delta^*(\omega, \Lambda_0) = \delta(\omega, \Lambda_0)$. Но столь же легко подобрать весовую функцию $\omega(r)$ с условием (ii) так, чтобы $\delta^*(\omega, \Lambda_0) > \delta(\omega, \Lambda_0)$. Например, возьмем какую-нибудь функцию $\omega(r)$, подчиненную следующим требованиям:

$$\frac{1}{2}\ln r \le \omega(r) \le \ln r, \qquad r \ge \pi;$$

$$\omega(n\,\pi) = \ln n\,\pi, \qquad \omega((n+1/2)\pi) = \frac{1}{2}\ln((n+1/2)\pi), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что такая функция $\omega(r)$ не является вогнутой. Тогда

$$\delta(\omega, \Lambda_0) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\omega(n\,\pi)} \ln n\,\pi = 1,$$

$$\delta^*(\omega, \Lambda_0) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\omega(r)} \ln r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\omega((n+1/2)\pi)} \ln((n+1/2)\pi) = 2.$$

Пример 2.2. Рассмотрим последовательность $\Lambda_1 = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, построенную по правилу:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_n = (n-1)\pi, \qquad n = 2, 3, \ldots .$$

Другими словами, Λ_1 образована из последовательности Λ_0 примера 2.1 добавлением всего одной точки. Как и в предыдущем примере $\Delta(\Lambda_1) = 1/\pi$, $h(\Lambda_1) = \pi$. Каноническое произведение (1.4), составленное по последовательности Λ_1, имеет вид

$$L_1(\lambda) = (1-\lambda^2)\,L_0(\lambda) = (1-\lambda^2)\,\frac{\sin\lambda}{\lambda} = (1-\lambda^2)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{(n\,\pi)^2}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Согласно результату В. Бернштейна стандартный индекс конденсации $\delta(\Lambda_1)$ снова равен нулю. Поскольку

$$L_1'(\lambda) = -2\lambda\, L_0(\lambda) + (1-\lambda^2)\, L_0'(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

то при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$L_1'(n\,\pi) = \bigl(1 - (n\,\pi)^2\bigr)\, \frac{(-1)^n}{n\,\pi}.$$

Здесь условие (2.1) выполняется для каждого $p > 0$ при подходящем выборе константы $M = M(p)$. Далее,

$$\ln \frac{1}{|L_1'(n\,\pi)|} \sim -\ln n\,\pi, \qquad n \to \infty.$$

Последнее соотношение показывает, что весовой индекс конденсации последовательности Λ_1, в отличие от примера 2.1, будет всегда неположительным, и в зависимости от веса может принимать любые значения вплоть до $-\infty$. Например,

$$\delta(\ln r,\, \Lambda_1) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n\,\pi} \ln \frac{1}{|L_1'(n\,\pi)|} = -1,$$

$$\delta(\ln\ln r,\, \Lambda_1) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\ln n\,\pi} \ln \frac{1}{|L_1'(n\,\pi)|} = -\infty.$$

Пусть теперь $\omega(r)$ — произвольная функция, определенная при $r \geq \pi$ и удовлетворяющая условию (ii). Тогда, во-первых,

$$\delta(\omega,\, \Lambda_1) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\omega(n\,\pi)} \ln \frac{1}{|L_1'(n\,\pi)|} = -\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\omega(n\,\pi)} \ln n\,\pi.$$

Во-вторых, учитывая соотношения

$$L_1^*(r) = (r^2-1)\, L_0^*(r), \qquad \ln r \;\leq\; \ln \frac{1}{L_0^*(r)} \;\leq\; \ln \frac{\pi r}{2},$$

справедливые при всех $r \geq \pi$, приходим к формуле

$$\delta^*(\omega,\, \Lambda_1) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\omega(r)} \ln \frac{1}{L_1^*(r)} = -\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\omega(r)} \ln r.$$

Вопрос о совпадении величин $\delta(\omega,\, \Lambda_1)$ и $\delta^*(\omega,\, \Lambda_1)$ сводится к проверке равенства

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\omega(n\,\pi)} \ln n\,\pi = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\omega(r)} \ln r,$$

которое, вообще говоря, места не имеет. Например, выбирая функцию $\omega(r)$ так, чтобы

$$\frac{1}{2}\ln r \le \omega(r) \le \ln r, \qquad r \ge \pi;$$

$$\omega(n\,\pi) = \frac{1}{2}\ln n\,\pi, \qquad \omega((n+1/2)\pi) = \ln((n+1/2)\pi), \qquad n \in \mathbb{N},$$

получим

$$\delta(\omega,\,\Lambda_1) = -\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\omega(n\,\pi)}\ln n\,\pi = -2,$$

$$\delta^*(\omega,\,\Lambda_1) = -\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\omega(r)}\ln r = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\omega((n+1/2)\pi)}\ln((n+1/2)\pi) = -1.$$

Дадим теперь достаточные условия совпадения величин (1.8) и (2.12) в общей ситуации.

Предложение 2.2. *Пусть* Λ — *произвольная последовательность вида* (1.1) *с конечной верхней плотностью* (1.2). *Пусть функция* $\omega(r)$ *удовлетворяет условиям* (iii),

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\omega(r)}{\ln r} = +\infty, \tag{2.15}$$

$$\delta(\omega,\,\Lambda) \ge 0. \tag{2.16}$$

Тогда справедливо равенство

$$\delta^*(\omega,\,\Lambda) = \delta(\omega,\,\Lambda). \tag{2.17}$$

Доказательство. Как уже отмечалось, всегда $\delta^*(\omega,\,\Lambda) \ge \delta(\omega,\,\Lambda)$. В частности, $\delta^*(\omega,\,\Lambda) = +\infty$, если $\delta(\omega,\,\Lambda) = +\infty$. Поэтому будем доказывать неравенство $\delta^*(\omega,\,\Lambda) \le \delta(\omega,\,\Lambda)$, считая, что $\delta(\omega,\,\Lambda) < +\infty$. С этой целью выберем произвольно число $\gamma > \delta(\omega,\,\Lambda)$. Из (2.16) следует, что $\gamma > 0$. По определению (1.8) для всех достаточно больших номеров n справедлива оценка

$$\ln|L'(\lambda_n)| = \ln L^*(\lambda_n) > -\gamma\,\omega(\lambda_n). \tag{2.18}$$

Простой подсчет дает для величины $L'(\lambda_n)$ представление

$$L'(\lambda_n) = -\frac{2}{\lambda_n}\prod_{k\ne n}\left(1-\frac{\lambda_n^2}{\lambda_k^2}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем n настолько большим, чтобы выполнялось (2.18), и рассмотрим функцию

$$L_{n,\,n+1}(r) = \prod_{k\ne n,\,k\ne n+1}\left(1-\frac{r^2}{\lambda_k^2}\right)$$

при $r \in [\lambda_n,\,\lambda_{n+1}]$. На концах этого отрезка имеем:

$$\ln|L_{n,\,n+1}(\lambda_n)| = \ln \prod_{k\ne n,\,k\ne n+1} \left|1-\frac{\lambda_n^2}{\lambda_k^2}\right| \;=\; \ln|L'(\lambda_n)| - \ln\frac{2(\lambda_{n+1}^2-\lambda_n^2)}{\lambda_n\,\lambda_{n+1}^2},$$

$$\ln|L_{n,\,n+1}(\lambda_{n+1})| = \ln \prod_{k\ne n,\,k\ne n+1} \left|1-\frac{\lambda_{n+1}^2}{\lambda_k^2}\right| \;=\; \ln|L'(\lambda_{n+1})| - \ln\frac{2(\lambda_{n+1}^2-\lambda_n^2)}{\lambda_{n+1}\,\lambda_n^2}.$$

Обозначая

$$a_n = \ln\frac{2(\lambda_{n+1}^2-\lambda_n^2)}{\lambda_n^2\,\lambda_{n+1}^2}, \qquad l_n(r) = \gamma\,\omega(r) + \ln r + a_n, \tag{2.19}$$

и учитывая (2.18), получаем

$$\ln|L_{n,\,n+1}(\lambda_n)| > -\,l_n(\lambda_n), \qquad \ln|L_{n,\,n+1}(\lambda_{n+1})| > -\,l_n(\lambda_{n+1}). \qquad (2.20).$$

Так как $\gamma > 0$ и по условию (iii) функция $\omega(r)$ вогнута при $r \ge a$, то функция $-\,l_n(r)$ выпукла на отрезке $[\lambda_n,\,\lambda_{n+1}]$. В свою очередь, как показано в [97], функция $\ln|L_{n,\,n+1}(r)|$ вогнута на $[\lambda_n,\,\lambda_{n+1}]$. Поэтому неравенства (2.20) влекут

$$\ln|L_{n,\,n+1}(r)| > -\,l_n(r), \qquad r\in[\lambda_n,\,\lambda_{n+1}]. \tag{2.21}$$

На основании (2.21) оценим $L^*(r)$ снизу при $r\in[\lambda_n,\,\lambda_{n+1}]$. Для этого запишем

$$L^*(r) = \frac{|L(r)|}{d(r)} = |L_{n,\,n+1}(r)|\,\frac{(r^2-\lambda_n^2)\,(\lambda_{n+1}^2-r^2)}{d(r)\,\lambda_n^2\,\lambda_{n+1}^2}, \qquad r\in[\lambda_n,\,\lambda_{n+1}],$$

и оценим выражение

$$\frac{(r^2-\lambda_n^2)\,(\lambda_{n+1}^2-r^2)}{d(r)\,\lambda_n^2\,\lambda_{n+1}^2}.$$

Пусть вначале $r\in[\lambda_n,\,(\lambda_n+\lambda_{n+1})/2]$. Тогда $d(r)=r-\lambda_n$, и

$$\frac{(r^2-\lambda_n^2)\,(\lambda_{n+1}^2-r^2)}{d(r)\,\lambda_n^2\,\lambda_{n+1}^2} = \frac{(r+\lambda_n)\,(\lambda_{n+1}^2-r^2)}{\lambda_n^2\,\lambda_{n+1}^2} \ge \frac{2\lambda_n}{\lambda_n^2\,\lambda_{n+1}^2}\left(\lambda_{n+1}^2 - \frac{(\lambda_n+\lambda_{n+1})^2}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n\,\lambda_{n+1}^2}\,(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\,(\lambda_n+3\lambda_{n+1}) > \frac{\lambda_{n+1}^2-\lambda_n^2}{\lambda_n\,\lambda_{n+1}^2}.$$

Пусть теперь $r\in[(\lambda_n+\lambda_{n+1})/2,\,\lambda_{n+1}]$. Тогда $d(r)=\lambda_{n+1}-r$, и

$$\frac{(r^2-\lambda_n^2)\,(\lambda_{n+1}^2-r^2)}{d(r)\,\lambda_n^2\,\lambda_{n+1}^2} = \frac{(r^2-\lambda_n^2)\,(\lambda_{n+1}+r)}{d(r)\,\lambda_n^2\,\lambda_{n+1}^2}$$

$$\ge \frac{1}{\lambda_n^2\,\lambda_{n+1}^2}\left(\frac{(\lambda_n+\lambda_{n+1})^2}{4}-\lambda_n^2\right)\left(\lambda_{n+1}+\frac{\lambda_n+\lambda_{n+1}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8\lambda_n^2\,\lambda_{n+1}^2}\,(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\,(3\lambda_n+\lambda_{n+1})\,(\lambda_n+3\lambda_{n+1}) > \frac{\lambda_{n+1}^2-\lambda_n^2}{\lambda_n\,\lambda_{n+1}^2}.$$

Таким образом, при всех $r \in [\lambda_n,\, \lambda_{n+1}]$ имеем

$$\frac{(r^2-\lambda_n^2)\,(\lambda_{n+1}^2-r^2)}{d(r)\,\lambda_n^2\,\lambda_{n+1}^2} > \frac{\lambda_{n+1}^2-\lambda_n^2}{\lambda_n\,\lambda_{n+1}^2}.$$

В результате

$$L^*(r) > |L_{n,\,n+1}(r)|\;\frac{\lambda_{n+1}^2-\lambda_n^2}{\lambda_n\,\lambda_{n+1}^2}, \qquad r \in [\lambda_n,\, \lambda_{n+1}]. \tag{2.22}$$

Сочетая (2.21), (2.22), выводим для $r \in [\lambda_n,\, \lambda_{n+1}]$ неравенство

$$\ln L^*(r) > -\,l_n(r) + \ln \frac{\lambda_{n+1}^2-\lambda_n^2}{\lambda_n\,\lambda_{n+1}^2}.$$

Вспоминая обозначения (2.19), можем записать оценку

$$\ln \frac{1}{L^*(r)} < \gamma\,\omega(r) + \ln r + \ln \frac{2}{\lambda_n}, \qquad r \in [\lambda_n,\, \lambda_{n+1}],$$

справедливую при всех достаточно больших n. Следовательно,

$$\frac{1}{\omega(r)}\;\ln \frac{1}{L^*(r)} < \gamma + \frac{1}{\omega(r)}\;\ln \frac{2\,r}{a}, \qquad r \geq r_0.$$

Поскольку $\omega(r)$ удовлетворяет условию (2.15), то

$$\delta^*(\omega,\, \Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty}\;\frac{1}{\omega(r)}\ln \frac{1}{L^*(r)} \leq \gamma.$$

Но число $\gamma > \delta(\omega,\, \Lambda)$ выбиралось произвольно, откуда $\delta^*(\omega,\, \Lambda) \leq \delta(\omega,\, \Lambda)$. Итак, $\delta^*(\omega,\, \Lambda) = \delta(\omega,\, \Lambda)$, и доказательство завершено.

Отметим, что для «канонического» случая $\omega(r) = r$ предложение 2.2 дает результат А. Ю. Попова [97]. Мы воспользовались здесь модифицированной схемой рассуждений из [97], упростив при этом некоторые технические детали.

Приступим теперь к доказательству основных теорем первой главы.

§ 3. Доказательство теоремы 1.1

Итак, пусть Λ — последовательность вида (1.1) с конечной верхней плотностью (1.2). Построим каноническое произведение (1.4). Выберем весовую функцию $\omega(r)$, удовлетворяющую условиям теоремы 1.1, и определим величину $\delta(\omega,\Lambda)$ формулой (1.8). Предположим, что выполнено условие (1.11).

В отличие от стандартного индекса конденсации весовой индекс может оказаться строго отрицательным (см. пример 2.2 ; ср. с [97]). Другими словами, возможно, что $\delta(\omega,\Lambda) < 0$. Тогда из определения (1.8) следует соотношение

$$|L'(\lambda_n)| \geq e^{\varepsilon\,\omega(\lambda_n)}, \qquad n \geq n_0,$$

с некоторым $\varepsilon > 0$. Учитывая свойство (ii) весовой функции $\omega(r)$, получаем, что $|L'(\lambda_n)| \to \infty$ при $n \to \infty$. Но это по предложению 2.1 влечет измеримость последовательности Λ.

Сосредоточимся на случае $\delta(\omega, \Lambda) \geq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\omega(r)$ удовлетворяет условию (2.15). Действительно, если (2.15) не выполнено, заменим $\omega(r)$ новой функцией $\omega_0(r) = \omega(r) + \ln^2(er/a)$. Элементарный анализ показывает, что новая функция обладает теми же свойствами (i)–(iii) и (1.10), что и исходный вес $\omega(r)$. Условие

$$0 \leq \delta(\omega, \Lambda) < +\infty \tag{3.1}$$

также сохранится после замены $\omega(r)$ на $\omega_0(r)$. Чтобы убедиться в этом, запишем

$$\frac{1}{\omega_0(\lambda_n)} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} = \frac{\omega(\lambda_n)}{\omega_0(\lambda_n)} \cdot \frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}, \qquad \lambda_n \geq a, \tag{3.2}$$

и воспользуемся следующим простым фактом. Для любых двух последовательностей x_n, y_n, таких, что

$$0 \leq x_n \leq 1, \qquad y_n \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leq \varlimsup_{n\to\infty} y_n < +\infty,$$

справедливо соотношение

$$0 \leq \varlimsup_{n\to\infty} x_n y_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} y_n < +\infty. \tag{3.3}$$

Применим (3.3) к (3.2), полагая

$$x_n = \frac{\omega(\lambda_n)}{\omega_0(\lambda_n)} = \frac{\omega(\lambda_n)}{\omega(\lambda_n) + \ln^2(e\lambda_n/a)}, \qquad y_n = \frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}.$$

Учитывая определение весового индекса конденсации, получим

$$0 \leq \delta(\omega_0, \Lambda) \leq \delta(\omega, \Lambda) < +\infty.$$

Итак, при замене $\omega(r)$ на $\omega_0(r)$ все предположения теоремы 1.1 сохранятся. Поэтому мы вправе продолжить рассуждения, считая (2.15), (3.1) выполненными.

Зададим характеристику $\delta^*(\omega, \Lambda)$ формулой (2.12). Согласно предложению 2.2 величина $\delta^*(\omega, \Lambda)$ совпадает с весовым индексом конденсации (1.8), т. е. справедливо равенство (2.17). Особо подчеркнем, что при выводе (нетривиального) равенства (2.17) из предложения 2.2 существенно использовалась вогнутость функции $\omega(r)$.

Выберем теперь $\varepsilon \in (0, \sigma)$, где $\sigma > 0$ — экспоненциальный тип канонического произведения (1.4). Ясно, что

$$\sigma = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln L(ir)}{r}, \tag{3.4}$$

поскольку максимум модуля функции $L(\lambda)$ на окружности $|\lambda| = r$ достигается при $\lambda = ir$ и равен $L(ir)$.

Из определения (2.12) и равенства (2.17) следует оценка

$$|L(r)| \geq d(r) \exp\left\{-(\delta(\omega,\Lambda)+\varepsilon)\,\omega(r)\right\}, \tag{3.5}$$

справедливая при $r > r_0(\varepsilon)$. Введем вспомогательную функцию

$$\omega_\varepsilon(r) = (\delta(\omega,\Lambda)+2\varepsilon)\,\omega(r).$$

Рассмотрим последовательность положительных чисел $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такую, что

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > \ldots\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \sigma - \varepsilon. \tag{3.6}$$

Составим бесконечное произведение

$$F_\varepsilon(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \cos(\varepsilon_n \lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.7}$$

Функции вида (3.7) активно используются в различных вопросах анализа, начиная с работ А. Ингама [156] и Н. Левинсона [161]. Как известно [163], [105; § 3.3], формула (3.7) корректно определяет четную целую функцию $F_\varepsilon(\lambda)$ экспоненциального типа $\leq \sigma - \varepsilon$, причем условия (i), (ii), (1.10) позволяют подобрать последовательность (3.6) так, чтобы выполнялась оценка

$$|F_\varepsilon(r)| \leq \exp\left(-\omega_\varepsilon(r)\right) = \exp\left\{-(\delta(\omega,\Lambda)+2\varepsilon)\,\omega(r)\right\}, \qquad r > r_1(\varepsilon). \tag{3.8}$$

Функция $F_\varepsilon(\lambda)$ положительна на мнимой оси и обладает свойствами

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln F_\varepsilon(ir)}{r} \leq \sigma - \varepsilon, \qquad h_{F_\varepsilon}(\theta) \leq (\sigma-\varepsilon)\,|\sin\theta|.$$

Покажем, что существует обычный предел

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln F_\varepsilon(ir)}{r} = \sigma - \varepsilon. \tag{3.9}$$

Действительно, при любых $r > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$F_\varepsilon(ir) = \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch}(\varepsilon_n r) \geq \prod_{n=1}^{m} \operatorname{ch}(\varepsilon_n r).$$

Поскольку $\ln\operatorname{ch}(\varepsilon_n r) > \varepsilon_n r - \ln 2$, то

$$\frac{\ln F_\varepsilon(ir)}{r} \geq \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{m} \ln\operatorname{ch}(\varepsilon_n r) > \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n - \frac{m\ln 2}{r}.$$

Тем самым,

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln F_\varepsilon(ir)}{r} \geq \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n$$

для любого $m \in \mathbb{N}$. Но тогда

$$\underline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{\ln F_\varepsilon(ir)}{r} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \sigma - \varepsilon \geq \overline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{\ln F_\varepsilon(ir)}{r}.$$

Соотношение (3.9) известно, но не всегда отмечается явно, поэтому здесь приведено короткое обоснование. Таким образом, экспоненциальный тип функции (3.7) в точности равен $\sigma-\varepsilon$, и его можно вычислить через обычный предел (3.9) по мнимой оси. Соответственно для индикатора справедливо равенство $h_{F_\varepsilon}(\theta) = (\sigma-\varepsilon)\,|\sin\theta|$. Учитывая оценку (1.5), получаем соотношение

$$h_{F_\varepsilon}(\theta) \leq h_L(\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \tag{3.10}$$

Функция $F_\varepsilon(\lambda)$ играет ключевую роль в последующих рассуждениях. Условия (3.8)–(3.10) считаем выполненными.

Покажем, что функцию $L(\lambda)$ можно оценить через $F_\varepsilon(\lambda)$ снизу на мнимой оси. Определим мероморфную функцию $F_\varepsilon(\lambda)/L(\lambda)$ и обоснуем ее разложение в ряд простых дробей:

$$\frac{F_\varepsilon(\lambda)}{L(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_\varepsilon(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\,\frac{2\lambda_n}{\lambda^2-\lambda_n^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \pm\Lambda,$$

точнее, рассмотрим разность

$$\Phi_\varepsilon(\lambda) = \frac{F_\varepsilon(\lambda)}{L(\lambda)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_\varepsilon(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\,\frac{2\lambda_n}{\lambda^2-\lambda_n^2} \tag{3.11}$$

и установим, что $\Phi_\varepsilon(\lambda) \equiv 0$. Поставленная задача будет решена в несколько этапов.

Дадим вначале оценки, нужные для эффективной работы с рядом, фигурирующим в (3.11). Из соотношения (3.8) и определения (1.8) следует, что при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$|F_\varepsilon(\lambda_n)| \leq \exp\left(-\omega_\varepsilon(\lambda_n)\right) = \exp\left\{-(\delta(\omega,\Lambda)+2\varepsilon)\,\omega(\lambda_n)\right\},$$

$$\frac{1}{|L'(\lambda_n)|} \leq \exp\left\{(\delta(\omega,\Lambda)+\varepsilon)\,\omega(\lambda_n)\right\}.$$

Условие (2.15) позволяет для любого $p>0$ подобрать номер, начиная с которого

$$\omega(\lambda_n) \geq \frac{p}{\varepsilon}\,\ln\lambda_n.$$

Поэтому

$$\frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|} \leq e^{-\varepsilon\,\omega(\lambda_n)} \leq \frac{1}{\lambda_n^p}, \qquad n \geq N_p. \tag{3.12}$$

Кроме того, начиная с некоторого номера, выполняется оценка (2.4):

$$\frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{2\,\overline{\Delta}(\Lambda)}{n}.$$

Покажем теперь, что ряд, фигурирующий в (3.11), сходится равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\pm\Lambda$. Возьмем произвольный компакт K, не содержащий точек из $\pm\Lambda$, и пусть $d>0$ — расстояние от K до $\pm\Lambda$. Используя оценку (3.12) с $p=3$, а затем оценку (2.4), получаем для всех $\lambda\in K$ и достаточно больших n соотношение

$$\frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|}\,\frac{\lambda_n}{|\lambda^2-\lambda_n^2|}\;\le\;\frac{1}{\lambda_n^3}\cdot\frac{\lambda_n}{d^2}\;=\;\frac{1}{(d\lambda_n)^2}\;\le\;\frac{A}{n^2},\qquad A\equiv\left(\frac{2\,\overline{\Delta}(\Lambda)}{d}\right)^2.$$

Такая оценка гарантирует равномерную сходимость на K ряда, фигурирующего в (3.11). Тем самым, функция $\Phi_\varepsilon(\lambda)$, определенная формулой (3.11), является аналитической в области $\mathbb{C}\setminus\pm\Lambda$, причем особенности в точках $\pm\lambda_n$ будут не выше полюсов первого порядка. Но вычеты в этих точках равны нулю. Поэтому $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ есть целая функция переменной λ.

Покажем, что $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ является функцией экспоненциального типа. Это потребует некоторых усилий. Сначала положим

$$\Psi_\varepsilon(\lambda)=L(\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_\varepsilon(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\,\frac{2\lambda_n}{\lambda^2-\lambda_n^2}\;=\;2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_\varepsilon(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\,\frac{\lambda_n}{\lambda^2-\lambda_n^2}\,L(\lambda),\tag{3.13}$$

учитывая связь

$$\Phi_\varepsilon(\lambda)=\frac{F_\varepsilon(\lambda)-\Psi_\varepsilon(\lambda)}{L(\lambda)},\qquad \Psi_\varepsilon(\lambda)=F_\varepsilon(\lambda)-L(\lambda)\,\Phi_\varepsilon(\lambda),\tag{3.14}$$

из которой ясно, что функция $\Psi_\varepsilon(\lambda)$ тоже является целой. Как при доказательстве предложения 1.1, рассмотрим функции

$$L_n(\lambda)=\prod_{k\neq n}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right),\qquad n\in\mathbb{N},$$

удовлетворяющие при всех $n\in\mathbb{N}$ оценке (2.8):

$$|L_n(\lambda)|\;\le B_0\,e^{\sigma_0|\lambda|},\qquad \lambda\in\mathbb{C},$$

с произвольным $\sigma_0>\sigma$ и $B_0=B_0(\sigma_0)>0$. Поскольку

$$\frac{\lambda_n}{\lambda^2-\lambda_n^2}\,L(\lambda)=\,-\,\frac{L_n(\lambda)}{\lambda_n},$$

то от (3.13) можно перейти к записи

$$\Psi_\varepsilon(\lambda)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_\varepsilon(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\,\frac{L_n(\lambda)}{\lambda_n},\qquad \lambda\in\mathbb{C}.\tag{3.15}$$

Применяя оценку (3.12) с $p=1$, а затем оценку (2.4), запишем для больших n соотношение

$$\frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|}\,\frac{1}{\lambda_n}\;\le\;\frac{1}{\lambda_n^2}\;\le\;\frac{(2\,\overline{\Delta}(\Lambda))^2}{n^2}.$$

Мажорируя таким образом в (3.15) и учитывая (2.8), заключаем, что

$$|\Psi_\varepsilon(\lambda)| \le B\, e^{\sigma_0|\lambda|}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

с некоторой константой $B > 0$. Следовательно, целая функция $\Psi_\varepsilon(\lambda)$ имеет экспоненциальный тип. Оценим ее индикатор.

Введем множество кругов

$$U_n = \left\{\lambda \in \mathbb{C}:\ |\lambda - \lambda_n| < \frac{1}{n^2}\right\}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n. \tag{3.16}$$

Если $\lambda \notin \pm U$, то

$$\frac{1}{|\lambda^2 - \lambda_n^2|} = \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|\,|\lambda + \lambda_n|} \le n^4, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

Поэтому при $\lambda \notin \pm U$ для функции $\Psi_\varepsilon(\lambda)$, определенной формулой (3.13), выполнено соотношение

$$|\Psi_\varepsilon(\lambda)| \le 2\,|L(\lambda)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|}\, \lambda_n n^4.$$

Числовой ряд сходится. Действительно, используя оценку (3.12) с $p = 7$, а затем оценку (2.4), получаем при достаточно больших n, что

$$\frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|}\, \lambda_n n^4 \le \frac{1}{\lambda_n^7} \cdot \lambda_n n^4 = \frac{n^4}{\lambda_n^6} \le \frac{(2\,\overline{\Delta}(\Lambda))^6}{n^2}. \tag{3.18}$$

В итоге

$$|\Psi_\varepsilon(\lambda)| \le C\,|L(\lambda)|, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \pm U, \tag{3.19}$$

с некоторой константой $C > 0$. Но фиксированный луч $\arg\lambda = \theta$, $\theta \ne k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, пересекает не более чем конечное число кругов $\pm U_n$. Принимая во внимание непрерывность индикаторов, выводим из (3.19) общую оценку

$$h_{\Psi_\varepsilon}(\theta) \le h_L(\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{3.20}$$

Вернемся теперь к функции $\Phi_\varepsilon(\lambda)$.

Рассмотрим соотношения (3.14). Фигурирующие там целые функции $L(\lambda)$, $F_\varepsilon(\lambda)$, $\Psi_\varepsilon(\lambda)$ имеют экспоненциальный тип. Поэтому целая функция $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ тоже имеет экспоненциальный тип (см. [72; гл. I, § 9]).

Оценим индикатор функции $\Phi_\varepsilon(\lambda)$, основываясь на информации об индикаторах функций $L(\lambda)$, $F_\varepsilon(\lambda)$, $\Psi_\varepsilon(\lambda)$. Нужный результат будет извлечен из второго соотношения (3.14), но для этого придется установить, что $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ есть функция вполне регулярного роста [72; гл. III, § 4]. С этой целью покажем, что функция $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ ограничена на вещественной оси.

Воспользуемся идеей, восходящей к Б. Я. Левину. Следуя [74], назовем множество $S \subset \mathbb{R}$ *относительно плотным по мере* на $\mathbb{R}$, если существуют такие положительные числа l и δ, что для любого отрезка длины l на $\mathbb{R}$ лебегова мера пересечения S с этим отрезком не меньше, чем δ. Положим $S = \mathbb{R} \setminus \pm U$, где множество U определено в (3.16). Поскольку сумма диаметров кругов $\pm U_n$ конечна и равна $\sum_{n=1}^{\infty}(4/n^2) = 2\pi^2/3$, то S будет относительно плотным по мере на $\mathbb{R}$, например, со значениями $l = \pi^2$ и $\delta = \pi^2/3$.

Дадим оценку $|\Phi_\varepsilon(\lambda)|$ для $\lambda \in S = \mathbb{R} \setminus \pm U$. Из определения (3.11) ясно, что функция $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ является четной, а множество $S = \mathbb{R} \setminus \pm U$ симметрично. Используя специфику множества U, нетрудно убедиться, что

$$\mathbb{R}_+ \cap (\mathbb{R} \setminus \pm U) = \mathbb{R}_+ \setminus U, \tag{3.21}$$

т. е. достаточно брать $\lambda = r \in \mathbb{R}_+ \setminus U$. Согласно (3.14) имеем

$$\Phi_\varepsilon(r) = \frac{F_\varepsilon(r)}{L(r)} - \frac{\Psi_\varepsilon(r)}{L(r)}, \qquad r \in \mathbb{R}_+ \setminus \Lambda. \tag{3.22}$$

Соотношение (3.19) с учетом (3.21) гарантирует, что слагаемое $\Psi_\varepsilon(r)/L(r)$ ограничено в $\mathbb{R}_+ \setminus U$. Проверим, что величина $F_\varepsilon(r)/L(r)$ тоже ограничена в $\mathbb{R}_+ \setminus U$.

Если значение r велико, то условие (2.15) обеспечивает оценку

$$\omega(r) \geq \frac{3}{\varepsilon} \ln r.$$

Вспоминая (3.5) и (3.8), запишем неравенство

$$\frac{|F_\varepsilon(r)|}{|L(r)|} \leq \frac{1}{d(r)}\, e^{-\varepsilon\,\omega(r)} \leq \frac{1}{d(r)\, r^3}, \tag{3.23}$$

верное при достаточно больших $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \Lambda \supset \mathbb{R}_+ \setminus U$. Оценим величину $1/d(r)$ на множестве $\mathbb{R}_+ \setminus U$. Напомним, что

$$d(r) = \min_{n \in \mathbb{N}} |r - \lambda_n|.$$

С каждым достаточно большим $r \in \mathbb{R}_+ \setminus U$ свяжем номер $n = n(r)$ так, чтобы $\lambda_n < r < \lambda_{n+1}$, причем будем выбирать r настолько большим, чтобы номера $n(r)$ заведомо превышали номер, начиная с которого применима оценка (2.4). По определению функции $d(r)$ возможны две ситуации: либо $d(r) = r - \lambda_n$, либо $d(r) = \lambda_{n+1} - r$.

Допустим, что $d(r) = r - \lambda_n$. Поскольку точка r не попадает в круг U_n, то $r - \lambda_n \geq 1/n^2$ (см. (3.16)). Но тогда из (2.4) следует, что

$$\frac{1}{d(r)} = \frac{1}{r - \lambda_n} \leq n^2 \leq \left(2\,\overline{\Delta}(\Lambda)\,\lambda_n\right)^2 < 4\left(\overline{\Delta}(\Lambda)\right)^2 r^2.$$

Допустим теперь, что $d(r) = \lambda_{n+1} - r$. Тогда $\lambda_{n+1} - r \leq r - \lambda_n < r$, откуда $\lambda_{n+1} < 2r$. Поскольку точка r не попадает в круг U_{n+1}, то $\lambda_{n+1} - r \geq 1/(n+1)^2$. Вновь используя (2.4), получаем

$$\frac{1}{d(r)} = \frac{1}{\lambda_{n+1} - r} \leq (n+1)^2 \leq \left(2\,\overline{\Delta}(\Lambda)\,\lambda_{n+1}\right)^2 < \left(4\,\overline{\Delta}(\Lambda)\,r\right)^2 = 16\left(\overline{\Delta}(\Lambda)\right)^2 r^2.$$

Совмещая найденные оценки, можем утверждать, что

$$\frac{1}{d(r)} = O(r^2), \qquad r \in \mathbb{R}_+ \setminus U, \qquad r \to +\infty.$$

Воспользовавшись этим в (3.23), заключаем, что

$$\frac{|F_\varepsilon(r)|}{|L(r)|} \to 0, \qquad r \in \mathbb{R}_+ \setminus U, \qquad r \to +\infty. \tag{3.24}$$

Тем самым, величина $F_\varepsilon(r)/L(r)$ ограничена в $\mathbb{R}_+ \setminus U$.

Итак, оба слагаемых в формуле (3.22) ограничены в $\mathbb{R}_+ \setminus U$. Но тогда модуль четной функции $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ ограничен на множестве $S = \mathbb{R} \setminus \pm U$, относительно плотном по мере на $\mathbb{R}$. Поскольку $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ есть целая функция экспоненциального типа, то согласно утверждению Б. Я. Левина (см. [74; основная лемма]) величина $|\Phi_\varepsilon(\lambda)|$ ограничена на вещественной прямой[2]. Последнее, в свою очередь, гарантирует, что $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ есть целая функция вполне регулярного роста [72; гл. V, § 4, теорема 11]. Теперь можно оценить индикатор функции $\Phi_\varepsilon(\lambda)$.

На основании второго соотношения (3.14) имеем

$$h_{L\Phi_\varepsilon}(\theta) = h_{F_\varepsilon - \Psi_\varepsilon}(\theta) \le \max\left\{h_{F_\varepsilon}(\theta),\, h_{\Psi_\varepsilon}(\theta)\right\},$$

причем $\max\left\{h_{F_\varepsilon}(\theta),\, h_{\Psi_\varepsilon}(\theta)\right\} \le h_L(\theta)$ в силу оценок (3.10) и (3.20). Поскольку $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ есть целая функция вполне регулярного роста, то

$$h_{L\Phi_\varepsilon}(\theta) = h_L(\theta) + h_{\Phi_\varepsilon}(\theta).$$

В результате $h_L(\theta) + h_{\Phi_\varepsilon}(\theta) \le h_L(\theta)$ и $h_{\Phi_\varepsilon}(\theta) \le 0$ при всех $0 \le \theta \le 2\pi$. Отсюда следует, что $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ есть целая функция нулевого экспоненциального типа. Но, как уже установлено, величина $|\Phi_\varepsilon(\lambda)|$ ограничена на вещественной прямой. По принципу Фрагмена–Линделефа функция $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ будет тождественной константой.

Покажем, что эта константа равна нулю, т. е. что $\Phi_\varepsilon(\lambda) \equiv 0$. Достаточно убедиться в справедливости соотношения

$$\Phi_\varepsilon(r) \to 0, \qquad r \in \mathbb{R}_+ \setminus U, \qquad r \to +\infty, \tag{3.25}$$

где U — множество кругов из (3.16). По определению (3.11) имеем

$$\Phi_\varepsilon(r) = \frac{F_\varepsilon(r)}{L(r)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_\varepsilon(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\, \frac{2\lambda_n}{r^2 - \lambda_n^2}.$$

Здесь согласно (3.24) первое слагаемое $F_\varepsilon(r)/L(r)$ стремится к нулю, когда $r \to +\infty$ по множеству $\mathbb{R}_+ \setminus U$. Проверим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_\varepsilon(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\, \frac{2\lambda_n}{r^2 - \lambda_n^2} \to 0, \qquad r \in \mathbb{R}_+ \setminus U, \qquad r \to +\infty. \tag{3.26}$$

[2]В работе [74] содержится формулировка нужного утверждения и коротко изложена история вопроса. Сам результат был получен Б. Я. Левиным в начале 1970-х гг., но его полное доказательство опубликовано лишь в 1984 г. в труднодоступном препринте ФТИНТ АН УССР. Более общее утверждение на основе исходной идеи Б. Я. Левина доказано в [44; теорема 3] для полисубгармонических функций конечной степени; см. также [80].

Используя определение кругов (3.16) и рассуждая как при выводе (3.17), (3.18), получаем для всех $r \in \mathbb{R}_+ \setminus U$ и достаточно больших n соотношение

$$\frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|}\,\frac{\lambda_n}{|r^2-\lambda_n^2|} \le \frac{(2\,\overline{\Delta}(\Lambda))^6}{n^2}. \tag{3.27}$$

Возьмем произвольное малое число $\eta > 0$. Основываясь на (3.27), подберем номер N таким, чтобы для всех $r \in \mathbb{R}_+ \setminus U$ выполнялась оценка

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|}\,\frac{2\lambda_n}{|r^2-\lambda_n^2|} < \frac{\eta}{2}.$$

Для выбранного N при достаточно больших r можно утверждать, что

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|}\,\frac{2\lambda_n}{|r^2-\lambda_n^2|} < \frac{\eta}{2}.$$

Итак, если $r \in \mathbb{R}_+ \setminus U$ и достаточно велико, то

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_\varepsilon(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\,\frac{2\lambda_n}{r^2-\lambda_n^2}\right| \le \sum_{n=1}^{N} \frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|}\,\frac{2\lambda_n}{|r^2-\lambda_n^2|} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|}\,\frac{2\lambda_n}{|r^2-\lambda_n^2|} < \eta.$$

Отсюда прямо следует (3.26). В итоге устанавливаем (3.25) и то, что $\Phi_\varepsilon(\lambda) \equiv 0$.

Из полученного соотношения $\Phi_\varepsilon(\lambda) \equiv 0$ уже нетрудно вывести требуемую оценку снизу для $L(\lambda)$. Действительно, подставляя $\Phi_\varepsilon(\lambda) \equiv 0$ в (3.14), приходим к тождеству $\Psi_\varepsilon(\lambda) \equiv F_\varepsilon(\lambda)$. Поэтому (3.19) переписывается в виде

$$|F_\varepsilon(\lambda)| \le C\,|L(\lambda)|, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \pm U.$$

Отсюда с учетом расположения кругов (3.16) получаем оценку на мнимой оси:

$$L(ir) \ge D\,F_\varepsilon(ir),$$

заведомо справедливую при $r \ge 1$ с константой $D = 1/C > 0$. Используя полученную оценку и учитывая существование предела (3.9), имеем

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln L(ir)}{r} \ge \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln F_\varepsilon(ir)}{r} = \sigma - \varepsilon.$$

Поскольку число $\varepsilon \in (0,\,\sigma)$ выбиралось произвольно, то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln L(ir)}{r} \ge \sigma = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln L(ir)}{r}.$$

Здесь последнее равенство записано на основании (3.4). Итак, существует обычный предел

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln L(ir)}{r} = \sigma. \tag{3.28}$$

Для завершения доказательства воспользуемся следующей тауберовой теоремой Валирона.

Теорема Валирона (см., например, [141; теорема 4.2.1]) гласит: *если целая функция $f(z)$ порядка $\rho \in (0,\,1)$ с отрицательными нулями $(-\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$,*

$$0<\mu_1\le\mu_2\le\ldots\le\mu_n\le\ldots\;, \qquad \lim_{n\to\infty}\mu_n=+\infty,$$

такова, что $f(0)=1$ и существует предел

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln f(r)}{r^\rho}\;=\;\frac{\pi}{\sin\pi\rho},$$

то существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\mu_n^\rho}=1.$$

Построим по последовательности $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ функцию $f(z)$, полагая

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{\pi}{\sigma\lambda_n}\right)^2 z\right), \qquad z\in\mathbb{C}.$$

В силу (1.1), (1.2) последняя формула корректно определяет целую функцию $f(z)$ порядка $\rho=1/2$ с отрицательными нулями $-\mu_n$, где

$$\mu_n=\left(\frac{\sigma\lambda_n}{\pi}\right)^2, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

При этом $f(0)=1$ и

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln f(r)}{\sqrt{r}}=\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}\,\ln\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{\pi}{\sigma\lambda_n}\right)^2 r\right)=\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln L\left(i\pi\sqrt{r}/\sigma\right)}{\sqrt{r}}=\pi$$

согласно (1.4), (3.28). Применяя теорему Валирона, получаем

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\mu_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{\sigma\lambda_n},$$

т. е. Λ — измеримая последовательность с плотностью $\Delta(\Lambda)=\sigma/\pi$. Теорема 1.1 доказана.

§ 4. Формула для вычисления весового индекса конденсации

Получим вначале общую формулу для вычисления весового индекса конденсации, представляющую определенный самостоятельный интерес. Для произвольной последовательности Λ вида (1.1) введем *считающую функцию* $n_\Lambda(r)$ по правилу

$$n_\Lambda(r)=\sum_{\lambda_n\le r}1, \qquad r>0.$$

Обозначим при фиксированном $r > 0$ через $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\nu_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ занумерованную в порядке возрастания последовательность

$$\Lambda_r = \{\lambda_n : n \neq n_\Lambda(r),\, n \neq n_\Lambda(r) + 1\}$$

и положим

$$n_{\Lambda_r}(r) = \sum_{\nu_n \le r} 1, \qquad \varphi_r(r) = \frac{n_{\Lambda_r}(r)}{r}.$$

Дадим важное интегральное представление для величины (1.8).

Лемма 4.1. *Пусть функция* $\omega(r)$ *со свойствами* (i)–(iii) *удовлетворяет условию* (2.15). *Пусть* Λ — *последовательность вида* (1.1), *имеющая конечную верхнюю плотность* (1.2) *и неотрицательный индекс* ω*-конденсации* (1.8). *Тогда справедлива формула*

$$\delta(\omega, \Lambda) = 2 \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{r}{\omega(r)} \int\limits_0^\infty \frac{\varphi_r(rt) - \varphi_r(r)}{t^2 - 1}\, dt. \tag{4.1}$$

Доказательство. Пусть для функции $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii) и последовательности Λ вида (1.1) выполнены условия (2.15), (2.16), (1.2). Тогда имеет место равенство (2.17). Определим при каждом $r > 0$ по указанному выше правилу последовательность $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\nu_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ и рассмотрим функцию

$$G(r) = \prod_{n=1}^\infty \left|1 - \frac{r^2}{\nu_n^2}\right|, \qquad r > 0.$$

В работе [94] А. Ю. Попов показал, что

$$\ln L^*(r) = \ln G(r) + O(\ln r), \qquad r \to +\infty,$$

и вывел представление

$$-\ln G(r) = 2\, r \int\limits_0^\infty \frac{\varphi_r(rt) - \varphi_r(r)}{t^2 - 1}\, dt.$$

В силу указанных соотношений с учетом условия (2.15) для характеристики (2.12) имеем

$$\delta^*(\omega, \Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\omega(r)} \ln \frac{1}{L^*(r)} = \varlimsup_{r\to+\infty} \left\{ \frac{1}{\omega(r)} \ln \frac{1}{G(r)} + O\left(\frac{\ln r}{\omega(r)}\right) \right\}$$

$$= \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\omega(r)} \ln \frac{1}{G(r)} = 2 \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{r}{\omega(r)} \int\limits_0^\infty \frac{\varphi_r(rt) - \varphi_r(r)}{t^2 - 1}\, dt.$$

По предложению 2.2 справедливо равенство (2.17), вследствие чего получаем формулу (4.1). Лемма 4.1 доказана.

Простейшая весовая функция $\omega(r) = r$ обладает свойствами (i)–(iii) и удовлетворяет условию (2.15), причем $\delta(\omega, \Lambda) = \delta(\Lambda) \geq 0$ для всякой последовательности Λ вида (1.1) с конечной верхней плотностью (1.2). Поэтому для любой такой последовательности из (4.1) получаем доказанную А. Ю. Поповым (в [94] при условии (1.7), а в диссертации [97] — в общей ситуации) формулу для вычисления стандартного индекса конденсации:

$$\delta(\Lambda) = 2 \varlimsup_{r \to +\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi_r(rt) - \varphi_r(r)}{t^2 - 1}\, dt. \tag{4.2}$$

При работе с представлением (4.1) возникают технические трудности, вызванные переходом от последовательности Λ к «скользящей» последовательности Λ_r. Поскольку вычислять (или оценивать) весовой индекс конденсации удобнее в исходных терминах, мы дадим подходящую версию формулы (4.1) при естественных ограничениях на лакунарность последовательности Λ и правильность изменения функции $\omega(r)$.

Понадобится следующее техническое утверждение.

Лемма 4.2. *Пусть функция $\omega(r)$ правильно меняется на бесконечности и удовлетворяет условию*

$$\omega(r) = O(r), \qquad r \to +\infty, \tag{4.3}$$

а последовательность Λ вида (1.1) такова, что

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = o\left(\omega(\lambda_n)\right), \qquad n \to \infty. \tag{4.4}$$

Тогда справедливы соотношения

$$\lambda_{n+1} \sim \lambda_n, \qquad n \to \infty, \tag{4.5}$$

$$\lambda_{n+2} - \lambda_{n-1} = o(\omega(\lambda_n)), \qquad n \to \infty. \tag{4.6}$$

Доказательство. Из соотношений (4.3), (4.4) находим

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1 + o\left(\frac{\omega(\lambda_n)}{\lambda_n}\right) = 1 + o(1), \qquad n \to \infty,$$

что дает (4.5). Используя равномерный характер соотношения (1.12), определяющего правильное изменение функции $\omega(r)$, имеем

$$\omega(\lambda_{n+1}) = \omega\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\,\lambda_n\right) = \omega\left((1 + o(1))\lambda_n\right) = O(\omega(\lambda_n)), \qquad n \to \infty,$$

$$\omega(\lambda_{n-1}) = \omega\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\,\lambda_n\right) = \omega\left((1 + o(1))\lambda_n\right) = O(\omega(\lambda_n)), \qquad n \to \infty.$$

Отсюда легко получаем (4.6), записав

$$\begin{aligned}\lambda_{n+2} - \lambda_{n-1} &= (\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}) + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \\ &= o(\omega(\lambda_{n+1})) + o(\omega(\lambda_n)) + o(\omega(\lambda_{n-1})) = o(\omega(\lambda_n)), \qquad n \to \infty.\end{aligned}$$

Лемма 4.2 доказана.

Отметим, что всякая функция $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii) удовлетворяет условию (4.3) и даже более сильному условию существования предела

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\omega(r)}{r}=k\ge 0. \tag{4.7}$$

Дадим теперь вариант формулы (4.1), применимый для вычисления $\delta(\omega,\Lambda)$ с правильно меняющимся весом $\omega(r)$. По считающей функции $n_\Lambda(r)$ последовательности $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ определим функцию $\varphi(r)=n_\Lambda(r)/r$ и введем сокращенное обозначение $I_{n,r}$ для интервалов вида $(\lambda_{n-1}/r,\ \lambda_{n+2}/r)$, $r>0$, $n\ge 2$.

Следующая лемма является основным результатом текущего параграфа.

Лемма 4.3. *Пусть функция $\omega(r)$ со свойствами* (i)–(iii) *удовлетворяет условию* (2.15) *и правильно меняется на бесконечности. Пусть Λ — последовательность вида* (1.1)*, имеющая конечную верхнюю плотностью* (1.2)*, неотрицательный индекс ω-конденсации* (1.8) *и удовлетворяющая условиям* (1.7)*,* (4.4)*. Тогда справедлива формула*

$$\delta(\omega,\Lambda)=2\,\varlimsup_{n\to\infty}\sup_{r\in[\lambda_n,\,\lambda_{n+1})}\frac{r}{\omega(r)}\int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus I_{n,r}}\frac{\varphi(rt)-\varphi(r)}{t^2-1}\,dt. \tag{4.8}$$

Доказательство. В условиях леммы 4.3 для индекса ω-конденсации последовательности Λ справедливо представление (4.1), от которого и будем отталкиваться. Преобразуем интеграл в формуле (4.1), используя связь между функциями $\varphi_r(rt)$ и $\varphi(rt)$, порожденными последовательностями Λ_r и Λ соответственно.

Пусть $n\ge 2$ и $r\in[\lambda_n,\lambda_{n+1})$. Тогда по определению последовательности Λ_r справедливо соотношение

$$n_{\Lambda_r}(rt)=\begin{cases} n_\Lambda(rt), & 0\le t<\dfrac{\lambda_{n-1}}{r},\\[2ex] n-1, & \dfrac{\lambda_{n-1}}{r}\le t<\dfrac{\lambda_{n+2}}{r},\\[2ex] n_\Lambda(rt)-2, & t\ge\dfrac{\lambda_{n+2}}{r}.\end{cases}$$

Поэтому

$$\varphi_r(rt)=\begin{cases} \varphi(rt), & 0\le t<\dfrac{\lambda_{n-1}}{r},\\[2ex] \dfrac{n-1}{rt}, & \dfrac{\lambda_{n-1}}{r}\le t<\dfrac{\lambda_{n+2}}{r},\\[2ex] \varphi(rt)-\dfrac{2}{rt}, & t\ge\dfrac{\lambda_{n+2}}{r}.\end{cases}$$

В частности, $\varphi_r(r) = (n-1)/r$, так как $\lambda_{n-1}/r \le \lambda_{n-1}/\lambda_n < 1 < \lambda_{n+1}/r$. Кроме того, $\varphi(r) = n/r$. Следовательно, можно записать

$$\frac{\varphi_r(rt) - \varphi_r(r)}{t^2-1} = \begin{cases} \dfrac{\varphi(rt) - \frac{n-1}{r}}{t^2-1}, & 0 \le t < \dfrac{\lambda_{n-1}}{r}, \\[2ex] -\dfrac{n-1}{r} \cdot \dfrac{1}{t(t+1)}, & \dfrac{\lambda_{n-1}}{r} \le t < \dfrac{\lambda_{n+2}}{r}, \\[2ex] \dfrac{\varphi(rt) - \frac{2}{rt} - \frac{n-1}{r}}{t^2-1}, & t \ge \dfrac{\lambda_{n+2}}{r} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2-1} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{1}{t^2-1}, & 0 \le t < \dfrac{\lambda_{n-1}}{r}, \\[2ex] \left(\dfrac{1}{r} - \varphi(r)\right) \dfrac{1}{t(t+1)}, & \dfrac{\lambda_{n-1}}{r} \le t < \dfrac{\lambda_{n+2}}{r}, \\[2ex] \dfrac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2-1} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{1 - \frac{2}{t}}{t^2-1}, & t \ge \dfrac{\lambda_{n+2}}{r}. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\int\limits_0^\infty \frac{\varphi_r(rt) - \varphi_r(r)}{t^2-1}\, dt = \int\limits_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2-1}\, dt$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{dt}{t^2-1} + \int\limits_{I_{n,r}} \frac{dt}{t(t+1)} - \int\limits_{\lambda_{n+2}/r}^{\infty} \frac{2\, dt}{t(t^2-1)} \right) - \varphi(r) \int\limits_{I_{n,r}} \frac{dt}{t(t+1)}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2-1}\, dt$$

$$+ \frac{1}{2r} \left(\ln \frac{(r-\lambda_{n-1})(r+\lambda_{n+2})}{(r+\lambda_{n-1})(\lambda_{n+2}-r)} + 2 \ln \frac{\lambda_{n+2}(r+\lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}(r+\lambda_{n+2})} - 2 \ln \frac{\lambda_{n+2}^2}{\lambda_{n+2}^2 - r^2} \right)$$

$$- \varphi(r) \ln \frac{\lambda_{n+2}(r+\lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}(r+\lambda_{n+2})} = \int\limits_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2-1}\, dt$$

$$+ \frac{1}{2r} \ln \frac{(r^2 - \lambda_{n-1}^2)(\lambda_{n+2}^2 - r^2)}{(\lambda_{n-1}\lambda_{n+2})^2} - \varphi(r) \ln \frac{\lambda_{n+2}(r+\lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}(r+\lambda_{n+2})}.$$

Таким образом, при всех $r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$, $n \ge 2$, справедливо соотношение

$$\int\limits_0^\infty \frac{\varphi_r(rt) - \varphi_r(r)}{t^2-1}\, dt = \int\limits_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2-1}\, dt + \frac{\ln A(r)}{2r} - \varphi(r) \ln B(r). \tag{4.9}$$

Здесь функции $A(r) = A_\Lambda(r)$ и $B(r) = B_\Lambda(r)$ определены для $r \ge \lambda_2$ так, что их сужения на промежутки $[\lambda_n, \lambda_{n+1})$, $n \ge 2$, задаются соответственно формулами

$$A(r) = \frac{(r^2 - \lambda_{n-1}^2)\,(\lambda_{n+2}^2 - r^2)}{(\lambda_{n-1}\lambda_{n+2})^2}, \qquad B(r) = \frac{\lambda_{n+2}\,(r + \lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}\,(r + \lambda_{n+2})}.$$

Покажем, что

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{r}{\omega(r)} \left(\frac{\ln A(r)}{2r} - \varphi(r)\,\ln B(r) \right) = 0. \tag{4.10}$$

Поскольку $\omega(r)$ правильно меняется на бесконечности и удовлетворяет условиям (4.3), (4.4), то по лемме 4.2 выполнены соотношения (4.5), (4.6). Кроме того, из (1.7) вытекает оценка

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \ge h > 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.11}$$

Учтем еще, что верхнюю плотность (1.2) можно вычислять по формуле

$$\overline{\Delta}(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r} = \varlimsup_{r\to+\infty} \varphi(r),$$

и поэтому

$$0 < \varphi(r) < 2\,\overline{\Delta}(\Lambda), \tag{4.12}$$

если r достаточно велико. Переходя к обоснованию (4.10), дадим двусторонние оценки величин $A(r)$, $B(r)$ при $r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$, $n \ge 2$.

Сначала оценим $A(r)$. С одной стороны, из (4.3), (4.5), (4.6) имеем

$$A(r) < \frac{(\lambda_{n+1}^2 - \lambda_{n-1}^2)\,(\lambda_{n+2}^2 - \lambda_n^2)}{(\lambda_{n-1}\lambda_{n+2})^2} < \frac{(\lambda_{n+2}^2 - \lambda_{n-1}^2)^2}{(\lambda_{n-1}\lambda_{n+2})^2}$$

$$= \left(\frac{(\lambda_{n-1} + \lambda_{n+2})\,o(\omega(\lambda_n))}{\lambda_{n-1}\lambda_{n+2}} \right)^2 \sim \left(o\left(\frac{\omega(\lambda_n)}{\lambda_n} \right) \right)^2 = o(1), \qquad n \to \infty.$$

С другой стороны, (4.5), (4.11) дают

$$A(r) > \frac{(\lambda_n^2 - \lambda_{n-1}^2)\,(\lambda_{n+2}^2 - \lambda_{n+1}^2)}{(\lambda_{n-1}\lambda_{n+2})^2} \ge h^2\, \frac{(\lambda_{n-1} + \lambda_n)\,(\lambda_{n+1} + \lambda_{n+2})}{(\lambda_{n-1}\lambda_{n+2})^2} \sim \frac{4h^2}{\lambda_n^2},$$

когда $n \to \infty$. Поэтому при больших n будет выполнено

$$-3\ln\lambda_n < \ln A(r) < 0, \qquad r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}). \tag{4.13}$$

Теперь оценим $B(r)$. С одной стороны, из (4.3), (4.5), (4.6) имеем

$$B(r) < \frac{\lambda_{n+2}\,(\lambda_{n-1} + \lambda_{n+1})}{\lambda_{n-1}\,(\lambda_n + \lambda_{n+2})} < \frac{\lambda_{n+2}}{\lambda_{n-1}} = 1 + \frac{\lambda_{n+2} - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{o(\omega(\lambda_n))}{\lambda_{n-1}} = 1 + o\left(\frac{\omega(\lambda_n)}{\lambda_n} \right), \quad n \to \infty.$$

С другой стороны,

$$B(r) > \frac{\lambda_{n+2}\,(\lambda_{n-1}+\lambda_n)}{\lambda_{n-1}\,(\lambda_{n+1}+\lambda_{n+2})} \;=\; \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n+2}+\lambda_n\lambda_{n+2}}{\lambda_{n-1}\lambda_{n+2}+\lambda_{n-1}\lambda_{n+1}} > 1.$$

Поэтому при больших n справедлива оценка

$$0 < \ln B(r) < o\left(\frac{\omega(\lambda_n)}{\lambda_n}\right), \qquad r\in[\lambda_n,\lambda_{n+1}). \tag{4.14}$$

Сочетая оценки (4.12)–(4.14), для всех достаточно больших $r\in[\lambda_n,\lambda_{n+1})$ получаем

$$\frac{r}{\omega(r)}\left|\frac{\ln A(r)}{2r} - \varphi(r)\ln B(r)\right| \le \frac{1}{2\omega(r)}\,|\ln A(r)| + \varphi(r)\,\frac{r}{\omega(r)}\,|\ln B(r)|$$

$$= -\frac{1}{2\,\omega(r)}\ln A(r) + \varphi(r)\,\frac{r}{\omega(r)}\,\ln B(r) < \frac{3}{2}\,\frac{\ln r}{\omega(r)} + 2\,\overline{\Delta}(\Lambda)\,\frac{r}{\omega(r)}\,o\left(\frac{\omega(\lambda_n)}{\lambda_n}\right).$$

Учитывая соотношения (2.15), (4.5) и правильное изменение функции $\omega(r)$, приходим к (4.10).

Применив (4.10) к (4.9), имеем

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{r}{\omega(r)}\int\limits_0^\infty\frac{\varphi_r(rt)-\varphi_r(r)}{t^2-1}\,dt = \varlimsup_{n\to\infty}\sup_{r\in[\lambda_n,\,\lambda_{n+1})}\frac{r}{\omega(r)}\int\limits_0^\infty\frac{\varphi_r(rt)-\varphi_r(r)}{t^2-1}\,dt$$

$$= \varlimsup_{n\to\infty}\sup_{r\in[\lambda_n,\,\lambda_{n+1})}\frac{r}{\omega(r)}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus I_{n,r}}\frac{\varphi(rt)-\varphi(r)}{t^2-1}\,dt + \frac{\ln A(r)}{2r} - \varphi(r)\,\ln B(r)\right\}$$

$$= \varlimsup_{n\to\infty}\sup_{r\in[\lambda_n,\,\lambda_{n+1})}\frac{r}{\omega(r)}\int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus I_{n,r}}\frac{\varphi(rt)-\varphi(r)}{t^2-1}\,dt.$$

С учетом (4.1) отсюда получаем (4.8). Лемма 4.3 доказана.

В частном случае $\omega(r)=r$ для любой последовательности Λ вида (1.1) со свойством (1.2), подчиненной дополнительным требованиям (1.7), (4.5), мы получаем из (4.8) формулу вычисления $\delta(\Lambda)$, аналогичную (4.2), но записанную в терминах считающей функции самой последовательности Λ, а не последовательности Λ_r. Именно,

$$\delta(\Lambda) = 2\varlimsup_{n\to\infty}\sup_{r\in[\lambda_n,\,\lambda_{n+1})}\int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus I_{n,r}}\frac{\varphi(rt)-\varphi(r)}{t^2-1}\,dt.$$

Сформулируем еще одно важное следствие из леммы 4.3.

Лемма 4.4. *Пусть функция $\omega(r)$ со свойствами* (i)–(iii) *удовлетворяет условию* (2.15) *и правильно меняется на бесконечности. Пусть Λ — неизмеримая последовательность вида* (1.1)*, имеющая конечную верхнюю плотностью* (1.2) *и удовлетворяющая условиям* (1.7)*,* (4.4)*. Тогда справедлива формула* (4.8).

Доказательство. Поскольку функция $\omega(r)$ обладает свойством (ii), а последовательность Λ неизмерима, то обобщенный индекс конденсации $\delta(\omega, \Lambda)$ неотрицателен (см. начало доказательства теоремы 1.1 из § 2). Остается применить лемму 4.3.

Вернемся к доказательству теоремы 1.2.

§ 5. Модифицированная весовая функция

Пусть вес $\omega(r)$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 1.2. В этом параграфе по функции $\omega(r)$ будет построена модифицированная весовая функция $\mu(r)$ с теми же свойствами (i)–(iii), подчиненная требованию

$$\int_a^{\infty} \frac{\mu(r)}{r^2}\, dr = +\infty, \tag{5.1}$$

аналогичному (1.13). Кроме того, $\mu(r)$ будет непрерывно дифференцируемой при $r \geq a$, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{r\mu'(r)}{\mu(r)} = 1, \tag{5.2}$$

$$\mu(r) = o(\omega(r)), \qquad r \to +\infty. \tag{5.3}$$

Условие (5.2), как известно [106; § 1.2], влечет выполнение при любом $t > 0$ соотношения

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\mu(tr)}{\mu(r)} = t, \tag{5.4}$$

означающего, что $\mu(r)$ — правильно меняющаяся функция порядка $p = 1$.

Для удобства ссылок сформулируем отдельно соответствующее техническое утверждение.

Лемма 5.1. *Пусть функция $\omega(r)$ со свойствами* (i)–(iii) *правильно меняется на бесконечности и подчинена требованию* (1.13). *Тогда найдется функция $\mu(r)$ с теми же свойствами* (i)–(iii), *подчиненная требованию* (5.1), *непрерывно дифференцируемая при $r \geq a$ и удовлетворяющая дополнительным условиям* (5.2), (5.3). *При этом $\mu(r)$ обладает свойством* (5.4), *являясь правильно меняющейся на бесконечности функцией порядка $p = 1$.*

Доказательство. В силу (1.13) существует такая возрастающая последовательность положительных чисел

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}}: \quad a = r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots\ ,$$

что

$$\int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{\omega(r)}{r^2}\, dr \geq 1, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

При этом можно считать, что

$$r_{n+1} \geq 2r_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Функцию $\mu(r)$ зададим при $r \geq a$ по правилу:

$$\mu(r) = \omega(r), \qquad r \in [r_1, r_2),$$

$$\mu(r) = \frac{1}{n}\,\omega(r) \;+\; \sum_{k=2}^{n} \frac{\omega(r_k)}{(k-1)k}, \qquad r \in [r_n, r_{n+1}), \quad n \geq 2.$$

Непрерывность функции $\omega(r)$ в точках r_n дает соотношения:

$$\mu(r_2 - 0) = \omega(r_2) = \frac{1}{2}\,\omega(r_2) + \frac{1}{2}\,\omega(r_2) = \mu(r_2) = \mu(r_2 + 0),$$

$$\mu(r_{n+1} - 0) = \frac{1}{n}\,\omega(r_{n+1}) \;+\; \sum_{k=2}^{n} \frac{\omega(r_k)}{(k-1)k}, \qquad n \geq 2,$$

$$\begin{aligned}\mu(r_{n+1} + 0) &= \frac{1}{n+1}\,\omega(r_{n+1}) \;+\; \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\omega(r_k)}{(k-1)k} \\ &= \frac{1}{n}\,\omega(r_{n+1}) \;+\; \sum_{k=2}^{n} \frac{\omega(r_k)}{(k-1)k}, \qquad n \geq 2.\end{aligned}$$

Поэтому $\mu(r_{n+1} - 0) = \mu(r_{n+1} + 0)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и функция $\mu(r)$ непрерывна в точках r_n, $n \in \mathbb{N}$. Непрерывность $\mu(r)$ в остальных точках промежутка $r \geq a$ вытекает из непрерывности $\omega(r)$ при $r \geq a$. Положительность и возрастание $\mu(r)$ при $r \geq a$ следуют из аналогичных свойств веса $\omega(r)$. Следовательно, $\mu(r)$ обладает свойством (i). Условие (5.1) выполнено благодаря (5.5) в силу оценки

$$\int\limits_a^\infty \frac{\mu(r)}{r^2}\,dr \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{\mu(r)}{r^2}\,dr \;\geq\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int\limits_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{\omega(r)}{r^2}\,dr \;\geq\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Из возрастания $\mu(r)$ и условия (5.1) следует, что $\mu(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$, т. е. свойство (ii).

Так как функция $\omega(r)$ вогнута при $r \geq a$, то на промежутке $r > a$ существуют односторонние производные $\omega'_-(r) \geq \omega'_+(r)$, и $\omega'_\pm(r)$ убывают при $r > a$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\mu'_\pm(r) = \frac{1}{n}\,\omega'_\pm(r), \qquad r \in (r_n, r_{n+1}),$$

$$\mu'_-(r_{n+1}) = \frac{1}{n}\,\omega'_-(r_{n+1}) \geq \frac{1}{n}\,\omega'_+(r_{n+1}) \geq \frac{1}{n+1}\,\omega'_+(r_{n+1}) = \mu'_+(r_{n+1}),$$

$$\mu'_\pm(r) = \frac{1}{n+1}\,\omega'_\pm(r), \qquad r \in (r_{n+1}, r_{n+2}).$$

Следовательно, односторонние производные $\mu'_{\pm}(r)$ существуют при $r > a$ и являются убывающими функциям, что влечет вогнутость $\mu(r)$ на промежутке $r \geq a$.

Итак, построенная функция $\mu(r)$ обладает свойствами (i)–(iii) и подчинена требованию (5.1).

Для дальнейшего потребуется установить, что порядок p исходной правильно меняющейся функции $\omega(r)$ равен единице, т. е. что

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} = t \tag{5.7}$$

при любом $t > 0$. С этой целью представим $\omega(r)$ в виде

$$\omega(r) = r^p\, l(r), \tag{5.8}$$

где $l(r)$ — медленно меняющаяся функция, и воспользуемся тем, что для любого $\delta > 0$ выполняются соотношения [106; § 1.5]:

$$\lim_{r\to+\infty} r^{\delta}\, l(r) = +\infty, \qquad \lim_{r\to+\infty} r^{-\delta}\, l(r) = 0. \tag{5.9}$$

В силу вогнутости $\omega(r)$ при $r \geq a$ функция $\omega(r)/r$ убывает, стремясь к неотрицательному пределу при $r \to +\infty$. Иными словами, справедливо соотношение (4.7). Все ясно, если в (4.7) значение $k > 0$. Рассмотрим содержательный случай

$$\omega(r) = o(r), \qquad r \to +\infty. \tag{5.10}$$

Тогда, с одной стороны, условия (5.8), (5.9) показывают, что $p \leq 1$, а с другой стороны, при $p < 1$ они вступают в противоречие с требованием расходимости интеграла (1.13).

Теперь из (5.7) и определения $\mu(r)$ получаем (5.4).

Убедимся в справедливости (5.3). Записав соотношение

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\mu(r)}{\omega(r)} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\omega(r_n)} \sum_{k=2}^{n} \frac{\omega(r_k)}{(k-1)k} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\omega(r_n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega(r_k)}{k},$$

воспользуемся неравенством Иенсена

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega(r_k)}{k} \leq \omega\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{k}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

справедливым для вогнутой функции $\omega(r)$. Согласно (5.6) имеем

$$r_k \leq \frac{r_n}{2^{n-k}}, \qquad k = 1, \ldots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega(r_k)}{k} \leq \omega\left(\frac{r_n}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}\right) \leq \omega\left(\frac{3r_n}{n}\right), \qquad n \geq n_0.$$

Здесь учтены возрастание $\omega(r)$ и асимптотическая формула

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \sim \frac{2^{n+1}}{n}, \qquad n \to \infty,$$

которую легко вывести из теоремы Штольца.[3]

Таким образом,

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\mu(r)}{\omega(r)} \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\omega(3r_n/n)}{\omega(r_n)} \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\omega(\varepsilon r_n)}{\omega(r_n)}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда, привлекая (5.7), получаем (5.3).

Для завершения доказательства леммы осталось наделить функцию $\mu(r)$ необходимой гладкостью, обеспечив (5.2) и сохранив все отмеченные выше свойства. Этого можно достичь различными способами, например, применить к обратной функции $\mu^{-1}(r)$ результаты Г. Г. Брайчева о сглаживании выпуклых функций (см. [13; часть II, гл. 3, § 2]). По-видимому, самый простой путь состоит в замене функции $\mu(r)$ на непрерывно дифференцируемую при $r \ge a$ функцию

$$\widetilde{\mu}(r) = \int_a^r \frac{\mu(\tau)}{\tau}\, d\tau. \tag{5.11}$$

Действительно, в силу (5.4) по теореме Караматы (см., например, [140; теорема 1.5.11]) имеем

$$\widetilde{\mu}(r) \sim \mu(r), \qquad r \to +\infty.$$

Но тогда правило Лопиталя дает

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{r\,\widetilde{\mu}'(r)}{\widetilde{\mu}(r)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{\mu(r)}{\widetilde{\mu}(r)} = 1,$$

подтверждая наличие у $\widetilde{\mu}(r)$ свойства (5.2). Благодаря простоте конструкции (5.11), проверка того, что $\widetilde{\mu}(r)$ наследует свойства $\mu(r)$, прописанные в лемме 5.1, не вызывает затруднений. Доказательство завершено.

Отметим несколько полезных свойств модифицированной весовой функции.

---

[3] Действительно, полагая

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}, \qquad b_n = \frac{2^{n+1}}{n},$$

имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 - (n+1)/n} = 1.$$

Лемма 5.2. *Пусть $\mu(r)$ — модифицированная весовая функция, построенная в лемме 5.1. Тогда для каждого $\delta \in (0,\,1)$ функция $r^{-\delta}\mu(r)$ при достаточно больших r строго возрастает к $+\infty$, вследствие чего*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\mu(r)}{\ln^s r}=+\infty, \qquad s>0. \tag{5.12}$$

Кроме того, при $r\to+\infty$ справедливы асимптотические соотношения

$$\mu(r)=o(r), \tag{5.13}$$

$$\int\limits_a^r \frac{\mu(t)}{t}\,dt \sim \mu(r), \quad \int\limits_a^r \frac{\mu(t)}{t^2}\,dt = o(\ln r), \quad \int\limits_a^r \frac{\mu(t)\ln t}{t^2}\,dt = o(\ln^2 r). \tag{5.14}$$

Доказательство. Во-первых, (5.2) влечет

$$\left(\frac{\mu(r)}{r^{\delta}}\right)'=\frac{r\,\mu'(r)-\delta\,\mu(r)}{r^{\delta+1}}=\frac{(1-\delta)\,\mu(r)+o(\mu(r))}{r^{\delta+1}}>0$$

при любом $\delta\in(0,\,1)$ и всех достаточно больших r. Это указывает на строгое возрастание при больших r функции $r^{-\delta}\mu(r)$ (к $+\infty$ в силу (5.1)). Отсюда, в частности, следует (5.12). Соотношение (5.13) получаем из (4.7), (5.3).

Первое из соотношений (5.14) уже отмечалось в более общей ситуации при рассмотрении функции (5.11). Но теперь, благодаря (5.2), оно совсем просто выводится применением правила Лопиталя:

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\int_a^r t^{-1}\mu(t)\,dt}{\mu(r)}=\lim_{r\to+\infty}\frac{\mu(r)}{r\,\mu'(r)}=1.$$

Привлекая еще (5.13), аналогично проверяем оставшиеся соотношения (5.14):

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\int_a^r t^{-2}\mu(t)\,dt}{\ln r}=\lim_{r\to+\infty}\frac{\mu(r)}{r}=0,$$

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\int_a^r t^{-2}\mu(t)\ln t\,dt}{\ln^2 r}=\lim_{r\to+\infty}\frac{\mu(r)}{2r}=0.$$

Лемма 5.2 доказана.

Для доказательства теоремы 1.2 потребуется заменить исходную весовую функцию $\omega(r)$ на модифицированную весовую функцию $\mu(r)$ и по новой функции $\mu(r)$ построить специальную неизмеримую последовательность Λ с конечным неотрицательным индексом μ-конденсации. Оценивая величину $\delta(\mu,\Lambda)$, удобно иметь для нее в распоряжении «рабочую» формулу. Наконец, важно убедиться, что при указанной замене весовой индекс конденсации последовательности Λ, отвечающий исходной функции $\omega(r)$, окажется равным нулю. Перечисленным целям служит следующее утверждение.

Лемма 5.3. *Пусть* $\mu(r)$ — *модифицированная весовая функция, построенная в лемме* 5.1. *Пусть* Λ — *неизмеримая последовательность вида* (1.1), *имеющая конечную верхнюю плотность* (1.2), *положительный шаг* (1.7) *и удовлетворяющая условию*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = o(\mu(\lambda_n)), \qquad n \to \infty, \tag{5.15}$$

аналогичному условию (4.4). *Тогда справедлива формула*

$$\delta(\mu, \Lambda) = 2 \varlimsup_{n\to\infty} \sup_{r\in[\lambda_n,\, \lambda_{n+1})} \frac{r}{\mu(r)} \int\limits_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2 - 1}\, dt, \tag{5.16}$$

где обозначено $I_{n,r} = (\lambda_{n-1}/r,\, \lambda_{n+1}/r)$ *и* $\varphi(r) = n_\Lambda(r)/r$. *Если при этом индекс* μ*-конденсации последовательности* Λ *удовлетворяет условию*

$$\delta(\mu,\, \Lambda) < +\infty, \tag{5.17}$$

то выполняется (1.15).

Доказательство. С учетом леммы 5.1 функция $\mu(r)$ и последовательность Λ удовлетворяют всем требованиям леммы 4.4. Поэтому справедлива формула (5.16), аналогичная формуле (4.8).

Пусть теперь выполняется (5.17). Как уже отмечалось в доказательстве леммы 4.4, справедлива оценка снизу $\delta(\mu,\, \Lambda) \geq 0$. Следовательно,

$$0 \leq \delta(\mu,\, \Lambda) < +\infty. \tag{5.18}$$

Покажем, что $\delta(\omega, \Lambda) = 0$. Для этого запишем

$$\frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} = \frac{\mu(\lambda_n)}{\omega(\lambda_n)} \cdot \frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}, \qquad \lambda_n \geq a, \tag{5.19}$$

и воспользуемся следующим элементарным фактом. Для любых двух последовательностей $x_n,\ y_n,$ таких, что

$$x_n \geq 0, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad y_n \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leq \varlimsup_{n\to\infty} y_n < +\infty,$$

справедливо соотношение

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n y_n = 0. \tag{5.20}$$

Применим (5.20) к (5.19), полагая

$$x_n = \frac{\mu(\lambda_n)}{\omega(\lambda_n)}, \qquad y_n = \frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}.$$

Учитывая определение весового индекса конденсации и условия (5.3), (5.18), получим, что $\delta(\omega, \Lambda) = 0$, т. е. выполнено (1.15). Лемма 5.3 доказана.

После проделанной подготовительной работы вернемся к основной линии.

§ 6. Доказательство теоремы 1.2

Для упрощения весьма громоздкого доказательства теоремы 1.2 разобьем его на несколько смысловых этапов.

I. Пусть весовая функция $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii) правильно меняется на бесконечности и подчинена требованию (1.13). Применяя лемму 5.1, заменим $\omega(r)$ на модифицированную весовую функцию $\mu(r)$ с теми же свойствами (i)–(iii), подчиненную требованию (5.1), непрерывно дифференцируемую при $r \geq a$ и удовлетворяющую дополнительным условиям (5.2), (5.3).

II. Выберем произвольно числа $\alpha, \beta,\ 0 \leq \alpha < \beta$. По новой весовой функции $\mu(r)$ построим последовательность Λ вида (1.1) с положительным шагом (1.7) так, чтобы выполнялись условия (1.14), (5.15).

Опишем способ построения заявленной последовательности. Вначале возьмем положительную непрерывно дифференцируемую при $r \geq a$ функцию $h(r)$, обладающую свойствами

$$h'(r) = O\left(\frac{\mu(r)}{r^2}\right), \qquad r \to +\infty, \tag{6.1}$$

$$\frac{1}{\beta} = \varliminf_{r \to +\infty} h(r) < \varlimsup_{r \to +\infty} h(r) = \frac{1}{\alpha} \tag{6.2}$$

(при $\alpha = 0$ в (6.2) имеем $\varlimsup\limits_{r \to +\infty} h(r) = +\infty$). В качестве такой функции при $\alpha > 0$ подойдет, например,

$$h(r) = \frac{1}{\beta} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \sin^2\left(\int\limits_a^r \frac{\mu(t)}{t^2}\,dt\right).$$

Действительно, функция $\Omega(r) = \int\limits_a^r \frac{\mu(t)}{t^2}\,dt$, благодаря требованию (5.1), непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$ на промежутке $r \geq a$. Следовательно, обратная функция $\Omega^{-1}(r)$ непрерывно возрастает от a до $+\infty$ на промежутке $r \geq 0$. Полагая

$$r_n = \Omega^{-1}(\pi n), \quad R_n = \Omega^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

получим

$$\varliminf_{r \to +\infty} h(r) = \lim_{n \to \infty} h(r_n) = \frac{1}{\beta} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \sin^2(\Omega(r_n)) = \frac{1}{\beta},$$

$$\varlimsup_{r \to +\infty} h(r) = \lim_{n \to \infty} h(R_n) = \frac{1}{\beta} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \sin^2(\Omega(R_n)) = \frac{1}{\alpha}.$$

Кроме того,

$$h'(r) = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \sin(2\,\Omega(r))\,\frac{\mu(r)}{r^2} = O\left(\frac{\mu(r)}{r^2}\right), \qquad r \to +\infty.$$

Если же $\alpha = 0$, то аналогичные простые соображения показывают, что условиям (6.1), (6.2) удовлетворяет, к примеру, функция

$$h(r) = \frac{1}{\beta} + \sqrt{\Omega(r)}\,\sin^2\sqrt{\Omega(r)}.$$

Попутно отметим, что если условие (5.1) не выполнено, то функцию $h(r)$ с нужными свойствами (6.1), (6.2) выбрать уже нельзя, поскольку в этом случае из оценки (6.1) будет следовать (абсолютная) сходимость интеграла

$$\int\limits_a^\infty h'(t)\,dt = \lim_{r\to+\infty}\int\limits_a^r h'(t)\,dt,$$

т. е. существование предела $\lim\limits_{r\to+\infty} h(r)$.

Последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ строим так. Первый ее член $\lambda_1 > a$ задаем произвольно, а остальные члены определяем из рекуррентных соотношений

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + h(\lambda_n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

где $h(r)$ — взятая выше функция, подчиненная условиям (6.1) и (6.2).

Отметим некоторые свойства последовательности Λ. Ясно, что Λ имеет положительный шаг:

$$h(\Lambda) = \varliminf_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n) = \varliminf_{n\to\infty} h(\lambda_n) \geq \varliminf_{r\to+\infty} h(r) = \frac{1}{\beta} > 0.$$

Покажем, что выполнено условие (5.15). Для этого рассмотрим два возможных случая: $\alpha > 0$ и $\alpha = 0$. В первом случае функция $h(r)$ согласно (6.2) ограничена сверху, откуда

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n = h(\lambda_n) = O(1) = o(\mu(\lambda_n)), \qquad n\to\infty.$$

Во втором случае, учитывая последовательно условия (6.1), (5.14), (5.12), имеем

$$h(r) = O\left(\int\limits_a^r h'(t)\,dt\right) = O\left(\int\limits_a^r \frac{\mu(t)}{t^2}\,dt\right) = o(\ln r) = o(\mu(r)), \qquad r\to+\infty.$$

Поэтому

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n = h(\lambda_n) = o(\mu(\lambda_n)), \qquad n\to\infty.$$

Теперь мы проверим, что для последовательности Λ выполнены соотношения (1.14). При всех $r \geq a$ можем записать

$$r = \sum_{\lambda_n\leq r} h(\lambda_n) + O(\ln r) = \int\limits_a^r h(t)\,dn_\Lambda(t) + O(\ln r).$$

Интегрируя по частям, приходим к соотношению

$$r = h(r)\, n_\Lambda(r) - \int\limits_a^r n_\Lambda(t)\, h'(t)\, dt + O(\ln r),$$

или, с учетом обозначения $\varphi(r) = n_\Lambda(r)/r$, к соотношению

$$1 = h(r)\varphi(r) - \frac{1}{r}\int\limits_a^r \varphi(t)\, t\, h'(t)\, dt + O\left(\frac{\ln r}{r}\right).$$

Получили формулу

$$\varphi(r) = \frac{1}{h(r)}\left(1 + \frac{1}{r}\int\limits_a^r \varphi(t)\, t\, h'(t)\, dt\right) + O\left(\frac{\ln r}{r}\right), \qquad r \to +\infty. \qquad (6.3)$$

В остаточном члене нет $h(r)$, так как при $r \to +\infty$ эта функция отделена от нуля. Покажем, что $\varliminf\limits_{r\to+\infty} \varphi(r) = \alpha$, $\varlimsup\limits_{r\to+\infty} \varphi(r) = \beta$, откуда и будет следовать (1.14).

Свойства (5.13), (5.14), (6.1) функции $\mu(r)$ дают

$$\int\limits_a^r \varphi(t)\, t\, h'(t)\, dt = O\left(\int\limits_a^r \frac{\mu(t)}{t} dt\right) = O(\mu(r)) = o(r), \qquad r \to +\infty.$$

Поэтому из (6.3) имеем

$$\varphi(r) = \frac{1}{h(r)} \;+\; o(1), \qquad r \to +\infty.$$

Благодаря (6.2) отсюда следуют соотношения

$$\varliminf_{r\to+\infty} \varphi(r) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{h(r)} = \alpha, \quad \varlimsup_{r\to+\infty} \varphi(r) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{h(r)} = \beta,$$

равносильные (1.14).

Теперь из (6.3) мы выведем более «гладкое» представление

$$\varphi(r) = \widetilde{\varphi}(r) + O\left(\frac{\ln^2 r}{r}\right), \qquad r \to +\infty, \qquad (6.4)$$

в котором функция $\widetilde{\varphi}(r)$ непрерывно дифференцируема при $r \geq a$. Обозначим

$$\psi(r) = \frac{1}{h(r)}\left(1 + \frac{1}{r}\int\limits_a^r \varphi(t)\, t\, h'(t)\, dt\right)$$

и перепишем (6.3) в виде

$$\varphi(r) = \psi(r) + O\left(\frac{\ln r}{r}\right), \qquad r \to +\infty. \tag{6.5}$$

В этом представлении функция $\psi(r)$ непрерывна, а остаток $O\left(\dfrac{\ln r}{r}\right)$ интегрируем на $[a,\, b]$ при любом $b > a$. Подставим (6.5) в (6.3):

$$\varphi(r) = \frac{1}{h(r)}\left(1 + \frac{1}{r}\int\limits_a^r \psi(t)\, t\, h'(t)\, dt + \frac{1}{r}\int\limits_a^r O\left(\frac{\ln t}{t}\right) t\, h'(t)\, dt\right) + O\left(\frac{\ln r}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{h(r)}\left(1 + \frac{1}{r}\int\limits_a^r \psi(t)\, t\, h'(t)\, dt\right) + O\left(\frac{1}{r}\int\limits_a^r \frac{\mu(t)\ln t}{t^2}\, dt\right) + O\left(\frac{\ln r}{r}\right)$$

$$= \widetilde{\varphi}(r) + O\left(\frac{\ln^2 r}{r}\right).$$

Здесь через $\widetilde{\varphi}(r)$ обозначена непрерывно дифференцируемая при $r \geq a$ функция

$$\widetilde{\varphi}(r) = \frac{1}{h(r)}\left(1 + \frac{1}{r}\int\limits_a^r \psi(t)\, t\, h'(t)\, dt\right),$$

использовано (6.1) и учтено (5.14).

Доказав справедливость представления (6.4), перейдем к оценке логарифмической производной входящей в него функции $\widetilde{\varphi}(r)$. Вспоминая ограниченность функции $\psi(r)$, отделенность на бесконечности от нуля функции $h(r)$, а также пользуясь определением $\widetilde{\varphi}(r)$ и свойствами (5.13), (5.14), (6.1), получим

$$\frac{\widetilde{\varphi}'(r)}{\widetilde{\varphi}(r)} = \frac{1}{\widetilde{\varphi}(r)}\left[\frac{1}{h(r)}\left(1 + \frac{1}{r}\int\limits_a^r \psi(t)\, t\, h'(t)\, dt\right)\right]'$$

$$= -\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{h(r)\, r^2\, \widetilde{\varphi}(r)}\left(\psi(r)\, r^2\, h'(r) - \int\limits_a^r \psi(t)\, t\, h'(t)\, dt\right)$$

$$= O\left(\frac{\mu(r)}{r^2}\right) + O\left(\frac{\mu(r)}{r^2}\right) = O\left(\frac{\mu(r)}{r^2}\right), \qquad r \to +\infty.$$

Подведем итог пункта II доказательства теоремы 1.2. Построенная в этом пункте последовательность Λ неизмерима и удовлетворяет условиям (1.7), (5.15). Порожденная считающей функцией этой последовательности функция $\varphi(r)$ допускает представление (6.4):

$$\varphi(r) = \widetilde{\varphi}(r) + O\left(\frac{\ln^2 r}{r}\right), \qquad r \to +\infty,$$

с непрерывно дифференцируемой при $r \geq a$ функцией $\widetilde{\varphi}(r)$, обладающей при $r \to +\infty$ свойствами

$$\frac{\widetilde{\varphi}\,'(r)}{\widetilde{\varphi}(r)} = O\left(\frac{\mu(r)}{r^2}\right), \quad \varliminf_{r\to+\infty} \widetilde{\varphi}(r) = \alpha, \quad \varlimsup_{r\to+\infty} \widetilde{\varphi}(r) = \beta. \tag{6.6}$$

III. Покажем, что справедливо (5.17), т. е. индекс μ-конденсации построенной в пункте II последовательности Λ конечен. Поскольку выполнены все условия леммы 5.3, то величину $\delta(\mu,\Lambda)$ можно вычислять по формуле (5.16). Для облегчения работы сначала оценим вклад остаточного члена из (6.4), имеющего вид $O\left(\dfrac{\ln^2 r}{r}\right)$, в формулу (5.16):

$$\delta(\mu,\Lambda) = 2\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{r\in[\lambda_n,\,\lambda_{n+1})} \frac{r}{\mu(r)} \int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus I_{n,r}} \frac{\varphi(rt)-\varphi(r)}{t^2-1}\,dt.$$

Считаем, что $r \in [\lambda_n,\, \lambda_{n+1})$, и пишем все оценки для интеграла

$$\frac{r}{\mu(r)} \int\limits_{[\lambda_1/r,\,+\infty)\setminus I_{n,\,r}} \frac{O\left(\ln^2 rt/(rt)\right) + O(\ln^2 r/r)}{|t^2-1|}\,dt$$

$$= \frac{1}{\mu(r)}\, O\left(\int\limits_{[\lambda_1/r,\,+\infty)\setminus I_{n,\,r}} \frac{\ln^2 rt}{t\,|t^2-1|}\,dt + \ln^2 r \int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus I_{n,\,r}} \frac{dt}{|t^2-1|} \right).$$

Во-первых,

$$\frac{\ln^2 r}{\mu(r)}\, O\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus I_{n,\,r}} \frac{dt}{|t^2-1|} \right) = \frac{\ln^2 r}{\mu(r)}\, O\left(\int\limits_0^{\lambda_{n-1}/r} \frac{dt}{1-t^2} + \int\limits_{\lambda_{n+2}/r}^{\infty} \frac{dt}{t^2-1} \right)$$

$$= \frac{\ln^2 r}{\mu(r)}\, O\left(\int\limits_0^{\lambda_{n-1}/r} \frac{dt}{1-t^2} + \int\limits_{\lambda_{n+2}/r}^{\infty} \frac{dt}{t^2-1} \right) = O\left(\frac{\ln^3 r}{\mu(r)}\right).$$

Во-вторых, при тех же r можем записать

$$\frac{1}{\mu(r)}\, O\left(\int\limits_{[\lambda_1/r,+\infty)\setminus I_{n,\,r}} \frac{\ln^2 rt}{t\,|t^2-1|}\,dt \right) = \frac{1}{\mu(r)}\, O\left(\int\limits_{[\lambda_1/r,+\infty)\setminus I_{n,\,r}} \frac{\ln^2 r + \ln^2 t}{t\,|t^2-1|}\,dt \right)$$

$$= \frac{\ln^2 r}{\mu(r)}\, O\left(\int\limits_{[\lambda_1/r,+\infty)\setminus I_{n,\,r}} \frac{dt}{t\,|t^2-1|} \right) + \frac{1}{\mu(r)}\, O\left(\int\limits_{[\lambda_1/r,+\infty)\setminus I_{n,\,r}} \frac{\ln^2 t}{t\,|t^2-1|}\,dt \right).$$

Для первого слагаемого имеем

$$\frac{\ln^2 r}{\mu(r)}\, O\left(\int\limits_{\lambda_1/r}^{\lambda_{n-1}/r}\frac{dt}{t\,(1-t^2)}+\int\limits_{\lambda_{n+2}/r}^{\infty}\frac{dt}{t\,(t^2-1)}\right)$$

$$=\frac{\ln^2 r}{\mu(r)}\, O\left(\int\limits_{\lambda_1/r}^{\lambda_{n-1}/r}\frac{dt}{t\,(1-t^2)}+\int\limits_{\lambda_{n+2}/r}^{\infty}\frac{dt}{t\,(t^2-1)}\right)=O\left(\frac{\ln^3 r}{\mu(r)}\right).$$

Оценивая второе слагаемое, получаем

$$\frac{1}{\mu(r)}\, O\left(\int\limits_{[\,\lambda_1/r,\,+\infty)\setminus I_{n,\,r}}\frac{\ln^2 t}{t\,|t^2-1|}\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{\mu(r)}\, O\left(\int\limits_{\lambda_1/r}^{\lambda_{n-1}/r}\frac{\ln^2 t}{t\,(1-t^2)}\,dt+\int\limits_{\lambda_{n+2}/r}^{\infty}\frac{\ln^2 t}{t\,(t^2-1)}\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{\mu(r)}\, O\left(\ln^2 r\int\limits_{\lambda_1/r}^{\lambda_{n-1}/r}\frac{dt}{t\,(1-t^2)}+\int\limits_{\lambda_{n+2}/r}^{\infty}\frac{dt}{t\,(t+1)}\right)=O\left(\frac{\ln^3 r}{\mu(r)}\right).$$

Согласно (5.12) имеем $\ln^3 r=o(\omega(r))$ при $r\to+\infty$. Поэтому при подсчете $\delta(\mu,\Lambda)$ можно в соотношение (5.16) вместо $\varphi(r)$ подставлять $\widetilde{\varphi}(r)$, т. е. использовать формулу

$$\delta(\mu,\Lambda)=2\,\varlimsup_{n\to\infty}\ \sup_{r\in[\lambda_n,\,\lambda_{n+1})}\ \frac{r}{\mu(r)}\int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus I_{n,r}}\frac{\widetilde{\varphi}(rt)-\widetilde{\varphi}(r)}{t^2-1}\,dt. \tag{6.7}$$

в которой $\widetilde{\varphi}(r)$ удовлетворяет (6.6).

IV. Применение формулы (6.7) потребует знания специальных фактов теории правильно меняющихся функций. Все сведения, помещенные в этот пункт для удобства чтения, заимствованы с незначительными изменениями из известного руководства [106].

Пусть $\nu(r)$ — определенная при $r>0$ положительная возрастающая к $+\infty$ функция такая, что при некоторых $\gamma,\,b>0$ функция $r^{-\gamma}\,\nu(r)$ убывает (не обязательно строго) при $r\ge b$. Положительная измеримая функция $l(r)$, заданная при $r>0$, называется *медленно меняющейся с остаточным членом* $\nu(r)$, если при любом $t>0$ справедлива асимптотическая формула

$$\frac{l(rt)}{l(r)}=1+O\left(\frac{1}{\nu(r)}\right),\qquad r\to+\infty.$$

Класс таких функций $l(r)$ обозначаем далее $\mathcal{K}(\nu)$. Известен следующий критерий.

Теорема 6.1 [106; Дополнения, теорема A. 1.3]. *Положительная измеримая функция $l(r)$ принадлежит классу $\mathcal{K}(\nu)$ тогда и только тогда, когда найдутся число $c > 0$ и положительная дифференцируемая при $r \geq c$ функция $\widetilde{l}(r)$, подчиненная условиям*

$$\frac{r\,\widetilde{l}\,'(r)}{\widetilde{l}(r)} = O\left(\frac{1}{\nu(r)}\right), \qquad r \to +\infty,$$

$$\frac{l(r)}{\widetilde{l}(r)} = 1 + O\left(\frac{1}{\nu(r)}\right), \qquad r \to +\infty.$$

Для оценки интегралов, содержащих медленно меняющиеся функции, часто используют готовые асимптотические формулы. Приведем здесь два необходимых в дальнейшем результата, предоставляющих формулы такого рода.

Теорема 6.2 [106; Дополнения, теорема A. 2.1]. *Пусть функция $f(t)$ измерима при $t \geq 1$, и для некоторого $s > 0$ сходится интеграл*

$$\int\limits_1^\infty t^s\,|f(t)|\,dt.$$

Если $l \in \mathcal{K}(\nu)$, то при всех $r \geq r_0$ сходится интеграл

$$\int\limits_1^\infty l(rt)\,|f(t)|\,dt,$$

и справедлива асимптотическая формула

$$\int\limits_1^\infty f(t)\,\frac{l(rt)}{l(r)}\,dt = \int\limits_1^\infty f(t)\,dt \,+\, O\left(\frac{1}{\nu(r)}\right), \qquad r \to +\infty.$$

Теорема 6.3 [106; Дополнения, теорема A. 2.4]. *Пусть функция $f(t)$ измерима при $0 \leq t \leq 1$, и $l \in \mathcal{K}(\nu)$. Пусть также функция $t^\delta\,l(t)$ при некотором $\delta > \gamma$ ограничена на каждом отрезке $[0,\,d]$, $d > 0$, и сходится интеграл*

$$\int\limits_0^1 t^{-\delta}\,|f(t)|\,dt.$$

Тогда при всех $r > 0$ сходится интеграл

$$\int\limits_0^1 l(rt)\,|f(t)|\,dt,$$

и справедлива асимптотическая формула

$$\int_0^1 f(t)\,\frac{l(rt)}{l(r)}\,dt \;=\; \int_0^1 f(t)\,dt \,+\, O\left(\frac{1}{\nu(r)}\right), \qquad r\to+\infty.$$

Формулы из теорем 6.2 и 6.3 можно переписать следующим образом:

$$\int_1^\infty (l(rt)-l(r))\,f(t)\,dt \;=\; O\left(\frac{l(r)}{\nu(r)}\right), \qquad r\to+\infty, \tag{6.8}$$

$$\int_0^1 (l(rt)-l(r))\,f(t)\,dt \;=\; O\left(\frac{l(r)}{\nu(r)}\right), \qquad r\to+\infty. \tag{6.9}$$

Ясно, что в теоремах 6.2 и 6.3, а, следовательно, и в формулах (6.8), (6.9), число 1 как один из пределов интегрирования может быть заменено любым положительным числом.

V. Займемся непосредственно проверкой соотношения (5.17), опираясь на формулу (6.7). Положим $\nu(r)=r/\mu(r)$. Тогда функция $r^{-\gamma}\,\nu(r)=r^{1-\gamma}/\mu(r)$ убывает для каждого $0<\gamma<1$ при больших r согласно лемме 5.2. Поскольку для функции $\widetilde{\varphi}(r)$, описываемой соотношениями (6.6), выполнено

$$\frac{r\widetilde{\varphi}\,'(r)}{\widetilde{\varphi}(r)} = r\,O\left(\frac{\mu(r)}{r^2}\right) = O\left(\frac{\mu(r)}{r}\right) = O\left(\frac{1}{\nu(r)}\right), \qquad r\to+\infty\,,$$

то $\widetilde{\varphi}(r)$ по теореме 6.1 медленно меняется с остаточным членом $\nu(r)$. Полагая в теоремах 6.2 и 6.3 $f(t)=1/(t^2-1)$, выводим следующие оценки (см. формулы (6.8), (6.9) и комментарий к ним):

$$\nu(r)\int_{1+\xi}^{\infty}\frac{\widetilde{\varphi}(rt)-\widetilde{\varphi}(r)}{t^2-1}\,dt = O(1), \qquad \nu(r)\int_0^{1-\xi}\frac{\widetilde{\varphi}(rt)-\widetilde{\varphi}(r)}{t^2-1}\,dt = O(1),$$

где ξ — фиксированное число из (0, 1). Для доказательства того, что правая часть формулы (6.7) конечна, осталось оценить при $r\in[\lambda_n,\,\lambda_{n+1})$ интегралы

$$\nu(r)\int_{1-\xi}^{\lambda_{n-1}/r}\frac{\widetilde{\varphi}(rt)-\widetilde{\varphi}(r)}{t^2-1}\,dt, \qquad \nu(r)\int_{\lambda_{n+1}/r}^{1+\xi}\frac{\widetilde{\varphi}(rt)-\widetilde{\varphi}(r)}{t^2-1}\,dt.$$

Выберем последовательность $r_n\in[\lambda_n,\,\lambda_{n+1}]$, на которой достигается супремум в (6.7), и обозначим

$$p_n=\frac{\lambda_{n-1}}{r_n}\in\left[\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1}},\,\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right], \qquad q_n=\frac{\lambda_{n+2}}{r_n}\in\left[\frac{\lambda_{n+2}}{\lambda_{n+1}},\,\frac{\lambda_{n+2}}{\lambda_n}\right].$$

На основании (6.6) при $n \to \infty$ имеем

$$\nu(r_n) \int\limits_{1-\xi}^{p_n} \frac{\widetilde{\varphi}(r_n t) - \widetilde{\varphi}(r_n)}{t^2 - 1}\, dt = O\left(\nu(r_n)\, r_n \max_{r_n(1-\xi) \le \tau \le r_n} |\widetilde{\varphi}'(\tau)| \int\limits_{1-\xi}^{p_n} \frac{t-1}{t^2-1}\, dt \right)$$

$$= O\left(\frac{\nu(r_n)\, \mu(r_n)}{r_n} \right) \int\limits_{1-\xi}^{1} \frac{t-1}{t^2-1}\, dt = O(1).$$

Аналогичным образом, но с дополнительным учетом того, что $\mu(r)$ — правильно меняющаяся функция порядка $p = 1$, находим

$$\nu(r_n) \int\limits_{q_n}^{1+\xi} \frac{\widetilde{\varphi}(r_n t) - \widetilde{\varphi}(r_n)}{t^2 - 1}\, dt = O\left(\nu(r_n)\, r_n \max_{r_n \le \tau \le r_n(1+\xi)} |\widetilde{\varphi}'(\tau)| \int\limits_{q_n}^{1+\xi} \frac{t-1}{t^2-1}\, dt \right)$$

$$= O\left(\frac{\nu(r_n)\, \mu(r_n(1+\xi))}{r_n} \right) \int\limits_{1}^{1+\xi} \frac{t-1}{t^2-1}\, dt = O\left(\frac{\mu(r_n(1+\xi))}{\mu(r_n)} \right) = O(1), \qquad n \to \infty.$$

Собирая полученные оценки, приходим к (5.17). По лемме 5.3 выполняется условие (1.15). Как следствие, $\delta(\Lambda) = 0$ для стандартного индекса конденсации (1.6). Теорема 1.2 доказана.

§ 7. Дополнения к основным теоремам

Сделаем некоторые дополнения к теоремам 1.1 и 1.2, полезные для понимания сути дела. Из теоремы 1.1 сразу извлекаем такое утверждение.

Предложение 7.1. *Пусть* Λ *— неизмеримая последовательность вида* (1.1) *с конечной верхней плотностью* (1.2). *Тогда для любой функции* $\omega(r)$ *со свойствами* (i)–(iii)*, подчиненной требованию* (1.10)*, имеем*

$$\delta(\omega, \Lambda) = +\infty.$$

В частности, для индекса (1.9) *с* $0 < p < 1$ *выполнено* $\delta_p(\Lambda) = +\infty$.

Доказательство. Предположим, рассуждая от противного, что для некоторой функции $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii), подчиненной требованию (1.10), выполняется условие (1.11). Тогда по теореме 1.1 последовательность Λ будет измеримой. Полученное противоречие завершает доказательство.

Теперь предъявим простой пример весовой функции, подпадающей под действие теоремы 1.1, но не имеющей правильного изменения.

Пример 7.1. Приведем пример функции $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii), подчиненной требованию (1.10), которая не является правильно меняющейся на бесконечности. Функцию $\omega(r)$ определим при $r \geq 2$ так, чтобы

$$\omega(2^{2m-1}) = 16 \cdot 3^{m-3}, \qquad \omega(2^{2m}) = 3^m, \qquad m \in \mathbb{N},$$

а на каждом отрезке вида $2^{2m-1} \leq r \leq 2^{2m}$, $m \in \mathbb{N}$, зададим $\omega(r)$ линейно. Построенная кусочно линейная непрерывная функция $\omega(r)$ будет обладать свойствами (i), (ii). Покажем, что выполнено (iii), т. е. $\omega(r)$ вогнута при $r \geq 2$. Для этого достаточно проверить, что убывает последовательность угловых коэффициентов линейных функций, составляющих $\omega(r)$, т. е. при каждом $m \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\frac{\omega(2^{2m}) - \omega(2^{2m-1})}{2^{2m} - 2^{2m-1}} > \frac{\omega(2^{2m+1}) - \omega(2^{2m})}{2^{2m+1} - 2^{2m}} > \frac{\omega(2^{2m+2}) - \omega(2^{2m+1})}{2^{2m+2} - 2^{2m+1}}.$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{\omega(2^{2m}) - \omega(2^{2m-1})}{2^{2m} - 2^{2m-1}} = \frac{3^m - 16 \cdot 3^{m-3}}{2^{2m-1}} = \frac{22}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^m,$$

$$\frac{\omega(2^{2m+1}) - \omega(2^{2m})}{2^{2m+1} - 2^{2m}} = \frac{16 \cdot 3^{m-2} - 3^m}{2^{2m}} = \frac{7}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^m,$$

$$\frac{\omega(2^{2m+2}) - \omega(2^{2m+1})}{2^{2m+2} - 2^{2m+1}} = \frac{22}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^{m+1} = \frac{11}{18}\left(\frac{3}{4}\right)^m.$$

Поскольку $22/27 > 7/9 > 11/18$, то $\omega(r)$ обладает свойством (iii).

Но функция $\omega(r)$ не является правильно меняющейся на бесконечности, так как не существует предела

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\omega(2r)}{\omega(r)}.$$

Действительно,

$$\frac{\omega(2^{2m})}{\omega(2^{2m-1})} = \frac{27}{16}, \qquad \frac{\omega(2^{2m+1})}{\omega(2^{2m})} = \frac{16}{9}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Несложно убедиться в справедливости (1.10) для функции $\omega(r)$ из этого примера. В самом деле, по построению

$$\omega(r) = 5 \cdot 3^{m-3} + \frac{22}{2^{2m}}\, 3^{m-3}\, r, \qquad 2^{2m-1} \leq r \leq 2^{2m},$$

$$\omega(r) = 2 \cdot 3^{m-2} + \frac{7}{2^{2m}}\, 3^{m-2}\, r, \qquad 2^{2m} \leq r \leq 2^{2m+1},$$

при каждом $m \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\int\limits_2^\infty \frac{\omega(r)}{r^2}\, dr = \sum_{m=1}^\infty \left(5 \cdot 3^{m-3} \;\; \frac{1}{r}\bigg|_{2^{2m}}^{2^{2m-1}} + 2 \cdot 3^{m-2} \;\; \frac{1}{r}\bigg|_{2^{2m+1}}^{2^{2m}} \right)$$

$$
+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{22}{2^{2m}}\cdot 3^{m-3}\ln r\Big|_{2^{2m-1}}^{2^{2m}}+\frac{7}{2^{2m}}\cdot 3^{m-2}\ln r\Big|_{2^{2m}}^{2^{2m+1}}\right)
$$

$$
=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{5}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^m+\frac{1}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^m+\frac{22}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^m\ln 2+\frac{7}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^m\ln 2\right)
$$

$$
=\left(\frac{8}{27}+\frac{43}{27}\ln 2\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^m=\frac{8+43\ln 2}{9}.
$$

Ясно также, что функцию с указанными в этом примере свойствами можно сделать дифференцируемой, подправляя $\omega(r)$ в окрестностях точек излома.

В связи с примером 7.1 упомянем работу [12], в которой для произвольной положительной возрастающей непрерывной функции конечного положительного порядка (по поводу шкалы роста см. [39; гл. II, § 1]), принадлежащей классу сходимости (т. е. подчиненной требованию (1.10)), построена правильно меняющаяся мажоранта из класса сходимости. В частности, весовая функция из примера 7.1 имеет правильно меняющуюся мажоранту, подчиненную требованию (1.10).

Пример 7.2. Следующий более сложный пример связан с теоремой 1.2 и показывает, что и в случае нарушения требования (1.10) функция со свойствами (i)–(iii) может не иметь правильного изменения на бесконечности. Конкретнее, приведем пример функции $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii), подчиненной требованию (1.13), которая при любом $t>1$ удовлетворяет соотношению (1.17). Для этого зададим три вспомогательные числовые последовательности $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ по формулам:

$$
a_1=a>1,\qquad a_{2k}=(a_{2k-1})^{\exp(\exp k^2)},\qquad a_{2k+1}=k\,a_{2k},\qquad k\in\mathbb{N};
$$

$$
b_1>0,\qquad b_{k+1}=e^{a_{2k}-a_{2k+1}}\,\frac{\ln a_{2k+1}}{\ln a_{2k}}\,b_k,\qquad k\in\mathbb{N};
$$

$$
c_k=\frac{e^{a_{2k}}}{\ln a_{2k}}\,b_k,\qquad k\in\mathbb{N}.
$$

Функцию $\omega(r)$ строим в виде

$$
\omega(r)=\int_a^r\varepsilon(t)\,dt,\qquad r\ge a, \tag{7.1}
$$

где $\varepsilon(r)$ при каждом $k\in\mathbb{N}$ задается так:

$$
\varepsilon(r)=\begin{cases}\dfrac{b_k}{\ln r}, & r\in[a_{2k-1},\,a_{2k}],\\[2ex] \dfrac{c_k}{e^r}, & r\in[a_{2k},\,a_{2k+1}].\end{cases}
$$

Проверим, что $\varepsilon(r)$ обладает свойствами:

1) $\varepsilon(r)>0$ определена, непрерывна и строго убывает при $r\ge a$;

2) $\varepsilon(r)\to 0$ при $r\to+\infty$;

3) $\int\limits_a^\infty \dfrac{\varepsilon(r)}{r}\,dr \;=\; +\infty.$

Действительно, при любом $k\in\mathbb{N}$ выполняются равенства

$$\varepsilon(a_{2k}-0)=\frac{b_k}{\ln a_{2k}},\qquad \varepsilon(a_{2k}+0)=\frac{c_k}{e^{a_{2k}}}.$$

Учитывая определение последовательности $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, отсюда получаем, что

$$\varepsilon(a_{2k}-0)=\varepsilon(a_{2k}+0),\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Аналогично, используя определения последовательностей $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, при всех $k\in\mathbb{N}$ имеем

$$\varepsilon(a_{2k+1}-0)=\frac{c_k}{e^{a_{2k+1}}}=\frac{e^{a_{2k}-a_{2k+1}}}{\ln a_{2k}}\,b_k,$$

$$\varepsilon(a_{2k+1}+0)=\frac{b_{k+1}}{\ln a_{2k+1}}=\frac{e^{a_{2k}-a_{2k+1}}}{\ln a_{2k}}\,b_k.$$

Следовательно,

$$\varepsilon(a_{2k+1}-0)=\varepsilon(a_{2k+1}+0),\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Поэтому функция $\varepsilon(r)$ непрерывна при $r\ge a$. Отсюда получаем свойство 1), поскольку положительность и убывание $\varepsilon(r)$ вытекают прямо из определения $\varepsilon(r)$ и ее непрерывности. Свойство 2) есть очевидное следствие определения $\varepsilon(r)$. Проверим наличие свойства 3). Для этого достаточно установить расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^\infty \int\limits_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} \frac{\varepsilon(r)}{r}\,dr=\sum_{k=1}^\infty d_k. \tag{7.2}$$

Из определений функции $\varepsilon(r)$ и последовательности $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ находим

$$d_k=\int\limits_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} \frac{\varepsilon(r)}{r}\,dr \;=\; b_k\int\limits_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} \frac{dr}{r\ln r}\;=\;b_k\,\ln\frac{\ln a_{2k}}{\ln a_{2k-1}}\;=\;b_k\,e^{k^2},\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Но согласно рекуррентной формуле, задающей $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, имеем

$$\frac{b_{k+1}}{b_k}=\frac{\ln a_{2k+1}}{e^k\,\ln a_{2k}}\;\sim\;e^{-k},\qquad k\to\infty.$$

Поэтому

$$\frac{d_{k+1}}{d_k}=\frac{b_{k+1}}{b_k}\,e^{2k+1}\;\sim\;e^{k+1},\qquad k\to\infty,$$

и ряд (7.2) расходится.

Итак, функция $\varepsilon(r)$ обладает свойствами 1)–3). Но тогда функция $\omega(r)$, заданная посредством (7.1), обладает свойствами (i)–(iii) и подчинена требованию (1.13). Действительно, поскольку $\varepsilon(r)$ непрерывна при $r \geq a$ и положительна при $r > a$, то $\omega(r)$ непрерывно дифференцируема, строго возрастает при $r \geq a$ и также положительна при $r > a$. Далее,

$$\omega(r) = \int_a^r \varepsilon(t)\,dt \geq \int_a^r \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt \to +\infty, \qquad r \to +\infty.$$

Так как $\omega'(r) = \varepsilon(r)$ строго убывает (к нулю) при $r \geq a$, то $\omega(r)$ строго вогнута при $r \geq a$. Проверим, наконец, что $\omega(r)$ подчинена требованию (1.13). Интегрируя по частям, при всех $R \geq a$ находим

$$\int_a^R \frac{\omega(r)}{r^2}\,dr = -\frac{\omega(R)}{R} + \int_a^R \frac{\varepsilon(r)}{r}\,dr.$$

Применяя правило Лопиталя и свойство 2) функции $\varepsilon(r)$, имеем

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\omega(R)}{R} = \lim_{R\to+\infty} \omega'(R) = \lim_{R\to+\infty} \varepsilon(R) = 0.$$

С учетом свойства 3) функции $\varepsilon(r)$ теперь получаем (1.13), поскольку

$$\lim_{R\to+\infty} \int_a^R \frac{\omega(r)}{r^2}\,dr = \lim_{R\to+\infty} \int_a^R \frac{\varepsilon(r)}{r}\,dr = +\infty.$$

Осталось убедиться в справедливости соотношения (1.17). Выберем произвольно $t > 1$. Пусть $k > [t]$. Тогда $ta_{2k} \in [a_{2k},\, a_{2k+1}] = [a_{2k},\, k\,a_{2k}]$, и

$$\omega(ta_{2k}) - \omega(a_{2k}) = \int_{a_{2k}}^{ta_{2k}} \varepsilon(r)\,dr = c_k \int_{a_{2k}}^{ta_{2k}} e^{-r}\,dr \sim \frac{c_k}{e^{a_{2k}}}, \qquad k \to \infty.$$

С другой стороны, используя убывание функции $\varepsilon(r)$, имеем

$$\omega(r) = \int_a^r \varepsilon(t)\,dt \geq \varepsilon(r)\,(r-1), \qquad r \geq a.$$

Следовательно,

$$\omega(a_{2k}) \geq \varepsilon(a_{2k})\,(a_{2k}-1) \sim \frac{b_k\,a_{2k}}{\ln a_{2k}}, \qquad k \to \infty.$$

Таким образом,

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{\omega(ta_{2k})-\omega(a_{2k})}{\omega(a_{2k})} \le \varliminf_{k\to\infty} \frac{c_k \ln a_{2k}}{e^{a_{2k}}\, b_k\, a_{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{a_{2k}} = 0,$$

откуда

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{\omega(ta_{2k})}{\omega(a_{2k})} \le 1.$$

Поскольку функция $\omega(r)$ возрастает, то последнее соотношение означает, что

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} = 1, \qquad t>1. \tag{7.3}$$

Теперь проверим, что

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} = t, \qquad t>1. \tag{7.4}$$

Непосредственно из определения функции $\varepsilon(r)$ вытекает, что

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\varepsilon(tr)}{\varepsilon(r)} = 1, \qquad t>1.$$

Применяя обобщенное правило Лопиталя, отсюда получаем

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} \le \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{t\,\omega'(tr)}{\omega'(r)} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{t\,\varepsilon(tr)}{\varepsilon(r)} = t,$$

что дает оценку сверху

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} \le t, \qquad t>1. \tag{7.5}$$

Для вывода оценки снизу воспользуемся очевидным неравенством

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} \ge \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\omega(a_{2k})}{\omega(t^{-1}a_{2k})}. \tag{7.6}$$

Поскольку, начиная с некоторого номера, $t^{-1}a_{2k} \in [a_{2k-1},\, a_{2k}]$, то

$$\omega(a_{2k}) - \omega(t^{-1}a_{2k}) = \int\limits_{a_{2k}}^{t^{-1}a_{2k}} \varepsilon(r)\,dr = b_k \int\limits_{a_{2k}}^{t^{-1}a_{2k}} \frac{dr}{\ln r} \ge \frac{b_k\, a_{2k}}{\ln a_{2k}} \left(1-t^{-1}\right).$$

С другой стороны,

$$\omega(t^{-1}a_{2k}) = \int\limits_{a}^{t^{-1}a_{2k}} \varepsilon(r)\,dr = \int\limits_{a}^{a_{2k-1}} \varepsilon(r)\,dr + b_k \int\limits_{a_{2k-1}}^{t^{-1}a_{2k}} \frac{dr}{\ln r}$$

$$< b_1 \int\limits_{a}^{a_{2k-1}} \frac{dr}{\ln r} + b_k \int\limits_{a}^{t^{-1}a_{2k}} \frac{dr}{\ln r} < \frac{b_1}{\ln a}\, a_{2k-1} + b_k \int\limits_{a}^{t^{-1}a_{2k}} \frac{dr}{\ln r}.$$

Второе слагаемое при $k \to \infty$ эквивалентно величине $t^{-1}\dfrac{b_k\, a_{2k}}{\ln a_{2k}}$ в силу асимптотики

$$\int_a^R \frac{dr}{\ln r} \sim \frac{R}{\ln R}, \qquad R \to +\infty.$$

Следовательно,

$$\omega(t^{-1}a_{2k-1}) \,<\, t^{-1}\frac{b_k\, a_{2k}}{\ln a_{2k}} \,+\, o\left(\frac{b_k\, a_{2k}}{\ln a_{2k}}\right), \qquad k \to \infty.$$

Таким образом,

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\omega(a_{2k}) - \omega(t^{-1}a_{2k})}{\omega(t^{-1}a_{2k})} \,\geq\, \frac{1-t^{-1}}{t^{-1}} = t-1.$$

Полученное соотношение перепишем в виде

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\omega(a_{2k})}{\omega(t^{-1}a_{2k})} \,\geq\, t, \qquad t > 1. \tag{7.7}$$

Сочетая (7.7) с (7.6), получаем, что

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} \,\geq\, t, \qquad t > 1. \tag{7.8}$$

Соотношения (7.5), (7.8) дают (7.4). Объединяя (7.4) и (7.3) приходим к (1.17).

В завершение § 7 вычислим индикатор канонического произведения (1.4), построенного по последовательности Λ из теоремы 1.2, а также проиллюстрируем теоремы 1.1 и 1.2 на «модельном» примере (1.16).

Пусть Λ — неизмеримая последовательность положительных чисел, построенная в ходе доказательства теоремы 1.2. Пусть $n_\Lambda(r)$ — считающая функция последовательности Λ и $\varphi(r) = n_\Lambda(r)/r$. Тогда справедлива асимптотическая формула, которую мы запишем с огрублением в остаточном члене по сравнению с (6.4):

$$\varphi(r) = \widetilde{\varphi}(r) + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \qquad r \to +\infty.$$

Здесь функция $\widetilde{\varphi}(r)$ удовлетворяет (6.6). Такое ослабление формулы (6.4) вполне достаточно для наших целей и несколько упрощает дальнейшие выкладки. Как известно (см., например, [94]), при всех $r > 0$ и $0 < \theta \leq \pi/2$ логарифм модуля канонического произведения (1.4) допускает интегральное представление

$$\frac{\ln|L(re^{i\theta})|}{r} = \int_0^\infty G(t,\theta)\,\varphi(rt)\,dt \tag{7.9}$$

с ядром

$$G(t,\theta) = \frac{2(1-t^2\cos 2\theta)}{t^4 - 2\,t^2\cos 2\theta + 1}.$$

Непосредственно проверяется (это проделано в [94]), что

$$\int_0^\infty G(t,\theta)\,dt = \pi\sin\theta.$$

Поскольку $\widetilde{\varphi}(r)$ медленно меняется на бесконечности, то к интегралам, содержащим $\widetilde{\varphi}(rt)$, применимы асимптотические формулы типа (6.8), (6.9). Воспользуемся простым вариантом такой асимптотики в форме соотношения из [105; § 1.2], объединяющего утверждения теорем 2.6 и 2.7 [106; гл. 2]. Применительно к (7.9) получаем

$$\int_0^\infty G(t,\theta)\,\varphi(rt)\,dt = \int_0^\infty G(t,\theta)\,\widetilde{\varphi}(rt)\,dt + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\int_0^\infty \frac{G(t,\theta)}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \widetilde{\varphi}(r)(1+o(1))\int_0^\infty G(t,\theta)\,dt + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \qquad r\to+\infty.$$

Отсюда с учетом третьего соотношения в (6.6) находим

$$h_L(\theta) = \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln|L(re^{i\theta})|}{r} = \pi\sin\theta\varlimsup_{r\to+\infty}\widetilde{\varphi}(r) = \pi\beta\sin\theta, \qquad 0<\theta\le\pi/2.$$

Полученное равенство означает, что индикатор функции $L(\lambda)$ вычисляется по правилу

$$h_L(\theta) = \pi\beta\,|\sin\theta| = \sigma\,|\sin\theta|, \qquad 0\le\theta\le 2\pi,$$

а индикаторная диаграмма является отрезком мнимой оси $[-\sigma i,\, \sigma i]$.

Наконец, посмотрим, что дают теоремы 1.1 и 1.2 в случае весовых функций

$$\omega(r) = \frac{r}{(\ln r)^q}, \qquad q>0. \tag{7.10}$$

Всякий вес вида (7.10) обладает свойствами (i)–(iii), если взять $a>e^{q+1}$. При этом сходимость несобственного интеграла

$$\int_a^\infty \frac{\omega(r)}{r^2}\,dr = \int_a^\infty \frac{dr}{r(\ln r)^q}$$

зависит от параметра q.

Пусть сначала $q>1$. Тогда функция (7.10) подчинена требованию (1.10). Пусть последовательность Λ вида (1.1) с конечной верхней плотностью (1.2) такова, что построенное по этой последовательности каноническое произведение (1.4) удовлетворяет оценке

$$\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|} = O\left(\lambda_n\,(\ln\lambda_n\,)^{-q}\right), \qquad q>1, \qquad n\to\infty. \tag{7.11}$$

Тогда по теореме 1.1 последовательность Λ измерима. Это означает, что величины (1.2), (1.3) совпадают, принимая общее значение $\Delta(\Lambda)$, а каноническое произведение $L(\lambda)$ есть целая функция вполне регулярного роста с типом $\sigma = \pi\Delta(\Lambda)$ и индикатором $h_L(\theta) = \sigma\,|\sin\theta| = \pi\Delta(\Lambda)|\sin\theta|$.

Пусть теперь $0 < q \le 1$. Тогда весовая функция (7.10) правильно меняется на бесконечности и подчинена требованию (1.13). В данной ситуации применима теорема 1.2. Выберем произвольно числа α, β, связав их соотношением $0 \le \alpha < \beta$. В ходе доказательства теоремы 1.2 (пропускаем этап I и далее до конца доказательства используем исходный вес $\omega(r)$ вместо модифицированного $\mu(r)$) указан способ построения такой последовательности Λ с нижней плотностью α и верхней плотностью β, что порождаемая этой последовательностью целая функция (1.4) удовлетворяет асимптотической формуле вида (7.11) с заданным $0 < q \le 1$. Зависящая от α, β, q последовательность Λ может быть построена, например, следующим образом. Первый член $\lambda_1 > e$ выбираем произвольно. При $\alpha > 0$ остальные члены λ_n, $n = 2, 3, \ldots$, последовательно находим по правилу

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} + \left(\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta}\right) \sin^2\big((\ln\lambda_n)^{1-q}\big), & 0 < q < 1, \\[2ex] \dfrac{1}{\beta} + \left(\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta}\right) \sin^2(\ln\ln\lambda_n), & q = 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 0$ пользуемся рекуррентными соотношениями

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} + (\ln\lambda_n)^{\gamma}\,\sin^2\big((\ln\lambda_n)^{\gamma}\big), & 0 < q < 1, \quad \gamma = (1-q)/2, \\[2ex] \dfrac{1}{\beta} + \sqrt{\ln\ln\lambda_n}\,\sin^2\Big(\sqrt{\ln\ln\lambda_n}\Big), & q = 1. \end{cases}$$

Все рекуррентные формулы выписаны в соответствие с общими соотношениями из § 6 (этап II доказательства теоремы 1.2), где вместо модифицированной функции $\mu(r)$ берется исходная весовая функция

$$\omega(r) = \frac{r}{(\ln r)^q}, \qquad 0 < q \le 1. \tag{7.12}$$

Неизмеримая последовательность Λ имеет наперед заданные плотности, причем ее индекс ω-конденсации конечен, а стандартный индекс конденсации равен нулю.

Немного усложним задачу. Пусть для веса (7.12) требуется построить неизмеримую последовательность Λ так, чтобы асимптотика (7.11) выполнялась в усиленном варианте — с символом o вместо символа O, т. е.

$$\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|} = o\big(\lambda_n(\ln\lambda_n)^{-q}\big), \qquad 0 < q \le 1, \qquad n \to \infty.$$

Существование такой последовательности гарантировано теоремой 1.2. Для конструктивного построения действуем по следующей инструкции. Сначала заменим функцию (7.12) на модифицированную функцию $\mu(r)$. Для этого, конечно, можно воспользоваться универсальным правилом, указанным в доказательстве леммы 5.1. Однако, в данной конкретной ситуации проще взять в качестве нового веса функцию

$$\mu(r) = \frac{r}{\ln r \, \ln\ln r} = o\left(\frac{r}{(\ln r)^q}\right), \qquad 0 < q \le 1, \qquad r \to +\infty.$$

Затем выпишем искомую последовательность Λ по схеме, изложенной в § 6. Например, требуемую последовательность Λ с нулевой нижней плотностью можно получить, выбрав достаточно большое значение λ_1 и положив

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \frac{1}{\beta} + \sqrt{\ln\ln\ln \lambda_n}\ \sin^2\left(\sqrt{\ln\ln\ln \lambda_n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Как весовой (1.8), так и стандартный (1.6) индексы конденсации такой последовательности Λ равны нулю. Соответствующее каноническое произведение $L(\lambda)$ имеет индикатор $h_L(\theta) = \pi\beta|\sin\theta|$, но не является функцией вполне регулярного роста. Более того, как будет показано в теореме 8.1 следующего параграфа, рассматриваемое произведение $L(\lambda)$ не имеет вполне регулярного роста ни на одном из лучей $\arg\lambda = \theta$ при $\theta \ne \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, но имеет вполне регулярный рост на положительном и отрицательном лучах.

§ 8. Задача А. Ф. Леонтьева

Изучая вопросы, связанные с представлением аналитических функций рядами экспонент, А. Ф. Леонтьев в 1972 г. поставил следующую интересную задачу [75; замечание на с. 1291], [77; задача 2]. Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с последовательностью простых (всех) нулей $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и индикатором

$$h_L(\theta) \equiv \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\left|L\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln|L'(\lambda_n)| - h_L(\arg\lambda_n) \right\} = 0. \tag{8.1}$$

Нужно выяснить, является ли $L(\lambda)$ функцией *вполне регулярного роста*. Последнее свойство в соответствие с общим определением [72; гл. III] равносильно существованию равномерного по $0 \le \theta \le 2\pi$ предела

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln\left|L\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r} = h_L(\theta). \tag{8.2}$$

Здесь E — некоторое общее для всех θ множество положительных чисел *нулевой относительной меры*, т. е. такое, что пересечение $E \cap (0, r)$ измеримо по Лебегу при каждом $r > 0$, и его мера есть $o(r)$ при $r \to +\infty$.

Если равенство (8.2) имеет место при фиксированном $0 \le \theta \le 2\pi$, то $L(\lambda)$ называется функцией *вполне регулярного роста на луче* $\arg\lambda = \theta$. Как известно, множество лучей вполне регулярного роста замкнуто, т. е. замкнутым в $[0,\,2\pi]$ является множество всех направлений θ таких, что функция имеет вполне регулярный рост на луче $\arg\lambda = \theta$. Наоборот, всякое замкнутое в $[0,\,2\pi]$ множество порождает множество лучей вполне регулярного роста некоторой целой функции экспоненциального типа [5; теорема 1].

Всюду в этом параграфе будем предполагать, не оговаривая особо, что множество нулей целой функции выписывается в порядке возрастания модулей. Несложно видеть, что условие (8.1) равносильно неравенству

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} + h_L(\arg\lambda_n) \right\} \le 0. \qquad (8.3)$$

Для проверки этого утверждения убедимся в том, что (8.3) влечет (8.1). Хорошо известно, что $L'(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа с индикатором $\le h_L(\theta)$. Отсюда вытекает оценка

$$|L'(\lambda_n)| \le \exp\{(h_L(\arg\lambda_n) + \varepsilon)|\lambda_n|\}, \qquad n \ge n_0(\varepsilon),$$

справедливая при любом $\varepsilon > 0$. Но тогда

$$\frac{1}{|\lambda_n|} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} \ge -h_L(\arg\lambda_n) - \varepsilon, \qquad n \ge n_0(\varepsilon),$$

и, следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} + h_L(\arg\lambda_n) \right\} \ge 0.$$

Последнее соотношение показывает, что выполнение (8.3) влечет (8.1).

Сформулируем еще одно полезное и элементарно проверяемое утверждение.

Лемма 8.1. *Пусть* $L(\lambda)$ — *целая функция экспоненциального типа с множеством простых нулей* $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и индикатором* $h_L(\theta)$, *удовлетворяющая условию* (8.3). *Тогда*

1) *при любых* $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $b \in \mathbb{C}$, *функция*

$$L_1(\lambda) \equiv L(a\lambda + b), \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

является целой функцией экспоненциального типа с множеством простых нулей $M = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\mu_n = \frac{\lambda_n - b}{a}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

индикатором

$$h_{L_1}(\theta) = |a|\, h_L(\theta + \arg a), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

и удовлетворяет условию (8.3):

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{|\mu_n|} \ln \frac{1}{|L_1'(\mu_n)|} + h_{L_1}(\arg\mu_n) \right\} \le 0;$$

2) *при любом* $c \in \mathbb{C}$ *функция*

$$L_2(\lambda) \equiv e^{c\lambda} L(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

является целой функцией экспоненциального типа с множеством простых нулей $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *индикатором*

$$h_{L_2}(\theta) = h_L(\theta) + |c| \cos(\theta + \arg c), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

и удовлетворяет условию (8.3):

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \frac{1}{|L_2'(\lambda_n)|} + h_{L_2}(\arg \lambda_n) \right\} \leq 0.$$

Для произвольной целой функции экспоненциального типа с простыми нулями λ_n величина, стоящая в левой части (8.3) и характеризующая поведение в нулях производной $L'(\lambda)$, является аналогом индекса конденсации (1.6) положительных нулей канонического произведения (1.4).

Условие (8.3) и близкие ему по характеру играют ключевую роль при установлении критериев представимости аналитических функций рядами экспонент или обобщенных экспонент (см., например, [76], [57]) и затрагивает целый ряд смежных вопросов: интерполяции, слабой достаточности (γ-достаточности) и максимальности множеств в различных классах целых функций. Из большого количества соответствующих работ отметим еще [4], [26], [61], [62], [118], имеющие непосредственное отношение к описанной проблематике.

Интересующая нас задача исследовалась А. Ф. Леонтьевым, Ю. И. Мельником, А. В. Братищевым как в приведенной выше, так и в более общей постановке — для целой функции с кратными нулями и индикатором $H_L(\theta)$ при уточненном порядке $\rho(r) \to \rho \in [0, \infty)$ (при этом, очевидно, надо естественным образом подправлять условие (8.1)). Такая обобщенная задача имеет положительное решение для значений $0 \leq \rho < 1/2$. Тот же результат получен в [23] для $1/2 \leq \rho < 1$ при дополнительных предположениях

$$\min_{0\leq\theta\leq2\pi} H_L(\theta) > 0, \qquad \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln \min\limits_{|\lambda|=r} |L(\lambda)|}{\ln r} = +\infty.$$

Следует отметить, что при $\rho(r) \equiv \rho$ из теоремы 1 работы Ю. И. Мельника [87] и теоремы 3 обзорной статьи Ю. Ф. Коробейника [57; с. 106-107] вытекает справедливость цитированных результатов А. В. Братищева уже при любом $\rho > 0$. Если условие положительности индикатора нарушено, то при $\rho \geq 1/2$ соотношение (8.1) или его естественное обобщение не влекут, вообще говоря, полной регулярности роста функции. Соответствующий пример описан в [23]. Конструкция статьи [23] содержит, в частности, обсуждавшийся в § 1 пример целой функции вида (1.4). Заметим, что если $L(\lambda)$ есть функция (1.4), то условие (8.1) в обозначениях § 1 принимает вид

$$\delta(\Lambda) = -h_L(0).$$

Последнее соотношение означает, что

$$\delta(\Lambda) \,=\, h_L(0) \,=\, 0,$$

так как всегда $\delta(\Lambda) \geq 0$ и $h_L(0) \geq 0$. Таким образом, теоремы 1.1 и 1.2, доказанные в этой главе диссертации, дают для канонических произведений (1.4) развернутый ответ на первоначальный вопрос А. Ф. Леонтьева. К тому же, конструкция из § 6 предоставляет целую серию явных контрпримеров к задаче А. Ф. Леонтьева, в которых индикаторная диаграмма $D(L)$ есть отрезок мнимой оси.

Конечно, условие (8.1) естественным образом возникает в таких вопросах комплексного анализа, в которых индикаторная диаграмма функции $L(\lambda)$ имеет непустую внутренность. Несмотря на усилия ряда авторов, вопрос о полной регулярности роста целой функции экспоненциального типа $L(\lambda)$ с условием (8.1), индикаторная диаграмма которой имеет внутренние точки, в общей ситуации остается открытым. Результаты Ю. И. Мельника позволяют дать положительный ответ на него в случае наличия особой симметрии в расположении корней функции $L(\lambda)$ или определенной оценки снизу роста $|L(\lambda)|$ на некоторой системе расширяющихся до бесконечности окружностей $|\lambda| = R_n$. Например [88], если Λ инвариантно относительно поворота вокруг начала на фиксированный угол раствора $2\pi/s,\ s \geq 3$, или [89], если

$$\min_{|\lambda|=R_n} |L(\lambda)| \,>\, R_n^{-p}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

при каком-либо $p > 0$. Так что, неизвестно даже, имеет ли вполне регулярный рост четная функция $L(\lambda)$, подчиненная (8.1). Мы ответим на этот частный вопрос, налагая некоторые ограничения на локализацию корней. Доказательство опирается на основной результат параграфа, положительно решающий первоначальную задачу А. Ф. Леонтьева при дополнительном условии на рост функции лишь вдоль одной прямой.

В связи с приложениями определенный интерес представляет следующий близкий вопрос. Будет ли обладать полной регулярностью роста целая функция экспоненциального типа $L(\lambda)$ с простыми нулями $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и положительным индикатором $h_L(\theta)$, удовлетворяющая более слабому, чем (8.1), условию

$$\varliminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln |L'(\lambda_n)| - \gamma\, h_L(\arg \lambda_n) \right\} \,\geq\, 0 \tag{8.4}$$

где $\gamma \in (0,1)$ — фиксированное число? (Подобные функции рассматривались в [61], [62] в более общей ситуации уточненного порядка.) На этот вопрос будет дан отрицательный ответ.

Исторические сведения и точные формулировки отдельных результатов можно найти в диссертации А. В. Братищева [26; введение, с. 34-35; гл. 2, § 2.5].

Приступим к доказательству утверждений. Первое из них служит дополнением к теоремам 1.1 и 1.2.

Теорема 8.1. *Пусть* $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *— неизмеримая последовательность положительных чисел вида* (1.1) *с конечной верхней плотностью* (1.2). *Пусть, далее,* $L(\lambda)$ *— каноническое произведение* (1.4), *построенное по последовательности* Λ, *и выполнено условие*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} + h_L(0) \right\} \le 0, \tag{8.5}$$

где $h_L(\theta)$ *— индикатор* $L(\lambda)$. *Тогда справедливы соотношения:*

$$\delta(\Lambda) = h_L(0) = 0, \tag{8.6}$$

$$h_L(\theta) = \sigma\,|\sin\theta|, \qquad \sigma > 0, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{8.7}$$

При этом $L(\lambda)$ *является функцией вполне регулярного роста на каждом из лучей* $\arg\lambda = 0$, $\arg\lambda = \pi$ *и не является функцией вполне регулярного ни на каком другом луче* $\arg\lambda = \theta$, $0 < \theta < 2\pi$.

Доказательство. Поскольку каноническое произведение $L(\lambda)$ является четным, то $h_L(0) = h_L(\pi)$. Тем самым, условие (8.5) для функции (1.4) есть конкретизация общего условия (8.3) для произвольной целой функции экспоненциального типа с простыми нулями. С учетом определения стандартного индекса конденсации (1.6) соотношение (8.5) переписывается в виде

$$\delta(\Lambda) \le -h_L(0).$$

Но всегда $\delta(\Lambda) \ge 0$ и $h_L(0) \ge 0$ (см. § 1, в частности, формулу (1.5)), откуда получаем (8.6). В силу (1.2) каноническое произведение (1.4) имеет положительный тип σ, и (8.6) влечет (8.7).

Покажем, что $L(\lambda)$ не является функцией вполне регулярного роста ни на одном из лучей $\arg\lambda = \theta$, $0 < \theta < \pi$. В силу четности $L(\lambda)$ утверждение будет справедливо и для лучей $\arg\lambda = \theta$, $\pi < \theta < 2\pi$. Допустим, рассуждая от противного, что на некотором луче $\arg\lambda = \theta_0$, $0 < \theta_0 < \pi$, функция $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост. Согласно (8.7) индикатор $h_L(\theta)$ является тригонометрическим внутри угла $0 < \arg\lambda < \pi$. Применяя [72; гл. III, § 5, теорема 6], получим, что $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост внутри всего угла $0 < \arg\lambda < \pi$. Поскольку функция $L(\lambda)$ является четной, а множество лучей вполне регулярного роста замкнуто, то $L(\lambda)$ будет функцией вполне регулярного роста. Последнее равносильно измеримости последовательности Λ, что противоречит условию.

Убедимся, наконец, что $L(\lambda)$ является функцией вполне регулярного роста на лучах $\arg\lambda = 0$, $\arg\lambda = \pi$. Рассуждения достаточно провести для положительного луча. Воспользуемся соотношением [97; теорема 1.1] (см. также формулу (2.17) из предложения 2.2 для $\omega(r) = r$):

$$\delta(\Lambda) \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{1}{r} \ln \frac{1}{L^*(r)} \equiv \delta^*(\Lambda), \tag{8.8}$$

где

$$d(r) = \min_{n\in\mathbb{N}} |r - \lambda_n|, \qquad L^*(r) = \frac{|L(r)|}{d(r)}.$$

Введем по формуле (3.16) множество кругов U с конечной суммой радиусов. Тогда множество

$$E \equiv \mathbb{R}_+ \cap U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - \frac{1}{n^2},\ \lambda_n + \frac{1}{n^2} \right)$$

будет иметь нулевую относительную меру. Как показано в § 3, справедлива оценка

$$\frac{1}{d(r)} = O(r^2), \qquad r \in \mathbb{R}_+ \setminus E.$$

Поэтому

$$\varliminf_{\substack{r\to+\infty \\ r\notin E}} \frac{\ln d(r)}{r} \geq 0. \tag{8.9}$$

Используя (8.6), (8.8), (8.9), получаем

$$0 = \delta^*(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \ln \frac{d(r)}{|L(r)|} \geq \varlimsup_{\substack{r\to+\infty \\ r\notin E}} \left\{ \frac{\ln d(r)}{r} + \frac{1}{r} \ln \frac{1}{|L(r)|} \right\}$$

$$\geq \varliminf_{\substack{r\to+\infty \\ r\notin E}} \frac{\ln d(r)}{r} + \varlimsup_{\substack{r\to+\infty \\ r\notin E}} \frac{1}{r} \ln \frac{1}{|L(r)|} \geq \varlimsup_{\substack{r\to+\infty \\ r\notin E}} \frac{1}{r} \ln \frac{1}{|L(r)|} = - \varliminf_{\substack{r\to+\infty \\ r\notin E}} \frac{\ln |L(r)|}{r},$$

откуда

$$\varliminf_{\substack{r\to+\infty \\ r\notin E}} \frac{\ln |L(r)|}{r} \geq 0 = h_L(0) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln |L(r)|}{r}.$$

Следовательно, существует обычный предел

$$\lim_{\substack{r\to+\infty \\ r\notin E}} \frac{\ln |L(r)|}{r} = 0. \tag{8.10}$$

Равенство (8.10) означает, что функция $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост на луче $\arg \lambda = 0$. Доказательство теоремы 8.1 завершено.

Следующий результат касается функций, подчиненных оценке (8.4), и показывает, что в ослабленной постановке проблема А. Ф. Леонтьева решается отрицательно.

Теорема 8.2. *Для любого фиксированного числа $\gamma \in (0,1)$ существует целая функция экспоненциального типа $L(\lambda)$ с положительным индикатором $h_L(\theta)$ и простыми нулями $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющая условию* (8.4), *но не являющаяся функцией вполне регулярного роста.*

Доказательство. Зафиксируем число $\sigma > 1$ и построим такой уточненный по Валирону порядок (по поводу определения см. [72; гл. I, § 12])

$$\rho(r) \to 1, \qquad r \to +\infty,$$

что

$$\varliminf_{r\to+\infty} l(r) = 1, \qquad \varlimsup_{r\to+\infty} l(r) = \sigma, \tag{8.11}$$

где $l(r) = r^{\rho(r)-1}$. Существование функции $\rho(r)$, удовлетворяющей (8.11), анонсировано в [23]. В качестве $\rho(r)$ можно взять, например, функцию

$$\rho(r) = 1 + \ln\sigma\,\frac{\sin^2(\ln\ln r)}{\ln r}, \qquad r > 1.$$

Несложно убедиться в выполнении для такой функции $\rho(r)$ всех свойств уточненного порядка и справедливости соотношений (8.11).

Положим $h(r) = r^{\rho(r)}$ и выберем на положительном луче регулярное относительно $\rho(r)$ (см., например, [72; гл. II, § 1], [76; гл. I, §§ 2, 3]) множество точек

$$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}: \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots,$$

имеющее $\rho(r)$-плотность

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{h(r)} = \Delta > 0.$$

Здесь $n(r)$ — число точек μ_n, попавших в промежуток $(0, r]$. Занумеровав в порядке возрастания модулей все точки вида $\pm\mu_n$, $\pm i\mu_n$, также получим регулярное множество при показателе $\rho(r)$, каноническая функция $L(\lambda)$ которого представляется в виде

$$L(\lambda) = L_1(\lambda)\,L_2(\lambda), \qquad \lambda\in\mathbb{C},$$

где

$$L_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu_n^2}\right), \qquad L_2(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda^2}{\mu_n^2}\right).$$

Индикатор функции $L(\lambda)$ при порядке $\rho(r)$ обозначим

$$H_L(\theta) \equiv \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\left|L\left(re^{i\theta}\right)\right|}{h(r)}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

а нулевое множество функции $L(\lambda)$ — через

$$\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}: \quad 0 < |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots.$$

По построению имеем

$$H_L(\theta) = \pi\Delta\left(|\sin\theta| + |\cos\theta|\right), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

причем $L(\lambda)$ является функцией вполне регулярного роста относительно уточненного порядка $\rho(r)$, и выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{h(|\lambda_n|)}\ln|L'(\lambda_n)| - H_L(\arg\lambda_n)\right\}=0. \qquad (8.12)$$

Все использованные здесь свойства функций с регулярным множеством нулей хорошо известны [76; гл. I, § 2, теорема 1.2.6].

Пусть

$$\Theta\equiv\left\{\frac{\pi j}{2}:\ j=0,1,2,3\right\}.$$

Тогда

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln\left|L\left(re^{i\theta}\right)\right|}{h(r)} = H_L(\theta), \qquad \theta\notin\Theta. \qquad (8.13)$$

Поскольку

$$\frac{\ln\left|L\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r} = \frac{\ln\left|L\left(re^{i\theta}\right)\right|}{h(r)}\,l(r),$$

то из (8.11) и (8.13) для всех $\theta\notin\Theta$ получаем

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\left|L\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r} = \sigma H_L(\theta), \qquad \varliminf_{r\to+\infty}\frac{\ln\left|L\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r} = H_L(\theta).$$

Последние равенства с учетом непрерывности индикатора означают, что при обычном порядке $\rho=1$ функция $L(\lambda)$ имеет индикатор

$$h_L(\theta)=\sigma H_L(\theta), \qquad 0\le\theta\le 2\pi,$$

и не является функцией вполне регулярного роста (относительно $\rho = 1$), ибо в противном случае из-за отсутствия у $L(\lambda)$ нулей на лучах $\arg\lambda=\theta$, $\theta\notin\Theta$, существовал бы предел

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln\left|L\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r} = h_L(\theta), \qquad \theta\notin\Theta.$$

Привлекая, наконец, соотношения (8.11), (8.13) и учитывая положительность индикатора

$$H_L(\theta)=\frac{1}{\sigma}\,h_L(\theta),$$

получим

$$\varliminf_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{|\lambda_n|}\ln|L'(\lambda_n)| - \frac{1}{\sigma}\,h_L(\arg\lambda_n)\right\}$$

$$=\varliminf_{n\to\infty}\left\{\frac{l(|\lambda_n|)}{h(|\lambda_n|)}\ln|L'(\lambda_n)| - l(|\lambda_n|)H_L(\arg\lambda_n) + (l(|\lambda_n|)-1)\,H_L(\arg\lambda_n)\right\}$$

$$\ge\varliminf_{n\to\infty}\left\{l(|\lambda_n|)\left[\frac{1}{h(|\lambda_n|)}\ln|L'(\lambda_n)| - H_L(\arg\lambda_n)\right]\right\}$$

$$+ \varliminf_{n\to\infty} \left\{ H_L(\arg\lambda_n)\,(l(|\lambda_n|) - 1) \right\} \geq 0.$$

Итак,

$$\varliminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln|L'(\lambda_n)| - \frac{1}{\sigma}\, h_L(\arg\lambda_n) \right\} \geq 0.$$

Поскольку индикатор $h_L(\theta)$ положителен, а число $\sigma > 1$ произвольно, то нужное построение, а с ним и доказательство теоремы завершено.

Центральный результат параграфа удобно вначале получить в ослабленном виде, а после доказать основную теорему в полном объеме.

Предложение 8.1. *Пусть целая функция экспоненциального типа $L(\lambda)$ с множеством простых нулей $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и положительным индикатором $h_L(\theta)$ удовлетворяет условию* (8.1). *Пусть на некоторой прямой l, проходящей через точку $\lambda = 0$, для функции $L(\lambda)$ выполнена оценка*

$$\inf_{\lambda\in S} |L(\lambda)| > 0, \tag{8.14}$$

где S — относительно плотное по мере множество на l. Тогда $L(\lambda)$ является функцией вполне регулярного роста.

Доказательство. Обозначим через G содержащую начало координат выпуклую ограниченную область в $\mathbb{C}$ с *опорной функцией*

$$h_G(\theta) \equiv \sup_{z\in G} \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}) = h_L(-\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Такая область однозначно восстанавливается по индикатору $h_L(\theta) > 0$ согласно формуле

$$G = \bigcap_{0\leq\theta\leq 2\pi} \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}) < h_L(-\theta) \right\}.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(\lambda, z) \equiv e^{\lambda z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)\, e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)\,(\lambda - \lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad z \in G.$$

Из свойств индикаторов и суммы интерполяционного ряда Лагранжа сразу следуют перечисленные ниже свойства функции $\Phi(\lambda, z)$. Именно, при фиксированном $z \in G$ функция $\Phi(\lambda, z)$ является по переменной λ целой функцией экспоненциального типа с индикатором

$$h_{z,\Phi}(\theta) \leq h_L(\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

При фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ функция $\Phi(\lambda, z)$ является аналитической по z в области G. Кроме того, для всех $z \in G$ выполнено соотношение

$$\Phi(\lambda_n, z) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому по теореме о категориях [72; гл. I, § 9] функция

$$\Psi(\lambda,\, z) \equiv \frac{\Phi(\lambda, z)}{L(\lambda)} = \frac{e^{\lambda z}}{L(\lambda)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)\,(\lambda - \lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad z \in G,$$

является целой функцией экспоненциального типа по переменной λ при фиксированном $z \in G$ и аналитической по переменной z в области G при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$. Покажем, что $\Psi(\lambda,\, z) \equiv 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $z \in G$.

Пусть K — произвольный содержащий точку $\lambda = 0$ отрезок, лежащий в области G так, что его зеркальное отражение относительно вещественной оси перпендикулярно прямой l. Через $h_K(\theta)$ обозначим опорную функцию компакта K. Для всех $\lambda \in l \setminus \Lambda$ справедлива оценка

$$\max_{z \in K} |\Psi(\lambda,\, z)| \le \frac{\max\limits_{z \in K} |e^{\lambda z}|}{|L(\lambda)|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\max\limits_{z \in K} |e^{\lambda_n z}|}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda - \lambda_n|}$$

$$= \frac{1}{|L(\lambda)|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{|\lambda_n|\, h_K(\arg \lambda_n)}}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda - \lambda_n|}. \tag{8.15}$$

Обозначим через U объединение кругов

$$U_n = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda - \lambda_n| < e^{-\varepsilon\,|\lambda_n|} \right\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

в определении которых число $\varepsilon > 0$ зафиксировано настолько малым, чтобы выполнялось условие

$$h_K(\theta) + 3\varepsilon \le h_L(\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{8.16}$$

Поскольку $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа, то последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность

$$\overline{\Delta}(\Lambda) \equiv \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} < +\infty.$$

Поэтому с некоторой положительной константой D выполнена оценка

$$|\lambda_n| \ge D\, n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

показывающая, что справедливо соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon\,|\lambda_n|} < \infty. \tag{8.17}$$

Замечая, что множество

$$\{\, |\lambda| :\ \lambda \in l \cap U \,\}$$

либо пусто, либо является объединением интервалов с конечной суммой длин, делаем вывод, что множество

$$S_1 \equiv S \setminus U$$

относительно плотно по мере на прямой l. В силу неравенства (8.14) имеем

$$\inf_{\lambda \in S_1} |L(\lambda)| > 0. \tag{8.18}$$

Условие (8.1) гарантирует, что с некоторой константой $A > 0$ справедлива оценка

$$\frac{1}{|L'(\lambda_n)|} \leq A\, e^{|\lambda_n|\,(\varepsilon - h_L(\arg \lambda_n))}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{8.19}$$

Учитывая (8.15), (8.16), (8.19) и определение множества U, приходим к соотношению

$$\max_{z \in K} |\Psi(\lambda,\, z)| \leq \frac{1}{|L(\lambda)|} + A \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon\,|\lambda_n|}, \qquad \lambda \in l \setminus U. \tag{8.20}$$

Привлекая (8.17), (8.18), из (8.20) заключаем, что при любом фиксированном значении $z \in K$ модуль функции $\Psi(\lambda,\, z)$ ограничен на множестве $\lambda \in S_1$, относительно плотном по мере на прямой l. Согласно лемме Б. Я. Левина [74] модуль этой функции ограничен на всей прямой l. Но тогда при любом фиксированном $z \in K$ функция $\Psi(\lambda,\, z)$ является по переменной λ целой функцией вполне регулярного роста. Обозначим через $h_{z,\,\Psi}(\theta)$ индикатор этой функции и воспользуемся представлением

$$\Psi(\lambda,\, z)\, L(\lambda) = e^{\lambda z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)\, e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)\,(\lambda - \lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad z \in K, \tag{8.21}$$

учитывая что индикатор произведения в левой части (8.21) равен сумме индикаторов сомножителей. Переходя к индикаторам, получаем соотношение

$$h_{z,\,\Psi}(\theta) + h_L(\theta) \leq h_L(\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Следовательно,

$$h_{z,\,\Psi}(\theta) \equiv 0, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \qquad z \in K.$$

Таким образом, при любом $z \in K$ модуль $|\Psi(\lambda,\, z)|$ ограничен на прямой $\lambda \in l$, и $\Psi(\lambda,\, z)$ является целой функцией нулевого экспоненциального типа. Отсюда по принципу Фрагмена-Линделефа в форме следствия теоремы 22 из [72; гл. I, § 14] получаем

$$\Psi(\lambda,\, z) \equiv c_z, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad z \in K. \tag{8.22}$$

Зафиксируем $z \in K$ и вернемся к оценке

$$|\Psi(\lambda,\, z)| \leq \frac{1}{|L(\lambda)|} + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)\,(\lambda - \lambda_n)} \right|, \qquad \lambda \in l \setminus \Lambda. \tag{8.23}$$

Второе слагаемое в правой части (8.23) стремится к нулю при $\lambda \to \infty$, $\lambda \notin U$. Выберем согласно теореме В. Бернштейна (см., например, [72; гл. I, § 18, теорема 31]) на одном из двух лучей l_{θ_0}, составляющих прямую l, последовательность точек

$$\mu_j = r_j e^{i\theta_0} \to \infty, \qquad j \to \infty,$$

так, чтобы $\mu_j \notin U$ и

$$|L(\mu_j)| \, > \, \exp\left(\frac{1}{2}\, h_L(\theta_0)\, r_j\right), \qquad j \in \mathbb{N}.$$

В результате получим

$$\frac{1}{L(\mu_j)} \to 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)\,(\mu_j - \lambda_n)} \to 0, \qquad j \to \infty.$$

С учетом последних соотношений (8.22), (8.23) дают

$$\Psi(\mu_j,\, z) \,\equiv\, 0, \qquad j \in \mathbb{N}, \qquad z \in K. \tag{8.24}$$

Сочетая (8.22), (8.24) с теоремой единственности для аналитических функций, приходим к тождеству

$$\Psi(\lambda,\, z) \,\equiv\, 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad z \in G. \tag{8.25}$$

Подставляя (8.25) в (8.21), видим, что каждая функция $e^{\lambda z}$ допускает разложение

$$e^{\lambda z} \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)\, e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)\,(\lambda - \lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad z \in G, \tag{8.26}$$

по системе экспонент

$$E_\Lambda \,\equiv\, \left\{e^{\lambda_n z}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \qquad z \in G,$$

где коэффициенты разложения полчинены условию (8.1). Применяя результаты монографии [76; гл. IV, § 6] или обзора [57; гл. III, § 1], из (8.26) получим, что $L(\lambda)$ есть функция вполне регулярного роста. Предложение 8.1 доказано.

Оказывается, предложение 8.1 сохраняет силу при менее жестком, чем (8.14), дополнительном условии на функцию $L(\lambda)$. Именно, можно разрешить функции $L(\lambda)$ стремиться к нулю (но не слишком быстро) вдоль некоторого относительно плотного по мере множества на прямой. Дадим точную формулировку результата.

Теорема 8.3. *Пусть целая функция экспоненциального типа* $L(\lambda)$ *с множеством простых нулей* $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и положительным индикатором* $h_L(\theta)$ *удовлетворяет условию* (8.1). *Пусть на некоторой прямой* l, *проходящей через точку* $\lambda = 0$, *для функции* $L(\lambda)$ *выполнена оценка*

$$\inf\,\{\, |L(\lambda)| \exp\omega(|\lambda|) : \; \lambda \in S \,\} \,>\, 0, \tag{8.27}$$

где S *— относительно плотное по мере множество на* l, *а* $\omega(r)$ *— положительная возрастающая (не обязательно строго) при* $r \geq a$ *функция, подчиненная требованию* (1.10). *Тогда* $L(\lambda)$ *является функцией вполне регулярного роста.*

Доказательство. Сведем ситуацию к рассмотренной в предложении 8.1. Выберем число $\varepsilon > 0$ и определим вес

$$\omega_\varepsilon(r) \equiv (1+\varepsilon)\,\omega(r), \qquad r \ge a.$$

Новая функция $\omega_\varepsilon(r)$ подчинена, как и $\omega(r)$, требованию (1.10). Применяя теорему Ингама-Левинсона (см. [105; § 3.3]), построим четную целую функцию экспоненциального типа вполне регулярного роста $F(\lambda)$, имеющую только вещественные нули, индикаторную диаграмму в виде отрезка мнимой оси и удовлетворяющую оценке

$$|F(r)| \le \exp\left(-\omega_\varepsilon(r)\right), \qquad r > r_0. \tag{8.28}$$

При этом число $\varepsilon > 0$ можно взять настолько малым, чтобы выполнялось соотношение

$$h_F(\theta) \le h_L(\theta) - 4\varepsilon, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{8.29}$$

Введем объединение кругов с конечной суммой радиусов

$$U \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda - \lambda_n| < e^{-\varepsilon\,|\lambda_n|}\right\}$$

и функцию

$$\Phi(\lambda) \equiv \frac{F(\lambda)}{L(\lambda)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{8.30}$$

Используя экспоненциальный рост $F(\lambda)$, получим, что с некоторой положительной константой B справедливы неравенства

$$|F(\lambda_n)| \le B\,\exp\left\{(h_F(\arg\lambda_n)+\varepsilon)|\lambda_n|\right\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Учитывая еще (8.19), (8.29), для всех $\lambda \notin U$ и $n \in \mathbb{N}$ выводим оценку

$$\left|\frac{F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)\,(\lambda-\lambda_n)}\right| \le \frac{B}{A}\,\exp\left\{(h_F(\arg\lambda_n) - h_L(\arg\lambda_n) + 3\varepsilon)|\lambda_n|\right\} \le \frac{B}{A}\,e^{-\varepsilon\,|\lambda_n|}.$$

Отсюда и из теоремы о категориях стандартным образом заключаем, что $\Phi(\lambda)$, определенная посредством (8.30), есть целая функция экспоненциального типа.

Будем считать, что прямая l из условия теоремы совпадает с вещественной осью, и, следовательно, $S \subset \mathbb{R}$, что, разумеется, общности рассуждений не нарушает. Серия дальнейших шагов покажет, что $\Phi(\lambda) \equiv 0$. Из (8.27), (8.28) вытекает существование такой константы $M > 0$, что

$$\left|\frac{F(\lambda)}{L(\lambda)}\right| \le M\,\exp\left\{-\omega_\varepsilon(|\lambda|) + \omega(|\lambda|)\right\} = M\,e^{-\varepsilon\,\omega_\varepsilon(|\lambda|)}, \qquad \lambda \in S.$$

Значит, при $\lambda \in S \setminus U$ справедлива оценка

$$|\Phi(\lambda)| \le M\,e^{-\varepsilon\,\omega_\varepsilon(|\lambda|)} + \frac{B}{A}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon\,|\lambda_n|}.$$

Итак, целая функция экспоненциального типа $\Phi(\lambda)$ ограничена на относительно плотном по мере множестве $S \setminus U$, а по лемме Б. Я. Левина из [74] — и на всей прямой $\mathbb{R}$. Следовательно, функция $\Phi(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост. Этот факт мы используем ниже при нахождении ее индикатора, применяя правило «индикатор произведения равен сумме индикаторов». Для сокращения записи полагаем

$$\Psi(\lambda) \equiv L(\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)\,(\lambda - \lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

отмечая, что $\Psi(\lambda)$ есть целая функция экспоненциального типа с индикатором

$$h_\Psi(\theta) \le h_L(\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Проанализируем теперь тождество

$$F(\lambda) = \Psi(\lambda) + \Phi(\lambda)\, L(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Согласно (8.29) имеем $h_F(\theta) < h_L(\theta)$ при всех θ. Если бы при каком-то значении θ_0 выполнялось неравенство $h_\Phi(\theta_0) > 0$, то мы могли бы записать

$$h_F(\theta_0) = \max\{h_\Psi(\theta_0),\, h_\Phi(\theta_0) + h_L(\theta_0)\} = h_\Phi(\theta_0) + h_L(\theta_0) > h_L(\theta_0),$$

приходя к противоречию. Следовательно, функция $\Phi(\lambda)$ имеет нулевой экспоненциальный тип. Более того, по теореме Фрагмена-Линделефа $\Phi(\lambda)$ есть тождественная константа, так как величина $|\Phi(\lambda)|$ ограничена на $\mathbb{R}$. Но при $\lambda \to \infty$ по множеству $S \setminus U$ имеем

$$|\Phi(\lambda)| \le M\, e^{-\varepsilon\, \omega_\varepsilon(|\lambda|)} + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \right| \to 0.$$

Итак, $\Phi(\lambda) \equiv 0$. Согласно (8.30) для мероморфной функции $F(\lambda)/L(\lambda)$ справедливо разложение на простые дроби

$$\frac{F(\lambda)}{L(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)\,(\lambda - \lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda.$$

Правая часть полученного соотношения ограничена на множестве $\mathbb{C} \setminus U$, поэтому найдется такая константа $C > 0$, что справедлива оценка

$$|L(\lambda)| \ge C\, |F(\lambda)|, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus U.$$

Но для функция $F(\lambda)$ существует предел по мнимой оси

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\ln |F(ir)|}{r} > 0.$$

Таким образом, на мнимой оси можно выбрать относительно плотное по мере множество S_0, на котором

$$\inf_{\lambda \in S_0} |L(\lambda)| > 0.$$

Применяя предложение 8.1, получим, что функция $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост. Теорема 8.3 доказана.

Приведем еще один результат, вытекающий из предложения 8.1.

Теорема 8.4. *Пусть четная или нечетная целая функция экспоненциального типа* $L(\lambda)$ *с множеством простых нулей* $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и положительным индикатором* $h_L(\theta)$ *удовлетворяет условию* (8.1). *Пусть при каких-либо* $0 \le \theta_0 \le 2\pi$ *и* $D > 0$ *множество* Λ *содержится в гиперболических секторах*

$$\Gamma(\theta_0, D) \equiv \left\{\lambda \in \mathbb{C}:\ \operatorname{Re}\left(\lambda e^{-i\theta_0}\right)^2 \le D\right\}.$$

Тогда $L(\lambda)$ *является функцией вполне регулярного роста.*

Доказательство. Не умаляя общности рассуждений, будем предполагать, что функция $L(\lambda)$ является четной. Тогда

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Поскольку $\Lambda \subset \Gamma(\theta_0, D)$, то при всех $n \in \mathbb{N}$ верна оценка

$$|\lambda_n|^2 \cos(2(\arg\lambda_n - \theta_0)) \le D.$$

С учетом этого оценим снизу $|L(\lambda)|$ на луче $l_{\theta_0} \equiv \{\lambda \in \mathbb{C}:\ \arg\lambda = \theta_0\}$. Для произвольного $\lambda \in l_{\theta_0}$, $|\lambda| \ge \sqrt{2D}$, имеем

$$\begin{aligned} |L(\lambda)| &= \prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{1 - 2\left|\frac{\lambda}{\lambda_n}\right|^2\cos(2(\arg\lambda_n - \theta_0)) + \left|\frac{\lambda}{\lambda_n}\right|^4} \\ &\ge \prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{1 + \frac{|\lambda|^2}{|\lambda_n|^4}\left(|\lambda|^2 - 2D\right)} \ge 1. \end{aligned}$$

В силу четности $L(\lambda)$ оценка

$$|L(\lambda)| \ge 1, \qquad |\lambda| \ge \sqrt{2D},$$

выполнена на всей прямой l, содержащей луч l_{θ_0}. По предложению 8.1 функция $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост. Теорема 8.4 доказана.

Следствие. *Пусть четная или нечетная целая функция экспоненциального типа* $L(\lambda)$ *с множеством простых нулей* $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и положительным индикатором* $h_L(\theta)$ *удовлетворяет условию* (8.1). *Пусть при каком-либо* $0 \le \theta_0 \le 2\pi$ *множество* Λ *содержится в углах*

$$\theta_0 + \frac{\pi}{4} \le \arg\lambda \le \theta_0 + \frac{3\pi}{4}, \qquad \theta_0 + \frac{5\pi}{4} \le \arg\lambda \le \theta_0 + \frac{7\pi}{4}.$$

Тогда $L(\lambda)$ *является функцией вполне регулярного роста.*

Доказательство. По условию $\Lambda \subset \Gamma(\theta_0, D)$ для любого $D > 0$. Остается применить теорему 8.4.

К результатам этого параграфа примыкает следующая теорема типа Левинсона.

Предложение 8.2. *Пусть* $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *— две последовательности чисел вида* (1.1) *с положительными нижними плотностями* (1.3) *и конечными верхними плотностями* D_1 *и* D_2 *соответственно. Пусть бесконечное произведение*

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\nu_n^2}\right)\left(1 + \frac{\lambda^2}{\mu_n^2}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

удовлетворяет условиям

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln|L'(\nu_n)|}{\nu_n} = h_L(0), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln|L'(i\mu_n)|}{\mu_n} = h_L(\pi/2).$$

Пусть $\Phi(\lambda)$ *— целая функция экспоненциального типа* $< \pi\sqrt{D_1^2 + D_2^2}$, *причем*

$$\alpha_1 \equiv \max\left\{ \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|\Phi(\nu_n)|}{\nu_n},\ \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|\Phi(-\nu_n)|}{\nu_n} \right\} < \pi D_2,$$

$$\alpha_2 \equiv \max\left\{ \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|\Phi(i\mu_n)|}{\mu_n},\ \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|\Phi(-i\mu_n)|}{\mu_n} \right\} < \pi D_1.$$

Тогда выполняются соотношения

$$\sup\left\{ \frac{h_\Phi(\theta)}{h_L(\theta)} : 0 \le \theta \le 2\pi \right\} = \max\left\{ \frac{\alpha_1}{\pi D_2}, \frac{\alpha_2}{\pi D_1} \right\},$$

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} |\,\Phi(\lambda)| = \max\left\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} |\Phi(\pm\nu_n)|,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |\Phi(\pm i\mu_n)| \right\}.$$

Доказательство. Покажем, что $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост. Действительно, $L(\lambda)$ является четной целой функцией экспоненциального типа, все ее нули простые и лежат на вещественной и мнимой осях. Кроме того, выполняется условие (8.1). Проверим, что индикатор $h_L(\theta)$ положителен. Согласно [72; с. 245] справедливо неравенство

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\nu_L(r)}{r} \le \frac{1}{2\pi}\left[h_L\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_L\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right],$$

где $\nu_L(r)$ — число нулей $L(\lambda)$ в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r/2| \le r/2\}$. Поэтому

$$h_L\left(\frac{\pi}{2}\right) \ge \pi \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{\nu_n} > 0.$$

Аналогично, $h_L(0) > 0$. Следовательно, $h_L(\theta) > 0$ для всех θ. По следствию из теоремы 8.4 функция $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост. Но тогда последовательности $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ имеют плотности D_1 и D_2 соответственно. Доказательство завершается применением [62; теорема 10].

Установленное утверждение уточняет часть цитированного выше результата Ю. Ф. Коробейника [62; теорема 10 при $\gamma = 1$]. Отметим еще вытекающее из предложения 8.2 обобщение известной теоремы Левинсона (см., например, [72; с. 267]).

Следствие. *Пусть числа* ν_n *и* μ_n *такие же, как и в предложении* 8.2. *Пусть целая функция экспоненциального типа* $\Phi(\lambda)$ *ограничена на множестве точек* $\pm\nu_n$, $\pm i\mu_n$, *а ее тип меньше числа* $\pi\sqrt{D_1^2+D_2^2}$. *Тогда* $\Phi(\lambda)$ *есть тождественная константа.*

В заключение параграфа отметим, что в условиях предложения 8.1 оценке (8.14) удовлетворяет целая функция, обратная величина которой раскладывается на простые дроби. Представления функций рядами простых дробей изучаются в третьей главе диссертации. Сейчас же мы дадим одно утверждение, относящееся к разложению на простые дроби. Этот результат будет применен в теории представляющих систем экспонент (см. § 9).

Теорема 8.5. *Пусть* $L(\lambda)$ *— целая функция экспоненциального типа с множеством простых нулей* $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и положительным индикатором* $h_L(\theta)$, *удовлетворяющая условию* (8.3) *и допускающая разложение*

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,(\lambda-\lambda_n)}, \qquad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\Lambda. \tag{8.31}$$

Тогда $L(\lambda)$ *является функцией вполне регулярного роста.*

Доказательство. Пусть U — множество кругов с конечной суммой радиусов, определенное в (3.16). Тогда из (8.31) с учетом (8.3) имеем

$$\frac{1}{|L(\lambda)|} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{|L'(\lambda_n)|} \equiv \frac{1}{C}, \qquad \lambda\in\mathbb{C}\setminus U.$$

В частности, на множестве $S\equiv\mathbb{R}\setminus U$, относительно плотном по мере, с положительной константой C верна оценка

$$|L(\lambda)| \ge C, \qquad \lambda\in S.$$

По предложению 8.1 $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост. Теорема 8.5 доказана.

§ 9. Абсолютно представляющие системы экспонент

Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ с опорной функцией $h(-\theta)$ и $A(G)$ — пространство всех аналитических в области G функций с топологией равномерной сходимости на компактах из G. Возьмем какую-либо последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно различных комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности и составим систему экспонент

$$E_\Lambda \equiv \left\{e^{\lambda_n z}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \qquad z\in G.$$

Следуя общему определению [57], называем E_Λ *абсолютно представляющей системой* (АПС) в $A(G)$, если каждую функцию $f(z)$ из $A(G)$ можно представить (не обязательно единственным образом) в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{\lambda_n z}, \qquad c_n\in\mathbb{C}, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{9.1}$$

сходящегося абсолютно по топологии пространства $A(G)$. Будем также говорить, как в [57], что E_Λ — *эффективно абсолютно представляющая система* (ЭАПС) в $A(G)$, если E_Λ является АПС в $A(G)$, и для каждой функции $f(z)\in A(G)$ существует способ нахождения коэффициентов хотя бы одного разложения в ряд (9.1).

Первые результаты об АПС и ЭАПС экспонент принадлежат А. Ф. Леонтьеву [76]. Один из них мы сейчас сформулируем. Для этого возьмем какую-нибудь целую функцию экспоненциального типа $L(\lambda)$ с простыми нулями λ_n, $n\in\mathbb{N}$, индикатором $h_L(\theta)=h(\theta)$, и образуем систему функций

$$\psi_n(t) \,=\, \frac{1}{L'(\lambda_n)}\int\limits_0^\infty \frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\,e^{-\lambda t}\,d\lambda, \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{9.2}$$

где интегрирование происходит по лучу $\arg\lambda=\theta$. Как доказано в монографии [76; гл. IV, § 1], функции $\psi_n(t)$ регулярны вне $\overline{G}$, и (9.2) — биортогональная к $\left\{e^{\lambda_n z}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ система. Далее, каждой функции $f(z)\in A(\overline{G})$, т. е. аналитической на компакте $\overline{G}$, сопоставляется ряд

$$f(z)\sim\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,e^{\lambda_n z}, \qquad c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(t)\,\psi_n(t)\,dt, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{9.3}$$

где Γ — контур, охватывающий $\overline{G}$, на котором и внутри которого $f(z)$ — аналитическая функция. Символом $[1,\,h(\theta))$ будем обозначать множество всех целых функций экспоненциального типа, индикаторы которых меньше, чем $h(\theta)$, а $[1,\,0]$ есть класс целых функций экспоненциального типа нуль.

Теорема 9.1 [76; часть теоремы из Дополнения]. *Для того чтобы ряд экспонент* (9.3) *сходился в области* G *к своей функции* $f(z)$, *какова бы ни была* $f(z)\in A(\overline{G})$, *необходимо и достаточно, чтобы любая функция* $\Phi(\lambda)$ *из* $[1,\,h(\theta))$ *допускала представление*

$$\Phi(\lambda)\,=\,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\,\frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}, \qquad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{9.4}$$

В [76] указан также целый ряд других равносильных (9.4) условий сходимости ряда (9.3) (абсолютно по топологии пространства $A(G)$) именно к $f(z)$. Одно из них: $L(\lambda)$ является функцией вполне регулярного роста, и выполняется соотношение (8.3). В работе [60] такая функция $L(\lambda)$ названа $(1,\,h(\theta))$-*интерполирующей.*

Теорема 9.1 доставляет примеры ЭАПС в пространстве $A(\overline{G})$ с индуцированной из $A(G)$ топологией. Из результатов [76], [57] следует, что система экспонент с показателями в нулях $(1,h(\theta))$-интерполирующей функции будет образовывать ЭАПС и в пространстве $A(G)$. Мы покажем, что для сходимости ряда (9.3) в G к своей функции $f(z)$ достаточно в условии (9.4) взять лишь одну функцию $\Phi(\lambda)\equiv 1$. Тем самым выявляется важная роль, которую в теории АПС экспонент играют разложения порождающей функции на простые дроби.

Теорема 9.2. *Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, $0 \in G$, и $h(-\theta)$ — ее опорная функция. Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с индикатором $h(\theta)$ и множеством простых нулей $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Следующие условия равносильны:*

1) *ряд* (9.3), *составленный по произвольной функции $f(z) \in A(\overline{G})$, сходится абсолютно в $A(G)$ к своей функции $f(z)$;*

2) *справедливо разложение* (8.31), *коэффициенты которого удовлетворяют условию* (8.3);

3) *мероморфная функция*

$$\varphi(\lambda) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,(\lambda-\lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}\setminus\Lambda,$$

с коэффициентами, подчиненными (8.3), *не имеет нулей.*

Доказательство. Достаточно установить справедливость только импликаций $2) \Rightarrow 1)$ и $3) \Rightarrow 2)$, поскольку 2) с очевидностью влечет 3), а $1) \Rightarrow 2)$ имеет место по теореме 9.1.

Итак, пусть при условии (8.3) справедливо представление (8.31). Тогда по теореме 8.5 функция $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост. Таким образом, $L(\lambda)$ является $(1, h(\theta))$-интерполирующей функцией. Отсюда, как отмечалось после формулировки теоремы 9.1, уже следует условие (9.4). Поэтому $2) \Rightarrow 1)$.

Докажем, что $3) \Rightarrow 2)$. Из утверждения 3) легко выводится, что

$$\Psi(\lambda) \,\equiv\, \varphi(\lambda)\,L(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_n)\,(\lambda-\lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{9.5}$$

есть целая функция экспоненциального типа с индикатором

$$h_\Psi(\theta) \,\le\, h(\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

не имеющая нулей. Следовательно, найдутся числа $a \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, такие, что

$$\Psi(\lambda) \,=\, A\,e^{a\lambda}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{9.6}$$

причем $\Psi(\lambda_n) = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. $e^{a\lambda_n} \,=\, A^{-1}$ для всех n. Отсюда

$$\operatorname{Re}(a\lambda_n) \,=\, -\ln|A|, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{9.7}$$

Допустим, что $a \ne 0$. Тогда предыдущие равенства означают, что точки λ_n лежат на одной прямой. Сделав линейную замену аргумента, перейдем от функции $L(\lambda)$ к новой функции с вещественными нулями. По лемме 8.1 новая функция имеет положительный индикатор и удовлетворяет условию (8.3). Поэтому будем сразу считать, что $\Lambda \subset \mathbb{R}$. Применяя теорему Адамара, разложим $L(\lambda)$ в бесконечное произведение:

$$L(\lambda) \,=\, \lambda^s\,e^{b\lambda+d} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n}}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $s \in \{0,\, 1\}$, $b,\, d \in \mathbb{C}$. Положим

$$L_1(\lambda) \,\equiv\, e^{-(i\,\mathrm{Im}\, b)\,\lambda}\, L(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Используя вещественность λ_n и положительность индикатора $h_L(\theta)$, получим соотношения

$$|L_1(i\mu)| \,=\, |\mu|^s\, e^{\mathrm{Re}\, d} \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\lambda_n^2}} \,\geq\, |\mu|^s\, e^{\mathrm{Re}\, d}, \qquad \mu \in \mathbb{R},$$

$$h_{L_1}\left(\frac{\pi}{2}\right) \,=\, h_{L_1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \,>\, 0.$$

Учитывая эти соотношения и лемму 8.1, видим, что при подходящем выборе числа $c \in \mathbb{R}$ функция

$$L_2(\lambda) \,\equiv\, e^{c\,\lambda}\, L_1(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

удовлетворяет всем предположениям предложения 8.1. Применяя последнее, убеждаемся в том, что $L_2(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост. Следовательно, $L(\lambda)$ также есть функция вполне регулярного роста. Поскольку к тому же все нули функции $L(\lambda)$ являются вещественными, то ее индикаторная диаграмма обязана быть отрезком (см. [72; гл. V, § 4]). Получено противоречие с условием

$$h_L(\theta) \,>\, 0, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Итак, в соотношении (9.7) $a \,=\, 0$, $A \,=\, 1$, и (9.6) дает $\Psi(\lambda) \,\equiv\, 1$. Но тогда из (9.5) получаем (8.31). Условие 2) выполнено. Доказательство теоремы 9.2 завершено.

Для удобства формулировок последующих результатов введем в рассмотрение некоторые классы целых функций. Пусть по-прежнему зафиксированы последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно различных комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности и ограниченная выпуклая область G с опорной функцией $h(-\theta)$. Обозначим через $M(\Lambda;\, h)$ класс всех целых функций экспоненциального типа $L(\lambda)$ таких, что

$$h_L(\theta) \,\leq\, h(\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

и все точки λ_n являются простыми нулями $L(\lambda)$. Если $L \in M(\Lambda;\, h)$, то у $L(\lambda)$ могут быть нули, отличные от λ_n, причем произвольной кратности. Пусть еще $\widetilde{M}(\Lambda;\, h)$ обозначает подкласс тех функций $L \in M(\Lambda;\, h)$, для которых множество $\Lambda(L) \setminus \Lambda$ либо пусто, либо конечно, либо имеет нулевую плотность. Здесь $\Lambda(L)$ есть множество всех нулей функции $L(\lambda)$.

Сформулируем принадлежащий Ю. Ф. Коробейнику критерий того, что система экспонент E_Λ, построенная по последовательности Λ, является АПС в пространстве $A(G)$.

Теорема 9.3 [57; гл. III, § 1, теорема 6 при $\rho = 1$]. *Пусть класс $M(\Lambda;\, h)$ не пуст, и $L(\lambda) \in M(\Lambda;\, h)$. Система E_Λ является АПС в $A(G)$ в том и только том случае, если найдется функция $D(\lambda) \in [1,\, 0] \setminus \{0\}$ такая, что*

$$D(\lambda)\, e^{\lambda z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\, \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n}\, e^{\lambda_n z}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad z \in G, \tag{9.8}$$

где ряд сходится абсолютно по топологии пространства $A(G)$. Далее, для того чтобы E_Λ была АПС в $A(G)$, необходимо, а если $\Lambda(L) = \Lambda$, то и достаточно, чтобы выполнялось условие: $L(\lambda)$ имеет индикатор $h(\theta)$, вполне регулярный рост, и существует функция $D(\lambda) \in [1,\, 0] \setminus \{0\}$ такая, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{D(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \right| + h(\arg \lambda_n) \right\} \le 0. \tag{9.9}$$

Для области G, содержащей точку $z = 0$, теорема 9.3, как мы сейчас покажем, допускает усиление в том же ключе, что и теорема 9.1.

Теорема 9.4. *Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, $0 \in G$, и $h(-\theta)$ — опорная функция области G. Пусть, далее, класс $M(\Lambda;\, h)$ не пуст, и $L \in M(\Lambda;\, h)$. Система E_Λ является АПС в $A(G)$ тогда и только тогда, когда с некоторой отличной от тождественного нуля функцией $D(\lambda)$ из $[1,\, 0]$ справедливо разложение*

$$\frac{D(\lambda)}{L(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)\,(\lambda - \lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda, \tag{9.10}$$

коэффициенты которого подчиняются условию (9.9).

Доказательство. Необходимость доказывается совсем просто. Если в предположениях теоремы E_Λ — АПС в $A(G)$, то справедливо разложение (9.8) из теоремы 9.3. В частности, при $z = 0 \in G$ получается разложение (9.10), причем условие (9.9) равносильно абсолютной сходимости по топологии пространства $A(G)$ ряда в правой части равенства (9.8) при фиксированном $\lambda \notin \Lambda$.

Обратно, пусть при условии (9.9) справедливо разложение (9.10). Допустим, что $\Lambda(L) \setminus \Lambda \neq \varnothing$ и $\lambda_0 \in \Lambda(L) \setminus \Lambda$. Обозначим символом $\Lambda(D)$ множество всех нулей функции $D(\lambda)$. Из (9.10) легко видеть, что в точке λ_0 функция $D(\lambda)$ должна обратиться в нуль, откуда вытекает включение

$$\Lambda(L) \setminus \Lambda \subseteq \Lambda(D).$$

Следовательно, множество $\Lambda(L) \setminus \Lambda$ имеет не более чем нулевую плотность, и $L \in \widetilde{M}(\Lambda;\, h)$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(\lambda,\, z) \equiv D(\lambda)\, e^{\lambda z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\, \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n}\, e^{\lambda_n z}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad z \in G, \tag{9.11}$$

которая в силу (9.9) является аналитической по z в области G при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$, а также целой по λ функцией экспоненциального типа с индикатором, не превосходящим $h(\theta)$, при фиксированном $z \in G$. Важно, что

$$\Phi(\lambda,\, z) = 0, \qquad \lambda \in \Lambda(L), \qquad z \in G.$$

Последнее соотношение позволяет заключить, что функция

$$\Psi(\lambda,\, z) \;\equiv\; \frac{\Phi(\lambda,\, z)}{L(\lambda)} \;=\; \frac{D(\lambda)}{L(\lambda)}\, e^{\lambda z} \;-\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\, \frac{e^{\lambda_n z}}{\lambda - \lambda_n}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad z \in G,$$

является при фиксированном $z \in G$ по переменной λ целой функцией экспоненциального типа.

Покажем, что

$$\Psi(\lambda,\, z) \;\equiv\; 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad z \in G. \tag{9.12}$$

Используя условие $0 \in G$, выберем отрезок K мнимой оси, лежащий в G, и число $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$h_K(\theta) + 3\varepsilon \;\le\; h(\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

где $h_K(-\theta)$ — опорная функция отрезка K. Обозначим через U объединение кругов

$$U_n = \left\{\lambda \in \mathbb{C}:\; |\lambda - \lambda_n| \,<\, e^{-\varepsilon|\lambda_n|}\right\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

с конечной суммой радиусов. На основании представления (9.10) с учетом (9.9) и выбора числа $\varepsilon > 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R} \setminus U$ и $z \in K$ можно записать оценку

$$|\Psi(\lambda,\, z)| \;\le\; \left|\frac{D(\lambda)}{L(\lambda)}\right| \;+\; A \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{\, (2\varepsilon - h(\arg\lambda_n) + h_K(\arg\lambda_n))|\lambda_n| \,\right\} \;\le\; B,$$

причем положительные числа A, B не зависят от аргументов функции Ψ. Полученной оценки достаточно, чтобы по схеме, неоднократно применявшейся выше, вывести при фиксированном $z \in K$ цепочку импликаций:

$$|\Psi(\lambda,\, z)| \text{ ограничен на } \mathbb{R} \setminus U \quad \Rightarrow \quad |\Psi(\lambda,\, z)| \text{ ограничен на } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \Psi(\lambda,\, z) \text{ является функцией вполне регулярного роста}$$

$$\Rightarrow \quad \Psi(\lambda, z) \in [1,\, 0] \quad \Rightarrow \quad \Psi(\lambda,\, z) \;\equiv\; c_z.$$

Таким образом,

$$\Psi(\lambda,\, z) \;\equiv\; c_z, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad z \in K.$$

Нетрудно видеть, что при фиксированном $z \in K$ справедливо соотношение

$$\Psi(\lambda,\, z) \to 0, \qquad \lambda \to \infty, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus U,$$

поскольку при указанных z и λ с абсолютной константой $C > 0$ имеем

$$|\Psi(\lambda,\, z)| = \left|\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(\lambda_n)\,(1 - e^{\lambda_n z})}{L'(\lambda_n)\,(\lambda - \lambda_n)} \;\right|$$

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{|\lambda_n|(\varepsilon-h(\arg\lambda_n)+h_K(\arg\lambda_n))}}{|\lambda-\lambda_n|}\le C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\varepsilon\,|\lambda_n|}}{|\lambda-\lambda_n|}.$$

Итак, $c_z = 0$ для всех $z\in K$, а по теореме единственности — и для всех $z\in G$. В результате получили соотношение (9.12). Но тогда

$$\Phi(\lambda,\,z)\,\equiv\,0,\qquad \lambda\in\mathbb{C},\qquad z\in G. \tag{9.13}$$

Подставляя (9.13) в (9.11), получаем (9.8). Согласно теореме 9.3 система экспонент E_Λ является абсолютно представляющей в пространстве $A(G)$. Доказательство теоремы 9.4 завершено.

Задача об описании в различных терминах показателей абсолютно представляющих систем экспонент (или обобщенных экспонент), включая и устранение «зазора» между необходимой и достаточной частями в теореме 9.3, получила близкое к окончательному решение в работах А. В. Абанина [1]–[3]. Нам понадобится один из его результатов [2] применительно к системе E_Λ и пространству $A(G)$.

Теорема 9.5 [2; теорема 3 или 4, условие г) при $\rho(r)\equiv 1$]. *Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ с опорной функцией $h(-\theta)$, и $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность попарно различных комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности. Для того чтобы система E_Λ была АПС в $A(G)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность Λ содержала подпоследовательность $\Lambda'\subset\Lambda$, удовлетворяющую условию: существует целая функция экспоненциального типа вполне регулярного роста $L(\Lambda)$ с индикатором $h(\theta)$ и простыми нулями в точках из Λ', для которой совокупность всех ее нулей отличается от Λ' не более, чем на последовательность с нулевой плотностью, и*

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda_n\in\Lambda'}}\left\{\frac{1}{|\lambda_n|}\ln|L'(\lambda_n)|\,-\,h(\arg\lambda_n)\right\}\,=\,0. \tag{9.14}$$

Привлекая теоремы 9.4, 9.5, дадим описание показателей абсолютно представляющих систем экспонент в терминах разложений на простые дроби.

Теорема 9.6. *Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, содержащая точку $z=0$, и $h(-\theta)$ — опорная функция области G. Пусть $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность попарно различных комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности. Для того чтобы система экспонент E_Λ была АПС в $A(G)$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись подпоследовательность $\Lambda'\subset\Lambda$ и функции $L(\lambda)\in\widetilde{M}(\Lambda';\,h)$, $D(\lambda)\in[1,\,0]\setminus\{0\}$, такие, что справедливо разложение*

$$\frac{D(\lambda)}{L(\lambda)}\,=\,\sum_{\lambda_n\in\Lambda'}\frac{D(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)\,(\lambda-\lambda_n)},\qquad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\Lambda', \tag{9.15}$$

коэффициенты которого подчинены соотношению

$$\varlimsup_{\substack{n\to\infty\\ \lambda_n\in\Lambda'}}\left\{\frac{1}{|\lambda_n|}\,\ln\left|\frac{D(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\right|\,+\,h(\arg\lambda_n)\right\}\le\,0. \tag{9.16}$$

Доказательство. Достаточность. Из (9.15), (9.16) по теореме 9.4 получаем, что $E_{\Lambda'}$ — АПС в $A(G)$. Подавно этим свойством обладает и E_Λ.

Необходимость. Пусть E_Λ — АПС в $A(G)$. Из теоремы 9.5 вытекает существование подпоследовательности $\Lambda' \subset \Lambda$ и функции вполне регулярного роста $L(\lambda) \in \widetilde{M}(\Lambda'; h)$ с индикатором $h(\theta)$, для которых выполняется (9.14). Но тогда $E_{\Lambda'}$ — тоже АПС в $A(G)$, и мы находимся в условиях теоремы 9.4, согласно уторой выполнены условия (9.15), (9.16). Теорема доказана.

Примечания к главе 1

Параграфы 1–7 дают расширенное изложение содержания статьи автора [130]. Случаю $\delta(\omega, \Lambda) < 0$ основной теоремы 1.1 отведен отдельный § 2, при написании которого использованы материалы работ [119], [125]. Благодаря применению замечательной тауберовой теоремы Валирона [173] в финале доказательства теоремы 1.1 удалось снять лишнее ограничение на индикаторную диаграмму канонического произведения (1.4), присутствовавшее в работе [122; теорема 2]. Развитие теоремы Валирона дано в работах Е. Титчмарша [172], Н. Боуена и А. Макинтайра [144]. По поводу теоремы Валирона, близких утверждений и обобщений см. также книги Р. Боаса [141; глава 4 и замечания к ней], Н. Винера и Р. Пэли [28; глава V] и статью А. А. Шкаликова [134; § 6].

Для построения примера 7.2 весовой функции $\omega(r)$, не имеющей правильного изменения на бесконечности, применен подход, близкий к [96; теорема 3].

В § 8 вошли избранные результаты из статей [119], [121], при изложении которых использованы идеи [120]. Основные теоремы 8.3 и 8.4 содержатся в [129].

Материал § 9 взят из работы автора [126; § 4]. Отправной точкой для рассматриваемых здесь задач являются фундаментальные результаты А. Ф. Леонтьева [76] о разложении аналитических функций в ряды экспонент. Состояние теории представляющих систем (на начало 80-х годов) изложено в обстоятельном обзоре Ю. Ф. Коробейника [57]. Общее представление о последующем развитии этой теории в направлении, связанном с системами экспонент, можно составить по диссертациям А. В. Абанина [4] и С. Н. Мелихова [86]. С теоремами § 9 соприкасаются также результаты С. Н. Мелихова [85] о разложении функций $f(z) \in A(\overline{G})$ в ряды экспонент, сходящиеся по топологии пространства $A(G)$. Представляющие системы экспонент в пространстве $A(\overline{G})$ с естественной топологией индуктивного предела изучены гораздо хуже. Ограничимся здесь ссылкой на статью автора [127], в которой обсуждаются проблемы двойственного описания представляющих систем в пространствах с индуктивной топологией.

Глава 2

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТИПА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С НУЛЯМИ В УГЛЕ

В этой главе решена задача отыскания точной нижней грани типов при порядке $\rho \in (0,\,1)$ целых функций с нулями, расположенными в угле фиксированного раствора и имеющими заданные ρ-плотности. Подробно описано построение экстремальной функции. Для случая расположения нулей на одном луче дано развернутое исследование величины экстремального типа, в частности, ее асимптотического поведения при $\rho \to +0$. Полученные результаты применяются к нахождению границ радиуса полноты систем экспонент. Параграфы §§ 10 – 14 посвящены функциям с нулями на луче, а § 15 — функциям, нули которых расположены в некотором угле.

§ 10. Оценка снизу типа целой функции порядка меньше единицы с положительными нулями фиксированных плотностей

В параграфе дается строгая постановка задачи, формулируется один из основных результат этой главы — теорема 10.1 — и доказывается его первая часть.

10.1. Постановка задачи. Формулировка результата. Рассматривается произвольная целая функция, все нули которой лежат на фиксированном луче и имеют заданные плотности при показателе $\rho \in (0,\,1)$. Какое наименьшее значение может принимать тип при порядке ρ такой функции? Эту задачу без ограничения общности можно решать для канонического произведения, построенного по возрастающей (не обязательно строго) последовательности положительных чисел при условии, что ее верхняя и нижняя ρ-плотности принимают заранее выбранные значения.

Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность положительных чисел вида:

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty. \tag{10.1}$$

Пусть задано число $\rho \in (0,\,1)$. Предполагаем, что Λ имеет конечную положительную *верхнюю ρ-плотность*

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho}, \qquad 0 < \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) < +\infty.$$

Нижняя ρ-плотность последовательности Λ определяется по формуле

$$\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho}.$$

В случае совпадения значений $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)$ и $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)$ последовательность Λ называется *измеримой* (при показателе ρ).

Построим по последовательности Λ каноническое произведение

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{10.2}$$

определяющее целую функцию конечного типа σ_ρ при порядке ρ, где

$$0 < \sigma_\rho \leq \frac{\pi \,\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\sin \pi\rho}.$$

Напомним, что типом при порядке ρ (коротко, *ρ-типом*) $L(\lambda)$ называется величина

$$\sigma_\rho \equiv \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \max\limits_{|\lambda|=r} |L(\lambda)|}{r^\rho} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln L(-r)}{r^\rho}.$$

Функция $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост тогда и только тогда [78; гл. I, § 6], когда

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \Delta_\rho(\Lambda),$$

т. е. когда последовательность Λ измерима. В этом случае тип вычисляется точно:

$$\sigma_\rho = \frac{\pi \,\Delta_\rho(\Lambda)}{\sin \pi\rho}.$$

Формализованная постановка задачи о наименьшем возможном типе такова. Для трех заданных чисел $\rho \in (0,\, 1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$ требуется найти величину

$$s(\alpha,\, \beta;\, \rho) \equiv \inf \left\{\sigma_\rho = \sigma_\rho(\Lambda) : \ \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\}. \tag{10.3}$$

Такая задача без ограничения на расположение корней функции давно решена при любом $\rho > 0$, и ответ в ней записывается достаточно просто ([141; § 2.5]; см. также [100; раздел 2]):

$$\frac{\beta}{\rho} \exp\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right).$$

Сформулируем основной результат главы, дающий решение проблемы (10.3).

Теорема 10.1. *Для произвольного $\rho \in (0, 1)$ и любых чисел $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$ справедливо равенство*

$$s(\alpha,\, \beta;\, \rho) = \beta \left(\frac{\pi k}{\sin \pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} \frac{a^{-\rho} - k\,\tau^{-\rho}}{\tau + 1}\, d\tau\right), \tag{10.4}$$

где $k = \alpha/\beta$. Нижняя грань $s(\alpha,\, \beta;\, \rho)$ достигается на некоторой строго возрастающей к $+\infty$ последовательности $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$, у которой $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$ и $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$.

Заметим, что при $\alpha = 0$ из теоремы 10.1 получаем в качестве следствия доказанное А. Ю. Поповым [98] соотношение

$$s(0,\,\beta;\,\rho) \equiv s(\beta;\,\rho) \equiv \inf\left\{\sigma_\rho = \sigma_\rho(\Lambda):\ \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\}$$
$$= \beta\, C(\rho) \equiv \beta \max_{a>0} a^{-\rho} \ln(1+a), \tag{10.5}$$

а при $\alpha = \beta$ равенство (10.4) дает уже упоминавшийся известный результат о ρ-типе функции $L(\lambda)$ с измеримой последовательностью положительных нулей:

$$s(\beta,\,\beta;\,\rho) = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}.$$

Исключая рассмотренные «крайние» случаи, в дальнейшем удобно считать, что $\beta = 1,\ \alpha = k \in (0,\,1)$ и ввести величину

$$C(k,\,\rho) \equiv \frac{\pi k}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} \frac{a^{-\rho} - k\,\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau.$$

Определение функции $C(k,\,\rho)$ корректно, поскольку участвующий в ее задании максимум достигается. Действительно, при фиксированных ρ и k интеграл

$$\varphi(a) \equiv \varphi_{k,\,\rho}(a) \equiv \int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} \frac{a^{-\rho} - k\,\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau$$

как функция переменной a непрерывен на луче $a > 0$, неотрицателен, и стремится к нулю и при $a \to +0$ и при $a \to +\infty$.

Перед тем, как приступить к доказательству теоремы 10.1, сформулируем два утверждения, опирающиеся на нашу теорему, но имеющие и самостоятельный интерес. Первый результат вытекает из непрерывности функции $C(k,\rho)$ по переменной k.

Предложение 10.1. *Пусть $\rho \in (0,\,1)$, $\beta > 0$, и $P_\rho(\beta)$ — совокупность всех возрастающих (не обязательно строго) последовательностей положительных чисел верхней ρ-плотности β. Тогда множество значений, принимаемых ρ-типами всевозможных целых функций f с нулевыми множествами $\Lambda_f \in P_\rho(\beta)$, совпадает с отрезком $[\beta\, C(\rho),\, \pi\beta\,\mathrm{cosec}\,\pi\rho]$, где величина $C(\rho)$ определена в* (10.5).

Второй результат является непосредственным сочетанием теоремы 4 из работы Б. Н. Хабибуллина [117] и нашей теоремы 10.1.

Предложение 10.2. *Пусть $\rho \in (0,\,1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\beta]$, и $P_\rho(\alpha,\,\beta)$ — совокупность всех возрастающих (не обязательно строго) последовательностей положительных чисел, у которых нижняя ρ-плотность не меньше α, а верхняя ρ-плотность равна β. Пусть $\Lambda \in P_\rho(\alpha,\,\beta)$. Тогда тип при порядке ρ любой целой* *функции $f \not\equiv 0$, обращающейся в нуль на последовательности Λ (у f могут быть и другие нули, причем произвольной кратности) удовлетворяет неравенству*

$$\sigma_\rho(f) \ \ge \ \frac{2^\rho\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\rho/2)}{\Gamma((1-\rho)/2)}\ s(\alpha,\,\beta;\,\rho) \ = \ \frac{\sin\pi\rho}{\pi}\,\Gamma(\rho)\,\Gamma^2(1-\rho/2)\ s(\alpha,\,\beta;\,\rho),$$

где величина $s(\alpha,\,\beta;\,\rho)$ находится по формуле (10.4).

О применении результатов работы [117] к оценкам радиуса полноты систем экспонент мы поговорим подробно в § 14. Сейчас вернемся к основному вопросу.

10.2. Начало доказательства — оценка снизу. Доказательство центральной теоремы 10.1 разбивается на два основных этапа, каждому из которых отведен отдельный параграф. В этом параграфе выводится оценка снизу ρ-типа канонического произведения (10.2). После этого в § 11 следует построение примера, подтверждающего точность полученной оценки. Реализация намеченного плана на первом этапе технически намного сложнее, чем при отсутствии ограничений на аргументы корней. В самом деле, без требования $\Lambda\subset\mathbb{R}_+$ первый шаг сводится к последовательному применению формулы Иенсена и оценки снизу усредненной верхней ρ-плотности через верхнюю ρ-плотность, умноженную на $\rho^{-1}\exp(k-1)$. Наш метод получения оценки ρ-типа снизу в идейном отношении близок к методам исследования индекса конденсации, разработанным в [94], [95], [97] и первой главе диссертации.

Итак, по замечанию к теореме 10.1 будем устанавливать равенство

$$s(k,\,1;\,\rho)=C(k,\,\rho),$$

в котором $\rho\in(0,\,1)$, $k\in(0,\,1)$. Пусть Λ — последовательность вида (10.1) с верхней ρ-плотностью $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)=1$ и нижней ρ-плотностью $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)\ge k$. Обозначая через $n_\Lambda(x)$ считающую функцию последовательности Λ, запишем для канонического произведения (10.2) при каждом $r>0$ соотношение

$$\ln\max_{|\lambda|=r}|L(\lambda)|=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{r}{\lambda_n}\right)=\int\limits_0^\infty\ln\left(1+\frac{r}{x}\right)\,dn_\Lambda(x).$$

Интегрирование по частям с последующей заменой переменного $x=rt$ дает

$$\int\limits_0^\infty\ln\left(1+\frac{r}{x}\right)\,dn_\Lambda(x)=n_\Lambda(x)\ln\left(1+\frac{r}{x}\right)\Big|_0^\infty$$

$$+\int\limits_0^\infty n_\Lambda(x)\,\frac{r\,dx}{(r+x)x}=\int\limits_0^\infty n_\Lambda(rt)\,\frac{dt}{t(1+t)}.$$

Полагая $\varphi_r(t)\equiv\dfrac{n_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho}$, приходим к равенству

$$r^{-\rho}\ln\max_{|\lambda|=r}|L(\lambda)|=\int\limits_0^\infty\varphi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt. \tag{10.6}$$

Пусть теперь зафиксированы произвольно числа $a > 0$ и $k' \in (0, k)$. Найдем из определения нижней ρ-плотности Λ число $c > 0$ так, чтобы при каждом $r \geq ac$ для всех $t \geq c/r$ выполнялось неравенство $\varphi_r(t) > k'$. Обозначив

$$\eta = \eta(r) \equiv \varphi_r(1/a) = \frac{n_\Lambda(r/a)}{(r/a)^\rho},$$

имеем, в частности, что $\eta > k'$. По условию

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\, \eta(r) = 1, \quad \underline{\lim}_{r\to+\infty}\, \eta(r) \geq k.$$

Ясно, что $n_\Lambda(rt) \geq n_\Lambda(r/a)$ при $t \geq 1/a$. Отсюда при $r > 0$ и $t \geq 1/a$ получаем

$$\varphi_r(t) \ = \ \frac{n_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho} \ \geq \ \frac{n_\Lambda(r/a)}{(rt)^\rho} \ = \ \frac{n_\Lambda(r/a)}{(r/a)^\rho}\frac{1}{(at)^\rho} \ = \ \frac{\eta}{(at)^\rho}.$$

Таким образом, вводя в рассмотрение функцию

$$\psi_r(t) \equiv \begin{cases} k', & 0 \leq t \leq 1/a, \\ \dfrac{\eta}{(at)^\rho}, & 1/a < t \leq (1/a)(\eta/k')^{1/\rho}, \\ k', & t > (1/a)(\eta/k')^{1/\rho}, \end{cases}$$

можем утверждать, что при каждом $r \geq ac$ и любых $t \geq c/r$ справедливо неравенство

$$\varphi_r(t) \ \geq \ \psi_r(t). \tag{10.7}$$

Из (10.6) и (10.7) заключаем, что при фиксированном $r \geq ac$ имеет место оценка

$$r^{-\rho} \ln \max_{|\lambda|=r} |L(\lambda)| \ \geq \int_{c/r}^{\infty} \psi_r(t)\, \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt. \tag{10.8}$$

Проведем преобразования правой части (10.8), выделяя известный интеграл

$$\int_0^\infty \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt = \frac{\pi}{\sin \pi\rho}.$$

При всех $r \geq ac$ имеем

$$\int_{c/r}^{\infty} \psi_r(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt = k' \int_{c/r}^{a^{-1}} \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt + \eta a^{-\rho} \int_{a^{-1}}^{a^{-1}(\eta/k')^{1/\rho}} \frac{dt}{t(1+t)} + k' \int_{a^{-1}(\eta/k')^{1/\rho}}^{\infty} \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt$$

$$= k' \left(\int_{c/r}^{\infty} \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt - \int_{a^{-1}}^{a^{-1}(\eta/k')^{1/\rho}} \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt \right) + \eta a^{-\rho} \int_{a^{-1}}^{a^{-1}(\eta/k')^{1/\rho}} \frac{dt}{t(1+t)}$$

$$= k'\left(\frac{\pi}{\sin\pi\rho} - \int\limits_0^{c/r} \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt\right) + \int\limits_{a^{-1}}^{a^{-1}(\eta/k')^{1/\rho}} \frac{\eta a^{-\rho} - k' t^{\rho}}{t(1+t)}\,dt$$

$$= k'\left(\frac{\pi}{\sin\pi\rho} - \int\limits_0^{c/r} \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt\right) + \int\limits_{a(k'/\eta)^{1/\rho}}^{a} \frac{\eta a^{-\rho} - k'\tau^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau.$$

Выбирая теперь последовательность $r_j \to +\infty$, для которой $\lim\limits_{j\to\infty} \eta(r_j) = 1$, из (10.8) выводим оценку

$$\sigma_\rho(\Lambda) \,\geq\, \lim_{j\to\infty} \int\limits_{c/r_j}^{\infty} \psi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt \,=\, \frac{\pi k'}{\sin\pi\rho} \,+\, \int\limits_{a(k')^{1/\rho}}^{a} \frac{a^{-\rho} - k'\tau^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau.$$

Поскольку числа $a > 0$ и $k' \in (0, k)$ взяты произвольно, то

$$\sigma_\rho(\Lambda) \,\geq\, \frac{\pi k}{\sin\pi\rho} \,+\, \max_{a>0} \int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} \frac{a^{-\rho} - k\,\tau^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau,$$

и неравенство $s(k, 1\,; \rho) \geq C(k, \rho)$ установлено.

Тем самым, первая часть теоремы 10.1 доказана.

§ 11. Построение экстремальной функции

Для завершения доказательства теоремы 10.1 нам требуется при любых $\rho \in (0, 1)$ и $k \in (0, 1)$ привести пример строго возрастающей последовательности Λ вида (10.1) с характеристиками $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = k$, $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 1$, для которой тип $\sigma_\rho = \sigma_\rho(\Lambda)$ канонического произведения (10.2) совпадает со значением

$$C(k, \rho) = \int\limits_0^{\infty} \psi_0(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt.$$

Здесь под знаком интеграла помещена величина

$$\psi_0(t) \equiv \begin{cases} k, & 0 \leq t \leq 1/a_0, \\ \dfrac{1}{(a_0 t)^{\rho}}\,, & 1/a_0 < t \leq 1/(a_0 k^{1/\rho}), \\ k, & t > 1/(a_0 k^{1/\rho}), \end{cases} \tag{11.1}$$

причем $a_0 = a_0(k, \rho)$ — точка максимума на луче $a > 0$ функции

$$\varphi(a) = \int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} \frac{a^{-\rho} - k\,\tau^{-\rho}}{\tau + 1}\,d\tau,$$

определенной в замечании к теореме 10.1.

11.1. Описание конструкции. Экстремальная в задаче (10.1) последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ строится следующим образом. Выберем положительное число m_1 так, чтобы $(m_1^2-1)^\rho - m_1^\rho > 1/k$. Вспомогательную последовательность $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ зададим по правилу

$$m_{n+1} = m_n^4, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Для упрощения записи введем обозначение $\Lambda^\rho \equiv (\lambda_n^\rho)_{n\in\mathbb{N}}$. Условие на m_1 носит технический характер, обеспечивая наличие точек последовательности Λ^ρ уже на первом из определяемых ниже промежутков. Далее при каждом значении $n \in \mathbb{N}$ полагаем

$$\Lambda^\rho \cap \left[m_n^\rho,\, (m_n^2-1)^\rho\right] = \left\{m_n^\rho + \nu/k \,:\, \nu \in \mathbb{N},\, \nu \le \left((m_n^2-1)^\rho - m_n^\rho\right) k\right\},$$

$$\Lambda^\rho \cap \left((m_n^2-1)^\rho,\, m_n^{2\rho}\right] = \left\{(m_n^2-1)^\rho + \nu\,\frac{\rho}{(1-k)\,m_n^2} \,:\, \nu \in \mathbb{N},\right.$$
$$\left.\nu \le \left(m_n^{2\rho} - (m_n^2-1)^\rho\right)\rho^{-1}(1-k)\,m_n^2\right\},$$

$$\Lambda^\rho \cap \left(m_n^{2\rho},\, \frac{1}{k}\,m_n^{2\rho}\right) = \varnothing,$$

$$\Lambda^\rho \cap \left[\frac{1}{k}\,m_n^{2\rho},\, m_{n+1}^\rho\right] = \left\{\frac{1}{k}\,m_n^{2\rho} + \nu/k \,:\, \nu \in \mathbb{N},\, \nu \le \left(m_{n+1}^\rho - \frac{1}{k}\,m_n^{2\rho}\right) k\right\}.$$

Таким образом, на отрезках $[m_n,\, m_n^2-1]$ точки λ_j последовательности Λ выбираются так, чтобы λ_j^ρ образовывали арифметическую прогрессию с разностью $1/k$. На полуинтервалах $(m_n^2-1,\, m_n^2]$ точки λ_j таковы, что λ_j^ρ есть арифметическая прогрессия с разностью $\dfrac{\rho}{(1-k)\,m_n^2}$. Далее, на интервалах вида $\left(m_n^2,\, \dfrac{1}{k^{1/\rho}}\,m_n^2\right)$ точки λ_j отсутствуют. Наконец, для λ_j, помещенных на отрезки $\left[\dfrac{1}{k^{1/\rho}}\,m_n^2,\, m_{n+1}\right]$, точки λ_j^ρ образуют арифметическую прогрессию с разностью $1/k$.

Поскольку считающие функции последовательностей Λ и Λ^ρ связаны равенством

$$n_\Lambda(r) = n_{\Lambda^\rho}(r^\rho),$$

то верхняя и нижняя ρ-плотности последовательности Λ совпадают соответственно с 1-плотностями последовательности Λ^ρ. Вычислим эти плотности. Последовательность Λ^ρ построена так, что

$$n_{\Lambda^\rho}(m_n^\rho) = k\,m_n^\rho + O(m_n^{\rho/2}), \qquad n \to \infty. \tag{11.2}$$

Действительно, указанное свойство вытекает из соотношений ($n \in \mathbb{N}$)

$$n_{\Lambda^\rho}(m_{n+1}^\rho) - n_{\Lambda_\rho}(m_n^\rho) \;=\; \big((m_n^2-1)^\rho - m_n^\rho\big)\, k \;+\; \rho^{-1}(1-k)\, m_n^2 \,\big(m_n^{2\rho} - (m_n^2-1)^\rho\big)$$

$$+\,(m_{n+1}^\rho - (1/k)\, m_n^{2\rho})\, k \;+\; O(1) \;=\; k\,\big(m_n^{2\rho} - m_n^\rho \;+\; O(m_n^{2\rho-2})\big)$$

$$+\,\rho^{-1}(1-k)\, m_n^2\, \big(\rho\, m_n^{2\rho-2} \;+\; O(m_n^{2\rho-4})\big) + k\, m_{n+1}^\rho - m_n^{2\rho} \;+\; O(1)$$

$$= k\, m_{n+1}^\rho - k\, m_n^\rho \;+\; O(1),$$

последовательное применение которых дает цепочку равенств

$$n_{\Lambda^\rho}(m_n^\rho) = n_{\Lambda^\rho}(m_{n-1}^\rho) + k\,(m_n^\rho - m_{n-1}^\rho) \;+\; O(1) = n_{\Lambda_\rho}(m_{n-2}^\rho) + k\,(m_n^\rho - m_{n-2}^\rho)$$

$$+\,2\,O(1) = \;\ldots\; = k\,(m_n^\rho - m_1^\rho) + n\,O(1) = k\, m_n^\rho + n\,O(1) = k\, m_n^\rho + \;O(m_n^{\rho/2}).$$

С учетом (11.2) выпишем выражения для считающей функции последовательности Λ^ρ на соответствующих участках положительной полуоси.
Если $r \in [m_n^\rho,\, (m_n^2-1)^\rho]$, то

$$n_{\Lambda^\rho}(r) = n_{\Lambda^\rho}(m_n^\rho) + (r - m_n^\rho)\, k \;+\; O(1) = r\, k \;+\; O(m_n^{\rho/2}), \qquad n\to\infty.$$

Если $r \in ((m_n^2-1)^\rho,\, m_n^{2\rho}]$, то

$$n_{\Lambda^\rho}(r) = n_{\Lambda^\rho}\big((m_n^2-1)^\rho\big) + \big(r - (m_n^2-1)^\rho\big)\,\rho^{-1}(1-k)\, m_n^2 \;+\; O(1)$$

$$= k\,(m_n^2-1)^\rho + \big(r - (m_n^2-1)^\rho\big)\,\rho^{-1}(1-k)\, m_n^2 \;+\; O(m_n^{\rho/2}), \qquad n\to\infty.$$

Если $r \in (m_n^{2\rho},\, (1/k)\, m_n^{2\rho})$, то

$$n_{\Lambda^\rho}(r) = n_{\Lambda^\rho}(m_n^{2\rho}) = \rho^{-1}(1-k)\, m_n^2\, \big(m_n^{2\rho} - (m_n^2-1)^\rho\big)$$

$$+\,k\,(m_n^2-1)^\rho \;+\; O(m_n^{\rho/2}) = (1-k)\, m_n^{2\rho} + k\,\big(m_n^{2\rho} \;+\; O(m_n^{2\rho-2})\big) \;+\; O(m_n^{\rho/2})$$

$$= m_n^{2\rho} \;+\; O(m_n^{\rho/2}), \qquad n\to\infty.$$

Если $r \in \big[(1/k)\, m_n^{2\rho},\, m_{n+1}^\rho\big]$, то

$$n_{\Lambda^\rho}(r) = n_{\Lambda^\rho}(m_n^{2\rho}) + \big(r - (1/k)\, m_n^{2\rho}\big)\, k \;+\; O(1) = m_n^{2\rho} + \big(r - (1/k)\, m_n^{2\rho}\big)\, k$$

$$+\,O(m_n^{\rho/2}) = r\, k \;+\; O(m_n^{\rho/2}), \qquad n\to\infty.$$

Проделанные вычисления позволяют при $n\in\mathbb{N}$ записать представление

$$\frac{n_{\Lambda^\rho}(r)}{r} = \begin{cases} k \;+\; O\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right), & r \in [m_n^\rho,\, (m_n^2-1)^\rho]\,, \\ \rho^{-1}(1-k)\, m_n^2 \;+\; \dfrac{(m_n^2-1)^\rho}{r}\,\big(k - \rho^{-1}(1-k)\, m_n^2\big) & \\ +\; O\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right), & r \in ((m_n^2-1)^\rho,\, m_n^{2\rho}]\,, \\ \dfrac{m_n^{2\rho}}{r} \;+\; O\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right), & r \in \big(m_n^{2\rho},\, (1/k)\, m_n^{2\rho}\big)\,, \\ k \;+\; O\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right), & r \in \big[(1/k)\, m_n^{2\rho},\, m_{n+1}^\rho\big]\,, \end{cases} \tag{11.3}$$

задающее сужение функции $n_{\Lambda^\rho}(r)/r$ на отрезки вида $\left[m_n^\rho, m_{n+1}^\rho\right]$. Тем самым, указанная функция определена посредством (11.3) при $r \ge m_1^\rho$, а при $0 < r < m_1^\rho$ она есть тождественный нуль. Поясним вид остаточного члена в полученном представлении лишь на участке $r \in ((m_n^2-1)^\rho, m_n^{2\rho}]$, поскольку на остальных участках вычисления аналогичны и чуть проще. При указанных r имеем $(m_n^2-1)^\rho \le r$. Следовательно, $m_n^2 \le r^{1/\rho}+1 < 2\,r^{1/\rho}$, откуда

$$\frac{m_n^{\rho/2}}{r} < \frac{2^{\rho/4}\,r^{1/4}}{r} = O\left(\frac{1}{r^{3/4}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right).$$

Непосредственно из (11.3) следуют равенства

$$\underline{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho} = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{n_{\Lambda^\rho}(r^\rho)}{r^\rho} = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{n_{\Lambda^\rho}(r)}{r} = k,$$

$$\overline{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_{\Lambda^\rho}(r^\rho)}{r^\rho} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_{\Lambda^\rho}(r)}{r} = 1,$$

показывающие, что Λ имеет нужные плотностные характеристики.

11.2. Вычисление ρ-типа. Докажем, что ρ-тип канонического произведения (10.2), порожденного построенной последовательностью Λ, вычисляется по формуле

$$\sigma_\rho(\Lambda) = \int_0^\infty \psi_0(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt, \tag{11.4}$$

где функция $\psi_0(t)$ определена в (11.1). Согласно представлению (10.4) справедливо соотношение

$$\sigma_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \int_0^\infty \varphi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt. \tag{11.5}$$

Выражение для функции $\varphi_r(t)$ получим из (11.3) с учетом связи

$$\varphi_r(t) \;=\; \frac{n_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho} \;=\; \frac{n_{\Lambda^\rho}\left((rt)^\rho\right)}{(rt)^\rho}.$$

Заменяя в (11.3) r на $(rt)^\rho$, запишем при любом $n \in \mathbb{N}$ формулу

$$\varphi_r(t) \;=\; \begin{cases} k \,+\, \dfrac{1}{t^{\rho/2}}\,O\left(\dfrac{1}{r^{\rho/2}}\right), & t \in \left[\dfrac{m_n}{r}, \dfrac{m_n^2-1}{r}\right], \\ \rho^{-1}(1-k)m_n^2 \,+\, \dfrac{1}{t^\rho}\left(\dfrac{m_n^2-1}{r}\right)^\rho \left(k-\rho^{-1}(1-k)m_n^2\right) & \\ +\,\dfrac{1}{t^{\rho/2}}\,O\left(\dfrac{1}{r^{\rho/2}}\right), & t \in \left(\dfrac{m_n^2-1}{r}, \dfrac{m_n^2}{r}\right], \\ \dfrac{1}{t^\rho}\left(\dfrac{m_n^2}{r}\right)^\rho \,+\, \dfrac{1}{t^{\rho/2}}\,O\left(\dfrac{1}{r^{\rho/2}}\right), & t \in \left(\dfrac{m_n^2}{r}, \dfrac{1}{k^{1/\rho}}\dfrac{m_n^2}{r}\right), \\ k \,+\, \dfrac{1}{t^{\rho/2}}\,O\left(\dfrac{1}{r^{\rho/2}}\right), & t \in \left[\dfrac{1}{k^{1/\rho}}\dfrac{m_n^2}{r}, \dfrac{m_n^4}{r}\right], \end{cases}$$

которая при фиксированном $r > 0$ определяет сужение функции $\varphi_r(t)$ на отрезки вида $[m_n/r,\, m_{n+1}/r]$. При этом $\varphi_r(t) \equiv 0$, если $0 < t < m_1/r$.

Нам остается лишь убедиться в том, что для построенной последовательности Λ функции $\varphi_r(t)$ при больших r в определенном смысле близки к функции $\psi_0(t)$. При фиксированном $r > 0$ вводим для упрощения изложения функцию $\Phi_r(t)$ по следующему правилу. Если $0 < t < m_1/r$, то $\Phi_r(t) \equiv 0$. Если же $t > m_1/r$, то найдется $n \in \mathbb{N}$, для которого $t \in [m_n/r,\, m_{n+1}/r]$, и тогда полагаем

$$\Phi_r(t) \;=\; \begin{cases} k, & t \in \left[\dfrac{m_n}{r},\, \dfrac{m_n^2-1}{r}\right], \\ \rho^{-1}(1-k)\, m_n^2 + \dfrac{1}{t^\rho}\left(\dfrac{m_n^2-1}{r}\right)^{\rho} & \\ \times\,(k - \rho^{-1}(1-k)\, m_n^2)\,, & t \in \left(\dfrac{m_n^2-1}{r},\, \dfrac{m_n^2}{r}\right], \\ \dfrac{1}{t^\rho}\left(\dfrac{m_n^2}{r}\right)^{\rho}, & t \in \left(\dfrac{m_n^2}{r},\, \dfrac{1}{k^{1/\rho}}\dfrac{m_n^2}{r}\right), \\ k, & t \in \left[\dfrac{1}{k^{1/\rho}}\dfrac{m_n^2}{r},\, \dfrac{m_n^4}{r}\right]. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\varphi_r(t) = \Phi_r(t) \,+\, \frac{1}{t^{\rho/2}}\, O\left(\frac{1}{r^{\rho/2}}\right), \qquad t > 0.$$

Пусть $r_n = a_0\, m_n^2$, где точка a_0 та же, что и в формуле (11.1). Очевидно, соотношение (11.5) можно переписать в виде:

$$\sigma_\rho(\Lambda) \;=\; \varlimsup_{n\to\infty}\; \sup_{r_n \le r < r_{n+1}} \int\limits_0^\infty \varphi_r(t)\, \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt.$$

Оценим сверху интеграл в этом представлении через интеграл

$$\int\limits_0^\infty \psi_0(t)\, \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt,$$

используя незначительный рост разности $\varphi_r(t) - \psi_0(t)$ при фиксированном r и $t \to +\infty$. Вначале сведем задачу к аналогичной с заменой $\varphi_r(t)$ на $\Phi_r(t)$. При каждом $n \in \mathbb{N}$ справедливо представление

$$\int\limits_0^\infty \varphi_r(t)\, \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt \;=\; \int\limits_0^{m_n r^{-1}} \varphi_r(t)\, \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt \,+\, \int\limits_{m_n r^{-1}}^\infty \varphi_r(t)\, \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt.$$

Пусть $r \in [r_n,\, r_{n+1}) = [a_0\, m_n^2,\, a_0\, m_n^8)$, $n \in \mathbb{N}$. При таких r имеем

$$\int\limits_0^{m_n r^{-1}} \varphi_r(t)\, \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt \;\le\; \int\limits_0^{(a_0\, m_n)^{-1}} \varphi_r(t)\, \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt \to 0$$

равномерно по r при $n\to\infty$. Отсюда

$$\sup_{r_n\le r<r_{n+1}}\int\limits_0^\infty \varphi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt$$

$$\le \sup_{r_n\le r<r_{n+1}}\left[\int\limits_{m_nr^{-1}}^\infty \Phi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt\,+\,O\left(\frac{1}{r^{\rho/2}}\right)\int\limits_0^\infty\frac{dt}{(1+t)t^{1-\rho/2}}\right]\,+\,o(1),$$

когда $n\to\infty$.

Смещение «всплесков» функции $\Phi_r(t)$ при движении r вдоль промежутка $[r_n,\,r_{n+1})$ вынуждает в дальнейших оценках интегралов по-разному учитывать близость r к концам этого полуинтервала. Представляя

$$[r_n,\,r_{n+1})=\left[a_0\,m_n^2,\,m_n^7\right]\cup\left(m_n^7,\,a_0\,m_n^8\right),$$

получаем

$$\sigma_\rho(\Lambda)\,\le\,\varlimsup_{n\to\infty}\,\sup_{r_n\le r<r_{n+1}}\int\limits_{m_nr^{-1}}^\infty \Phi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt$$

$$=\varlimsup_{n\to\infty}\max\left\{\sup_{a_0\,m_n^2\le r\le m_n^7}\int\limits_{m_nr^{-1}}^\infty \Phi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt,\ \sup_{m_n^7<r<a_0\,m_n^8}\int\limits_{m_nr^{-1}}^\infty \Phi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt\right\}.$$

Пусть вначале $r\in\left[a_0\,m_n^2,\,m_n^7\right]$. Тогда из определений функций $\Phi_r(t)$, $\psi_0(t)$ и точки a_0 следует, что при $n\to\infty$ справедливы оценки

$$\int\limits_{m_nr^{-1}}^\infty \Phi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt\,\le\,\int\limits_0^\infty\psi_0(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt\,+\,o(1)\,+\int\limits_{m_{n+1}^2r^{-1}}^\infty(\Phi_r(t)-k)\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt$$

$$\le\int\limits_0^\infty\psi_0(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt+\int\limits_{m_n}^\infty(\Phi_r(t)-k)\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt\,+\,o(1)=\int\limits_0^\infty\psi_0(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt\,+\,o(1).$$

Если же $r\in\left(m_n^7,\,a_0\,m_n^8\right)$, то

$$\int\limits_{m_nr^{-1}}^\infty \Phi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt=\int\limits_{m_nr^{-1}}^{m_n^4r^{-1}}\Phi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt+\int\limits_{m_n^4r^{-1}}^\infty\Phi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt$$

$$\le\int\limits_{(a_0\,m_n^7)^{-1}}^{m_n^{-3}}\Phi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt+\int\limits_0^\infty\psi_0(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt+\int\limits_{m_{n+2}^2r^{-1}}^\infty(\Phi_r(t)-k)\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt\,+\,o(1)$$

$$= \int_0^\infty \psi_0(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt\,+\,o(1), \qquad n\to\infty.$$

Таким образом,

$$\sigma_\rho(\Lambda)\,\le\,\int_0^\infty \psi_0(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt.$$

Установленное ранее обратное неравенство

$$\sigma_\rho(\Lambda)\,\ge\,\int_0^\infty \psi_0(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt\,=\,C(k,\rho)$$

завершает проверку соотношения (11.4). Теорема 10.1 полностью доказана.

§ 12. Оценки величины экстремального типа

В задаче без ограничения на аргументы корней зависимость величины экстремального типа от k и ρ очень простая. В случае расположения нулей на одном луче упомянутая зависимость, описываемая с помощью (10.4), оказалась намного сложнее. Поэтому для применения теоремы 10.1 в конкретных ситуациях и сравнения ее с известными результатами полезно иметь дополнительную информацию о поведении неэлементарной функции

$$C(k,\rho) = \frac{\pi k}{\sin\pi\rho}\,+\,\max_{a>0}\int_{a\,k^{1/\rho}}^{a}\frac{a^{-\rho}-k\,\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau, \qquad k\in[0,1], \qquad \rho\in(0,1).$$

В частности, важно получить обозримые оценки $C(k,\rho)$ через исследованную ранее в [98] величину

$$C(\rho) = \max_{a>0}\frac{\ln(1+a)}{a^\rho} = C(0,\rho), \qquad \rho\in(0,1),$$

и элементарные функции переменных k, ρ. Именно этим и определяется содержание настоящего параграфа.

12.1. Равномерные оценки. Ясно, что функция $C(k,\rho)$ непрерывна на «квадрате» $[0,1]\times(0,1)$. Мы начнем с оценок, дающих общее представление о поведении функции $C(k,\rho)$ на этом множестве.

Теорема 12.1. *Функция $C(k,\rho)$ при фиксированном $k\in[0,1]$ является строго выпуклой по ρ на интервале $(0,1)$, а при фиксированном $\rho\in(0,1)$ является строго возрастающей и строго выпуклой по k на отрезке $[0,1]$. Далее, при всех $\rho\in(0,1)$ и $k\in(0,1]$ для функции $C(k,\rho)$ справедливы двусторонние оценки*

$$\frac{\pi k}{\sin\pi\rho}\,+\,\Bigl(1-k\ln\frac{e}{k}\Bigr)\,C(\rho)\,\le\,C(k,\rho)\,\le\,\frac{\pi k}{\sin\pi\rho}\,+\,(1-k)\,C(\rho). \tag{12.1}$$

Доказательство. Вначале проверим строгую выпуклость $C(k,\rho)$ по переменной $\rho\in(0,1)$ при фиксированном $k\in[0,1]$. При $k=0$ согласно [98] функция $C(0,\rho)=C(\rho)$ строго выпукла на $(0,1)$. При $k=1$ функция $C(1,\rho)=\pi/\sin\pi\rho$ тоже строго выпукла на $(0,1)$. Зафиксируем параметры $k\in(0,1)$, $a>0$, и рассмотрим функцию

$$h(\rho)\equiv h_{k,\,a}(\rho)\equiv\frac{\pi k}{\sin\pi\rho}+\int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a}\frac{a^{-\rho}-k\,\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau$$

$$=k\int\limits_0^\infty\frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau+\int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a}\frac{a^{-\rho}-k\,\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau.$$

Если $a\neq1$, то, дважды дифференцируя, получаем

$$h'(\rho)=-k\int\limits_0^\infty\frac{\tau^{-\rho}\ln\tau}{\tau+1}\,d\tau+\int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a}\frac{-a^{-\rho}\ln a+k\,\tau^{-\rho}\ln\tau}{\tau+1}\,d\tau,$$

$$h''(\rho)=k\int\limits_0^\infty\frac{\tau^{-\rho}\ln^2\tau}{\tau+1}\,d\tau$$

$$+\frac{a\,k^{1/\rho}\ln k}{\rho^2}\,\frac{-a^{-\rho}\ln a+a^{-\rho}\ln(a\,k^{1/\rho})}{a\,k^{1/\rho}+1}+\int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a}\frac{a^{-\rho}\ln^2 a-k\,\tau^{-\rho}\ln^2\tau}{\tau+1}\,d\tau$$

$$=k\int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus\,(a\,k^{1/\rho},\,a)}\frac{\tau^{-\rho}\ln^2\tau}{\tau+1}\,d\tau+\frac{a^{1-\rho}\,k^{1/\rho}\ln^2 k}{\rho^3\,(a\,k^{1/\rho}+1)}+a^{-\rho}\ln^2 a\,\ln\frac{1+a}{1+a\,k^{1/\rho}}>0.$$

Если $a=1$, то выражение для второй производной запишется в виде

$$k\int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus\,(k^{1/\rho},\,1)}\frac{\tau^{-\rho}\ln^2\tau}{\tau+1}\,d\tau+\frac{k^{1/\rho}\ln^2 k}{\rho^3\,(k^{1/\rho}+1)}>0.$$

Следовательно, при любых фиксированных $k\in(0,1)$, $a>0$, функция $h(\rho)$ строго выпукла на $(0,1)$. Но тогда и $C(k,\rho)$ строго выпукла по $\rho\in(0,1)$ как максимум строго выпуклых функций.

Теперь проверим строгую выпуклость $C(k,\rho)$ по переменной $k\in[0,1]$ при фиксированном $\rho\in(0,1)$. Для любого значения параметра $a>0$ функция

$$f(k)\equiv f_{\rho,\,a}(k)\equiv\int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a}\frac{a^{-\rho}-k\,\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau$$

строго выпукла на $[0,1]$, так как

$$f'(k) = -\int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau, \qquad f''(k) = \frac{a^{1-\rho}\,k^{1/\rho-2}}{\rho\,(ak^{1/\rho}+1)} > 0, \qquad k \in (0,1].$$

Следовательно, $C(k,\rho)$ также является строго выпуклой функцией переменной k на $[0,1]$ как максимум строго выпуклых функций.

Заметим, что из самого определения экстремальной величины $s(\alpha,\beta;\rho)$ и связи $s(\alpha,\beta;\rho) = \beta\,C(k,\rho)$ вытекает возрастание (строгое в силу строгой выпуклости) величины $C(k,\rho)$ по $k \in [0,1]$ при фиксированном $\rho \in (0,1)$.

Из выпуклости по k функции $C(k,\rho)$ при каждом $\rho \in (0,1)$ сразу выводим для нее нужную оценку сверху, поскольку в правой части (12.1) стоит линейная функция, принимающая вместе с $C(k,\rho)$ при $k=0$ и $k=1$ значения $C(\rho)$ и $\dfrac{\pi}{\sin\pi\rho}$ соответственно. Впрочем, эту часть двойного неравенства (12.1) можно получить и напрямую:

$$C(k,\rho) - \frac{\pi k}{\sin\pi\rho} \;\le\; \max_{a>0} \int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} \frac{a^{-\rho} - k a^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau \;=\; (1-k)\max_{a>0}\left\{a^{-\rho}\ln\frac{1+a}{1+ak^{1/\rho}}\right\}$$

$$\le\; (1-k)\max_{a>0} a^{-\rho}\ln(1+a) \;=\; (1-k)\,C(\rho).$$

Для получения левой части (12.1) при любом $a>0$ запишем

$$\int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} \frac{a^{-\rho} - k\,\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau = \int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} (a^{-\rho} - k\,\tau^{-\rho})\,d(\ln(\tau+1))$$

$$=\; \left(a^{-\rho} - k\,\tau^{-\rho}\right)\ln(\tau+1)\Big|_{a\,k^{1/\rho}}^{a} - k\rho \int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} \frac{\ln(\tau+1)}{\tau^{\rho+1}}\,d\tau$$

$$= (1-k)\,a^{-\rho}\ln(1+a) - k\rho \int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} \frac{\ln(\tau+1)}{\tau^{\rho}}\,\frac{d\tau}{\tau}$$

$$\ge\; (1-k)\,a^{-\rho}\ln(1+a) + k\rho\,C(\rho)\ln k^{1/\rho}.$$

Переход к максимуму по $a>0$ приводит к нужному результату:

$$C(k,\rho) \;\ge\; \frac{\pi k}{\sin\pi\rho} \;+\; \left(1 - k\ln\frac{e}{k}\right)\,C(\rho).$$

Теорема 12.1 доказана.

Отметим, что оценка (12.1) справедлива и при $k = 0$, если ее левую часть понимать в предельном смысле. В этом случае (12.1) превращается в равенство $C(0,\rho) = C(\rho)$. С помощью теоремы 12.1 с учетом легко проверяемых соотношений

$$\lim_{\rho\to+0} C(k,\rho) = \lim_{\rho\to1-0} C(k,\rho) = +\infty, \qquad k \in (0,1],$$

можно в общих чертах дать описание характера монотонности $C(k,\rho)$ при фиксированном k. Именно, для каждого $k \in [0,1]$ найдется такое значение $\rho(k) \in (0,1)$, что функция $C(k,\rho)$ строго убывает по ρ на промежутке $(0,\rho(k))$, а затем строго возрастает на промежутке $(\rho(k),1)$.

12.2. Дополнительные оценки снизу. Продолжая изучение неэлементарной функции $C(k,\rho)$, докажем сначала одно вспомогательное утверждение. Для удобства обозначим

$$G(\rho,a) \equiv a^{-\rho}\ln(1+a), \qquad a > 0,$$

и пусть $a(\rho)$ — точка максимума этой функции, т. е. $G(\rho,a(\rho)) = C(\rho)$.

Лемма 12.1. *Пусть a — произвольное положительное число. Тогда при всех значениях $\rho \in (0,1)$ и $k \in [0,1]$ выполняется неравенство*

$$C(k,\rho) \ \geq\ \frac{\ln(1+a)}{a^{\rho}} \ +\ k\int\limits_a^{\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau. \tag{12.2}$$

В частности,

$$C(k,\rho) \ \geq\ C(\rho) \ +\ k\int\limits_{a(\rho)}^{\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau.$$

Доказательство. Как было установлено в ходе доказательства теоремы 12.1, функция

$$f(k) = \int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} \frac{a^{-\rho} - k\,\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau$$

выпукла на $[0,1]$ и, следовательно, удовлетворяет соотношению

$$f(k) \geq f(0) + k\,f'(0), \qquad k \in [0,1].$$

Подставляя сюда найденные выше значения

$$f(0) = \int\limits_0^a \frac{a^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau = G(\rho,a), \qquad f'(0) = -\int\limits_0^a \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau,$$

находим при любом $a > 0$, что

$$C(k,\rho) - \frac{\pi k}{\sin\pi\rho} \ \geq \int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} \frac{a^{-\rho} - k\,\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau \ \geq\ G(\rho,a) \ -\ k\int\limits_0^a \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau.$$

Следовательно,

$$C(k,\rho)\;\ge\;\frac{\pi k}{\sin\pi\rho}\;-\;k\int\limits_0^a\frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau+G(\rho,a)=G(\rho,a)+k\int\limits_a^\infty\frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau.$$

Последнее утверждение леммы 12.1 получается простой подстановкой в это неравенство значения $a=a(\rho)$.

В свете основного результата работы А. Ю. Попова [98] и теоремы 12.1 из леммы 12.1 немедленно вытекает такой факт.

Следствие. *Любая экстремальная в задаче* (10.5) *последовательность положительных чисел* Λ *имеет нулевую нижнюю* ρ*-плотность.*

Доказательство. В самом деле, если точная нижняя грань в (10.5) достигается на некоторой последовательности $\Lambda\subset\mathbb{R}_+$ с нижней ρ-плотностью α и верхней ρ-плотностью β, то по лемме 12.1 тип канонического произведения (10.2), построенного по этой последовательности, удовлетворяет соотношению

$$\beta\,C(\rho)=\sigma_\rho(\Lambda)\;\ge\;\beta\,C\left(\frac{\alpha}{\beta}\,,\rho\right)\;\ge\;\beta\,C(\rho)\;+\;\alpha\int\limits_{a(\rho)}^\infty\frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau,$$

что влечет $\alpha=0$.

Заключение следствия, разумеется, справедливо для экстремальной последовательности, построенной в [98] при обосновании соотношения (10.5). Этот частный факт отмечен в [145]. Укажем еще на тесную связь следствия из леммы 12.1 с результатами заметок [148] и [18].

Выведем далее из леммы 12.1 оценки снизу величины $C(k,\rho)$, дополняющие оценку (12.2) и отличающиеся простотой.

Предложение 12.1. *Пусть* $k\in[0,1]$. *При всех* $\rho\in(0,1)$ *справедливо неравенство*

$$C(k,\rho)\;\ge\;\max_{a>0}\left\{G(\rho,a)\;+\;k\,G(1-\rho,1/a)\right\}. \tag{12.3}$$

При $\rho\in(0,1/\ln 4]$ *имеет место более простая оценка*

$$C(k,\rho)\;\ge\;\max\left\{\frac{\pi k}{\sin\pi\rho},\;(1+k)\,C(\rho)-\frac{k}{\rho e}\right\}, \tag{12.4}$$

а при $\rho\in(1/\ln 4,1)$ *верна оценка*

$$C(k,\rho)\;\ge\;\frac{\pi k}{\sin\pi\rho}\;+\;\max\left\{0,\;C(\rho)-k\,B(-\rho)\right\}, \tag{12.5}$$

где

$$B(\rho)=\int\limits_0^1\frac{\tau^\rho}{1+\tau}\,d\tau\;=\;\sum_{n=0}^\infty\;\frac{(-1)^n}{\rho+1+n}.$$

Доказательство. Отправляясь от неравенства (12.2), получаем (12.3):

$$C(k,\rho)\ \geq\ G(\rho,a)\ +\ k\int\limits_a^\infty \frac{\tau^{1-\rho}}{\tau(\tau+1)}\,d\tau\ \geq\ G(\rho,a)\ +\ ka^{1-\rho}\int\limits_a^\infty \frac{d\tau}{\tau(\tau+1)}$$

$$= G(\rho,a)\ +\ ka^{1-\rho}\ln(1+1/a) = G(\rho,a)\ +\ k\,G(1-\rho,1/a).$$

Пусть теперь $\rho\in(0,1/\ln 4]$. Неравенство (12.4) будет доказано, если мы проверим, что в этом случае

$$C(k,\rho)\ \geq\ (1+k)\,C(\rho)-k/(\rho e).$$

Запишем при $a\geq 1$ цепочку соотношений

$$C(k,\rho)\ \geq\ G(\rho,a)\ +\ k\,G(1-\rho,1/a)\ \geq\ G(\rho,a)\ +\ ka^{-\rho}\ln(1+1/a)$$

$$=(1+k)a^{-\rho}\ln(1+a)-(k/\rho)\,\frac{\ln a^\rho}{a^\rho}=(1+k)\,G(\rho,a)-(k/\rho)\,\max_{t\geq 1}\frac{\ln t}{t}$$

$$=(1+k)\,G(\rho,a)-k/(\rho e).$$

Как показано в [98], при $\rho\in(0,1/\ln 4]$ выполнено $a(\rho)\geq 1$. Следовательно,

$$C(k,\rho)\ \geq\ (1+k)\max_{a\geq 1}G(\rho,a)-k/(\rho e)=(1+k)\,C(\rho)-k/(\rho e).$$

Рассмотрим, наконец, случай $\rho\in(1/\ln 4,1)$. С учетом леммы 12.1 и доказанного в [98] неравенства $a(\rho)<1$ получим

$$C(k,\rho)\ \geq\ C(\rho)\ +\ k\int\limits_{a(\rho)}^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau\ \geq\ C(\rho)\ +\ k\int\limits_1^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau$$

$$=C(\rho)\ +\ \frac{\pi k}{\sin\pi\rho}\ -\ k\int\limits_0^1 \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\,d\tau=\frac{\pi k}{\sin\pi\rho}\ +\ C(\rho)-k\,B(-\rho),$$

что влечет (12.5). Доказательство предложения 12.1 закончено.

Добавим, что $B(\rho)$ совпадает со значением $\beta(\rho+1)$ хорошо известной специальной функции (см. [102; приложение II. 3])

$$\beta(\lambda)=\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+\lambda}.$$

В заключение этого параграфа для величины экстремального типа докажем еще одну полезную оценку снизу.

Предложение 12.2. *Для всех $\rho \in (0,1)$ и $k \in [0,1]$ справедлива оценка*

$$C(k,\rho) \,>\, \frac{e^{k-1}}{\rho}.$$

Доказательство. Оценим входящий в неравенство (12.2) интеграл:

$$\int\limits_a^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau = \int\limits_a^\infty \tau^{-\rho-1}\left(1-\frac{1}{\tau+1}\right)d\tau = \int\limits_a^\infty \tau^{-\rho-1}\,d\tau - \int\limits_a^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{\tau(\tau+1)}\,d\tau$$

$$> \left.\frac{\tau^{-\rho}}{-\rho}\right|_a^\infty - a^{-\rho}\int\limits_a^\infty \frac{d\tau}{\tau(\tau+1)} \,=\, \frac{a^{-\rho}}{\rho} - a^{-\rho}\ln\left(1+\frac{1}{a}\right).$$

Возвращаясь к оценке (12.2), имеем

$$C(k,\rho) \,>\, a^{-\rho}\left[\ln(1+a)+\frac{k}{\rho}-k\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)\right]$$

$$= a^{-\rho}\left[\ln a+\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)+\frac{k}{\rho}-k\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)\right]$$

$$= a^{-\rho}\left[\ln a+\frac{k}{\rho}+(1-k)\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)\right] \,\ge\, a^{-\rho}\left[\ln a+\frac{k}{\rho}\right].$$

Пользуясь произвольностью $a>0$, находим

$$C(k,\rho) > a^{-\rho}\left.\left[\ln a+\frac{k}{\rho}\right]\right|_{a=\exp\frac{1-k}{\rho}} = e^{k-1}\left[\ln e^{\frac{1-k}{\rho}}+\frac{k}{\rho}\right] = \frac{e^{k-1}}{\rho}.$$

Требуемое неравенство получено.

Из теоремы 10.1 и предложения 12.2 следует классическое неравенство, связывающее тип целой функции с плотностями распределения ее нулей. В самом деле, как уже отмечалось, тип σ_ρ при порядке $\rho>0$ целой функции с нулями $\Lambda\subset\mathbb{C}$, имеющими заданные нижнюю и верхнюю ρ-плотности α и β, удовлетворяет неравенству [141; p. 16] (ср. с [148])

$$\sigma_\rho \,\ge\, \frac{\beta}{\rho}\,e^{k-1}, \tag{12.6}$$

где $k=\alpha/\beta$. Неулучшаемая оценка

$$\sigma_\rho(\Lambda) \,\ge\, \beta\, C(k,\rho),$$

полученная в теореме 10.1, является в силу предложения 12.2 уточнением указанного неравенства для типа в случае, когда $\Lambda\subset\mathbb{R}_+$ и $\rho\in(0,1)$.

В заключение отметим, что с помощью функции Ламберта оценки различного характера и точности величин $a(\rho)$, $C(\rho)$ и $C(k,\rho)$ получены недавно С. М. Ситником [108].

§ 13. Асимптотические формулы

Для более детального описания картины роста целых функций и сравнения случаев, когда нули функций расположены только на одном луче или произвольно в плоскости, важно знать асимптотическое поведение найденной величины экстремального типа $C(k,\rho)$ при малых значениях ρ. Как видим, правые части неравенств

$$\sigma_\rho \ \geq \ \beta \left(\frac{\pi k}{\sin \pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} \frac{a^{-\rho} - k\,\tau^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau \right), \quad \sigma_\rho \ \geq \ \frac{\beta}{\rho}\, e^{k-1}, \qquad k = \frac{\alpha}{\beta},$$

характеризующих эти случаи соответственно, внешне значительно отличаются. Указанные правые части сравниваются в предложении 12.2, однако об их близости оценки из § 12 ничего не говорят. Поэтому представляет интерес помимо найденных выше «равномерных» по ρ и k оценок величины $C(k,\rho)$ получить асимптотические по ρ формулы для этой величины при фиксированном k. При $k \in \{0,1\}$ асимптотика $C(k,\rho)$ известна, поскольку

$$C(1,\rho) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho},$$

$$C(0,\rho) = \frac{1}{\rho e} + \exp\left(-1 - \frac{1}{\rho}\right) + O\left(\frac{1}{\rho} \exp\left(-\frac{2}{\rho}\right)\right), \qquad \rho \to +0. \tag{13.1}$$

Последнее соотношение получено в [98].

Мы дадим в этом параграфе доказательство асимптотических формул для $C(k,\rho)$ при $\rho \to +0$. Всюду ниже обе переменные $k, \rho \in (0,1)$. Пусть, как и ранее,

$$\varphi(a) = \varphi_{k,\rho}(a) = \int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} \frac{a^{-\rho} - k\,\tau^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau$$

и $a_0 = a_0(k,\rho)$ есть точка максимума этой функции на положительной полуоси. Продифференцировав интеграл по параметру a, получим выражение

$$\varphi'(a) = a^{-1-\rho} \left(\frac{a(1-k)}{1+a} - \rho \ln \frac{1+a}{1+ak^{\frac{1}{\rho}}} \right) \equiv a^{-1-\rho} g(a).$$

Несложный анализ показывает, что функция

$$g(a) \equiv g_{k,\rho}(a) \equiv \frac{a(1-k)}{1+a} - \rho \ln \frac{1+a}{1+ak^{\frac{1}{\rho}}}$$

возрастает от $g(0) = 0$ до некоторого положительного значения $g(a^*)$, где

$$a^* \equiv a^*_{k,\rho} \equiv \frac{1-k-\rho(1-k^{\frac{1}{\rho}})}{\rho(1-k^{\frac{1}{\rho}}) - (1-k)k^{\frac{1}{\rho}}},$$

а затем убывает, стремясь к своему пределу $1-k+\ln k<0$ при $a \to +\infty$. Отсюда сразу следует, что a_0 — единственный положительный корень $\varphi'(a)$, доставляющий максимум $\varphi(a)$.

Материал этого параграфа излагается по следующей схеме. Сначала в лемме 13.1 доказываются двусторонние оценки корня $a_0 = a_0(k,\rho)$ функции $\varphi'(a)$. Затем в лемме 13.2 дается оценка снизу для величины $C(k,\rho)$, а в лемме 13.3 — оценка сверху для этой же величины. Близость установленных в леммах 13.2 и 13.3 оценок позволяет получить основной результат текущего параграфа, предъявляющий двучленную асимптотику величины $s(\alpha,\ \beta;\ \rho)$ при $\rho \to +0$.

13.1. Двусторонние оценки a_0. Нам требуется с хорошей точностью найти при малых ρ интервал локализации точки максимума функции $\varphi(a)$. Этой цели служит следующая лемма.

Лемма 13.1. *При каждом фиксированном $k \in (0,1)$ и всех достаточно малых ρ (т. е. при $0<\rho<\rho_0(k)<1$) выполняется двойное неравенство*

$$e^{\frac{1-k}{\rho}} - \frac{1-k}{\rho}\, e^{1-k} - 1 \;<\; a_0 \;<\; e^{\frac{1-k}{\rho}} + 1.1\, k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{2(1-k)}{\rho}} - 1. \tag{13.2}$$

Доказательство. Неравенство (13.2) выведем из более точного соотношения

$$e^{\frac{1-k}{\rho}\,(1-u)} - 1 \;<\; a_0 \;<\; e^{\frac{1-k}{\rho}}\, v - 1, \tag{13.3}$$

где

$$u \equiv e^{(1-k)\,(1-\frac{1}{\rho})}, \qquad v \equiv \left(1 - k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}}\right)^{-1}.$$

Заметим, что левое неравенство в (13.3) равносильно неравенству

$$g\left(e^{\frac{1-k}{\rho}\,(1-u)} - 1\right) > 0,$$

которое в развернутом виде выглядит так:

$$(1-k)\,\frac{e^{\frac{1-k}{\rho}\,(1-u)} - 1}{e^{\frac{1-k}{\rho}\,(1-u)}} \;-\; (1-k)(1-u) \;+\; \rho\,\ln\left[1 + k^{\frac{1}{\rho}}\left(e^{\frac{1-k}{\rho}\,(1-u)} - 1\right)\right] \;>\; 0.$$

Поскольку $u<1$, то $k^{\frac{1}{\rho}}\ \left(e^{\frac{1-k}{\rho}\,(1-u)} - 1\right) > 0$, и потому достаточно проверить, что

$$(1-k)\,\frac{e^{\frac{1-k}{\rho}\,(1-u)} - 1}{e^{\frac{1-k}{\rho}\,(1-u)}} \;-\; (1-k)\,(1-u) \;>\; 0.$$

После сокращения на $1-k$ последнее неравенство запишется в виде

$$u \;>\; e^{\frac{1-k}{\rho}\,(1-u)}.$$

Подставляя сюда выражение для величины u, приходим к неравенству

$$e^{\frac{1-k}{\rho}\,(\rho-1)} \;>\; e^{\frac{1-k}{\rho}\,(u-1)},$$

или, что равносильно, $u < \rho$. Еще раз пользуясь определением величины u, убеждаемся в необходимости доказывать неравенство

$$e^{\frac{1-k}{\rho}(\rho-1)} \,<\, \rho,$$

т. е. неравенство

$$\frac{1-k}{\rho}(\rho-1) \,<\, \ln\rho.$$

Переписав окончательно это неравенство в удобной форме

$$\ln\frac{1}{\rho} \,<\, (1-k)\left(\frac{1}{\rho}-1\right),$$

видим, что оно выполняется при всех достаточно малых ρ.

Итак,

$$a_0 \,>\, e^{\frac{1-k}{\rho}(1-u)} - 1 \,=\, \exp\left\{\frac{1-k}{\rho}(1-e^{\frac{1-k}{\rho}(\rho-1)})\right\} - 1$$

$$= e^{\frac{1-k}{\rho}} \exp\left\{-\frac{1-k}{\rho}\, e^{\frac{1-k}{\rho}(\rho-1)}\right\} - 1.$$

Для получения отсюда левой части неравенства (13.2) воспользуемся тем, что при всех $\mu > 0$ выполняется оценка $e^{-\mu} > 1-\mu$. Выбирая

$$\mu \,=\, \frac{1-k}{\rho}\, e^{\frac{1-k}{\rho}(\rho-1)},$$

имеем

$$a_0 \,>\, e^{\frac{1-k}{\rho}}\left(1-\frac{1-k}{\rho}\, e^{\frac{1-k}{\rho}(\rho-1)}\right) - 1 \,=\, e^{\frac{1-k}{\rho}} - \frac{1-k}{\rho}\, e^{1-k} - 1.$$

Теперь докажем, что справедливо правое неравенство в (13.3). Для этого запишем a_0 в виде

$$a_0 \,=\, e^{\frac{1-k}{\rho}}(1+w) - 1,$$

где $w = w(k,\rho) > -1$, и подставим это выражение в равенство $g(a_0) = 0$. Получим

$$\frac{1-k}{\rho}\left(1-\frac{1}{1+a_0}\right) - \ln(1+a_0) + \ln(1+k^{\frac{1}{\rho}} a_0) \,=\, 0,$$

откуда

$$\ln(1+k^{\frac{1}{\rho}} a_0) - \ln(1+w) - \frac{1-k}{\rho}\,\frac{e^{\frac{k-1}{\rho}}}{1+w} \,=\, 0. \tag{13.4}$$

Преобразуем, а затем оценим отдельно первое слагаемое в левой части (13.4):

$$\ln(1+k^{\frac{1}{\rho}} a_0) \,=\, \ln\Big(1+k^{\frac{1}{\rho}}(e^{\frac{1-k}{\rho}}(1+w)-1)\Big)$$

$$= \ln\Big(1-k^{\frac{1}{\rho}}+k^{\frac{1}{\rho}} e^{\frac{1-k}{\rho}}(1+w)\Big) \,=\, \ln(1+w) + \ln\left(\frac{1-k^{\frac{1}{\rho}}}{1+w} + k^{\frac{1}{\rho}} e^{\frac{1-k}{\rho}}\right)$$

$$= \ln(1+w) + \ln\left(1 - \frac{w + k^{\frac{1}{\rho}}}{1+w} + k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}}\right) \le \ln(1+w) + k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}} - \frac{w + k^{\frac{1}{\rho}}}{1+w}.$$

Отсюда на основании (13.4) можно записать

$$-\frac{1-k}{\rho}\,\frac{e^{\frac{k-1}{\rho}}}{1+w} + k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}} - \frac{w + k^{\frac{1}{\rho}}}{1+w} \ge 0.$$

Следовательно,

$$(1+w)\,(k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}} - 1) \ge -1 + k^{\frac{1}{\rho}} + \frac{1-k}{\rho}\, e^{\frac{k-1}{\rho}}.$$

Поэтому

$$1 + w \le \frac{1 - k^{\frac{1}{\rho}} - \frac{1-k}{\rho}\, e^{\frac{k-1}{\rho}}}{1 - k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}}} < \frac{1}{1 - k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}}} = v.$$

Из представления a_0 и полученной оценки $1 + w < v$ немедленно вытекает, что

$$a_0 < e^{\frac{1-k}{\rho}}\, v - 1.$$

Осталось вывести отсюда правую часть (13.2). Неравенство

$$\ln k + 1 - k < 0$$

показывает, что при фиксированном $k \in (0,1)$ выполняется соотношение

$$k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}} \to +0, \qquad \rho \to +0,$$

и потому

$$v = \frac{1}{1 - k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}}} < 1 + 1.1\, k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}}$$

при всех достаточно малых положительных ρ. Значит, при тех же ρ имеем

$$a_0 < e^{\frac{1-k}{\rho}} + 1.1\, k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{2(1-k)}{\rho}} - 1,$$

что завершает доказательство леммы 13.1.

13.2. Оценка $C(k,\rho)$ снизу. Возвращаясь к самой величине экстремального типа, начнем с получения подходящей нижней оценки.

Лемма 13.2. *При фиксированном $k \in (0,1)$ выполняется асимптотическая оценка*

$$C(k,\rho) > \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)\,(\frac{1}{\rho}+1)} + \frac{\rho}{1-\rho}\, k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{(1-k)\,(\frac{1}{\rho}-1)}$$
$$+ O\left(e^{-\frac{2(1-k)}{\rho}}\right) + O\left(\rho\, k^{\frac{2}{\rho}}\, e^{\frac{2(1-k)}{\rho}}\right), \qquad \rho \to +0. \qquad (13.5)$$

Доказательство. Воспользовавшись хорошо известным равенством

$$\frac{\pi}{\sin \pi\rho} = \int\limits_0^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau,$$

преобразум $C(k,\rho)$ к виду

$$C(k,\rho) = \max_{a>0} \psi(a),$$

где

$$\psi(a) \equiv a^{-\rho} \ln \frac{1+a}{1+k^{\frac{1}{\rho}} a} + k \left(\int\limits_0^{a\, k^{\frac{1}{\rho}}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau + \int\limits_a^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau \right).$$

Очевидно,

$$C(k,\rho) \ge \psi\left(e^{\frac{1-k}{\rho}}\right)$$

$$= e^{k-1} \ln \frac{1+e^{\frac{1-k}{\rho}}}{1+k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}}} + k \int\limits_0^{k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau + k \int\limits_{e^{\frac{1-k}{\rho}}}^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau.$$

Оценим снизу первое слагаемое в представлении $\psi\left(e^{\frac{1-k}{\rho}}\right)$, используя справедливые при всех $x>0$ неравенства

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Имеем

$$e^{k-1} \ln \frac{1+e^{\frac{1-k}{\rho}}}{1+k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}}} = e^{k-1} \left(\frac{1-k}{\rho} + \ln\left(1+e^{\frac{k-1}{\rho}}\right) - \ln\left(1+k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}}\right)\right)$$

$$> e^{k-1} \left(\frac{1-k}{\rho} + e^{\frac{k-1}{\rho}} - \frac{1}{2} e^{\frac{2(k-1)}{\rho}} - k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}} + \frac{1}{2} k^{\frac{2}{\rho}}\, e^{\frac{2(1-k)}{\rho}} - \frac{1}{3} k^{\frac{3}{\rho}}\, e^{\frac{3(1-k)}{\rho}} \right).$$

Учитывая, что при всех $\tau>0$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{1+\tau} > 1-\tau,$$

$$\frac{1}{1+\tau^{-1}} > 1 - \tau^{-1} + \tau^{-2} - \tau^{-3},$$

оценим снизу интегралы в записи $\psi\left(e^{\frac{1-k}{\rho}}\right)$:

$$k \int\limits_0^{k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau > k \int\limits_0^{k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}}} \left(\tau^{-\rho} - \tau^{1-\rho}\right)\, d\tau = k \left(\frac{\tau^{1-\rho}}{1-\rho} - \frac{\tau^{2-\rho}}{2-\rho} \right)\Bigg|_0^{k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}}}$$

$$= \frac{k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{(1-k)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)}}{1-\rho} - \frac{k^{\frac{2}{\rho}}\, e^{(1-k)\left(\frac{2}{\rho}-1\right)}}{2-\rho};$$

$$k \int\limits_{e^{\frac{1-k}{\rho}}}^{\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau = k \int\limits_{e^{\frac{1-k}{\rho}}}^{\infty} \frac{\tau^{-1-\rho}}{1+\tau^{-1}}\, d\tau > k \int\limits_{e^{\frac{1-k}{\rho}}}^{\infty} \tau^{-1-\rho} \left(1 - \tau^{-1} + \tau^{-2} - \tau^{-3}\right) d\tau$$

$$= k \left(\frac{e^{k-1}}{\rho} - \frac{e^{-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)}}{\rho+1} + \frac{e^{-(1-k)\left(\frac{2}{\rho}+1\right)}}{\rho+2} - \frac{e^{-(1-k)\left(\frac{3}{\rho}+1\right)}}{\rho+3} \right).$$

Возвращаясь к оценке $C(k,\rho)$, получим

$$C(k,\rho) \geq \psi\left(e^{\frac{1-k}{\rho}}\right)$$

$$> e^{k-1} \left(\frac{1-k}{\rho} + e^{\frac{k-1}{\rho}} - \frac{1}{2} e^{\frac{2(k-1)}{\rho}} - k^{\frac{1}{\rho}} e^{\frac{1-k}{\rho}} + \frac{1}{2} k^{\frac{2}{\rho}} e^{\frac{2(1-k)}{\rho}} - \frac{1}{3} k^{\frac{3}{\rho}} e^{\frac{3(1-k)}{\rho}} \right)$$

$$+ \frac{k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{(1-k)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)}}{1-\rho} - \frac{k^{\frac{2}{\rho}}\, e^{(1-k)\left(\frac{2}{\rho}-1\right)}}{2-\rho}$$

$$+ k \left(\frac{e^{k-1}}{\rho} - \frac{e^{-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)}}{\rho+1} + \frac{e^{-(1-k)\left(\frac{2}{\rho}+1\right)}}{\rho+2} - \frac{e^{-(1-k)\left(\frac{3}{\rho}+1\right)}}{\rho+3} \right)$$

$$= \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} + \left(\frac{k}{\rho+2} - \frac{1}{2}\right) e^{-(1-k)\left(\frac{2}{\rho}+1\right)}$$

$$+ \left(\frac{1}{1-\rho} - 1\right) k^{\frac{1}{\rho}} e^{(1-k)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2-\rho}\right) k^{\frac{2}{\rho}} e^{(1-k)\left(\frac{2}{\rho}-1\right)}$$

$$- \frac{k}{\rho+3} e^{-(1-k)\left(\frac{3}{\rho}+1\right)} - \frac{1}{3} k^{\frac{3}{\rho}} e^{(1-k)\left(\frac{3}{\rho}-1\right)}$$

$$= \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} + O\left(e^{-(1-k)\left(\frac{2}{\rho}+1\right)}\right)$$

$$+ \frac{\rho}{1-\rho} k^{\frac{1}{\rho}} e^{(1-k)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)} + O\left(\rho\, k^{\frac{2}{\rho}} e^{(1-k)\left(\frac{2}{\rho}-1\right)}\right), \qquad \rho \to +0.$$

Последнее совпадает с требуемой оценкой (13.5).

13.3. Оценка $C(k,\rho)$ сверху. Необходимая для целей данного параграфа верхняя оценка функции $C(k,\rho)$ устанавливается несколько сложнее, чем нижняя; при этом существенно используются оценки величины a_0 из леммы 13.1.

Лемма 13.3. *При каждом фиксированном $k \in (0,1)$ выполняется асимптотическая оценка*

$$C(k,\rho) < \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} + \frac{\rho}{1-\rho} k^{\frac{1}{\rho}} e^{(1-k)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)}$$

$$+ O\left(\frac{1}{\rho} e^{-\frac{2(1-k)}{\rho}}\right) + O\left(\rho\, k^{\frac{2}{\rho}} e^{\frac{2(1-k)}{\rho}}\right), \qquad \rho \to +0. \tag{13.6}$$

Доказательство. Если, как и прежде, $a_0 = a_0(k,\rho)$ — точка максимума функции $\psi(a)$, то

$$C(k,\rho) = \max_{a>0} \psi(a)$$

$$= \psi(a_0) = a_0^{-\rho} \ln \frac{1+a_0}{1+k^{\frac{1}{\rho}} a_0} + k \left(\int\limits_0^{a_0 k^{\frac{1}{\rho}}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau + \int\limits_{a_0}^{\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau \right).$$

Оценим теперь сверху каждое слагаемое в представлении $\psi(a_0)$. В оценке первого слагаемого применим те же неравенства, что и в лемме 13.2:

$$a_0^{-\rho} \ln \frac{1+a_0}{1+k^{\frac{1}{\rho}} a_0} < a_0^{-\rho} \left(\ln a_0 + a_0^{-1} - \frac{a_0^{-2}}{2} + \frac{a_0^{-3}}{3} - a_0 k^{\frac{1}{\rho}} + \frac{1}{2} a_0^2 k^{\frac{2}{\rho}} \right).$$

Для оценки интегралов, входящих в выражение $\psi(a_0)$, используем при $\tau > 0$ неравенства

$$\frac{1}{1+\tau} < 1 - \tau + \tau^2,$$

$$\frac{1}{1+\tau^{-1}} < 1 - \tau^{-1} + \tau^{-2}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^{a_0 k^{\frac{1}{\rho}}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau < \int\limits_0^{a_0 k^{\frac{1}{\rho}}} \left(\tau^{-\rho} - \tau^{-1-\rho} + \tau^{-2-\rho}\right) d\tau$$

$$= \frac{\left(a_0 k^{\frac{1}{\rho}}\right)^{1-\rho}}{1-\rho} - \frac{\left(a_0 k^{\frac{1}{\rho}}\right)^{2-\rho}}{2-\rho} + \frac{\left(a_0 k^{\frac{1}{\rho}}\right)^{3-\rho}}{3-\rho};$$

$$\int\limits_{a_0}^{\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau < \int\limits_{a_0}^{\infty} \left(\tau^{-\rho-1} - \tau^{-\rho-2} + \tau^{-\rho-3}\right) d\tau = \frac{a_0^{-\rho}}{\rho} - \frac{a_0^{-\rho-1}}{\rho+1} + \frac{a_0^{-\rho-2}}{\rho+2}.$$

Поэтому

$$C(k,\rho) < a_0^{-\rho} \left(\ln a_0 + \frac{k}{\rho} \right) + a_0^{-\rho-1} \left(1 - \frac{k}{\rho+1} \right) - a_0^{-\rho-2} \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{\rho+2} \right)$$

$$+ \frac{a_0^{-3-\rho}}{3} + a_0^{1-\rho} k^{\frac{1}{\rho}} \left(\frac{1}{1-\rho} - 1 \right) - a_0^{2-\rho} k^{\frac{2}{\rho}} \left(\frac{1}{2-\rho} - \frac{1}{2} \right) + k \frac{\left(a_0 k^{\frac{1}{\rho}}\right)^{3-\rho}}{3-\rho}.$$

Отбрасывая отрицательные слагаемые и учитывая, что для всех $a > 0$ выполняется неравенство

$$a^{-\rho} \left(\ln a + \frac{k}{\rho} \right) \le \frac{e^{k-1}}{\rho},$$

получаем

$$C(k,\rho) \, < \, \frac{e^{k-1}}{\rho} \, + \, a_0^{-\rho-1} \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) \, + \, a_0^{1-\rho} \, \frac{\rho \, k^{\frac{1}{\rho}}}{1-\rho} \, + \, \frac{a_0^{-3-\rho}}{3} \, + \, \frac{a_0^{3-\rho} \, k^{\frac{3}{\rho}}}{3-\rho}. \qquad (13.7)$$

При оценке сверху второго слагаемого в (13.7) воспользуемся левым неравенством (13.2) и тем, что для всех достаточно малых $x > 0$ справедливо соотношение

$$(1-x)^{-(\rho+1)} \, < \, 1 + 2x.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_0^{-\rho-1} \, &< \, \left(e^{\frac{1-k}{\rho}} - \frac{1-k}{\rho} \, e^{1-k} - 1\right)^{-1-\rho} \\ &= \, e^{-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} \left(1 - \frac{1-k}{\rho} \, e^{(1-k)\left(1-\frac{1}{\rho}\right)} - e^{\frac{k-1}{\rho}}\right)^{-(\rho+1)} \\ &< \, e^{-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} \left(1 + 2e^{\frac{k-1}{\rho}} \, \left(\frac{1-k}{\rho} \, e^{1-k} + 1\right)\right)^{-(\rho+1)} \\ &= \, e^{-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} \, + \, 2e^{-(1-k)\left(\frac{2}{\rho}+1\right)} \left(\frac{1-k}{\rho} \, e^{1-k} + 1\right) \\ &= \, e^{-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} \, + \, O\left(\frac{1}{\rho} \, e^{-\frac{2(1-k)}{\rho}}\right), \qquad \rho \to +0. \end{aligned}$$

Значит, при $\rho \to +0$ можем записать

$$\left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) a_0^{-\rho-1} \, < \, \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) \, e^{-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} \, + \, O\left(\frac{1}{\rho} \, e^{-\frac{2(1-k)}{\rho}}\right). \qquad (13.8)$$

Для оценки сверху третьего слагаемого в (13.7) используем наряду с правой частью (13.2) справедливое при $x \geq -1$ неравенство

$$(1+x)^{1-\rho} \, \leq \, 1 + (1-\rho)x.$$

Применяя указанные неравенства, имеем

$$\begin{aligned} a_0^{1-\rho} \, &< \, \left(e^{\frac{1-k}{\rho}} + 1.1 \, k^{\frac{1}{\rho}} \, e^{\frac{2(1-k)}{\rho}} - 1\right)^{1-\rho} \\ &= \, e^{(1-k)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)} \left(1 + 1.1 \, k^{\frac{1}{\rho}} \, e^{\frac{1-k}{\rho}} \, - \, e^{\frac{k-1}{\rho}}\right)^{1-\rho} \\ &\leq \, e^{(1-k)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)} \left(1 + (1-\rho) \left(1.1 \, k^{\frac{1}{\rho}} \, e^{\frac{1-k}{\rho}} - e^{\frac{k-1}{\rho}}\right)\right) \\ &< \, e^{(1-k)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)} \, + \, (1-\rho) \, 1.1 \, k^{\frac{1}{\rho}} \, e^{\frac{2(1-k)}{\rho}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a_0^{1-\rho} \, \frac{\rho \, k^{\frac{1}{\rho}}}{1-\rho} \, < \, \frac{\rho \, k^{\frac{1}{\rho}}}{1-\rho} \, e^{(1-k)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)} \, + \, O\left(\rho \, k^{\frac{2}{\rho}} \, e^{\frac{2(1-k)}{\rho}}\right), \qquad \rho \to +0. \qquad (13.9)$$

Последние два слагаемых в (13.7) имеют простую оценку. Действительно, в силу леммы 13.1 имеем

$$a_0 \sim e^{\frac{1-k}{\rho}}, \qquad \rho \to +0,$$

а это влечет

$$\frac{1}{3}\,a_0^{-3-\rho} \,=\, o\Big(e^{-\frac{2(1-k)}{\rho}}\Big), \quad \frac{a_0^{3-\rho}\,k^{\frac{3}{\rho}}}{3-\rho} \,=\, o\Big(\rho\,k^{\frac{2}{\rho}}\,e^{\frac{2(1-k)}{\rho}}\Big), \qquad \rho \to +0. \tag{13.10}$$

Подставляя в (13.7) найденные оценки (13.8)–(13.10), получаем требуемое соотношение (13.6):

$$C(k,\rho) \,<\, \frac{e^{k-1}}{\rho} \,+\, \left(1-\frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} \,+\, \frac{\rho}{1-\rho}\,k^{\frac{1}{\rho}}\,e^{(1-k)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)}$$

$$+\,O\left(\frac{1}{\rho}\,e^{-\frac{2(1-k)}{\rho}}\right) \,+\, O\Big(\rho\,k^{\frac{2}{\rho}}\,e^{\frac{2(1-k)}{\rho}}\Big), \qquad \rho \to +0.$$

Лемма 13.3 установлена.

13.4. Асимптотика $C(k,\rho)$ **при малых** ρ. Как видно из лемм 13.2 и 13.3, первые слагаемые в оценках (13.5), (13.6) одинаковы и, следовательно, совпадают с первым членом искомой асимптотики. Чтобы выделить второй и остаточный члены необходимо сравнить показатели степеней, входящих в эти члены. Решив эту задачу, мы придадим надлежащий вид предварительной формуле для $C(k,\rho)$, объединяющей утверждения двух последних лемм:

$$C(k,\rho) \,=\, \frac{e^{k-1}}{\rho} \,+\, \left(1-\frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} \,+\, \frac{\rho}{1-\rho}\,k^{\frac{1}{\rho}}\,e^{(1-k)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)}$$

$$+\,O\left(\frac{1}{\rho}\,e^{-\frac{2(1-k)}{\rho}}\right) \,+\, O\Big(\rho\,k^{\frac{2}{\rho}}\,e^{\frac{2(1-k)}{\rho}}\Big), \qquad \rho \to +0. \tag{13.11}$$

Вначале определим, какое из слагаемых в формуле (13.11) является вторым членом заявленной асимптотики:

$$\left(1-\frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} \qquad \text{или} \qquad \frac{\rho}{1-\rho}\,k^{\frac{1}{\rho}}\,e^{(1-k)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)}.$$

С этой целью сравним величины

$$-\,(1-k)\,\left(\frac{1}{\rho}+1\right) \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{\rho}\,\ln k \,+\, (1-k)\,\left(\frac{1}{\rho}-1\right).$$

Эквивалентные преобразования приводят к сравнению чисел $2(k-1)$ и $\ln k$. Обозначим через $k_1 = 0.20319\ldots$ единственный в интервале $(0,1)$ корень уравнения

$$\ln k \,=\, 2(k-1). \tag{13.12}$$

Тогда при $k \in (0, k_1]$ вторым членом в формуле (13.11) должен быть записан

$$\left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)},$$

а при $k \in (k_1, 1)$ его заменит

$$\frac{\rho}{1-\rho}\, k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{(1-k)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)}.$$

Пусть $k \in (0, k_1]$. Для получения из (13.11) двучленной асимптотики требуется выяснить, какая из величин при $\rho \to +0$ убывает медленнее:

$$\frac{\rho}{1-\rho}\, k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{(1-k)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)} \qquad \text{или} \qquad O\left(\frac{1}{\rho}\, e^{-\frac{2}{\rho}(1-k)}\right).$$

Этот вопрос приводит к сравнению

$$\frac{1}{\rho}\ln k + \frac{1-k}{\rho} \qquad \text{и} \qquad -\frac{2(1-k)}{\rho},$$

а оно, в свою очередь, — к уравнению

$$\ln k = 3(k-1), \tag{13.13}$$

единственным корнем которого на $(0,1)$ будет $k_0 = 0.05952\ldots$. Теперь при рассматриваемых k остаточный член в (13.11) известен, и можно сделать следующий промежуточный вывод:

при $k \in (0, k_0]$ действует асимптотика

$$C(k,\rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} + O\left(\frac{1}{\rho}\, e^{-\frac{2(1-k)}{\rho}}\right), \qquad \rho \to +0,$$

а при $k \in (k_0, k_1]$ действует асимптотика

$$C(k,\rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} + O\left(\rho\, k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}}\right), \qquad \rho \to +0.$$

Осталось рассмотреть значения $k \in (k_1, 1)$. Формула (13.11) показывает, что для выделения остаточного члена в этом случае необходимо сравнить скорости убывания при $\rho \to +0$ величин

$$e^{-\frac{1-k}{\rho}} \qquad \text{и} \qquad \rho\, k^{\frac{2}{\rho}}\, e^{\frac{2(1-k)}{\rho}}.$$

В результате сравнения получим еще одно уравнение

$$\ln k = \frac{3}{2}(k-1), \tag{13.14}$$

с корнем $k_2 = 0.41719\ldots$.
Здесь вывод такой:

при $k \in (k_1, k_2]$ действует асимптотика

$$C(k,\rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \frac{\rho}{1-\rho}\, k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{(1-k)\,(\frac{1}{\rho}-1)} + O\left(e^{-\frac{1-k}{\rho}}\right), \qquad \rho \to +0,$$

а при $k \in (k_2, 1)$ действует асимптотика

$$C(k,\rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \frac{\rho}{1-\rho}\, k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{(1-k)\,(\frac{1}{\rho}-1)} + O\left(\rho\, k^{\frac{2}{\rho}}\, e^{\frac{2(1-k)}{\rho}}\right), \qquad \rho \to +0.$$

Полученную информацию удобно собрать в отдельное утверждение, подытоживающее результаты этого параграфа.

Теорема 13.1. *Пусть k_j, $j = 0,1,2,$ — корни на $(0,1)$ уравнений* (13.13), (13.12) *и* (13.14) *соответственно. Тогда для величины $C(k,\rho)$ при фиксированном k и $\rho \to +0$ справедливы следующие асимптотические соотношения:*

$$C(k,\rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)\,(\frac{1}{\rho}+1)} + O\left(\frac{1}{\rho}\, e^{-\frac{2(1-k)}{\rho}}\right), \qquad k \in (0, k_0]\,;$$

$$C(k,\rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)\,(\frac{1}{\rho}+1)} + O\left(\rho\, k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{\frac{1-k}{\rho}}\right), \qquad k \in (k_0, k_1]\,;$$

$$C(k,\rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \frac{\rho}{1-\rho}\, k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{(1-k)\,(\frac{1}{\rho}-1)} + O\left(e^{-\frac{1-k}{\rho}}\right), \qquad k \in (k_1, k_2]\,; \qquad (13.15)$$

$$C(k,\rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \frac{\rho}{1-\rho}\, k^{\frac{1}{\rho}}\, e^{(1-k)\,(\frac{1}{\rho}-1)} + O\left(\rho\, k^{\frac{2}{\rho}}\, e^{\frac{2(1-k)}{\rho}}\right), \qquad k \in (k_2, 1)\,.$$

Теорема 13.1 открывает несколько неожиданный факт существенной зависимости асимптотики при $\rho \to +0$ экстремальной величины $C(k,\rho)$ (и, следовательно, $s(\alpha,\beta\,;\rho)$) от $k = \dfrac{\alpha}{\beta}$, не только «количественной», сказавшейся в различии вторых членов формул (13.15), но и «качественной», выраженной в отличии остаточных членов.

Заметим, что асимптотическое равенство (13.1) согласуется с первым случаем в теореме 13.1, так как получается подстановкой в него $k = 0$.

Отметим также, что каково бы ни было значение $k \in [0,1]$, формулы (13.1) и (13.15) показывают, что величины, описывающие экстремальный тип целых функций с нулевыми и произвольными аргументами корней, при порядке ρ, близком к нулю, мало отличаются. Действительно, случаю произвольного расположения корней отвечают первые члены асимптотических формул (13.1) и (13.15), а указанное различие можно оценить по вторым членам этих формул.

Напротив, различие указанных экстремальных величин при $\rho \to 1$ является существенным. Так, при $k = 0$ наименьшие возможные значения типов $1/(\rho e)$ и $C(\rho)$, отвечающие случаям произвольного расположения нулей и расположения на фиксированном луче, асимптотически близки к $1/e$ и 1 (см. [98]) соответственно. Более того, при $k \in (0,1]$ эти наименьшие значения суть e^{k-1}/ρ и $C(k,\rho)$.

Первая величина стремится к e^{k-1} при $\rho \to 1$, вторая же удовлетворяет неравенству

$$C(k, \rho) \geq \frac{\pi k}{\sin \pi \rho} > \frac{k}{1-\rho}$$

и потому стремится к $+\infty$ при $\rho \to 1-0$.

§ 14. О радиусе полноты

В этом параграфе мы применим результаты предыдущих разделов второй главы к вопросам полноты систем экспонент с показателями, расположенными на нескольких лучах.

14.1. Переход к целым функциям экспоненциального типа. В теории полноты систем экспонент в различных функциональных пространствах важную роль играют целые функции экспоненциального типа (см., например, [72], [116]). Среди них, как показано в [76], [78], видное место занимают бесконечные произведения, нули которых расположены одинаково на нескольких лучах. Имеется очевидная связь между этими произведениями и целыми функциями (10.2) с положительными нулями. Для того чтобы ею воспользоваться, зафиксируем два числа $\beta > 0$, $0 \leq \alpha \leq \beta$ и рассмотрим класс $P(\alpha, \beta)$, состоящий по определению из всевозможных последовательностей $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ вида (10.1), таких, что

$$\overline{\Delta}(\Lambda) = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \beta, \qquad \underline{\Delta}(\Lambda) = \varliminf_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n} \geq \alpha.$$

Пусть $\Lambda \in P(\alpha, \beta)$ и $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Свяжем с Λ две последовательности

$$\Lambda^m \equiv (\lambda_n^m)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+, \tag{14.1}$$

$$\Lambda^{(m)} \equiv \bigcup_{j=0}^{m-1} \left(\lambda_n e^{\frac{2\pi j}{m} i} \right)_{n \in \mathbb{N}}. \tag{14.2}$$

Видим, что верхняя $(1/m)$-плотность $\overline{\Delta}_{1/m}(\Lambda^m)$ последовательности Λ^m и верхняя плотность $\overline{\Delta}(\Lambda)$ последовательности Λ совпадают:

$$\overline{\Delta}_{1/m}(\Lambda^m) = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{n}{(\lambda_n^m)^{1/m}} = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \overline{\Delta}(\Lambda).$$

Точно так же

$$\underline{\Delta}_{1/m}(\Lambda^m) = \underline{\Delta}(\Lambda).$$

По последовательности (14.1) построим каноническое произведение

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n^m} \right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{14.3}$$

вида (10.2), представляющее собой целую функцию нормального типа при порядке $\rho = 1/m \in (0,\, 1)$. Последовательности (14.2) отвечает каноническое произведение

$$L(\lambda^m) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^m}{\lambda_n^m}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{14.4}$$

определяющее целую функцию экспоненциального типа с нулями, расположенными одинаково на $m \geq 2$ лучах

$$\arg \lambda = \frac{2\pi j}{m}, \qquad j = 0, 1, \, \dots \, , m-1.$$

Пусть $\sigma(\Lambda^{(m)})$ обозначает экспоненциальный тип канонического произведения (14.4), а $\sigma_{1/m}(\Lambda^m)$ — тип при порядке $\rho = 1/m$ функции (14.3). Тогда справедлива цепочка равенств

$$\sigma(\Lambda^{(m)}) \equiv \varlimsup_{r\to+\infty} \; r^{-1} \ln \max_{|\lambda|=r} \prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{\lambda^m}{\lambda_n^m} \right|$$

$$= \varlimsup_{r\to+\infty} \; r^{-1} \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{r}{\lambda_n}\right)^m\right) = \varlimsup_{r\to+\infty} \; r^{-1} \ln \max_{|\lambda|=r^m} |L(\lambda)|$$

$$= \varlimsup_{r\to+\infty} \; r^{-1/m} \ln \max_{|\lambda|=r} |L(\lambda)| \equiv \sigma_{1/m}(\Lambda^m).$$

Таким образом, для экстремальной величины (10.3) при $\rho = 1/m$ имеем

$$s\,(\alpha, \beta\,; 1/m) = \min \left\{ \sigma_{1/m}(\Lambda^m) :\; \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\, \underline{\Delta}_{1/m}(\Lambda^m) \;\geq\; \alpha,\; \overline{\Delta}_{1/m}(\Lambda^m) = \beta \right\}$$

$$= \min \left\{ \sigma(\Lambda^{(m)}) :\; \Lambda \in P(\alpha,\, \beta) \right\}. \tag{14.5}$$

Конкретизируем при $\rho = 1/m$ величину

$$s(\alpha\,, \beta\,; \rho) = s\,(\alpha\,, \beta\,; 1/m) = \frac{\pi\alpha}{\sin(\pi/m)} \;+\; \max_{a>0} \int\limits_{a\,(\alpha/\beta)^m}^{a} \frac{\beta\, a^{-1/m} - \alpha\, \tau^{-1/m}}{\tau+1}\, d\tau$$

из формулы (10.2). Производя замену переменной $\tau = t^{-m}$, запишем

$$\int\limits_{a\,(\alpha/\beta)^m}^{a} \frac{\tau^{-1/m}}{\tau+1}\, d\tau \;=\; m \int\limits_{a^{-1/m}}^{(\beta/\alpha)\, a^{-1/m}} \frac{dt}{t^m+1}. \tag{14.6}$$

Первообразную функции

$$\frac{1}{t^m+1}, \qquad m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 2,$$

можно представить (см., например, [102; с. 28]) в виде

$$\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]} \left(2 \sin \frac{\pi(2j+1)}{m} \; \operatorname{arctg} \frac{t - \cos \frac{\pi(2j+1)}{m}}{\sin \frac{\pi(2j+1)}{m}} \right. \tag{14.7}$$

$$-\cos\frac{\pi(2j+1)}{m}\,\ln\left(t^2-2t\cos\frac{\pi(2j+1)}{m}+1\right)\Bigg)\;+\;\frac{1-(-1)^m}{2m}\,\ln|t+1|\,.$$

Используя теперь представления (14.6) и (14.7), для величины (14.5) при тех же m получаем

$$s\,(\alpha\,,\beta\,;\,1/m)=\frac{\pi\alpha}{\sin(\pi/m)}+\max_{a>0}\left\{\frac{\beta}{\sqrt[m]{a}}\,\ln\frac{1+a}{1+a\,(\alpha/\beta)^m}\;-\;\alpha\,m\int\limits_{1/\sqrt[m]{a}}^{\beta/(\alpha\sqrt[m]{a})}\frac{dt}{t^m+1}\right\}$$

$$=\frac{\pi\alpha}{\sin(\pi/m)}\;+\;\max_{a>0}\Bigg\{\frac{\beta}{\sqrt[m]{a}}\,\ln\frac{1+a}{1+a\,(\alpha/\beta)^m}\;+\;\frac{1-(-1)^m}{2m}\,\ln\frac{\alpha\sqrt[m]{a}+\beta}{\alpha\sqrt[m]{a}+\alpha}$$

$$-\,\alpha\sum_{j=0}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\Bigg(2\sin\frac{\pi(2j+1)}{m}\;\mathrm{arctg}\,\frac{(\beta-\alpha)\sin\frac{\pi(2j+1)}{m}}{\alpha\sqrt[m]{a}+(\beta/\sqrt[m]{a})-(\alpha+\beta)\cos\frac{\pi(2j+1)}{m}}$$

$$+\,\cos\frac{\pi(2j+1)}{m}\,\ln\frac{\alpha^2-2\alpha^2\sqrt[m]{a}\,\cos\frac{\pi(2j+1)}{m}+(\alpha\sqrt[m]{a})^2}{\beta^2-2\beta\alpha\sqrt[m]{a}\,\cos\frac{\pi(2j+1)}{m}+(\alpha\sqrt[m]{a})^2}\Bigg)\Bigg\}\,. \qquad (14.8)$$

Опираясь на теорему 10.1, с учетом соотношения (14.5) приходим к следующему утверждению.

Теорема 14.1. *Пусть дано натуральное число $m\ge 2$, а также числа $\beta>0$ и $\alpha\in[0,\beta]$. Тогда точная нижняя грань экспоненциальных типов $\sigma(\Lambda^{(m)})$ всевозможных бесконечных произведений* (14.4)*, отвечающих положительным последовательностям Λ с характеристиками $\underline{\Delta}(\Lambda)\ge\alpha$ и $\overline{\Delta}(\Lambda)=\beta$, вычисляется по формуле* (14.8)*. Эта нижняя грань достигается на некоторой функции вида* (14.4)*, или, что то же самое, на некоторой возрастающей поледовательности положительных чисел, нижняя и верхняя плотности которой совпадают с α и β соответственно.*

14.2. Оценки радиуса полноты. Чтобы раскрыть возможности для применения теоремы 14.1 к экспоненциальной аппроксимации в комплексной области, напомним некоторые определения. Пусть $\Lambda=(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность точек из $\mathbb{C}$ и

$$E_\Lambda\equiv\left\{z^{n-1}e^{\lambda z}:\lambda\in\Lambda,\;n=1,2,\ldots,\Lambda(\lambda)\right\},\qquad z\in\mathbb{C},$$

где $\Lambda(\lambda)$ обозначает число вхождений точки λ в последовательность Λ.

Говорят, что система (кратных) экспонент E_Λ *полна в круге*

$$K_R\equiv\{z\in\mathbb{C}:|z|<R\}\,,\qquad R>0,$$

если она полна в пространстве $A(K_R)$ функций, аналитических в этом круге, наделенном топологией равномерной сходимости на компактах из K_R. Символ $R(\Lambda)$ обозначает *радиус круга полноты* последовательности Λ, т. е. точную верхнюю грань радиусов кругов K_R, в которых полна система E_Λ. Обозначим через $\sigma_{inf}(\Lambda)$

точную нижнюю грань значений $\sigma > 0$, для которых найдется целая функция $f \not\equiv 0$ экспоненциального типа $\le \sigma$ такая, что $f(\Lambda) = 0$, т. е. f обращается в нуль на Λ с учетом кратностей. (Разумеется, f может иметь нули, отличные от точек из Λ.) Согласно известному критерию полноты системы E_Λ в пространстве $A(K_R)$ (см., например, [116; § 3.3.1]) справедливо равенство

$$\sigma_{inf}(\Lambda) \;=\; R(\Lambda).$$

При фиксированных $\beta > 0$, $0 \le \alpha \le \beta$ рассмотрим введенный выше класс последовательностей $P(\alpha,\,\beta)$. Для заданных $m \ge 2$ и $\Lambda \in P(\alpha,\,\beta)$ определим последовательность $\Lambda^{(m)}$ по формуле (14.2). Положим

$$R(\alpha,\,\beta\,;\,m) \equiv \inf_{\Lambda \in P(\alpha,\,\beta)} R(\Lambda^{(m)}).$$

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы как можно точнее оценить характеристику $R(\alpha,\,\beta\,;\,m)$. Попросту говоря, требуется с хорошей точностью найти радиус наибольшего из кругов, в которых заведомо полна любая система экспонент, множество показателей которой порождено какой-либо последовательностью Λ из класса $P(\alpha,\,\beta)$ посредством поворотов на углы $\dfrac{2\pi j}{m}$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, относительно точки нуль.

Наилучшие из известных к настоящему моменту оценок для $R(\alpha,\,\beta\,;\,m)$ удается получить, сочетая точный результат этого параграфа (теорема 14.1) с классической оценкой (12.6) и недавними результатами глубоких исследований Б. Н. Хабибуллина [117].

Теорема 14.2. *При любых $\beta > 0$, $0 \le \alpha \le \beta$, и целом $m \ge 2$ справедливы оценки*

$$R(\alpha,\,\beta\,;\,m) \le \min_{\Lambda \in P(\alpha,\,\beta)} \sigma\left(\Lambda^{(m)}\right) = s\left(\alpha, \beta\,; \frac{1}{m}\right), \tag{14.9}$$

$$R(\alpha,\,\beta\,;\,m) \ge \max\left\{\beta\, m\, \exp\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right),\ \mu_m\, s\left(\alpha, \beta\,; \frac{1}{m}\right)\right\}, \tag{14.10}$$

где величина $s\left(\alpha, \beta\,; \dfrac{1}{m}\right)$ дается формулой (14.8), *а*

$$\mu_m \equiv \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma^2\left(1 - \frac{1}{2m}\right)\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{m}. \tag{14.11}$$

В частности,

$$\frac{\beta\, m}{e} \le R(\beta\,; m) \equiv R(0,\,\beta\,; m) \le \beta C\left(\frac{1}{m}\right), \tag{14.12}$$

где в соответствие с (10.3) *обозначено*

$$C\left(\frac{1}{m}\right) = \max_{a>0}\ \frac{\ln(1+a)}{\sqrt[m]{a}}.$$

Доказательство. По определению радиуса полноты последовательности $\Lambda^{(m)}$ и величины $R(\alpha,\, \beta\,;\, m)$ для любой последовательности $\Lambda \in P(\alpha,\, \beta)$ верна цепочка соотношений

$$R(\alpha,\, \beta\,;\, m) \le R\left(\Lambda^{(m)}\right) \le \sigma\left(\Lambda^{(m)}\right).$$

Для доказательства (14.9) достаточно теперь перейти здесь к минимуму по последовательностям $\Lambda \in P(\alpha,\, \beta)$ и воспользоваться теоремой 14.1

Чтобы обосновать оценку (14.10), воспользуемся установленным в работе [117; теорема 5 (о полноте)] неравенством

$$R\left(\Lambda^{(m)}\right) \ge \mu_m\, \sigma\left(\Lambda^{(m)}\right),$$

в котором множитель μ_m находится по формуле (14.11). Переходя к точной нижней грани по $\Lambda \in P(\alpha,\, \beta)$ и применяя теорему 14.1, получаем оценку

$$R(\alpha,\, \beta\,;\, m) \ge \mu_m\, s\left(\alpha, \beta\,; \frac{1}{m}\right),$$

где $s\left(\alpha, \beta\,; \dfrac{1}{m}\right)$ вычисляется согласно (14.8). Заметим еще, что из классического неравенства (12.6) вытекает

$$R\left(\Lambda^{(m)}\right) \ge \beta\, m\, \exp\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right),$$

откуда и

$$R(\alpha,\, \beta\,;\, m) \ge \beta\, m\, \exp\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right).$$

Оценка снизу (14.10) установлена. Наконец, двусторонняя оценка (14.12) есть частный случай (14.9) и (14.10) при $\alpha = 0$. Теорема 14.2 доказана.

Компьютерный эксперимент показывает, что при $\alpha = 0$ максимум в правой части (14.10) достигается на первой из величин, т. е.

$$\max\left\{\frac{\beta\, m}{e}\,,\ \mu_m\, \beta\, C\left(\frac{1}{m}\right)\right\} = \frac{\beta\, m}{e}.$$

Например, при $m = 3$ и $m = 4$ выполнены соотношения

$$\max\left\{\frac{3}{e}\,,\ \mu_3\, C\left(\frac{1}{3}\right)\right\} = \max\left\{1.1036\ldots\,,\ 1.0579\ldots\right\} = 1.1036\ldots\ ;$$

$$\max\left\{\frac{4}{e}\,,\ \mu_4\, C\left(\frac{1}{4}\right)\right\} = \max\left\{1.4715\ldots\,,\ 1.4326\ldots\right\} = 1.4715\ldots\ ,$$

и из оценки (14.12) получаем, что

$$1.1036\ldots\ \beta \ \le\ R(\beta;\,3)\ \le\ 1.1243\ldots\ \beta\,;$$

$$1.4715\ldots\ \beta \ \le\ R(\beta;\,4)\ \le\ 1.4786\ldots\ \beta\,.$$

Таким образом, привлечение результата Б. Н. Хабибуллина об оценке радиуса полноты не дает в нашей задаче эффекта, если не учитывать нижней плотности последовательности Λ. Здесь оценка снизу получается только за счет классического неравенства, не отражающего специфики случая $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$. Тем не менее, зазор между левой и правой частями (14.12) уменьшается с ростом m, исчезая в пределе при $m \to \infty$ (см. асимптотическую формулу (13.1)).

Еще более интересной является картина при произвольном $\alpha > 0$. В силу формулы дополнения

$$\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{m}}$$

величина (14.11) эквивалентна величине

$$\frac{\Gamma^2\left(1-\frac{1}{2m}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)} \to 1, \qquad m \to \infty.$$

Поэтому, привлекая асимптотику (13.5), видим, что оценки (14.9) и (14.10) так же, как и при $\alpha = 0$, «смыкаются», когда $m \to \infty$. Однако теперь при оценивании $R(\alpha,\,\beta\,;\,m)$ снизу при малых значениях α/β по-прежнему лучший результат дает применение (12.6), но при достаточно больших α/β эффективней становится использование оценки Б. Н. Хабибуллина вкупе с теоремой 14.1. Численное подтверждение сказанному мы приведем ниже для $m = 2$. Пока обратим внимание на то, что в «крайнем» случае $\alpha = \beta$ неравенство (14.9) превращается в

$$R(\beta,\,\beta\,;\,m)\ \le\ \frac{\pi\beta}{\sin\frac{\pi}{m}},$$

а неравенство (14.10) — соответственно в

$$R(\beta,\,\beta\,;\,m) \ge \beta\,\max\left\{m\,,\ \frac{\pi\mu_m}{\sin\frac{\pi}{m}}\right\} = \frac{\pi\mu_m}{\sin\frac{\pi}{m}}\,\beta = \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{2m}\right)\,\beta,$$

и теорема 14.2 дает двустороннюю оценку

$$\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{2m}\right)\,\beta = \frac{\pi\beta}{\sin\frac{\pi}{m}}\,\mu_m \le R(\beta,\,\beta\,;\,m) \le \frac{\pi\beta}{\sin\frac{\pi}{m}}.$$

В частности, при $m = 3$ и $m = 4$ получаем отсюда, что

$$3.4133\ldots\ \beta\ \le\ R(\beta,\,\beta\,;\,3)\ \le\ 3.6275\ldots\ \beta,$$

$$4.3048\ldots\ \beta\ \le\ R(\beta,\,\beta\,;\,4)\ \le\ 4.4428\ldots\ \beta.$$

Однако, наличие плотности у последовательности Λ позволяет утверждать большее: для любых $\beta > 0$ и целого $m \geq 2$ справедливо равенство

$$R\left(\Lambda^{(m)}\right) \,=\, \frac{\pi\beta}{\sin\frac{\pi}{m}}, \qquad \Lambda \in P(\beta,\,\beta), \tag{14.13}$$

вследствие которого

$$R(\beta,\,\beta\,;\,m) \,=\, \inf_{\Lambda\in P(\beta,\,\beta)} R(\Lambda^{(m)}) \,=\, \frac{\pi\beta}{\sin\frac{\pi}{m}}.$$

Так, при $m = 3$ и $m = 4$ соответственно действуют точные формулы

$$R(\beta,\,\beta\,;\,3) \,=\, \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,\beta \,=\, 3.6275\ldots\,\beta,$$

$$R(\beta,\,\beta\,;\,4) \,=\, \pi\sqrt{2}\,\beta \,=\, 4.4428\ldots\,\beta.$$

Общее соотношение (14.13) без подробного обоснования фактически отмечено в статье [117; с. 145]. Для полноты картины дадим вывод формулы (14.13).

Рассмотрим каноническое произведение (14.4), построенное по последовательности $\Lambda^{(m)}$, где $\Lambda \in P(\beta,\,\beta)$. Как известно [76; гл. I, § 2, с. 46–48], для аргументов вида

$$\frac{(2j-1)\pi}{m}, \qquad j = 1,\,2,\,\ldots\,m,$$

значения индикатора целой функции (14.4) вычисляются через обычный предел и равны ее экспоненциальному типу

$$\sigma\left(\Lambda^{(m)}\right) \,=\, \frac{\pi\beta}{\sin\frac{\pi}{m}}.$$

Пусть теперь $f \not\equiv 0$ — произвольная целая функция экспоненциального типа σ_f такая, что $f\left(\Lambda^{(m)}\right) = 0$. Тогда, разделив функцию f на каноническое произведение (14.4), получим некоторую целую функцию g экспоненциального типа. Воспользуемся известными свойствами индикаторов

$$\sigma_f \,=\, \max_{0\leq\theta\leq 2\pi}\, h_f(\theta), \qquad \sum_{j=1}^{m}\, h_g\left(\frac{(2j-1)\pi}{m}\right) \,\geq\, 0,$$

и запишем

$$m\,\sigma_f \,\geq\, \sum_{j=1}^{m}\, h_f\left(\frac{(2j-1)\pi}{m}\right) \,=\, \sum_{j=1}^{m}\, h_g\left(\frac{(2j-1)\pi}{m}\right) \,+\, m\,\sigma\left(\Lambda^{(m)}\right) \,\geq\, m\,\sigma\left(\Lambda^{(m)}\right).$$

Отсюда

$$\sigma_f \,\geq\, \sigma\left(\Lambda^{(m)}\right) \,=\, \frac{\pi\beta}{\sin\frac{\pi}{m}},$$

что по определению $R\left(\Lambda^{(m)}\right)$ приводит к равенству (14.13).

Отметим еще, что комбинируя неравенства теоремы 14.2 с результатами § 12, можно предъявлять менее точные, но более простые оценки для $R(\alpha,\,\beta\,;\,m)$. Например, сочетание (14.9) с (12.1) приводит к следующей линейной по α и β оценке:

$$R(\alpha,\,\beta\,;\,m) \le \beta\, C\left(\frac{1}{m}\right) + \left(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{m}} - C\left(\frac{1}{m}\right)\right)\alpha\,. \tag{14.14}$$

Выделим особо важный в вопросах полноты (см. также первую главу) класс канонических произведений с вещественными симметричными нулями

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \qquad \lambda\in\mathbb{C},$$

соответствующий случаю $m = 2$ в определении (14.4). Экспоненциальный тип такого канонического произведения, построенного по какой-либо последовательности $\Lambda \in P(\alpha,\,\beta)$, обозначаем $\sigma\,(\Lambda)$ вместо $\sigma\left(\Lambda^{(2)}\right)$. Для сокращения записи будем писать также $R(\alpha,\,\beta)$ вместо $R(\alpha,\,\beta\,;2)$ и $R(\beta)$ вместо $R(0,\,\beta)$.

При $m = 2$ формула (14.8) принимает вид

$$s\left(\alpha,\beta\,;\frac{1}{2}\right) \;=\; \pi\alpha \,+\, \max_{a>0}\left\{\frac{\beta}{\sqrt{a}}\;\ln\frac{1+a}{1+a(\alpha/\beta)^2} \,-\, 2\alpha\;\mathrm{arctg}\,\frac{(\beta-\alpha)\sqrt{a}}{\beta+a\alpha}\right\}$$

$$=\; \max_{a>0}\left\{\frac{\beta}{\sqrt{a}}\;\ln\frac{1+a}{1+a(\alpha/\beta)^2} \,+\, 2\alpha\;\mathrm{arctg}\,\frac{\beta+a\alpha}{(\beta-\alpha)\sqrt{a}}\right\}$$

и приводит к такому следствию из теоремы 14.2, содержащему часть теоремы А. Ю. Попова из работы [93].

Теорема 14.3. *Для любых $\beta > 0$ и $0 \le \alpha \le \beta$ справедливы неравенства*

$$R(\alpha,\,\beta) \;\le\; \min_{\Lambda\in P(\alpha,\,\beta)}\;\sigma\,(\Lambda) = \beta\, C(\alpha/\beta,\,1/2)$$

$$=\; \max_{a>0}\left\{\frac{\beta}{\sqrt{a}}\;\ln\frac{1+a}{1+a(\alpha/\beta)^2} \,+\, 2\alpha\;\mathrm{arctg}\,\frac{\beta+a\alpha}{(\beta-\alpha)\sqrt{a}}\right\}; \tag{14.15}$$

$$R(\alpha,\,\beta) \;\ge\; \beta\max\left\{2\,\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right),\; \frac{\Gamma^2(3/4)}{\sqrt{\pi}}\,C(\alpha/\beta,\,1/2)\right\}. \tag{14.16}$$

В частности, выполнена двусторонняя оценка

$$0.7357\ldots\,\beta \;\le\; R(\beta) \;\le\; 0.8047\ldots\,\beta.$$

При $\alpha = \beta$ действует точная формула

$$R(\beta,\beta) \;=\; \pi\beta.$$

Оценки (14.15) и (14.16) являются частными случаями оценок (14.9) и (14.10) соответственно. Точно так же, подставив $m = 2$ в (14.14), получим

$$R(\alpha,\,\beta)\;\le\;\pi\alpha + (\beta-\alpha)\,C(1/2) = 0.8047\ldots\,\beta + 2.3368\ldots\,\alpha. \tag{14.17}$$

Оценки $R(\beta)$ из теоремы 14.3 не являются новыми. Благодаря примеру из работы [93] наилучшие на сегодня границы, в которых заключена величина $R(\beta)$, таковы:

$$0.7357\ldots\,\beta\;\le\;R(\beta)\;\le\;0.8\,\beta.$$

Следует отметить, что нахождение такой оценки сверху экстремальной величины $R(\alpha,\,\beta)$, которая в направлении учета нижней ρ-плотности последовательностей Λ уточняла бы неравенство $R(\beta) < 0.8\,\beta$ из [93], требует отдельного глубокого исследования. Но уже и полученная оценка (14.17) дает представление о степени возможного влияния величины α на значение $R(\alpha,\,\beta)$ точной нижней грани радиусов кругов полноты систем вида $\mathcal{E}_{\pm\Lambda}$, где $\Lambda \in P(\alpha,\beta)$.

Сделаем, наконец, одно замечание относительно выбора максимальной величины в неравенстве (14.16) из теоремы 14.3. Указанный выбор определяется единственным на $[0,1]$ корнем k^* уравнения

$$e^k = \gamma\, C(k,\,1/2),$$

где числовой коэффициент в правой части

$$\gamma = \frac{e\,\Gamma^2(3/4)}{2\sqrt{\pi}} = 1.1514\ldots\,.$$

Найденное с помощью компьютера значение $k^* = 0.1702\ldots$ «расщепляет» оценку (14.16) на две. Первой из них (классической)

$$R(\alpha,\,\beta) \ge 2\beta\,\exp\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)$$

предпочтительно пользоваться лишь при малых значениях отношения α/β, а именно, при $\alpha \in [0,\,k^*\beta]$. Вторая из них

$$R(\alpha,\,\beta) \ge \frac{\Gamma^2(3/4)}{\sqrt{\pi}}\,\beta\, C(\alpha/\beta,\,1/2) = 0.8472\ldots\,\beta\, C(\alpha/\beta,\,1/2)$$

нетривиальна и является на промежутке $\alpha \in [k^*\beta,\,\beta]$ наилучшей из известных. Таким образом, при $0.1702\ldots\,\beta \le \alpha \le \beta$ справедлива двусторонняя оценка

$$0.8472\ldots\,\beta\, C(\alpha/\beta,\,1/2)\;\le\;R(\alpha,\,\beta)\;\le\;\beta\, C(\alpha/\beta,\,1/2),$$

правая часть которой выписана в формуле (14.15).

§ 15. Наименьшее возможное значение типа целой функции порядка меньше единицы с нулями фиксированных плотностей, лежащими в угле

В параграфе изучается следующий вопрос, естественно возникающий в связи с теоремой 10.1: можно ли распространить результат этой теоремы в направлении расширения множества локализации нулей с одного луча на некоторый угол? Исчерпывающий ответ будет дан для угла, помещающегося в полуплоскость. Точнее, рассматривается целая функция, все нули которой лежат в некотором угле раствора $\le \pi$ и имеют заданные плотности при показателе $\rho \in (0,1)$. Требуется найти наименьшее значение, которое может принимать тип при порядке ρ такой функции. Благодаря теореме Адамара [72; гл. I, § 10] и инвариантности типа целой функции относительно сдвига и поворота множества ее нулей задачу можно решать для соответствующего канонического произведения (см. представление (15.2) ниже).

Пусть последовательность комплексных чисел $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ вида

$$0 < |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_n| \le \ldots\ , \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \tag{15.1}$$

расположена в некотором угле фиксированного раствора $\le \pi$. Пусть также задано число $\rho \in (0,\, 1)$. Предполагаем, что Λ имеет конечную положительную *верхнюю ρ-плотность*

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}, \qquad 0 < \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) < +\infty.$$

Нижняя ρ-плотность последовательности Λ определяется по формуле

$$\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}.$$

В случае существования предела

$$\Delta_\rho(\Lambda) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}$$

последовательность Λ называем, как обычно, *измеримой* (при показателе ρ), а величину $\Delta_\rho(\Lambda)$ — *ρ-плотностью* этой последовательности.

Построим по последовательности Λ каноническое произведение

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{15.2}$$

определяющее целую функцию конечного типа $\sigma_\rho > 0$ при порядке ρ, где

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho(\Lambda) \equiv \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \max\limits_{|\lambda|=r} |L(\lambda)|}{r^\rho}.$$

Произведение (15.2) будет функцией вполне регулярного роста тогда и только тогда, когда последовательность Λ имеет угловую плотность $\Delta_\rho(\psi)$ при показателе ρ.

В этом случае тип вычисляется по точной формуле, вытекающей из [72; гл. II, § 2]:

$$\sigma_\rho = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \max_{0\le\varphi\le 2\pi} \int_0^{2\pi} h_\rho(\varphi-\psi)\, d\,\Delta_\rho(\psi),$$

где $h_\rho(\varphi)$ есть 2π-периодическое продолжение функции $\cos\rho(\varphi-\pi)$ с отрезка $[0, 2\pi]$ на всю вещественную прямую. Для последовательности Λ, расположенной на одном луче, существование угловой плотности при показателе ρ равносильно измеримости Λ при том же показателе. В общем случае расположения последовательности в угле это не так, и существуют канонические произведения (15.2) с измеримой последовательностью нулей, не являющиеся функциями вполне регулярного роста. Указанное обстоятельство говорит о том, что задача о наименьшем типе содержательна даже для канонических произведений (15.2) с измеримыми нулями.

Зафиксируем числа $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$. Спрашивается, какое наименьшее значение может принимать величина σ_ρ, если

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \beta, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} \ge \alpha.$$

Без ограничения общности будем предполагать, что

$$\Lambda \subset \Gamma_\theta \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \le \theta\}, \tag{15.3}$$

где $\theta \in [0, \pi/2]$, сводя задачу к нахождению экстремальной величины

$$s_\theta(\alpha, \beta; \rho) \equiv \inf\left\{\sigma_\rho = \sigma_\rho(\Lambda) : \Lambda \subset \Gamma_\theta,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta,\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \ge \alpha\right\}. \tag{15.4}$$

Так, при $\theta = 0$ получаем задачу для целых функций с нулями на луче, решенную ранее А. Ю. Поповым для $\alpha = 0$ и автором для любого $\alpha \in [0, \beta]$ (см. § 10).

В этом параграфе величина $s_\theta(\alpha, \beta; \rho)$ вычисляется при всех значениях параметра $\theta \in [0, \pi/2]$. Сначала получена оценка снизу для типа функции (15.2). Затем доказывается точность этой оценки. Результат формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 15.1. *Пусть заданы четыре числа* $\rho \in (0, 1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$, $\theta \in [0, \pi/2]$. *Тогда справедлива формула*

$$s_\theta(\alpha, \beta; \rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta + \max_{a>0} \int_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \left(\beta\, a^{-\rho} - \alpha\, x^{-\rho}\right) \frac{x + \cos\theta}{x^2 + 2x\cos\theta + 1}\, dx.$$

Точная нижняя грань (15.4) *достигается для некоторой функции* (15.2) *с последовательностью нулей* Λ, *расположенной на лучах* $\arg\lambda = \pm\,\theta$, *причем* $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$.

В частном случае $\theta = \pi/2$ теорема 15.1 показывает, что наименьшее значение для типа при порядке $\rho \in (0,1)$ целой функции с последовательностью нулей $\Lambda : \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha$, лежащих в некоторой (замкнутой) полуплоскости, выражается величиной

$$\frac{\pi\alpha}{2\sin\frac{\pi\rho}{2}} + \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{(\beta\, a^{-\rho} - \alpha\, x^{-\rho})\, x}{x^2+1}\, dx,$$

и указанное значение достигается для некоторой целой функции с нулями, расположенными на одной прямой. После очевидных преобразований последнего интеграла приходим к формуле

$$s_{\pi/2}(\alpha,\beta;\rho) = \frac{1}{2}\, s(\alpha,\beta;\rho/2) = \frac{\beta}{2}\, C(k,\rho/2), \qquad k = \frac{\alpha}{\beta} \in [0,1], \quad \rho \in (0,1),$$

которая связывает теоремы 10.1, 15.1 и демонстрирует, что наименьшее значение ρ-типа целой функции с нулями в полуплоскости (или на прямой) равно половине наименьшего значения $(\rho/2)$-типа целой функции с нулями на луче.

Задачу о вычислении $s_\theta(\alpha,\beta;\rho)$ поставил при $\alpha = 0$ (т. е. без учета нижней ρ-плотности нулей) и решил А. Ю. Попов [100], отыскав величину

$$s_\theta(0,\beta;\rho) = \frac{\beta}{2} \max_{a>0} a^{-\rho} \ln(a^2 + 2a\cos\theta + 1), \qquad 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Для канонических произведений, последовательности нулей $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ которых измеримы, т. е. имеют ρ-плотность

$$\Delta_\rho(\Lambda) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \beta,$$

из теоремы 15.1 получаем соотношение

$$s_\theta(\beta,\beta;\rho) = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\, \cos\rho\,\theta.$$

Отметим, что экстремальная величина $s_\theta(\beta,\beta;\rho)$ достигается, если все нули функции (15.2) расположены на лучах $\arg\lambda = \pm\,\theta$ и на каждом из них образуют измеримые последовательности с равными ρ-плотностями ($= \beta/2$). Как мы покажем ниже, $s_\theta(\beta,\beta;\rho)$ заведомо не достигается, если эти ρ-плотности различны.

Приступим к доказательству теоремы 15.1.

15.1. Оценка снизу. Итак, пусть $\rho \in (0,1)$. Предполагаем, что последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ вида (15.1) лежит в угле Γ_θ с фиксированным $\theta \in [0,\pi/2]$ и ее верхняя и нижняя ρ-плотности подчинены ограничениям $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha$. Всюду далее $\alpha \in (0,\beta]$, поскольку случай $\alpha = 0$ рассмотрен в [100]. Образуем по последовательности Λ каноническое произведение (15.2) конечного типа σ_ρ и докажем оценку

$$\sigma_\rho \geq \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta + \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \left(\beta\, a^{-\rho} - \alpha\, x^{-\rho}\right) \frac{x+\cos\theta}{x^2+2x\cos\theta+1}\, dx. \tag{15.5}$$

Учитывая (15.3), запишем $\lambda_n = r_n\, e^{i\varphi_n}$, $|\varphi_n| \le \theta$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда из определения (15.2) получим:

$$M_L(r) \equiv \max_{|\lambda|=r} |L(\lambda)| \ \ge\ |L(-r)| = \prod_{n=1}^{\infty} \left|1 + \frac{r}{\lambda_n}\right| = \prod_{n=1}^{\infty} \left|1 + \frac{r}{r_n} e^{-i\varphi_n}\right|$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{2r}{r_n}\cos\varphi_n + \left(\frac{r}{r_n}\right)^2} \ \ge \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{2r}{r_n}\cos\theta + \left(\frac{r}{r_n}\right)^2}.$$

Обозначим через $n_\Lambda(\tau) = \sum\limits_{|\lambda_n| \le \tau} 1$ считающую функцию последовательности Λ, или, что все равно, последовательности $|\Lambda| \equiv (|\lambda_n|)_{n\in\mathbb{N}} = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Попутно отметим, что

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\rho} = \beta, \quad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\rho} \ge \alpha. \tag{15.6}$$

Стандартное привлечение интеграла Стильтьеса дает

$$\ln M_L(r) \ \ge\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln \sqrt{1 + \frac{2r}{r_n}\cos\theta + \left(\frac{r}{r_n}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \ln\left(1 + \frac{2r}{\tau}\cos\theta + \left(\frac{r}{\tau}\right)^2\right) d\, n_\Lambda(\tau).$$

Интегрирование по частям с учетом условий

$$L(0) = 1, \qquad n_\Lambda(\tau) = O(\tau^\rho), \quad \tau \to +\infty,$$

избавляющих от подстановки, приводит к соотношению

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \ln\left(1 + \frac{2r}{\tau}\cos\theta + \left(\frac{r}{\tau}\right)^2\right) d\, n_\Lambda(\tau) \ =\ \int_0^\infty n_\Lambda(\tau)\, \frac{r\,(\tau\cos\theta + r)}{\tau\,(\tau^2 + 2r\tau\cos\theta + r^2)}\, d\tau.$$

После замены переменной $\tau = rt$ и обозначений

$$\varphi_r(t) \equiv \frac{n_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho}, \qquad K(t) \ \equiv\ \frac{t^{\rho-1}\,(t\cos\theta + 1)}{t^2 + 2t\cos\theta + 1}, \qquad t > 0, \tag{15.7}$$

приходим к оценке

$$r^{-\rho} \ln M_L(r) \ \ge\ \int_0^\infty \varphi_r(t)\, K(t)\, dt, \qquad r > 0. \tag{15.8}$$

В интеграле из (15.8) функция $\varphi_r(t)$ при фиксированном r удовлетворяет условиям

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \varphi_r(t) = \beta, \qquad \varliminf_{t\to+\infty} \varphi_r(t) \ge \alpha,$$

а ядро $K(t)$ положительно при $t > 0$, каково бы ни было значение параметра $\theta \in [0, \pi/2]$ (см. (15.6), (15.7)). Поэтому в дальнейших оценках можно воспользоваться методом, разработанным в § 10 этой главы для случая расположения нулей Λ на одном луче ($\theta = 0$). Зафиксируем произвольно число $a > 0$ и положим $\eta = \eta(r) \equiv \varphi_r(1/a)$. Имеем

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \eta(r) = \beta, \qquad \varliminf_{r\to+\infty} \eta(r) \geq \alpha.$$

Пусть $\alpha' \in (0, \alpha)$. Как показано в § 10, найдется такое число $c > 0$, что при всех $r \geq ac$ и $t \geq c/r$ выполняется неравенство $\varphi_r(t) \geq \psi_r(t)$, где функция $\psi_r(t)$ определена для положительных t посредством формулы

$$\psi_r(t) \equiv \begin{cases} \alpha', & t \notin \left[\dfrac{1}{a}, \left(\dfrac{\eta}{\alpha'}\right)^{1/\rho} \dfrac{1}{a}\right], \\ \dfrac{\eta}{(at)^\rho}, & t \in \left[\dfrac{1}{a}, \left(\dfrac{\eta}{\alpha'}\right)^{1/\rho} \dfrac{1}{a}\right]. \end{cases} \tag{15.9}$$

Отсюда на основании (15.8) заключаем, что

$$r^{-\rho} \ln M_L(r) \geq \int\limits_{c/r}^{\infty} \psi_r(t)\, K(t)\, dt, \qquad r \geq ac. \tag{15.10}$$

Подставляя в (15.10) выражения $K(t)$ из (15.7) и $\psi_r(t)$ из (15.9) и выделяя известный интеграл (см., например, [29; задача 4. 174])

$$\int\limits_0^{\infty} K(t)\, dt = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \cos \rho\, \theta, \tag{15.11}$$

получаем оценку

$$r^{-\rho} \ln M_L(r) \geq \frac{\pi\alpha'}{\sin \pi\rho} \cos \rho\, \theta$$

$$+ \int\limits_{1/a}^{(1/a)(\eta/\alpha')^{1/\rho}} \frac{(\eta a^{-\rho} - \alpha' t^\rho)\,(t\cos\theta + 1)}{t\,(t^2 + 2t\cos\theta + 1)}\, dt - \alpha' \int\limits_0^{c/r} K(t)\, dt.$$

Переходя здесь к верхнему пределу по последовательности значений r, на которой $\eta = \eta(r)$ стремится к β, имеем

$$\sigma_\rho \geq \frac{\pi\alpha'}{\sin \pi\rho} \cos \rho\, \theta + \int\limits_{1/a}^{(1/a)(\beta/\alpha')^{1/\rho}} \frac{(\beta a^{-\rho} - \alpha' t^\rho)\,(t\cos\theta + 1)}{t\,(t^2 + 2t\cos\theta + 1)}\, dt.$$

Для получения оценки (15.5) осталось сделать в последнем интеграле замену переменной $t = 1/x$ и воспользоваться свободой выбора чисел $\alpha' \in (0, \alpha)$ и $a > 0$.

15.2. Доказательство точности оценки. Покажем, что оценка (15.5) достижима. Для этого потребуется расположить последовательность Λ на лучах $\arg\lambda = \pm\theta$ так, чтобы

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha, \tag{15.12}$$

а каноническое произведение (15.2), построенное по этой последовательности, имело тип

$$\sigma_\rho = \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta + \max_{a>0}\int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \left(\beta\, a^{-\rho} - \alpha\, x^{-\rho}\right)\frac{x+\cos\theta}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx. \tag{15.13}$$

Относительно параметров задачи будем предполагать, что

$$\rho\in(0,1), \quad \beta>0, \quad \alpha\in(0,\beta], \quad \theta\in(0,\pi/2],$$

находясь в ситуации, не изученной ранее. Случаи $\alpha\in(0,\beta)$ и $\alpha=\beta$ разберем отдельно.

Пусть вначале $\alpha\in(0,\beta)$. Воспользуемся конструкцией экстремальной последовательности, предложенной автором для $\theta=0$. Выбираем вспомогательную положительную последовательность $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ со свойством

$$m_1>1, \quad m_{k+1}=m_k^4, \qquad k\in\mathbb{N},$$

и строим последовательность $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}_+$, соблюдая следующее правило. На промежутках вида $[m_k,\, m_k^2-1]$ и $\Big[(\beta/\alpha)^{1/\rho}\, m_k^2,\, m_{k+1}\Big)$ точки r_j^ρ образуют арифметическую прогрессию с разностью $2/\alpha$; на промежутках вида $(m_k^2-1,\, m_k^2]$ точки r_j^ρ образуют арифметическую прогрессию с разностью $\dfrac{2\rho}{(\beta-\alpha)m_k^2}$; на промежутках вида $\Big(m_k^2,\, (\beta/\alpha)^{1/\rho}\, m_k^2\Big)$ точек r_j^ρ нет. Верхняя и нижняя ρ-плотности последовательности $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ равны $\beta/2$ и $\alpha/2$ соответственно. Полагая

$$\Lambda\equiv\left(r_j\, e^{-i\theta}\right)_{j\in\mathbb{N}}\bigcup\left(r_j\, e^{i\theta}\right)_{j\in\mathbb{N}},$$

сразу получаем (15.12). Образуем по последовательности Λ каноническое произведение (15.2). Заметим, что

$$L(\lambda)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{r_j}\,e^{i\theta}\right)\left(1-\frac{\lambda}{r_j}\,e^{-i\theta}\right)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{2\lambda}{r_j}\cos\theta+\left(\frac{\lambda}{r_j}\right)^2\right),$$

откуда

$$M_L(r)=\max_{|\lambda|=r}|L(\lambda)|=L(-r)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{2r}{r_j}\cos\theta+\left(\frac{r}{r_j}\right)^2\right).$$

Поскольку считающая функция $n_\Lambda(\tau)$ последовательности Λ есть удвоенная считающая функция последовательности $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$, то, повторяя соответствующие выкладки из пункта 15.1, приходим к представлению

$$r^{-\rho}\ln M_L(r) \;=\; \int\limits_0^\infty \varphi_r(t)\,K(t)\,dt, \qquad r>0, \tag{15.14}$$

где $\varphi_r(t)$ и $K(t)$ определены в (15.7). Таким образом, построенное каноническое произведение $L(\lambda)$ доставляет равенство в (15.8).

С точностью до остаточных членов, не влияющих на величину типа σ_ρ, функция $\varphi_r(t)$ с параметром $r>0$ совпадает с функцией $\Phi_r(t)$, которая определяется при $t>0$ формулами

$$\Phi_r(t)\equiv\alpha, \qquad t\in\left(0,\,\frac{m_1}{r}\right],$$

$$\Phi_r(t)\,\big|_{\left[\frac{m_k}{r},\,\frac{m_{k+1}}{r}\right]}\equiv\begin{cases}\alpha, & t\notin\left[\dfrac{m_k^2}{r},\,\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho}\dfrac{m_k^2}{r}\right],\\[2ex] \beta\left(\dfrac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho}, & t\in\left[\dfrac{m_k^2}{r},\,\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho}\dfrac{m_k^2}{r}\right],\end{cases}$$

где $k\in\mathbb{N}$ (подробности см. в § 11). Тем самым, из (15.14) следует, что

$$\sigma_\rho(\Lambda) \;=\; \varlimsup_{r\to+\infty}\int\limits_0^\infty \Phi_r(t)\,K(t)\,dt. \tag{15.15}$$

Введем для сокращения записи несколько обозначений. Пусть

$$g(a)\equiv\int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a}\frac{(\beta\,a^{-\rho}-\alpha\,x^{-\rho})\,(x+\cos\theta)}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx$$

$$=\int\limits_{1/a}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}(1/a)}\left(\frac{\beta}{(at)^\rho}-\alpha\right)K(t)\,dt. \tag{15.16}$$

Поскольку функция $g(a)$ непрерывна и положительна при $a>0$, причем

$$\lim_{a\to+0} g(a)=\lim_{a\to+\infty} g(a)=0, \tag{15.17}$$

то найдется такая точка $a_0>0$, что $g(a_0)=\max\limits_{a>0} g(a)$. Для $t>0$ положим

$$\psi_0(t)\equiv\begin{cases}\alpha, & t\notin\left[\dfrac{1}{a_0},\,\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho}\dfrac{1}{a_0}\right],\\[2ex] \dfrac{\beta}{(a_0t)^\rho}, & t\in\left[\dfrac{1}{a_0},\,\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho}\dfrac{1}{a_0}\right].\end{cases} \tag{15.18}$$

С учетом определений (15.16), (15.18) справедливую в общей ситуации оценку (15.5) можно переписать в виде

$$\sigma_\rho \ \geq \ \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta \ + \ g(a_0) = \int\limits_0^\infty \psi_0(t)\,K(t)\,dt.$$

В частности, для построенной в этом пункте последовательности Λ имеем

$$\sigma_\rho(\Lambda) \geq \int\limits_0^\infty \psi_0(t)\,K(t)\,dt. \tag{15.19}$$

Требующее обоснования соотношение (15.13) равносильно формуле

$$\sigma_\rho(\Lambda) = \int\limits_0^\infty \psi_0(t)\,K(t)\,dt. \tag{15.20}$$

Докажем, что

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\ \int\limits_0^\infty \left(\Phi_r(t) - \psi_0(t)\right)\,K(t)\,dt \ \leq \ 0, \tag{15.21}$$

и тогда равенство (15.20) будет установлено. Действительно, из (15.19), (15.15), (15.21) имеем

$$\int\limits_0^\infty \psi_0(t)\,K(t)\,dt \ \leq \ \sigma_\rho(\Lambda) \ = \ \varlimsup_{r\to+\infty}\ \int\limits_0^\infty \left(\Phi_r(t) - \psi_0(t)\right)\,K(t)\,dt$$

$$+ \int\limits_0^\infty \psi_0(t)\,K(t)\,dt \ \leq \ \int\limits_0^\infty \psi_0(t)\,K(t)\,dt,$$

откуда и вытекает (15.20).

Итак, осталось проверить неравенство (15.21), выражающее «близость» весовой считающей функции $\varphi_r(t)$ последовательности Λ к «экстремальной» функции $\psi_0(t)$ из (15.18). Вначале выведем представление

$$\int\limits_0^\infty \left(\Phi_r(t) - \psi_0(t)\right)\,K(t)\,dt \ = \ \sum_{k=1}^\infty g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) - g(a_0), \tag{15.22}$$

опираясь на (15.16), (15.18). Для этого запишем

$$\psi_0(t) - \alpha \equiv 0, \qquad t \notin \left[\frac{1}{a_0},\, \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho}\frac{1}{a_0}\right],$$

$$\int\limits_{1/a_0}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\,(1/a_0)} \left(\psi_0(t) - \alpha\right)\, K(t)\, dt \;=\; g(a_0).$$

Кроме того,

$$\Phi_r(t) - \alpha \equiv 0, \qquad t \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\frac{m_k^2}{r},\, \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\rho} \frac{m_k^2}{r}\right] \equiv T_r,$$

$$\int\limits_{T_r} \left(\Phi_r(t) - \alpha\right)\, K(t)\, dt$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \left(\beta \left(\frac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho} - \alpha\right) K(t)\, dt \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right).$$

Поэтому

$$\int\limits_0^{\infty} \left(\Phi_r(t) - \psi_0(t)\right)\, K(t)\, dt \;=\; \int\limits_0^{\infty} \left(\Phi_r(t) - \alpha\right)\, K(t)\, dt \;-\; \int\limits_0^{\infty} \left(\psi_0(t) - \alpha\right)\, K(t)\, dt$$

$$= \int\limits_{T_r} \left(\Phi_r(t) - \alpha\right)\, K(t)\, dt \;-\; \int\limits_{1/a_0}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\,(1/a_0)} \left(\psi_0(t) - \alpha\right)\, K(t)\, dt$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) \;-\; g(a_0),$$

и мы получили (15.22).

Теперь оценим сумму в (15.22) для $r \in \left[m_s^2,\, m_{s+1}^2\right]$ при фиксированном $s \in \mathbb{N}$, разбивая ее на три части:

$$\sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) \;-\; g(a_0) \;=\; \sum_{k=1}^{s-1} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) \;+\; \sum_{k=s+2}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right)$$

$$+ \left(g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) + g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) - g(a_0)\right).$$

Используя в оценке первой суммы очевидное неравенство

$$K(t) \le t^{\rho-1}, \qquad t > 0,$$

и отбрасывая под знаком интеграла отрицательное слагаемое, имеем

$$0 \;<\; \sum_{k=1}^{s-1} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) \;=\; \sum_{k=1}^{s-1} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \left(\beta \left(\frac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho} - \alpha\right) K(t)\, dt$$

$$\leq \sum_{k=1}^{s-1} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \left(\beta\left(\frac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho} - \alpha\right) t^{\rho-1}\,dt$$

$$\leq \beta \sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{m_k^2}{r}\right)^{\rho} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{\beta}{\rho} \ln\frac{\beta}{\alpha} \sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{m_k^2}{r}\right)^{\rho} \leq \frac{\beta}{\rho} \ln\frac{\beta}{\alpha} \sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{m_k}{m_s}\right)^{2\rho}.$$

В силу выбора последовательности $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ выполнено соотношение

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{m_k}{m_s}\right)^{2\rho} = 0,$$

поскольку

$$\sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{m_k}{m_s}\right)^{2\rho} < s \left(\frac{m_{s-1}}{m_s}\right)^{2\rho} = \frac{s}{m_s^{3\rho/2}}.$$

Отсюда

$$\lim_{s\to\infty} \sup_{r\in\left[m_s^2,\, m_{s+1}^2\right]} \sum_{k=1}^{s-1} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) = 0. \tag{15.23}$$

Используя в оценке второй суммы другое легко проверяемое неравенство

$$K(t) \leq t^{\rho-2}, \qquad t > 0,$$

и снова отбрасывая под знаком интеграла отрицательное слагаемое, имеем

$$0 < \sum_{k=s+2}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) = \sum_{k=s+2}^{\infty} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \left(\beta\left(\frac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho} - \alpha\right) K(t)\,dt$$

$$\leq \sum_{k=s+2}^{\infty} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \left(\beta\left(\frac{m_k^2}{rt}\right)^{\rho} - \alpha\right) t^{\rho-2}\,dt$$

$$\leq \beta \sum_{k=s+2}^{\infty} \left(\frac{m_k^2}{r}\right)^{\rho} \int\limits_{m_k^2/r}^{(\beta/\alpha)^{1/\rho}\left(m_k^2/r\right)} \frac{dt}{t^2}$$

$$= \beta\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/\rho}\right) \sum_{k=s+2}^{\infty} \left(\frac{m_k^2}{r}\right)^{\rho-1}$$

$$\leq \beta \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/\rho}\right) \sum_{k=s+2}^{\infty} \left(\frac{m_{s+1}}{m_k}\right)^{2(1-\rho)}.$$

Выбор последовательности $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ обеспечивает выполнение условия

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{k=s+2}^{\infty} \left(\frac{m_{s+1}}{m_k}\right)^{2(1-\rho)} = 0.$$

Действительно,

$$\sum_{k=s+2}^{\infty} \left(\frac{m_{s+1}}{m_k}\right)^{2(1-\rho)} \leq \sum_{k=s+2}^{\infty} \left(\frac{m_{k-1}}{m_k}\right)^{2(1-\rho)} = \sum_{k=s+2}^{\infty} \frac{1}{m_k^{3(1-\rho)/2}}.$$

Отсюда

$$\lim_{s\to\infty} \sup_{r\in\left[m_s^2,\, m_{s+1}^2\right]} \sum_{k=s+2}^{\infty} g\left(\frac{r}{m_k^2}\right) = 0. \tag{15.24}$$

Оценим, наконец, выражение

$$g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) + g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) - g(a_0), \qquad r \in \left[m_s^2,\, m_{s+1}^2\right],$$

опирась на определение точки a_0 и свойство (15.17) функции $g(a)$. Рассмотрим два возможных случая: $r \in [m_s^2,\, m_s m_{s+1}]$ и $r \in \left[m_s m_{s+1},\, m_{s+1}^2\right]$. В первом случае имеем $\dfrac{r}{m_{s+1}^2} \leq \dfrac{m_s}{m_{s+1}}$ и

$$g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) - g(a_0) + g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) \leq g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) \to 0, \qquad s\to\infty.$$

Во втором случае имеем $\dfrac{r}{m_s^2} \geq \dfrac{m_{s+1}}{m_s}$ и

$$g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) - g(a_0) + g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) \leq g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) \to 0, \qquad s\to\infty.$$

Следовательно, можем утверждать, что

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sup_{r\in\left[m_s^2,\, m_{s+1}^2\right]} \left(g\left(\frac{r}{m_s^2}\right) + g\left(\frac{r}{m_{s+1}^2}\right) - g(a_0)\right) \leq 0. \tag{15.25}$$

Сочетая (15.22)–(15.25), получаем (15.21).

Таким образом, в случае $\alpha \in (0,\beta)$ построена функция $L(\lambda)$ вида (15.2), которая удовлетворяет (15.13) и, тем самым, является экстремальной в задаче (15.4) при $\theta \in (0, \pi/2]$.

Случай $\alpha = \beta$ в техническом отношении гораздо проще предыдущего, но обладает своей спецификой. Согласно (15.5) тип при порядке $\rho \in (0,1)$ канонического произведения (15.2) удовлетворяет неравенству

$$\sigma_\rho(\Lambda) \ \ge\ \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta, \tag{15.26}$$

если последовательность Λ всех его нулей лежит в угле

$$\Gamma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \le \theta\}$$

с $\theta \in (0, \pi/2]$ и имеет ρ-плотность

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \Delta_\rho(\Lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \beta. \tag{15.27}$$

Исключенное здесь значение $\theta = 0$ в свете экстремальной задачи (15.4) при $\alpha = \beta$ не представляет интереса, поскольку, как известно, тип целой функции порядка $\rho \in (0,1)$, нули которой лежат на одном луче и измеримы с ρ-плотностью β, всегда вычисляется по точной формуле

$$\sigma_\rho = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}.$$

Однако, картина усложняется, когда в ограничении (15.3) на расположение нулей раствор угла положительный.

Покажем, что оценка (15.26) точна. Для этого выберем измеримую последовательность $(r_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ с ρ-плотностью $\beta/2$ и снова положим

$$\Lambda = \left(r_j\, e^{-i\theta}\right)_{j\in\mathbb{N}} \bigcup \left(r_j\, e^{i\theta}\right)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Последовательность Λ расположена симметрично на сторонах угла Γ_θ и имеет ρ-плотность $\Delta_\rho(\Lambda) = \beta$, подчиняясь (15.27), а для канонического произведения (15.2), построенного по Λ, справедливо представление (15.14). Рассуждая стандартным образом, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $t_0 = t_0(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при всех $rt \ge t_0$ выполнялась оценка

$$\varphi_r(t) = \frac{n_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho} \ \le\ \beta + \varepsilon.$$

Тогда

$$r^{-\rho}\ln M_L(r) \ =\ \int\limits_0^\infty \varphi_r(t)\,K(t)\,dt$$

$$= \int\limits_{t_0/r}^\infty \varphi_r(t)\,K(t)\,dt \ +\ \int\limits_0^{t_0/r} \varphi_r(t)\,K(t)\,dt$$

$$\leq\ (\beta+\varepsilon)\int\limits_{t_0/r}^{\infty} K(t)\,dt\,+\,o(1),\qquad r\to+\infty.$$

Поскольку $\varepsilon>0$ произвольно, то с учетом формулы (15.11) получаем

$$\sigma_\rho(\Lambda)\ \leq\ \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\,\cos\rho\,\theta.$$

Таким образом, построенная функция $L(\lambda)$ доставляет равенство в (15.26). Теорема 15.1 полностью доказана.

Обсудим теперь некоторые нюансы, полезные для понимания сути дела. Вначале отметим, что функция $L(\lambda)$, предъявленная в заключительной части доказательства теоремы 15.1, имеет вполне регулярный рост. Укажем естественное обобщение этого примера.

Возьмем на луче $\arg\lambda=-\,\theta$ произвольную измеримую последовательность Λ_1 с ρ-плотностью $\beta/2$, а на луче $\arg\lambda=\theta$ — произвольную измеримую последовательность Λ_2 с ρ-плотностью $\beta/2$. Тогда последовательность $\Lambda\equiv\Lambda_1\bigcup\Lambda_2$ будет обладать свойством (15.27). Проверим, что функция (15.2), построенная по такой последовательности Λ, имеет тип

$$\sigma_\rho(\Lambda)=\frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\,\cos\rho\,\theta. \tag{15.28}$$

По-прежнему, $L(\lambda)$ является функцией вполне регулярного роста, но теперь в расположении ее нулей симметрия относительно вещественной оси, вообще говоря, отсутствует. Согласно [72; гл. II, § 2] индикатор $L(\lambda)$ вычисляется по формуле

$$h_\rho(L,\varphi)\equiv\varlimsup_{r\to+\infty}\ r^{-\rho}\ln|L(re^{i\varphi})|$$

$$=\frac{\pi\beta}{2\sin\pi\rho}\,\left(h_\rho(\varphi+\theta)+h_\rho(\varphi-\theta)\right),\qquad 0\leq\varphi\leq2\pi,$$

в которой через $h_\rho(\varphi)$ обозначено 2π-периодическое продолжение функии $\cos\rho(\varphi-\pi)$ с отрезка $[0,2\pi]$ на всю вещественную ось $\mathbb{R}$. Прямой подсчет дает

$$h_\rho(L,\varphi)=\frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cdot\begin{cases}\cos\rho(\pi-\theta)\cdot\cos\rho\varphi, & 0\leq\varphi\leq\theta,\\ \cos\rho\theta\cdot\cos\rho(\varphi-\pi), & \theta\leq\varphi\leq2\pi-\theta,\\ \cos\rho(\pi-\theta)\cdot\cos\rho(2\pi-\varphi), & 2\pi-\theta\leq\varphi\leq2\pi.\end{cases}$$

Но тогда с учетом неравенства $\cos\rho\,\theta\geq\cos\rho(\pi-\theta)$ получим

$$\sigma_\rho(\Lambda)\ =\ \max_{0\leq\varphi\leq2\pi}\ h_\rho(L,\varphi)\ =\ h_\rho(L,\pi)\ =\ \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\,\cos\rho\,\theta,$$

подтверждая (15.28).

С другой стороны, даже для функций вполне регулярного роста неравенство в (15.26) может оказаться строгим. Действительно, пусть Λ состоит из двух измеримых последовательностей, одна из которых имеет ρ-плотность $\beta_1 \geq 0$ и расположена на луче $\arg\lambda = -\theta$, а другая имеет ρ-плотность $\beta_2 \geq 0$, $\beta_2 \neq \beta_1$, и расположена на луче $\arg\lambda = \theta$, причем $\beta_1 + \beta_2 = \beta$. Снова выполнено (15.27). Образуем по такой последовательности Λ каноническое произведение (15.2). Исключив требованием $\beta_2 \neq \beta_1$ случай «правильной» функции из предыдущего примера, мы все равно имеем дело с функцией $L(\lambda)$ вполне регулярного роста. Но индикатор $h_\rho(L,\varphi)$ теперь имеет вид [72; гл. II, § 2]

$$h_\rho(L,\varphi) = \frac{\pi}{\sin\pi\rho}\,\left(\beta_1\,h_\rho(\varphi+\theta) + \beta_2\,h_\rho(\varphi-\theta)\right), \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

После несложных преобразований приходим к развернутой записи

$$h_\rho(L,\varphi) = \frac{\pi}{\sin\pi\rho}\cdot\begin{cases} A_{\pi-\theta}\,\cos\left(\rho\varphi - \varphi_{\pi-\theta}\right), & 0 \leq \varphi \leq \theta, \\ A_\theta\,\cos\left(\rho(\varphi-\pi) - \varphi_\theta\right), & \theta \leq \varphi \leq 2\pi-\theta, \\ A_{\pi-\theta}\,\cos\left(\rho(2\pi-\varphi) - \varphi_{\pi-\theta}\right), & 2\pi-\theta \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases}$$

где для краткости обозначено

$$A_\theta \equiv \sqrt{\beta^2\cos^2\rho\theta \,+\, (\beta_2-\beta_1)^2\sin^2\rho\theta}, \qquad \varphi_\theta \equiv \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta_2-\beta_1}{\beta}\operatorname{tg}\rho\theta\right).$$

Вследствие ограничений, наложенных на параметры, справедливы неравенства

$$A_\theta > \beta\cos\rho\theta, \qquad |\varphi_\theta| \leq \rho\theta.$$

Берем $\varphi^* \equiv \pi + \varphi_\theta/\rho$. Тогда $\theta \leq \pi-\theta \leq \varphi^* \leq \pi+\theta \leq 2\pi-\theta$. Подставляя значение φ^* в выражение для индикатора, получим

$$\sigma_\rho(\Lambda) \,\geq\, h_\rho(L,\varphi^*) \,=\, \frac{\pi}{\sin\pi\rho}\,A_\theta \,>\, \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta.$$

Таким образом, в данном примере оценка (15.26) выполнена со строгим знаком неравенства.

15.3. Оценки экстремальной величины и некоторые приложения.

Всюду далее $\rho \in (0,1)$, $k \in [0,1]$, $\theta \in [0,\pi/2]$. Введем функцию

$$C_\theta(k,\rho) \equiv \frac{\pi k}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta \,+\, \max_{a>0}\int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a}\left(a^{-\rho} - k\,x^{-\rho}\right)\frac{x+\cos\theta}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx,$$

связанную с величиной (15.4) соотношением

$$s_\theta(\alpha,\beta;\rho) \,=\, \beta\,C_\theta(k,\rho), \qquad k = \alpha/\beta. \tag{15.29}$$

Полагая $C_\theta(\rho) \equiv C_\theta(0,\rho)$, после несложных вычислений приходим к записи

$$C_\theta(\rho) = \frac{1}{2}\,\max_{a>0}\,a^{-\rho}\ln(a^2+2a\cos\theta+1). \tag{15.30}$$

Функция, сводящаяся к $C_\theta(\rho)$, была достаточно подробно исследована в [100]. Это трудоемкое исследование, развивающее идеи [98], показало, что переход от $\theta = 0$ к $\theta \in (0, \pi/2]$ требует изощренной техники, но не таит в себе принципиально новых эффектов. Например, при $\theta \in [0, \pi/2)$ справедлива асимптотическая формула (см. [100; теорема 3.2], ср. формула (13.1))

$$C_\theta(\rho) = \frac{1}{\rho e} + \cos\theta \exp\left(-1 - \frac{1}{\rho}\right) + O\left(\frac{1}{\rho^2}\exp\left(-\frac{2}{\rho}\right)\right), \qquad \rho \to +0.$$

Точно так же, не вызывает сомнений, что в русле разработанных методов результаты, полученные в §§ 12, 13 для $C(k,\rho) = C_0(k,\rho)$, могут быть перенесены на $C_\theta(k,\rho)$ при $\theta \in [0, \pi/2]$. В подтверждение приведем лишь некоторые свойства функции $C_\theta(k,\rho)$ с краткими указаниями относительно их вывода.

При фиксированном $\theta \in [0, \pi/2]$ функция $C_\theta(k,\rho)$ является: непрерывной на множестве $[0,1]\times(0,1)$; строго выпуклой по $\rho \in (0,1)$ при фиксированном $k \in [0,1]$; строго возрастающей и строго выпуклой по $k \in [0,1]$ при фиксированном $\rho \in (0,1)$.

Первое свойство очевидно. Для проверки второго свойства временно вводим обозначение

$$P(x,\theta) \equiv \frac{x + \cos\theta}{x^2 + 2x\cos\theta + 1}$$

и рассматриваем функцию

$$h(\rho) \equiv h_{k,\theta,a}(\rho) \equiv \frac{\pi k}{\sin \pi\rho}\cos\rho\theta + \int\limits_{a k^{1/\rho}}^{a} \left(a^{-\rho} - k x^{-\rho}\right) P(x,\theta)\, dx$$

$$= k\int\limits_0^\infty x^{-\rho} P(x,\theta)\, dx + \int\limits_{a k^{1/\rho}}^{a} \left(a^{-\rho} - k x^{-\rho}\right) P(x,\theta)\, dx.$$

Вычисления показывают, что

$$h''(\rho) = k \int\limits_{\mathbb{R}_+ \setminus (a k^{1/\rho},\, a)} x^{-\rho} P(x,\theta) \ln^2 x\, dx$$

$$+ a^{-\rho}\ln^2 a \int\limits_{a k^{1/\rho}}^{a} P(x,\theta)\, dx + \frac{a^{1-\rho}}{\rho^3} P(a k^{1/\rho}, \theta)\, k^{1/\rho} \ln^2 k > 0$$

на интервале $(0,1)$, а функция $h(\rho)$ строго выпукла на этом интервале при всех значениях параметров $k \in (0,1]$ и $a > 0$. Следовательно, при указанных k функция $C_\theta(k,\rho) = \max\limits_{a>0} h_{k,\theta,a}(\rho)$ строго выпукла по ρ на $(0,1)$.

При $k = 0$ вторая производная $h''(\rho)$ обращается в нуль для $a = 1$, оставаясь положительной для остальных $a > 0$. В этой ситуации гарантирована выпуклость функции $C_\theta(\rho) = C_\theta(0,\rho)$ на $(0,1)$. Вопрос о строгой выпуклости функции $C_\theta(\rho)$, поставленный в [100], требует привлечения дополнительных соображений. Приведем возможную схему рассуждений, опирающуюся на некоторые факты из [100]. Параметр $\theta \in [0, \pi/2]$ по-прежнему зафиксирован. Воспользуемся тем, что

$$C_\theta(\rho) = \max_{a>1} h_{0,\theta,a}(\rho), \qquad 0 < \rho < \frac{1}{2\ln(2\cos\frac{\theta}{2})}.$$

Функция

$$h_{0,\theta,a}(\rho) = a^{-\rho}\ln(a^2 + 2a\cos\theta + 1)$$

при $a > 1$ строго выпукла по ρ на промежутке $(0, \, (2\ln(2\cos(\theta/2))^{-1})$, а потому и $C_\theta(\rho)$ строго выпукла на указанном промежутке. Точно так же

$$C_\theta(\rho) = \max_{0<a<1} h_{0,\theta,a}(\rho), \qquad \frac{1}{2\ln(2\cos\frac{\theta}{2})} < \rho < 1,$$

где функция $h_{0,\theta,a}(\rho) = a^{-\rho}\ln(a^2 + 2a\cos\theta + 1)$ при $0 < a < 1$ строго выпукла по ρ на промежутке $((2\ln(2\cos(\theta/2))^{-1}, \, 1)$, а потому и $C_\theta(\rho)$ строго выпукла на указанном промежутке. В результате анализа имеющихся сведений получаем строгую выпуклость функции $C_\theta(\rho)$ на всем интервале $\rho \in (0,1)$. Итак, функция $C_\theta(k,\rho)$ является строго выпуклой по $\rho \in (0,1)$ при любом фиксированном $k \in [0,1]$.

Строгая выпуклость $C_\theta(k,\rho)$ по переменной $k \in [0,1]$ при фиксированном аргументе $\rho \in (0,1)$ проверяется проще. Для любого значения параметра $a > 0$ функция

$$f(k) \equiv f_{\rho,\theta,a}(k) \equiv \frac{\pi\, k}{\sin\pi\,\rho}\cos\rho\,\theta \, + \int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} \left(a^{-\rho} - k\,x^{-\rho}\right) P(x,\theta)\,dx$$

строго выпукла на $[0,1]$, так как

$$f'(k) = \frac{\pi}{\sin\pi\,\rho}\cos\rho\,\theta \, - \int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a} x^{-\rho} P(x,\theta)\,dx,$$

$$f''(k) = \frac{a^{1-\rho}\,k^{1/\rho-2}}{\rho} P(a\,k^{1/\rho},\theta) > 0, \qquad k \in (0,1].$$

Следовательно, $C_\theta(k,\rho)$ также является строго выпуклой функцией переменной k на $[0,1]$ как максимум строго выпуклых функций. Кроме того, из самого определения (см. формулу (15.4)) экстремальной величины $s_\theta(\alpha,\beta;\rho)$ и связи (15.29) вытекает возрастание (строгое в силу строгой выпуклости) величины $C_\theta(k,\rho)$ по $k \in [0,1]$ при фиксированном $\rho \in (0,1)$.

Далее, обобщение оценки (12.1) имеет вид

$$\frac{\pi k}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta \, + \left(1 - k\ln\frac{e}{k}\right) C_\theta(\rho) \, \le \, C_\theta(k,\rho) \, \le \, \frac{\pi k}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta \, + \, (1-k)\, C_\theta(\rho).$$

Для вывода оценки сверху надо записать неравенство

$$C_\theta(k,\rho)\;-\;\frac{\pi k}{\sin\pi\rho}\,\cos\rho\,\theta\;\le\;(1-k)\,\max_{a>0}\;a^{-\rho}\int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a}\frac{x+\cos\theta}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx$$

и вычислить интеграл. Оценка снизу получается так же, как и в теореме 12.1, если представить интеграл в определении $C_\theta(k,\rho)$ в виде

$$\frac{1}{2}\int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a}\left(a^{-\rho}-k\,x^{-\rho}\right)\,d\left(\ln(x^2+2x\cos\theta+1)\right)$$

и проинтегрировать по частям.

Особый интерес представляет оценка

$$C_\theta(k,\rho)\;>\;\frac{e^{k-1}}{\rho},$$

указывающая на различие между случаем $\Lambda\subset\Gamma_\theta$ и общим случаем расположения нулей $\Lambda\subset\mathbb{C}$ в задаче о наименьшем типе. Для доказательства оценки применяется тот же метод, что и при $\theta=0$. Сначала используем выпуклость на отрезке $k\in[0,1]$ при любом $a>0$ функции

$$g(k)\equiv g_{\rho,\,a}(k)\equiv\int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a}\left(a^{-\rho}-k\,x^{-\rho}\right)\frac{x+\cos\theta}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx.$$

Дифференцирование дает

$$g'(k)\;=\;-\int\limits_{a\,k^{1/\rho}}^{a}\frac{x^{-\rho}(x+\cos\theta)}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx,$$

$$g''(k)\;=\;\frac{a}{\rho}\,k^{1/\rho-1}\,\frac{x^{-\rho}(x+\cos\theta)}{x^2+2x\cos\theta+1}\bigg|_{x=a\,k^{1/\rho}}>0.$$

Теперь, привлекая неравенство $g(k)\ge g(0)+kg'(0)$, получаем оценку

$$C_\theta(k,\rho)\;\ge\;\frac{a^{-\rho}}{2}\;\ln(a^2+2a\cos\theta+1)\;+\;k\int\limits_{a}^{\infty}\frac{x^{-\rho}(x+\cos\theta)}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx,\tag{15.31}$$

справедливую при любом $a>0$. Оценивая интеграл снизу тем же способом, что и в предложении 12.2, будем иметь

$$\int\limits_{a}^{\infty}\frac{x^{-\rho}(x+\cos\theta)}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx\;>\;a^{-\rho}\left\{\frac{1}{\rho}\;-\;\frac{1}{2}\,\ln\,\frac{a^2+2a\cos\theta+1}{a^2}\right\}.$$

Но тогда

$$C_\theta(k,\rho) \,>\, a^{-\rho}\left\{\ln a + \frac{k}{\rho} \,+\, \frac{1}{2}\,(1-k)\,\ln\,\frac{a^2+2a\cos\theta+1}{a^2}\right\} \,\ge\, a^{-\rho}\left\{\ln a + \frac{k}{\rho}\right\}.$$

Остается положить в последнем неравенстве $a = e^{(1-k)/\rho}$.

Предложение 15.1. *Пусть* $\rho \in (0,1)$, $\beta > 0$, $\theta \in [0,\pi/2]$. *Тогда любая экстремальная в задаче*

$$s_\theta(\beta;\rho) \,=\, \inf\left\{\sigma_\rho(\Lambda) : \,\Lambda \subset \Gamma_\theta,\, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\}$$

последовательность Λ *имеет нулевую нижнюю* ρ*-плотность.*

Доказательство. Выберем значение $a \,=\, a_0(\theta,\,\rho)$, реализующее максимум в определении величины $C_\theta(\rho)$. Пусть точная нижняя грань $s_\theta(\beta;\rho)$ достигается на некоторой последовательности $\Lambda \subset \Gamma_\theta$ с нижней ρ-плотностью α и верхней ρ-плотностью β. Тогда согласно (15.30), (15.31) тип канонического произведения (15.2), построенного по такой последовательности, удовлетворяет соотношению

$$\beta\, C_\theta(\rho) \,=\, \sigma_\rho(\Lambda) \,\ge\, \beta\, C_\theta\left(\frac{\alpha}{\beta},\rho\right) \,\ge\, \beta\, C_\theta(\rho) \,+\, \alpha \int\limits_{a_0(\theta,\,\rho)}^{\infty} \frac{x^{-\rho}(x+\cos\theta)}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx,$$

что влечет $\alpha = 0$.

Приведем теперь обобщение предложения 10.1, вытекающее из непрерывности функции $C_\theta(k,\rho)$ по переменной $k \in [0,\,1]$ и известного при любом $\theta \in [0,\,\pi]$ соотношения

$$\sup\left\{\sigma_\rho(\Lambda) : \,\Lambda \subset \Gamma_\theta,\, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\} = \max\left\{\sigma_\rho(\Lambda) : \,\Lambda \subset \Gamma_\theta,\, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\} = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}$$

классической теории Валирона-Гольдберга.

Теорема 15.2. *Пусть* $\rho \in (0,\,1)$, $\beta > 0$, $\theta \in [0,\pi/2]$, *и* $P_{\rho,\theta}(\beta)$ *— совокупность всех последовательностей комплексных чисел верхней* ρ*-плотности* β, *расположенных в некотором угле раствора* 2θ. *Тогда диапазон значений, принимаемых* ρ*-типами всевозможных целых функций* f *с нулевыми множествами* $\Lambda_f \in P_{\rho,\theta}(\beta)$, *есть отрезок* $[\beta\, C_\theta(\rho),\, \pi\beta \operatorname{cosec}\pi\rho]$, *где* $C_\theta(\rho)$ *определена в* (15.30).

Основной результат § 15 — теорема 15.1 — позволяет получать новые теоремы единственности для целых функций и теоремы о полноте систем экспонент. Так, естественным обобщением предложения 10.2, развивающим результат Б. Н. Хабибуллина [117; теорема 4], является следующее утверждение.

Теорема 15.3. *Пусть* $\rho \in (0,1)$, *и пусть* $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *— последовательность комплексных чисел конечной верхней* ρ*-плотности* $\beta > 0$ *и нижней* ρ*-плотности* $\ge \alpha \in [0,\beta]$, *расположенная в некотором угле раствора* $2\theta \le \pi$. *Если тип при порядке* ρ *целой функции* f, *обращающейся в нуль на* Λ, *меньше величины*

$$\frac{2^\rho\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\rho/2)}{\Gamma((1-\rho)/2)}\, s_\theta(\alpha,\,\beta;\,\rho) \,=\, \frac{\sin\pi\rho}{\pi}\,\Gamma(\rho)\,\Gamma^2(1-\rho/2)\, s_\theta(\alpha,\,\beta;\,\rho),$$

где $s_\theta(\alpha,\,\beta;\,\rho)$ *выписана в теореме* 15.1, *то* $f \equiv 0$ *на* $\mathbb{C}$.

Доказательство получается прямым соединением теоремы 4 из [117] и теоремы 15.1.

Отметим, что все результаты § 14 о полноте систем экспонент, порождаемых последовательностью $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$, без труда переносятся на случай $\Lambda \subset \Gamma_\theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$. Сейчас мы укажем лишь одно из следствий теоремы 15.1, относящееся к четным целым функциям экспоненциального типа, которые играют важную роль в различных разделах комплексного анализа, например, в теории рядов Дирихле.

Теорема 15.4. *Пусть* $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$, $\theta \in [0, \pi/4]$, *и пусть*

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \qquad |\arg \lambda_n| \le \theta,$$

причем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} = \beta, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} \ge \alpha.$$

Тогда экспоненциальный тип

$$\sigma(\Lambda) \equiv \overline{\lim_{r\to+\infty}} r^{-1} \ln \max_{|\lambda|=r} |L(\lambda)|$$

функции $L(\lambda)$ *удовлетворяет точному неравенству*

$$\sigma(\Lambda) \ \ge \ \pi\alpha \, \cos\theta \, + \, \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^2}^{a} \left(\frac{\beta}{\sqrt{a}} - \frac{\alpha}{\sqrt{x}}\right) \frac{x + \cos 2\theta}{x^2 + 2x\cos 2\theta + 1}\, dx. \tag{15.32}$$

Для доказательства достаточно рассмотреть целую функцию

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_n}\right), \qquad \mu_n = \lambda_n^2,$$

порядка $\rho = 1/2$ с последовательностью нулей

$$M \equiv (\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma_{2\theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \le 2\theta\}, \qquad 2\theta \in [0, \pi/2],$$

учесть, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\mu_n|^{1/2}} = \beta, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\mu_n|^{1/2}} \ge \alpha, \qquad \sigma_{1/2}(M) = \sigma(\Lambda),$$

и применить к ней теорему 15.1.

Без учета нижней плотности нулей ($\alpha = 0$) оценка (15.32) принимает вид

$$\sigma(\Lambda) \ge \frac{\beta}{2} \max_{a>0} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(a^2 + 2a\cos 2\theta + 1\right).$$

Если же последовательность нулей $L(\lambda)$ имеет плотность ($\alpha = \beta$), то (15.32) превращается в оценку

$$\sigma(\Lambda) \ge \pi\beta \, \cos\theta.$$

Все оценки точны. Интеграл в (15.32) вычисляется через элементарные функции и в случае $\alpha \in (0, \beta)$, но итоговое выражение столь громоздко, что вряд ли целесообразно его приводить.

Примечания к главе 2

Материал §§ 10–14 взят из работы [20], написанной совместно с Г. Г. Брайчевым. Основная теорема 10.1 принадлежит автору. Класс целых функций, фигурирующий в этой теореме, можно несколько расширить. Именно, теорема 10.1 сохранит силу, если в определении экстремальной величины (10.3) требование $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ заменить следующим: для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\{\lambda_n \in \Lambda : \ |\arg \lambda_n| \geq \varepsilon\}$$

имеет не более чем нулевую плотность. Аналогичное замечание справедливо и в отношении теоремы 15.1. Результаты § 15 опубликованы в [131]. Некоторые факты промежуточного характера установлены в работах Г. Г. Брайчева и автора [18], [21], [145]. Точные оценки нижнего типа найдены в статье Г. Г. Брайчева и О. В. Шерстюковой [22]. Обзор последних достижений в теории экстремальных задач для типов целых функций порядка $\rho < 1$ с нулями на луче или в угле дан в [19], [100]. Трудный случай $\rho > 1$ рассматривался А. Ю. Поповым в [99], однако результаты здесь далеки от завершения. Так, точное выражение для $C(\rho)$, не говоря уже о величинах $C(k,\,\rho)$, $C_\theta(k,\,\rho)$, не известно ни при одном значении $\rho > 1$, $\rho \notin \mathbb{N}$. Добавим к этому, что распространение результатов второй главы на целые функции с нулями в угле раствора $> \pi$ требует, по-видимому, разработки новых методов. Отметим также недавние исследования А. Ю. Попова [101] и Ф. С. Мышакова [90], направленные на развитие классической теоремы Валирона-Гольдберга. Остальные необходимые ссылки сделаны в основном тексте.

Глава 3

РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПРОСТЫЕ ДРОБИ ВЕЛИЧИНЫ, ОБРАТНОЙ К ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

В этой главе решена восходящая к М. Г. Крейну задача характеризации целой функции $L(\lambda)$ с множеством простых вещественных нулей $\Lambda(L)$, обратная величина которой раскладывается в специальным образом структурированный ряд простых дробей. Параграф 16 посвящен истории задачи и формулировкам утверждений. Основной результат главы — теорема 16.4 — доказан в § 18 для более широкой ситуации расположения нулей в некоторой полосе комплексной плоскости. Утверждение является новым и в случае $\Lambda(L) \subset \mathbb{R}$. Поэтому для функции с вещественными нулями результат формулируется в отдельной теореме 16.5. Также выделен случай целой функции нулевого экспоненциального типа (теорема 16.6). В следующем § 17 изучены некоторые общие свойства разложений на простые дроби и получены специальные суммационные соотношения. В § 19 для четной (теорема 19.1) и нечетной (теорема 19.2) целых функций установлены критерии наличия «сгруппированного» разложения типа Крейна. Общая теория применяется в § 20 к конкретным классам целых функций. В частности, подробно разобран вопрос о разложении на простые дроби величины, обратной к функции Бесселя с произвольным индексом $\nu > -1$, и найдены точные значения сумм определенного вида, содержащих степени нулей функции Бесселя.

§ 16. История вопроса. Постановка задачи и формулировка результатов

Разложение на простые дроби является удобным и часто применяемым инструментом для представления мероморфных функций. Классические результаты Миттаг-Леффлера (см., например, [84; гл. 7]) имеют слишком общий характер и требуют дополнительных уточнений в разных специальных ситуациях. Особый подкласс мероморфных функций составляют функции вида

$$F(\lambda) = \frac{1}{L(\lambda)}, \tag{16.1}$$

где $L(\lambda)$ — целая функция, имеющая лишь простые нули λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Множество всех нулей обозначим через $\Lambda(L)$, т. е. $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Последовательность нулей λ_n, составляющих $\Lambda(L)$, записывается обычно в порядке неубывания модулей.

Вопрос о представлении величины, обратной $L(\lambda)$, рядом простых дробей имеет богатую историю. Основополагающей в тематике является работа М. Г. Крейна [67]. Важную стимулирующую роль в появлении этапной статьи [67] сыграли исследования по теории эрмитовых операторов и проблеме моментов (см. [66], [154]). Работа [67] породила проблему описания тех мероморфных функций вида (16.1), которые при фиксированном $p \in \mathbb{Z}_+$ допускают представление

$$\frac{1}{L(\lambda)} = P(\lambda) + \frac{a_0}{\lambda} + \lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\, \lambda_n^p\, (\lambda - \lambda_n)} \tag{16.2}$$

в предположении, что
$$\sum_{\lambda_n\neq 0}\frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}}\;<\;+\infty. \tag{16.3}$$
Здесь $P(\lambda)$ — некоторый полином; коэффициент a_0 вычисляется по правилу:
$$a_0\;=\begin{cases}1/L'(0), & 0\in\Lambda(L),\\ 0, & 0\notin\Lambda(L).\end{cases} \tag{16.4}$$
Вид формулы (16.4) объясняется очень просто: выражение для a_0 есть вычет функции (16.1) в точке $\lambda=0$. Коэффициенты $1/\left(L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\right)$ ряда простых дробей в (16.2) суть вычеты функции $1/\left(\lambda^p\,L(\lambda)\right)$ в точках $\lambda_n\neq 0$. Тем самым, разность
$$\Delta_L^p(\lambda)\;\equiv\;\frac{1}{L(\lambda)}\;-\;\frac{a_0}{\lambda}\;-\;\lambda^p\sum_{\lambda_n\neq 0}\frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)},\qquad \lambda\in\mathbb{C},$$
всегда является целой функцией. Смысл разложения (16.2) состоит в требовании, чтобы эта разность была полиномом. Именно такие разложения играют особую роль в теории и приложениях. Вопрос о нахождении коэффициентов полинома $P(\lambda)$ из представления (16.2) не тривиален и обсуждается в § 17. Условие (16.3) равносильно абсолютной и равномерной сходимости ряда в (16.2) на компактах области $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$. Представление (16.2) при условии (16.3) будем называть разложением мероморфной функции (16.1) в *ряд Крейна фиксированного порядка* p.

Один из основных результатов работы [67; теорема 4] утверждает: *если целая функция $L(\lambda)$ с множеством простых вещественных нулей $\Lambda(L)$ допускает разложение в ряд Крейна какого-либо порядка $p\in\mathbb{Z}_+$, то она имеет экспоненциальный тип и подчинена условию*
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln^+|L(r)|}{1+r^2}\,dr\;<\;+\infty. \tag{16.5}$$
Как обычно, для $a\geq 0$ обозначено
$$\ln^+a\;\equiv\begin{cases}\ln a, & a>1,\\ 0, & 0\leq a\leq 1.\end{cases}$$
Целые функции экспоненциального типа, удовлетворяющие условию (16.5), образуют известный *класс Картрайт.* Всякая функция класса Картрайт имеет вполне регулярный рост и индикаторную диаграмму в виде отрезка мнимой оси (см. [67], [72; гл. V, § 6]).

Условие вещественности нулей λ_n в цитированной теореме М. Г. Крейна является существенным. Продемонстрируем это на простом примере, приведенном в работе [67; § 4]. Пусть некоторая целая функция $L(\lambda)$ положительного экспоненциального типа допускает разложение в ряд Крейна порядка $p=0$, причем $P(\lambda)\,\equiv\,0,\;\;0\notin\Lambda(L)$, т. е.
$$\frac{1}{L(\lambda)}\;=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L'(\lambda_n)\,(\lambda-\lambda_n)},\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|}\;<\;+\infty. \tag{16.6}$$

Тогда (при фиксированном выборе ветви корня $\sqrt{\lambda}$) для целой функции $L(\lambda^2)$ также имеет место разложение

$$\frac{1}{L(\lambda^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}\, L'(\lambda_n)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \sqrt{\lambda_n}} - \frac{1}{\lambda + \sqrt{\lambda_n}} \right\}$$

в ряд Крейна порядка $p = 0$, но $L(\lambda^2)$ уже не будет функцией экспоненциального типа.

Напомним, что *классом* $\mathbb{A}$ (обозначение Б. Я. Левина) принято называть введенное в 1946 г. Н. И. Ахиезером [7] множество всех целых функций, нули которых удовлетворяют условию

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda_n} \right| < +\infty.$$

Класс $\mathbb{A}$ служит естественным обобщением множества всех целых функций с вещественными нулями и играет в теории заметную роль. В свете цитированного примера интересен следующий установленный в [67; теорема 5] факт о представлении функций класса $\mathbb{A}$, усиливающий теорему 4 из [67]. Другое доказательство приведенного ниже результата дано в книге [72; гл. V, § 6, теорема 13]. Наша формулировка несколько отличается от оригинальной.

Теорема 16.1. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция класса $\mathbb{A}$, имеющая лишь простые нули. Пусть величина $1/L(\lambda)$ раскладывается в ряд Крейна порядка $p = 0$ с полиномом $P(\lambda) \equiv 0$. Тогда функция $L(\lambda)$ имеет экспоненциальный тип, и выполняется* (16.5). *Другими словами, $L(\lambda)$ принадлежит классу Картрайт.*

Теорема М. Г. Крейна, разумеется, справедлива и для функций, раскладывающихся в ряд вида (16.2), поскольку этот более общий случай сводится к разложению из теоремы 16.1 умножением $L(\lambda)$ на подходящий многочлен (подробности см. в [67]).

Различные свойства функций, допускающих разложение в ряд Крейна фиксированного порядка, изучались и использовались в ряде работ по теории функций и негармоническому анализу, теории операторов и дифференциальных уравнений. Кроме статей [66], [68], [154] и книги [72] отметим еще исследования М. В. Келдыша, И. В. Островского [39; гл. V, § 6, гл. VI, § 2], Л. де Бранжа [147], Ю. Ф. Коробейника [58], [60], А. Боричева и М. Л. Содина [143], Л. С. Маергойза [81; § 6], [164]. Так, в [58] изучались свойства решений дифференциального уравнения бесконечного порядка с символом $a(\lambda) \in [1, 0]$, допускающим разложение типа (16.6). Работа [143] выявляет роль разложений в ряд Крейна при изучении множеств ограниченного типа и множеств Ахиезера-Левина, связанных с проблемой С. Н. Бернштейна о весовой аппроксимации на вещественной прямой. Недавние результаты [81] касаются представления рядом простых дробей обратной величины целой функции специального вида, возникающей в теории аналитических уточненных порядков.

В работе А. А. Гольдберга [37] в терминах специальных конформных отображений дано описание множеств вещественных чисел, которые могут служить множествами корней вещественных[4] целых функций, допускающих разложение в ряд Крейна. Надо сказать, это описание весьма сложно и в силу своей специфики вряд ли может быть использовано при установлении обозримых критериев представимости обратной величины целой функции рядом Крейна. Нахождение же такого рода критериев является важной задачей, возникшей в результате как внутренних потребностей теории целых функций, так и выявленных многочисленных приложений. Этой задачей интересовались многие математики: Л. де Бранж, П. Кусис, Г. Педерсен, А. Г. Бакан и другие. Мы приведем в этом пункте некоторые из известных результатов. Так, в 1959 году Луи де Бранж установил [146; лемма 2 при $G \equiv 1$], что если целая функция экспоненциального типа $L(\lambda)$ с множеством простых вещественных нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, принадлежит классу Картрайт и удовлетворяет условиям

$$|L(i\mu)| \to +\infty, \qquad \mu \to \pm\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|} < +\infty, \tag{16.7}$$

то справедливо разложение

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,(\lambda-\lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda(L). \tag{16.8}$$

П. Кусис [158; Remark, p. 204-205] показал, что в лемме де Бранжа нельзя отбросить (сохраняя остальные условия и ее заключение) требование принадлежности функции $L(\lambda)$ классу Картрайт. В работе [138; Theorem 6.6] Г. Педерсеном было установлено, что функция минимального экспоненциального типа с простыми вещественными нулями, удовлетворяющая (16.7), допускает разложение (16.8). Наиболее полные результаты по обращению теоремы Крейна до последнего времени принадлежали А. Г. Бакану [9], [136], [137] и получены в последнее десятилетие. Для того чтобы их сформулировать, воспользуемся некоторыми обозначениями из этих работ, опуская при этом тривиальную ситуацию, когда множество $\Lambda(L)$ не более чем конечно.

Для целой функции $L(\lambda)$ с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ обозначим

$$d_L \equiv \inf\left\{ q \in \mathbb{Z} : \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{q+1}} < +\infty \right\}. \tag{16.9}$$

Если $d_L < +\infty$, то для всякого целого числа $p \geq \max\{0,\, d_L\}$ можно ввести целую функцию

$$\Delta_L^p(\lambda) \equiv \frac{1}{L(\lambda)} - \frac{a_0}{\lambda} - \lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

[4] Комплекснозначная функция называется вещественной, если она принимает вещественные значения на вещественной прямой.

с коэффициентом a_0, вычисляемым по правилу (16.4).

В работах [136; Theorem 3.1, p. 25] и [137; Theorem 3.1, p. 40] А. Г. Бакан получил следующую новую версию теоремы Крейна для вещественной целой функции с вещественными нулями.

Теорема 16.2. *Пусть $L(\lambda)$ — вещественная целая функция с множеством простых вещественных нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, подчиненная условию $d_L < +\infty$. Следующие утверждения эквивалентны.*

1) *Существует целое неотрицательное число $p \geq d_L$ такое, что целая функция $\Delta_L^p(\lambda)$ есть многочлен.*

2) *$L(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа, удовлетворяющей условию* (16.4). *Другими словами, функция $L(\lambda)$ входит в класс Картрайт.*

3) *Если $\Lambda(L)$ — полуограниченное множество на вещественной оси, то $L(\lambda)$ имеет нулевой экспоненциальный тип; если же множество $\Lambda(L)$ не является ограниченным ни сверху, ни снизу, то $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа.*

Ясно, что импликация 1) $\Rightarrow$ 2) совпадает для вещественнозначных на вещественной оси функций с теоремой Крейна. Доказательство импликации 2) $\Rightarrow$ 1) фактически сводится к ссылке на лемму де Бранжа. Импликация же 3) $\Rightarrow$ 1) для функции минимального экспоненциального типа доказана в цитированной выше теореме Педерсена. Таким образом, новыми в теореме А. Г. Бакана по сравнению с предшествующими результатами являются два момента. Во-первых, это дополнение к теореме Крейна в виде импликации 1) $\Rightarrow$ 3) в части, где речь идет о функции минимального экспоненциального типа. Во-вторых, это утверждение о том, что обратная величина вещественной целой функции экспоненциального типа $L(\lambda)$ с $\Lambda(L) \subset \mathbb{R}$ и $d_L < +\infty$ раскладывается в ряд Крейна. Последнее утверждение является, на наш взгляд, наиболее интересным. Оно доказано на основании теоремы 3.2 из [136] и [137], нашедшей применение в актуальных вопросах компактности семейств целых функций [9]. Условие вещественности целой функции $L(\lambda)$ в этом утверждении существенно. В связи с указанным обстоятельством приведем недавний анонсированный в [10; теорема 1] результат, свободный от ограничения вещественнозначности $L(\lambda)$ на $\mathbb{R}$. Для этого потребуется следующее определение.

Пусть $q \in \mathbb{Z}$, и пусть $L(\lambda)$ — целая функция с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, такая, что $d_L < +\infty$. Следуя [10], говорим, что $L(\lambda)$ принадлежит *классу* $\mathbb{K}^q$, если при $q \leq 0$ имеет место равенство (16.8), а при $q \geq 1$ существует такой полином $P(\lambda)$ степени q с множеством простых нулей

$$\Lambda(P) = (\mu_j)_{j=1}^q \subset \mathbb{C} \setminus \Lambda(L),$$

что при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\Lambda(L) \cup \Lambda(P))$ справедливо разложение

$$\frac{1}{L(\lambda)P(\lambda)} = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{P'(\mu_j)\, L(\mu_j)\, (\lambda - \mu_j)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(\lambda_n)\, L'(\lambda_n)\, (\lambda - \lambda_n)}.$$

Дадим теперь формулировку теоремы А. Г. Бакана из [10].

Теорема 16.3. *Пусть $q \in \mathbb{Z}$, и пусть $L(\lambda)$ — целая функция с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, такая, что $d_L < +\infty$. Функция $L(\lambda)$ принадлежит классу $\mathbb{A} \cap \mathbb{K}^q$ тогда и только тогда, когда $L(\lambda)$ принадлежит классу Картрайт, и существуют такое множество E нулевой относительной меры и такое число $s \in \mathbb{Z}_+$, что справедливо соотношение*

$$|\mu|^s |L(i\mu)| \to +\infty, \qquad \mu \to \pm\infty, \qquad |\mu| \in \mathbb{R}_+ \setminus E.$$

Основополагающие теоремы М. Г. Крейна и последовавшие за ними результаты Л. де Бранжа, П. Кусиса и А. Г. Бакана вызывают ощущение, что при описании характеристических свойств целой функции (не обязательно вещественной) с вещественными нулями, обратная величина которой раскладывается в ряд простых дробей, не удастся обойтись без использования класса Картрайт и каких-либо оценок снизу, налагаемых на рост функции, например, на мнимой оси. Однако, исследование, проведеное автором, показало, что для функции с вещественными нулями (и даже с нулями, расположенными в некоторой полосе) в изучаемом круге вопросов ключевую роль играют лишь наличие экспоненциальной оценки сверху на рост модуля функции и неотрицательность ее индикатора. Другие ограничения не нужны. Таким образом, для целой функции $L(\lambda)$ с простыми нулями, лежащими в полосе, в самых естественных терминах получен критерий разложимости обратной величины $1/L(\lambda)$ в ряд Крейна фиксированного порядка. Приведем формулировку центрального результата главы III, доказательство которого будет дано в § 18.

Теорема 16.4. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, расположенным в некоторой полосе Π комплексной плоскости. Пусть коэффициент a_0 определен формулой* (16.4), *и $p \in \mathbb{Z}_+$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если величина $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ допускает разложение*

$$\frac{1}{L(\lambda)} = P(\lambda) + \frac{a_0}{\lambda} + \lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda - \lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda(L), \tag{16.10}$$

где $P(\lambda)$ — некоторый полином, а ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$, то выполнены условия:

(i) *$L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с неотрицательным индикатором $h_L(\theta)$;*

(ii) *сходится ряд* $\displaystyle\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}}$.

При этом, если $p = 0$, то $P(\lambda) \equiv 0$, а если $p \in \mathbb{N}$, то $P(\lambda)$ вычисляется по формуле

$$P(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{p-1} \frac{F^{(m)}(0)}{m!}\,\lambda^m, & 0 \notin \Lambda(L), \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{p-1} \frac{(\lambda\,F(\lambda))^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\,\lambda^m, & 0 \in \Lambda(L). \end{cases} \tag{16.11}$$

2. *Если выполнены условия* (i), (ii), *то величина* $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ *раскладывается в ряд* (16.10), *сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области* $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$, *где полином* $P(\lambda) \equiv 0$ *при* $p = 0$, *и* $P(\lambda)$ *определен формулой* (16.11) *при* $p \in \mathbb{N}$.

Поскольку каждый из случаев $0 \notin \Lambda(L)$ и $0 \in \Lambda(L)$ обладает своей спецификой, полезно привести формулировки соответствующих результатов отдельно, заодно придав им форму критериев. Для ясности различаем разложения на простые дроби, получающиеся при $p = 0$ и при $p \in \mathbb{N}$.

Следствие 1. *Пусть* $L(\lambda)$ — *целая функция с множеством простых нулей* $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \notin \Lambda(L)$, *расположенным в некоторой полосе* Π *комплексной плоскости. Для того чтобы величина, обратная к* $L(\lambda)$, *раскладывалась в ряд*

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,(\lambda - \lambda_n)},$$

сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условие* (i) *из теоремы* 16.4 *и условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|} < +\infty.$$

Следствие 2. *Пусть* $L(\lambda)$ — *целая функция с множеством простых нулей* $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \notin \Lambda(L)$, *расположенным в некоторой полосе* Π *комплексной плоскости, и пусть* $p \in \mathbb{N}$. *Для того чтобы величина, обратная к* $L(\lambda)$, *раскладывалась в ряд*

$$F(\lambda) \equiv \frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{F^{(m)}(0)}{m!}\,\lambda^m + \lambda^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda - \lambda_n)},$$

сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (i), (ii) *из теоремы* 16.4.

Следствие 3. *Пусть* $L(\lambda)$ — *целая функция с множеством простых нулей* $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \in \Lambda(L)$, *расположенным в некоторой полосе* Π *комплексной плоскости. Для того чтобы величина, обратная к* $L(\lambda)$, *раскладывалась в ряд*

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \frac{1}{L'(0)\,\lambda} + \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,(\lambda - \lambda_n)},$$

сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условие* (i) *из теоремы* 16.4 *и условие*

$$\sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|} < +\infty.$$

Следствие 4. *Пусть* $L(\lambda)$ *— целая функция с множеством простых нулей* $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \in \Lambda(L)$, *расположенным в некоторой полосе* Π *комплексной плоскости, и пусть* $p \in \mathbb{N}$. *Для того чтобы обратная величина* $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ *раскладывалась в ряд*

$$F(\lambda) = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{(\lambda F(\lambda))^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} \lambda^m + \frac{1}{L'(0)\lambda} + \lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda - \lambda_n)},$$

сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (i), (ii) *из теоремы* 16.4.

Ввиду исключительной практической важности выделим из основной теоремы 16.4 случай целой функции с простыми вещественными нулями.

Теорема 16.5. *Пусть* $L(\lambda)$ *— целая функция с множеством простых вещественных нулей* $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Пусть коэффициент* a_0 *определен формулой* (16.4), *и* $p \in \mathbb{Z}_+$. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если величина* $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ *допускает разложение* (16.10), *где* $P(\lambda)$ *— некоторый полином, а ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах области* $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$, *то выполнены условия*:

(i) $L(\lambda)$ *— целая функция экспоненциального типа с неотрицательным индикатором* $h_L(\theta)$;

(ii) *сходится ряд* $\displaystyle\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}}$.

При этом, если $p = 0$, *то* $P(\lambda) \equiv 0$, *а если* $p \in \mathbb{N}$, *то* $P(\lambda)$ *вычисляется по формуле* (16.11).

2. *Если выполнены условия* (i), (ii), *то величина* $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ *раскладывается в ряд* (16.10), *сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области* $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$, *где полином* $P(\lambda) \equiv 0$ *при* $p = 0$, *и* $P(\lambda)$ *определен формулой* (16.11) *при* $p \in \mathbb{N}$.

Для целой функции нулевого экспоненциального типа из теоремы 16.4 извлекаем результат, обобщающий теорему Педерсена [138; Theorem 6.6].

Теорема 16.6. *Пусть* $L(\lambda)$ *— целая функция нулевого экспоненциального типа с множеством простых нулей* $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *расположенным в некоторой полосе* Π *комплексной плоскости. Пусть коэффициент* a_0 *определен формулой* (16.4), *и* $p \in \mathbb{Z}_+$. *Для того чтобы величина, обратная к* $L(\lambda)$, *раскладывалась в ряд* (16.10), *сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области* $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$, *где полином* $P(\lambda) \equiv 0$, *если* $p = 0$, *и* $P(\lambda)$ *определен формулой* (16.11), *если* $p \in \mathbb{N}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}} < +\infty.$$

В работе [10; теорема 2] утверждается, что аналогичный теореме 16.6 результат справедлив и без ограничения на расположение нулей $\Lambda(L)$ целой функции нулевого экспоненциального типа $L(\lambda)$. Схема доказательства такого утверждения, как сообщается в цитированной работе, принадлежит М. Л. Содину и основывается на формуле выпуклости Карлемана-Цуи-Хейнса. Развернутое доказательство, по-видимому, нигде не опубликовано.

Отметим, что методы, разработанные для доказательства основных результатов глав I и III диссертации, идейно близки и основаны на свойствах разложений мероморфных функций в ряды простых дробей.

§ 17. Общие свойства рядов Крейна

Результаты параграфа носят вводный характер и связаны со структурой ряда Крейна. Первое утверждение показывает, что для заданной функции вида (16.1) вопрос о единственности ее разложения в ряд (16.2) можно ставить только при фиксированном $p \in \mathbb{Z}_+$. Другими словами, одна и та же функция может допускать разложения в ряды Крейна различных порядков.

Лемма 17.1. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Если величина $1/L(\lambda)$ раскладывается в ряд Крейна порядка p, то она раскладывается в ряд Крейна любого большего порядка $p_1 > p$.*

Доказательство. Пусть $p \in \mathbb{Z}_+$, и для $1/L(\lambda)$ справедливо разложение (16.2) в предположении (16.3). Воспользуемся элементарным преобразованием

$$\frac{\lambda^p}{\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)} = \frac{\lambda^{p+1}}{\lambda_n^{p+1}}\left(\frac{1}{\lambda-\lambda_n}-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\lambda^{p+1}}{\lambda_n^{p+1}\,(\lambda-\lambda_n)} - \frac{\lambda^p}{\lambda_n^{p+1}}.$$

Сумма в (16.2) может быть записана в виде

$$\lambda^p \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)} = \lambda^{p+1} \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{p+1}\,(\lambda-\lambda_n)} + Q_1(\lambda), \tag{17.1}$$

где полином $Q_1(\lambda)$ имеет вид

$$Q_1(\lambda) = -\lambda^p \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{p+1}}.$$

Благодаря (16.3) все ряды в (17.1) сходятся. Заменяя в (17.1) p на $p+1$, разложим сумму

$$\lambda^{p+1} \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{p+1}\,(\lambda-\lambda_n)}$$

$$= \lambda^{p+2} \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{p+2}\,(\lambda-\lambda_n)} - \lambda^{p+1} \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{p+2}}. \tag{17.2}$$

Подставляя (17.2) в (17.1), имеем

$$\lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)} = \lambda^{p+2} \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{p+2}\,(\lambda-\lambda_n)} + Q_2(\lambda),$$

где полином $Q_2(\lambda)$ задается формулой

$$Q_2(\lambda) = -\lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{p+1}} - \lambda^{p+1} \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{p+2}}.$$

Продолжая процесс $p_1 - p$ раз, для любого $p_1 > p$ можем записать соотношение

$$\lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)} = \lambda^{p_1} \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{p_1}\,(\lambda-\lambda_n)} + Q_{p_1-p}(\lambda), \tag{17.3}$$

где полином $Q_{p_1-p}(\lambda)$ задается формулой

$$Q_{p_1-p}(\lambda) = -\lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{p+1}} - \ldots - \lambda^{p_1-1} \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{p_1}}. \tag{17.4}$$

Подставляя (17.3) в (16.2), получаем для $1/L(\lambda)$ разложение в ряд Крейна порядка p_1. Именно,

$$\frac{1}{L(\lambda)} = P_{p_1-p}(\lambda) + \frac{a_0}{\lambda} + \lambda^{p_1} \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{p_1}\,(\lambda-\lambda_n)},$$

где полином $P_{p_1-p}(\lambda)$ есть сумма полинома $P(\lambda)$ из представления (16.2) и полинома $Q_{p_1-p}(\lambda)$, определенного в (17.4), коэффициент a_0 задан посредством (16.4), и, наконец, в силу (16.3) сходится ряд

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p_1+1}} < +\infty.$$

Лемма доказана.

Следующий результат выявляет случай, когда возможно понижение порядка разложения в ряд Крейна.

Лемма 17.2. *Пусть* $L(\lambda)$ — *целая функция с множеством простых нулей* $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *такая, что* $d_L < +\infty$, *где характеристика* d_L *задана формулой* (16.9). *Пусть* $p \in \mathbb{N}$, $p > d_L$, *и для* $1/L(\lambda)$ *справедливо разложение в ряд Крейна порядка* p. *Тогда для* $1/L(\lambda)$ *справедливо разложение в ряд Крейна порядка* $p-1$.

Доказательство. По условию сходится ряд

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}},$$

и справедливо разложение

$$\frac{1}{L(\lambda)} = P(\lambda) + \frac{a_0}{\lambda} + \lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda(L),$$

где a_0 задан посредством формулы (16.4), а $P(\lambda)$ — некоторый полином. Поскольку $p \in \mathbb{N}$, $d_L \in \mathbb{Z}_+$ и $p > d_L$, то $p-1 \in \mathbb{Z}_+$ и $p-1 \geq d_L$. Поэтому ряд

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p}}$$

также сходится. Но тогда

$$\lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)} = \lambda^{p-1} \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{(\lambda-\lambda_n)+\lambda_n}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)}$$

$$= \lambda^{p-1} \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p} + \lambda^{p-1} \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{p-1}\,(\lambda-\lambda_n)},$$

и для $1/L(\lambda)$ справедливо разложение в ряд Крейна порядка $p-1$:

$$\frac{1}{L(\lambda)} = Q(\lambda) + \frac{a_0}{\lambda} + \lambda^{p-1} \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{p-1}\,(\lambda-\lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda(L),$$

где полином $Q(\lambda)$ имеет вид

$$Q(\lambda) = P(\lambda) + \lambda^{p-1} \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p}.$$

Лемма доказана.

В связи с леммой 17.2 отметим, что понижение порядка разложения на простые дроби возможно и в случае $p = d_L \in \mathbb{N}$, если при этом ряд

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p}$$

сходится[5]. В таком случае проходят рассуждения из леммы 17.2 с одной оговоркой. Получающееся разложение порядка $p-1$ сходится поточечно в области $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$, но не является разложением в ряд Крейна порядка $p-1$, теряя свойство абсолютной и равномерной сходимости на компактах этой области. Продемонстрируем сказанное на простом примере.

[5] По определению характеристики d_L ряд $\sum\limits_{\lambda_n \neq 0} \dfrac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^p}$ расходится, поэтому ряд $\sum\limits_{\lambda_n \neq 0} \dfrac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p}$ может сходиться только условно.

Пример 17.1. Рассмотрим функцию

$$L(\lambda) = \sin\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Как известно, $L(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа. Ее индикаторная диаграмма D_L есть отрезок мнимой оси $[-i,\, i]$. Все нули функции являются простыми и образуют последовательность

$$\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}: \quad \lambda_n = (-1)^n\,\pi\,[n/2]\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Значения производной в точках λ_n легко находятся:

$$L'(\lambda_n) = \cos\lambda_n = \cos(\pi\,[n/2]) = (-1)^{[n/2]}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому выполнены соотношения

$$L'(\lambda_n)\,\lambda_n = (-1)^{[n/2]+n}\,\pi\,[n/2] = (-1)^{[(n+1)/2]}\,\pi\,[n/2]\,, \qquad n \in \mathbb{N},$$
$$|L'(\lambda_n)| = 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Вычисляя величину d_L по определению (16.9), имеем

$$d_L \equiv \inf\left\{q \in \mathbb{Z}: \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{q+1}} < +\infty\right\}$$
$$= \inf\left\{q \in \mathbb{Z}: \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{[n/2]^{q+1}}\right\} = 1.$$

По следствию 4 теоремы 16.4 или по теореме 16.5 функция

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sin\lambda} = \operatorname{cosec}\lambda$$

раскладывается в ряд Крейна (16.2) порядка $p = 1$ с коэффициентом

$$a_0 = \frac{1}{L'(0)} = 1$$

и полиномом

$$P(\lambda) \equiv (\lambda\,F(\lambda))'\,(0) = \left(\frac{\lambda}{\sin\lambda}\right)'(0) = 0.$$

Итак,

$$\frac{1}{\sin\lambda} = \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{[(n+1)/2]}}{[n/2]\ (\ \lambda - (-1)^n\,\pi\,[n/2]\ )}, \tag{17.5}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$.

В этом примере при $p = d_L = 1$ ряд

$$\sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p} = \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{[(n+1)/2]}}{[n/2]}$$

$$= \frac{1}{\pi}\ \left(-1+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\ldots\right)$$

условно сходится к нулю, и поэтому можно понизить на единицу порядок разложения (17.5). Именно, учитывая, что

$$\sum_{\lambda_n\neq 0}\ \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n}\ =\ 0,$$

запишем тождество

$$\lambda\sum_{\lambda_n\neq 0}\ \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n\,(\lambda-\lambda_n)}\ =\ \sum_{\lambda_n\neq 0}\ \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n}\ +\ \sum_{\lambda_n\neq 0}\ \frac{1}{L'(\lambda_n)\,(\lambda-\lambda_n)}$$
$$=\ \sum_{\lambda_n\neq 0}\ \frac{1}{L'(\lambda_n)\,(\lambda-\lambda_n)},$$

т. е. тождество

$$\frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\ \frac{(-1)^{[(n+1)/2]}}{[n/2]\ \left(\ \lambda-(-1)^n\,\pi\,[n/2]\ \right)}\ =\ \sum_{n=2}^{\infty}\ \frac{(-1)^{[n/2]}}{\lambda-(-1)^n\,\pi\,[n/2]}.$$

Применяя полученное соотношение к (17.5), имеем

$$\frac{1}{\sin\lambda}\ =\ \frac{1}{\lambda}\ +\ \sum_{n=2}^{\infty}\ \frac{(-1)^{[n/2]}}{\lambda-(-1)^n\,\pi\,[n/2]},\tag{17.6}$$

где ряд сходится на множестве $\mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z}$ уже только поточечно и поэтому не является для функции $F(\lambda)\ =\ \operatorname{cosec}\lambda$ рядом Крейна нулевого порядка.

После группировки членов сходящегося ряда с сохранением порядка их следования снова возникает сходящийся ряд с той же суммой. Группируя члены любого из рядов (17.5), (17.6) парами, получим хорошо известное в анализе разложение

$$\frac{1}{\sin\lambda}\ =\ \frac{1}{\lambda}\ +\ 2\lambda\sum_{m=1}^{\infty}\ \frac{(-1)^m}{\lambda^2-\pi^2 m^2},\tag{17.7}$$

сходящееся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Например, в случае ряда (17.5) процесс группировки выглядит так:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ \frac{(-1)^{[(n+1)/2]}}{[n/2]\ \left(\ \lambda-(-1)^n\,\pi\,[n/2]\ \right)}\ =\ \sum_{m=1}^{\infty}\ \left(\frac{(-1)^m}{m\,(\lambda-\pi m)}\ +\ \frac{(-1)^{m+1}}{m\,(\lambda+\pi m)}\right)$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\ \frac{(-1)^m}{m}\ \left(\frac{1}{\lambda-\pi m}-\frac{1}{\lambda+\pi m}\right)\ =\ 2\pi\sum_{m=1}^{\infty}\ \frac{(-1)^m}{\lambda^2-\pi^2 m^2}.$$

Переход от (17.5) к (17.7) стал возможен благодаря нечетности рассматриваемой функции $L(\lambda)\ =\ \sin\lambda$. Представление (17.7) имеет простой и удобный для применений вид, но формально не является разложением $F(\lambda)\ =\ \operatorname{cosec}\lambda$ в ряд Крейна.

Пример показывает, что в случае четной или нечетной функции более естественно раскладывать ее обратную величину не в ряд Крейна, а в «сгруппированный» ряд типа (17.7). Подробно вопрос будет рассмотрен в § 19. На этом закончим разбор примера и вернемся к основной линии.

После того, как леммы 17.1, 17.2 получены, возникает следующий естественный вопрос. Пусть число $p \in \mathbb{Z}_+$ зафиксировано, и пусть мероморфная функция $1/L(\lambda)$ удовлетворяет условию (16.3) и раскладывается в ряд Крейна (16.2) заданного порядка p. Требуется определить коэффициенты полинома $P(\lambda)$. Покажем, что при довольно «либеральном» дополнительном ограничении на функцию $L(\lambda)$ полином $P(\lambda)$ в этой задаче восстанавливается однозначно.

Лемма 17.3. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Пусть некоторый угол*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \,|\arg\lambda - \theta_0| < \delta\}, \qquad 0 \le \theta_0 < 2\pi, \qquad 0 < \delta < \pi,$$

содержит не более конечного числа точек λ_n, и выполняется условие[6]

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\; r^p\, L(re^{i\theta_0}) \,=\, \infty. \tag{17.8}$$

Пусть, наконец, для $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ справедливо разложение (16.2) *в ряд Крейна фиксированного порядка $p \in \mathbb{Z}_+$ с полиномом $P(\lambda)$ и коэффициентами, подчиненными* (16.3), (16.4). *Тогда полином $P(\lambda)$ из представления* (16.2) *вычисляется по следующему правилу: если $p = 0$, то $P(\lambda) \equiv 0$, а если $p \in \mathbb{N}$, то $P(\lambda)$ имеет вид* (16.11).

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что значение $\theta_0 = 0$. Тогда по условию леммы выполнены соотношения:

$$|\arg\lambda_n| \,\ge\, \delta, \qquad n \ge n_0, \qquad 0 < \delta < \pi, \tag{17.9}$$

$$\frac{1}{L(r_j)\, r_j^p} \to 0, \qquad r_j \to +\infty, \quad j \to \infty. \tag{17.10}$$

Подставляя в (16.2) значения $\lambda = r \,\ge\, |\lambda_{n_0}|$, запишем представление

$$\frac{F(r)}{r^p} \,\equiv\, \frac{1}{L(r)\, r^p} \,=\, \frac{P(r)}{r^p} + \frac{a_0}{r^{p+1}} + \sum_{\lambda_n\ne 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(r-\lambda_n)},$$

или

$$\frac{P(r)}{r^p} \,=\, \frac{1}{L(r)\, r^p} - \frac{a_0}{r^{p+1}} - \sum_{\lambda_n\ne 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(r-\lambda_n)}, \qquad r \,\ge\, |\lambda_{n_0}|. \tag{17.11}$$

[6] Отметим, что условие (17.8) не является обременительным и выполнено для большинства целых функций, встречающихся на практике. Стоит, однако, иметь в виду, что существуют «экзотические» целые функции, которые стремятся к нулю вдоль любого луча, исходящего из точки $\lambda = 0$ (см., например, [92; Отд. IV, гл. 3, § 3, № 184]). При $p = 0$ для таких функций условие (17.8) не может выполняться ни при каком значении θ_0.

Здесь a_0 вычисляется по правилу (16.4), а коэффициенты ряда удовлетворяют условию (16.3). Первые два слагаемых в правой части (17.11) стремятся к нулю на последовательности $r_j \to +\infty$ из условия (17.10). Покажем, что

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(r-\lambda_n)} \to 0, \qquad r \to +\infty. \tag{17.12}$$

Используя (17.9), для $r > 0$ и $n \geq n_0$ получим

$$|r-\lambda_n| \,=\, \sqrt{r^2 - 2r\,|\lambda_n|\cos(\arg\lambda_n) + |\lambda_n|^2} \,\geq\, \sqrt{r^2 - 2r\,|\lambda_n|\cos\delta + |\lambda_n|^2}$$

$$= \sqrt{\left(r - |\lambda_n|\cos\delta\right)^2 + \left(|\lambda_n|\sin\delta\right)^2} \,\geq\, |\lambda_n|\sin\delta.$$

Возьмем произвольное малое $\varepsilon > 0$. Учитывая сходимость ряда (16.3), подберем номер $N \geq n_0$ настолько большим, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}} \,<\, \frac{\varepsilon\sin\delta}{2}. \tag{17.13}$$

Применяя (17.13) и оценку

$$|r-\lambda_n| \,\geq\, |\lambda_n|\sin\delta, \qquad r>0, \qquad n \geq n_0,$$

находим, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^p\,|r-\lambda_n|} \,\leq\, \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}\,\sin\delta} \,<\, \frac{\varepsilon}{2}, \qquad r>0.$$

А поскольку еще при $r \geq r_0(\varepsilon)$ верна оценка

$$\sum_{\lambda_n \neq 0,\, n \leq N} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^p\,|r-\lambda_n|} \,<\, \frac{\varepsilon}{2},$$

то справедливо (17.12).

Соотношения (17.10), (17.12) применительно к (17.11) дают

$$\frac{P(r_j)}{r_j^p} \to 0, \qquad j \to \infty.$$

Следовательно, $P(\lambda) \,\equiv\, 0$, если $p = 0$, а если $p \in \mathbb{N}$, то пока лишь ясно, что степень полинома $P(\lambda)$ не превосходит $p-1$. Осталось доказать формулу (16.11). Случаи $0 \notin \Lambda(L)$ и $0 \in \Lambda(L)$ разберем отдельно.

Пусть $0 \notin \Lambda(L)$. Полагая

$$P(\lambda) \,=\, b_{p-1}\,\lambda^{p-1} + \ldots + b_1\,\lambda + b_0,$$

запишем представление (16.2):

$$F(\lambda) \,=\, b_{p-1}\,\lambda^{p-1} + \ldots + b_1\,\lambda + b_0 \,+\, \lambda^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)}, \tag{17.14}$$

справедливое для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$. Подставляя сюда $\lambda = 0 \notin \Lambda(L)$, получим, что $b_0 = F(0)$. Если $p = 1$, то полином $P(\lambda) \equiv F(0) = 1/L(0)$ найден, и его вид согласуется с (16.11). Пусть $p \geq 2$. Благодаря условию (16.3) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)}$$

сходится абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$, и его производные находятся почленным дифференцированием соответствующее число раз. Продифференцируем (17.14):

$$F'(\lambda) \,=\, (p-1)\,b_{p-1}\,\lambda^{p-2} + \ldots + b_1$$

$$+\, p\,\lambda^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)} \,-\, \lambda^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda(L).$$

Подставив сюда $\lambda = 0$, найдем $b_1 = F'(0)$. При $p = 2$ на этом останавливаемся. Продолжая при $p \geq 3$ указанную процедуру, последовательно найдем

$$b_m \,=\, \frac{F^{(m)}(0)}{m!}, \qquad m = 0, \,\ldots\,, p-1.$$

Формула (16.11) в случае $0 \notin \Lambda(L)$ получена.

Пусть $0 \in \Lambda(L)$. Записав представление (16.2):

$$F(\lambda) \,=\, b_{p-1}\,\lambda^{p-1} + \ldots + b_1\,\lambda + b_0 \,+\, \frac{1}{L'(0)\,\lambda} \,+\, \lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)}$$

и умножив его на λ, имеем

$$\lambda\,F(\lambda) \,=\, b_{p-1}\,\lambda^p + \ldots + b_1\,\lambda^2 + b_0\,\lambda \,+\, \frac{1}{L'(0)} \,+\, \lambda^{p+1} \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)}.$$

Дифференцируя последовательно p раз и подставляя на каждом шаге в полученное соотношение $\lambda = 0$, найдем

$$b_m \,=\, \frac{(\lambda\,F(\lambda))^{(m+1)}\,(0)}{(m+1)!}, \qquad m = 0, \,\ldots\,, p-1.$$

Формула (16.11) в случае $0 \in \Lambda(L)$ получена. Лемма доказана.

Сделаем несколько замечаний. Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Допустим, что в некотором угле с вершиной в точке $\lambda = 0$ находится не более конечного числа точек λ_n, и на биссектрисе угла выполнено условие (17.8). Тогда, как показывают леммы 17.1–17.3, если обратная величина $1/L(\lambda)$ раскладывается в ряд Крейна какого-либо порядка, то эта же величина раскладывается в ряд Крейна порядка $p = \max\{0, d_L\}$, и последнее разложение является наиболее простым по форме.

Доказательство леммы 17.3 состоит из двух частей. Вначале показываем, что в представлении (16.2) полином $P(\lambda) \equiv 0$ при $p = 0$, и степень полинома $P(\lambda)$ не превосходит $p-1$ при $p \in \mathbb{N}$. Затем находим коэффициенты полинома $P(\lambda)$. На втором этапе доказательства можно использовать другой способ вычисления коэффициентов полинома $P(\lambda)$, позволяющий дополнительно находить некоторые суммируемые комбинации нулей λ_n, $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 17.4. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, и $p \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ раскладывается в ряд Крейна порядка p с полиномом $P(\lambda) \equiv 0$ при $p = 0$, и полиномом $P(\lambda)$ степени $\le p-1$ при $p \in \mathbb{N}$. Тогда для значений $m = p+1, p+2, \dots$, справедливы суммационные соотношения*

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^m} = \begin{cases} -\dfrac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}, & 0 \notin \Lambda(L), \\[2ex] -\dfrac{(\lambda\, F(\lambda))^{(m)}(0)}{m!}, & 0 \in \Lambda(L). \end{cases} \tag{17.15}$$

Доказательство. Последовательность $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ выписываем в порядке неубывания модулей. Случаи $0 \notin \Lambda(L)$ и $0 \in \Lambda(L)$ рассмотрим отдельно.

Пусть $0 \notin \Lambda(L)$. Тогда

$$0 < |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \dots .$$

По условию справедливо разложение

$$F(\lambda) = P(\lambda) + \lambda^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda - \lambda_n)} \tag{17.16}$$

в предположении, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}} < +\infty. \tag{17.17}$$

Здесь $P(\lambda) \equiv 0$ при $p = 0$, и полиномом $P(\lambda)$ имеет степень $\le p-1$ при $p \in \mathbb{N}$. Обе части формулы (17.16) являются аналитическими в круге $|\lambda| < |\lambda_1|$ функциями. Разложим их в ряд Тейлора в этом круге и сравним коэффициенты при одинаковых степенях λ в полученных разложениях. Во-первых,

$$F(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m)}(0)}{m!}\,\lambda^m, \qquad |\lambda| < |\lambda_1|. \tag{17.18}$$

Во-вторых, с учетом (17.17) при тех же значениях λ запишем

$$\lambda^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)} = \lambda^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p} \left(-\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\lambda_n^{j+1}}\right)$$

$$= -\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{j+p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{j+p+1}},$$

получая разложение

$$\lambda^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)} = -\sum_{m=p}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{m+1}}\right) \lambda^m, \quad |\lambda|<|\lambda_1|. \tag{17.19}$$

Подставляя (17.18), (17.19) в (17.16), приходим к равенству

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m)}(0)}{m!}\,\lambda^m = P(\lambda) - \sum_{m=p}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{m+1}}\right) \lambda^m, \tag{17.20}$$

верному для всех $|\lambda|<|\lambda_1|$. Теперь при $p=0$ имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m)}(0)}{m!}\,\lambda^m = -\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{m+1}}\right) \lambda^m, \qquad |\lambda|<|\lambda_1|,$$

откуда следует формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{m+1}} = -\frac{F^{(m)}(0)}{m!}, \qquad m\in\mathbb{Z}_+,$$

согласующаяся с (17.15). При $p\in\mathbb{N}$ соотношение (17.20) с учетом ограничения на степень полинома $P(\lambda)$ дает как старую формулу

$$P(\lambda) = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{F^{(m)}(0)}{m!}\,\lambda^m$$

из (16.11), так и новую формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{m+1}} = -\frac{F^{(m)}(0)}{m!}, \qquad m=p,\,p+1,\,\ldots\,,$$

из (17.15). При $0\notin\Lambda(L)$ соотношения (17.15) получены.

Пусть $0\in\Lambda(L)$. Тогда

$$0 = |\lambda_1| < |\lambda_2| \le |\lambda_3| \le \ldots\,.$$

По условию справедливо разложение

$$F(\lambda) \,=\, P(\lambda) \,+\, \frac{1}{L'(0)\,\lambda} \,+\, \lambda^p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)}$$

в предположении, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}} \,<\, +\infty,$$

с теми же ограничениями на полином $P(\lambda)$, что и в случае $0 \notin \Lambda(L)$. После умножения указанного разложения на λ получаем представление

$$\lambda\, F(\lambda) \,=\, \lambda\, P(\lambda) \,+\, \frac{1}{L'(0)} \,+\, \lambda^{p+1} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)}, \tag{17.21}$$

обе части которого являются функциями, аналитическими в круге $|\lambda| < |\lambda_2|$. Снова пишем разложения в ряд Тейлора

$$\lambda\, F(\lambda) \,=\, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\, F(\lambda))^{(m)}\,(0)}{m!}\,\lambda^m,$$

$$\lambda^{p+1} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)} \,=\, -\sum_{m=p+1}^{\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^m} \right) \lambda^m,$$

справедливые при $|\lambda| < |\lambda_2|$. Подставляя эти разложения в (17.21), приходим к равенству

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\, F(\lambda))^{(m)}\,(0)}{m!}\,\lambda^m \,=$$

$$=\, \lambda\, P(\lambda) \,+\, \frac{1}{L'(0)} \,-\, \sum_{m=p+1}^{\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^m} \right) \lambda^m, \tag{17.22}$$

верному при $|\lambda| < |\lambda_2|$. При $p = 0$ имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\, F(\lambda))^{(m)}\,(0)}{m!}\,\lambda^m \,=\, \frac{1}{L'(0)} \,-\, \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^m} \right) \lambda^m, \qquad |\lambda| < |\lambda_2|,$$

откуда следует формула

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^m} \,=\, -\,\frac{(\lambda\, F(\lambda))^{(m)}\,(0)}{m!}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

согласующаяся с (17.15). При $p \in \mathbb{N}$ соотношение (17.22) дает две формулы:

$$\lambda\, P(\lambda) \,+\, \frac{1}{L'(0)} \,=\, \sum_{m=0}^{p} \frac{(\lambda\, F(\lambda))^{(m)}\,(0)}{m!}\,\lambda^m,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^m} \;=\; -\,\frac{(\lambda\,F(\lambda))^{(m)}\,(0)}{m!}, \qquad m = p+1,\, p+2,\, \ldots\,.$$

Первая формула приводится к уже известному виду (см. (16.11))

$$P(\lambda) \;=\; \frac{1}{\lambda}\left(-\,\frac{1}{L'(0)} \;+\; \sum_{m=0}^{p} \frac{(\lambda\,F(\lambda))^{(m)}\,(0)}{m!}\,\lambda^m\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\,\sum_{m=1}^{p} \frac{(\lambda\,F(\lambda))^{(m)}\,(0)}{m!}\,\lambda^m \;=\; \sum_{m=0}^{p-1} \frac{(\lambda\,F(\lambda))^{(m+1)}\,(0)}{(m+1)!}\,\lambda^m,$$

а вторая совпадает с соответствующей частью (17.15). Лемма доказана.

§ 18. Доказательство основной теоремы

Параграф посвящен доказательству теоремы 16.4 и разбит на три пункта. Вначале даются оценки на мнимой оси специальных бесконечных произведений. Каждый из следующих двух пунктов содержит доказательство соответствующей части теоремы 16.4.

18.1. Оценки бесконечных произведений. Доказательство центральной теоремы этой главы опирается на одно вспомогательное утверждение, близкое к лемме А. М. Седлецкого из [105; гл. 5, § 5.3, лемма 5].

Лемма 18.1. *Пусть* $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *— последовательность комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности, имеющая конечную верхнюю плотность* $\overline{\Delta}(\Lambda)$. *Пусть при некотором* $h>0$ *последовательность* Λ *лежит в горизонтальной полосе* $|\operatorname{Im}\lambda| \le h$, *и выполнено условие*

$$\mu_n \equiv \operatorname{Re}\lambda_n \ne 0, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{18.1}$$

Тогда бесконечное произведение

$$\chi(\lambda) \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)\,\left(1-\frac{\lambda}{\mu_n}\right)^{-1}, \qquad \lambda\in\mathbb{C}\setminus(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \tag{18.2}$$

удовлетворяет на мнимой оси оценке

$$\inf_{\mu\in\mathbb{R}} \,|\chi(i\mu)| \;>\; 0. \tag{18.3}$$

Доказательство. Положим

$$\lambda_n \equiv \mu_n + i\nu_n, \qquad n\in\mathbb{N}, \qquad M \equiv (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}\,. \tag{18.4}$$

По условию верна оценка

$$|\nu_n| \le h, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{18.5}$$

Бесконечное произведение $\chi(\lambda)$ заведомо сходится вне указанной полосы. При всех значениях $\mu\in\mathbb{R}$, $|\mu|>h$, с учетом (18.1), (18.4), (18.5) имеем

$$|\chi(i\mu)|^2 = \prod_{n=1}^{\infty} \left|1-\frac{i\mu}{\lambda_n}\right|^2 \left|1-\frac{i\mu}{\mu_n}\right|^{-2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i\mu-\lambda_n}{i\mu-\mu_n}\right|^2 \left|\frac{\mu_n}{\lambda_n}\right|^2$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu-\nu_n)^2+\mu_n^2}{\mu^2+\mu_n^2}\,\frac{\mu_n^2}{\mu_n^2+\nu_n^2} \geq \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(|\mu|-h)^2+\mu_n^2}{\mu^2+\mu_n^2}\,\frac{\mu_n^2}{\mu_n^2+h^2}.$$

Таким образом,

$$|\chi(i\mu)|^2 \geq \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(|\mu|-h)^2+\mu_n^2}{\mu^2+\mu_n^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2}{\mu_n^2+h^2}, \qquad \mu\in\mathbb{R}, \quad |\mu|>h. \tag{18.6}$$

Бесконечные произведения, фигурирующие в правой части соотношения (18.6), оценим отдельно.

Пусть $n_\Lambda(r)$, $n_M(r)$ — считающие функции последовательностей Λ и M соответственно, т. е.

$$n_\Lambda(r) = \sum_{|\lambda_n|\leq r} 1, \qquad n_M(r) = \sum_{|\mu_n|\leq r} 1, \qquad r\geq 0.$$

В силу (18.1), (18.4) справедливы неравенства

$$\sqrt{|\lambda_n|^2-h^2} \leq |\mu_n| \leq |\lambda_n|, \qquad n\geq n_0. \tag{18.7}$$

Следовательно,

$$\overline{\Delta}(M) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_M(r)}{r} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\mu_n|}$$
$$= \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r} = \overline{\Delta}(\Lambda).$$

Поскольку верхняя плотность последовательности Λ конечна и выполнено условие (18.1), то с некоторой константой $A>0$ верна оценка

$$n_M(r) \leq A\,r, \qquad r\geq 0. \tag{18.8}$$

Для бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2}{\mu_n^2+h^2},$$

фигурирующего в (18.6), имеем

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2+h^2}{\mu_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{h^2}{\mu_n^2}\right) = \int_0^{\infty} \ln\left(1+\frac{h^2}{r^2}\right) d\,n_M(r)$$

$$= n_M(r)\ln\left(1+\frac{h^2}{r^2}\right)\Big|_0^{\infty} + 2h^2 \int_0^{\infty} \frac{n_M(r)}{r}\,\frac{dr}{r^2+h^2}.$$

Благодаря (18.1), (18.8) подстановка обращается в нуль, и, следовательно, справедливо представление

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 + h^2}{\mu_n^2} \;=\; 2h^2 \int\limits_0^{\infty} \frac{n_M(r)}{r}\, \frac{dr}{r^2 + h^2}.$$

Оценивая интеграл с помощью (18.8), получим

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 + h^2}{\mu_n^2} \;\le\; 2\,A\,h^2 \int\limits_0^{\infty} \frac{dr}{r^2 + h^2} \;=\; A\,\pi\,h.$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2}{\mu_n^2 + h^2} \;\ge\; e^{\,-A\,\pi\,h}. \tag{18.9}$$

Для того чтобы оценить снизу другое бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(|\mu| - h)^2 + \mu_n^2}{\mu^2 + \mu_n^2}, \qquad |\mu| > h,$$

фигурирующее в (18.6), вначале запишем соотношение

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 + \mu^2}{\mu_n^2 + (|\mu| - h)^2} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\mu^2 - (|\mu| - h)^2}{\mu_n^2 + (|\mu| - h)^2}\right)$$

$$\le\; h\,(2|\mu| - h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 + (|\mu| - h)^2} \;=\; h\,(2|\mu| - h) \int\limits_0^{\infty} \frac{d\,n_M(r)}{r^2 + (|\mu| - h)^2}.$$

Интегрируя дважды по частям и учитывая (18.1), (18.8), находим

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 + \mu^2}{\mu_n^2 + (|\mu| - h)^2} \;\le$$

$$\le\; h(2|\mu| - h) \left(\frac{n_M(r)}{r^2 + (|\mu| - h)^2} \Bigg|_0^{\infty} + \int\limits_0^{\infty} \frac{2r\, n_M(r)\, dr}{\left(r^2 + (|\mu| - h)^2\right)^2} \right)$$

$$=\; h\,(2|\mu| - h) \int\limits_0^{\infty} \frac{2r\, n_M(r)\, dr}{\left(r^2 + (|\mu| - h)^2\right)^2} \;\le\; A\,h\,(2|\mu| - h) \int\limits_0^{\infty} \frac{2r^2\, dr}{\left(r^2 + (|\mu| - h)^2\right)^2}$$

$$=\; A\,h\,(2|\mu| - h) \int\limits_0^{\infty} \frac{dr}{r^2 + (|\mu| - h)^2} \;=\; \frac{A\,\pi\,h\,(2|\mu| - h)}{2\,(|\mu| - h)}.$$

Пусть теперь $|\mu| \ge 3h/2$. Тогда

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 + \mu^2}{\mu_n^2 + (|\mu| - h)^2} \le 2A\,\pi\,h.$$

Отсюда получаем оценку

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(|\mu| - h)^2 + \mu_n^2}{\mu^2 + \mu_n^2} \ge e^{-2A\,\pi\,h}, \qquad |\mu| \ge 3h/2. \tag{18.10}$$

Применяя (18.9), (18.10) к (18.6), приходим к соотношению

$$|\chi(i\mu)|^2 \ge e^{-3A\,\pi\,h}, \qquad |\mu| \ge 3h/2,$$

которое влечет нужную оценку (18.3) на всей мнимой оси, поскольку там бесконечное произведение (18.2) сходится и не имеет нулей. Лемма доказана.

Теперь мы можем дать оценку снизу на мнимой оси целой функции экспоненциального типа с нулями, расположенными в горизонтальной полосе.

Лемма 18.2. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Пусть при некотором $h > 0$ последовательность $\Lambda(L)$ лежит в горизонтальной полосе $|\operatorname{Im}\lambda| \le h$. Тогда на мнимой оси выполнена оценка*

$$|L(i\mu)| \ge B\,e^{b\,\mu}, \qquad \mu \in \mathbb{R}, \qquad |\mu| \ge 2h. \tag{18.11}$$

где $B > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Доказательство. По теореме Адамара функция $L(\lambda)$ представима в виде

$$L(\lambda) = \lambda^s\, e^{a\,\lambda + d} \prod_{\lambda_n \ne 0} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n}}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{18.12}$$

где a, $d \in \mathbb{C}$, число s вычисляется по правилу

$$s = \begin{cases} 1, & 0 \in \Lambda(L), \\ 0, & 0 \notin \Lambda(L). \end{cases}$$

Используя обозначение $\lambda_n \equiv \mu_n + i\nu_n$, $n \in \mathbb{N}$, преобразуем (18.12) к виду

$$L(\lambda) = \lambda^s\, T(\lambda)\, e^{c\,\lambda + d}\, \chi(\lambda) \prod_{\mu_n \ne 0} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\mu_n}}. \tag{18.13}$$

Здесь $T(\lambda)$ — некоторый полином с чисто мнимыми нулями. При этом в записи (18.13) полином $T(\lambda)$ отсутствует, если выполнено условие (18.1) или условие $\Lambda(L) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$. Число $c \in \mathbb{C}$ определяется по формуле

$$c = a + \sum_{\nu_n \ne 0} \frac{1}{\nu_n} + \sum_{\mu_n \ne 0} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\mu_n}\right),$$

в которой первая сумма равна нулю в случае выполнения условия (18.1) или условия $\Lambda(L) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$, и состоит из конечного числа слагаемых в противном случае. Ряд

$$\sum_{\mu_n \neq 0} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\mu_n} \right)$$

сходится. Действительно,

$$\sum_{\mu_n \neq 0} \left| \frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\mu_n} \right| = \sum_{\mu_n \neq 0} \frac{|\nu_n|}{|\lambda_n|\,|\mu_n|} \leq h \sum_{\mu_n \neq 0} \frac{1}{|\lambda_n|\,|\mu_n|} < +\infty,$$

поскольку выполнены оценки (18.5), (18.7), и верхняя плотность последовательности $\Lambda(L)$ конечна. Наконец,

$$\chi(\lambda) = \prod_{\mu_n \neq 0} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_n} \right)^{-1}$$

есть бесконечное произведение (18.2).

Опираясь на представление (18.13), запишем при $\mu \in \mathbb{R},\ |\mu| > h$ тождество:

$$|L(i\mu)| = |\mu|^s \, |T(i\mu)| \, e^{-\mu \operatorname{Im} c + \operatorname{Re} d} \, |\chi(i\mu)| \prod_{\mu_n \neq 0} \left| 1 - \frac{i\mu}{\mu_n} \right|. \tag{18.14}$$

По лемме 18.1 выполнена оценка (18.3). Учитывая еще, что справедливы соотношения

$$\inf_{\mu \in \mathbb{R},\, |\mu| \geq 2h} |\mu|^s \, |T(i\mu)| \, e^{\operatorname{Re} d} > 0,$$

$$\prod_{\mu_n \neq 0} \left| 1 - \frac{i\mu}{\mu_n} \right| \geq 1, \qquad \mu \in \mathbb{R},$$

и полагая $b \equiv -\operatorname{Im} c$, получим из (18.14) нужную оценку (18.11). Лемма доказана.

Приступим к доказательству основной теоремы.

18.2. Доказательство первой части теоремы 16.4. Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, расположенным в некоторой полосе Π комплексной плоскости. Пусть коэффициент a_0 определен формулой (16.4), и $p \in \mathbb{Z}_+$. Допустим, что для величины $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ справедливо разложение (16.10):

$$\frac{1}{L(\lambda)} = P(\lambda) + \frac{a_0}{\lambda} + \lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\, \lambda_n^p \,(\lambda - \lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda(L),$$

где $P(\lambda)$ — некоторый полином, а ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$. Требуется вывести отсюда условия (i),(ii) теоремы 16.4 и обосновать сформулированное в первой части этой теоремы утверждение относительно вида полинома $P(\lambda)$.

По условию последовательность $\Lambda(L)$ умещается в какой-то полосе. Всегда можно поместить $\Lambda(L)$ в некоторую более широкую полосу, симметричную относительно точки $\lambda = 0$. Поэтому стандартная процедура поворота плоскости на соответствующий угол позволяет без ограничения общности считать, что Π совпадает с горизонтальной полосой

$$\Pi_h \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\operatorname{Im} \lambda| \le h\}, \qquad h > 0.$$

Итак, относительно $\Lambda(L)$ предполагаем выполненным соотношение

$$\lambda_n \equiv \mu_n + i\nu_n, \qquad |\nu_n| \le h, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{18.15}$$

Сразу отметим, что характер сходимости ряда (16.10) влечет условие (ii). Сосредоточимся на выводе условия (i).

Сначала убедимся в том, что $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа. Для этого воспользуемся схемой рассуждений М. Г. Крейна из [67], разработанной им для функции с вещественными нулями. Записав (16.10) в виде

$$\frac{1}{L(\lambda)} = P(\lambda) + \frac{a_0}{\lambda} + \lambda^p R(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda(L), \tag{18.16}$$

покажем вначале, что в этом представлении функция

$$R(\lambda) \equiv \sum_{\lambda_n \ne 0} \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n}, \qquad \sum_{\lambda_n \ne 0} \left| \frac{c_n}{\lambda_n} \right| \equiv \sum_{\lambda_n \ne 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\, |\lambda_n|^{p+1}} < +\infty,$$

принадлежит *классу Неванлинны* в каждой из полуплоскостей

$$\Pi_h^+ \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} \lambda > h\}, \qquad \Pi_h^- \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} \lambda < -h\}.$$

Последнее означает, что функция $\ln^+ |R(\lambda)|$ в каждой из обозначенных полуплоскостей имеет гармоническую мажоранту. Проведем доказательство применительно к полуплоскости Π_h^+. Все используемые при этом сведения о структуре классов Неванлинны можно найти в [67].

Функция $R(\lambda)$ очевидным образом представляется в форме

$$R(\lambda) = R_1(\lambda) - R_2(\lambda) + i\, R_3(\lambda) - i\, R_4(\lambda),$$

где каждая из функций $R_m(\lambda)$, $m = 1, 2, 3, 4$, имеет вид

$$\sum \frac{\rho_n}{\lambda - \lambda_n}, \qquad \rho_n > 0.$$

Как известно, достаточным условием принадлежности функции, аналитической в некоторой односвязной области $G \subset \mathbb{C}$, классу Неванлинны в G является сохранение знака ее мнимой частью в этой области. При $\lambda \in \Pi_h^+$ и $\rho_n > 0$ имеем

$$\operatorname{Im} \sum \frac{\rho_n}{\lambda - \lambda_n} = \sum \rho_n \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda - \lambda_n}$$

$$= \sum \frac{\rho_n \operatorname{Im}(\lambda_n - \lambda)}{|\lambda - \lambda_n|^2} < \sum \frac{\rho_n \operatorname{Im}(\lambda_n - h)}{|\lambda - \lambda_n|^2} \le 0.$$

Следовательно, функции $R_m(\lambda)$, $m = 1, 2, 3, 4$, а вместе с ними — и функция $R(\lambda)$ принадлежат классу Неванлинны в полуплоскости Π_h^+. Отсюда и из представления (18.16) вытекает принадлежность классу Неванлинны в Π_h^+ функций $1/L(\lambda)$ и $L(\lambda)$. Аналогично проверяется, что $L(\lambda)$ содержится в классе Неванлинны в полуплоскости Π_h^-, поскольку при $\lambda \in \Pi_h^-$ и $\rho_n > 0$ справедливы оценки

$$\operatorname{Im} \sum \frac{\rho_n}{\lambda - \lambda_n} > \sum \frac{\rho_n \operatorname{Im}(\lambda_n + h)}{|\lambda - \lambda_n|^2} \ge 0.$$

Далее, согласно теореме 2 [67], примененной к полуплоскости Π_h^+, найдется вещественная константа σ_1 такая, что выполняется соотношение

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\ln |L(ih + re^{i\theta})|}{r} = \sigma_1 \sin\theta, \qquad 0 < \theta < \pi,$$

равномерно по $\delta \le \theta \le \pi - \delta$ для любого фиксированного $0 < \delta < \pi$. Пользуясь этим, получаем для $|L(\lambda)|$ предельное соотношение на лучах, исходящих уже из точки $\lambda = 0$. Именно, существует предел

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\ln |L(re^{i\theta})|}{r} = \sigma_1 \sin\theta, \qquad 0 < \theta < \pi.$$

Аналогичное соотношение справедливо и при $\pi < \theta < 2\pi$ с некоторой константой $\sigma_2 \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что функция $L(\lambda)$ имеет экспоненциальный тип, а ее индикатор вычисляется по формуле

$$h_L(\theta) = \begin{cases} \sigma_1 \sin\theta, & 0 \le \theta \le \pi, \\ \sigma_2 \sin\theta, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Поэтому индикаторная диаграмма D_L функции $L(\lambda)$ является отрезком мнимой оси. Таким образом, для получения условия (i) осталось проверить, что $h_L(\theta) \ge 0$ при всех $0 \le \theta \le 2\pi$.

С учетом условия (ii) представление (16.10) является разложением функции $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ в ряд Крейна порядка p. Но тогда по лемме 17.1 эта функция раскладывается также в ряд Крейна порядка $p+1$. Именно, справедливо представление

$$\frac{1}{L(\lambda)} = P_1(\lambda) + \frac{a_0}{\lambda} + \lambda^{p+1} \sum_{\lambda_n \ne 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\, \lambda_n^{p+1}\, (\lambda - \lambda_n)}, \tag{18.17}$$

в котором согласно формуле (17.1) полином $P_1(\lambda)$ имеет вид

$$P_1(\lambda) = P(\lambda) - \lambda^p \sum_{\lambda_n \ne 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\, \lambda_n^{p+1}}.$$

С учетом (18.15) для $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| > h$, запишем

$$|i\mu - \lambda_n| = \sqrt{\mu_n^2 + (\mu - \nu_n)^2} \ge |\mu - \nu_n| \ge |\mu| - h, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{18.18}$$

Опираясь на (18.17), (18.18), (ii), оценим снизу $|L(\lambda)|$ на мнимой оси. Для всех значений $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| > h$, имеем

$$\frac{1}{|L(i\mu)|} \le |P_1(i\mu)| + \frac{|a_0|}{|\mu|} + \frac{|\mu|^{p+1}}{|\mu| - h} \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}}.$$

Поэтому с некоторыми константами $C > 0$, $q \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|L(i\mu)| \ge C\,|\mu|^{-q}, \qquad \mu \in \mathbb{R}, \quad |\mu| > h.$$

Эта оценка показывает, что

$$h_L(\pi/2) \equiv \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln|L(ir)|}{r} \ge 0, \qquad h_L(-\pi/2) \equiv \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln|L(-ir)|}{r} \ge 0.$$

Но индикаторная диаграмма D_L является отрезком мнимой оси. В сочетании с последними соотношениями это дает неотрицательность индикатора $h_L(\theta)$.

Наконец, конкретизируем вид полинома $P(\lambda)$ из представления (16.10). Для этого обоснуем применимость леммы 17.3. Поскольку $\Lambda(L) \subset \Pi_h$, то при фиксированном $0 < \delta < \pi/2$ каждый из углов

$$\{\,\lambda \in \mathbb{C}:\ |\arg\lambda - \pi/2| < \delta\,\}, \qquad \{\,\lambda \in \mathbb{C}:\ |\arg\lambda + \pi/2| < \delta\,\}$$

содержит не более конечного числа точек λ_n. Кроме того, по лемме 18.2 справедлива оценка (18.11). Следовательно, хотя бы для одного из значений $\theta_0 = \pm\pi/2$ выполнено условие (17.8). Привлекая лемму 17.3, можем утверждать, что $P(\lambda) \equiv 0$, если $p = 0$, и $P(\lambda)$ вычисляется по правилу (16.11), если $p \in \mathbb{N}$. Первая часть теоремы 16.4 доказана.

18.3. Доказательство второй части теоремы 16.4. Итак, пусть $L(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа с индикатором $h_L(\theta) \ge 0$ и множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, расположенным в некоторой полосе Π. Пусть также при некотором $p \in \mathbb{Z}_+$ сходится ряд $\sum\limits_{\lambda_n \neq 0} \dfrac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}}$. Докажем, что тогда справедливо представление (16.10), в котором $P(\lambda) \equiv 0$, если $p = 0$, и полином $P(\lambda)$ определен формулой (16.11), если $p \in \mathbb{N}$. Как и при доказательстве первой части теоремы 16.4 можем считать, что

$$\Lambda(L) \subset \Pi_h \equiv \{\lambda \in \mathbb{C}:\ |\mathrm{Im}\,\lambda| \le h\}, \qquad h > 0. \tag{18.19}$$

Убедимся в том, что целая функция

$$\Delta_L^p(\lambda) \equiv \frac{1}{L(\lambda)} - \frac{a_0}{\lambda} - \lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda - \lambda_n)} \tag{18.20}$$

есть полином. Для этого потребуется сначала решить аналогичную задачу для вспомогательной функции, получаемой из $L(\lambda)$ умножением на подходящую экспоненту.

По лемме 18.2 для функции $L(\lambda)$ на мнимой оси верна оценка (18.11). Возьмем число $b \in \mathbb{R}$ из (18.11) и положим

$$L_1(\lambda) \equiv e^{i\,b\,\lambda}\, L(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{18.21}$$

Тогда $L_1(\lambda)$, как и $L(\lambda)$, является целой функцией экспоненциального типа. При этом $\Lambda(L_1) = \Lambda(L)$, и с той же константой $B > 0$, что и в (18.11), выполнена оценка

$$|L_1(i\mu)| \geq B, \qquad \mu \in \mathbb{R}, \qquad |\mu| \geq 2h. \tag{18.22}$$

Отметим, что $h_{L_1}(\theta) \geq 0$. Действительно, соотношение (18.21) показывает, что индикаторная диаграмма D_{L_1} есть сдвиг индикаторной диаграммы D_L вдоль мнимой оси. Но $0 \in D_L$, а $h_{L_1}(\pm\pi/2) \geq 0$ согласно (18.22). Поэтому $h_{L_1}(\theta) \geq 0$ при всех $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Кроме того, ввиду (18.19), (18.21) имеем

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L_1'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}} < +\infty, \tag{18.23}$$

поскольку

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L_1'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}} = \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|e^{i\,b\,\lambda_n}|\,|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}}$$

$$= \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{e^{b\,\mathrm{Im}\,\lambda_n}}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}} \leq e^{|b|\,h} \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}} < +\infty.$$

Покажем, что целая функция

$$\Delta^p_{L_1}(\lambda) \equiv \frac{1}{L_1(\lambda)} - \frac{a_0}{\lambda} - \lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L_1'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda - \lambda_n)} \tag{18.24}$$

есть полином. Сначала установим, что $\Delta^p_{L_1}(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа. Для этого запишем представление

$$\Delta^p_{L_1}(\lambda)\,\lambda\,L_1(\lambda) = \lambda - \frac{1}{L'(0)}\,L_1(\lambda) - \lambda^{p+1}\,\Phi(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{18.25}$$

если $0 \in \Lambda(L)$, или представление

$$\Delta^p_{L_1}(\lambda)\,L_1(\lambda) = 1 - \lambda^p\,\Phi(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{18.26}$$

если $0 \notin \Lambda(L)$, и проверим, что целая функция

$$\Phi(\lambda) \equiv \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{L_1(\lambda)}{L_1'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda - \lambda_n)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

имеет экспоненциальный тип. При выводе нужной оценки сверху величины $|\Phi(\lambda)|$ используем следующие обозначения для положительных констант (см. (18.23)):

$$A_1 \equiv \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L_1'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}}, \qquad A_2 \equiv \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L_1'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+2}},$$

$$A_3 \equiv \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L_1'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+3}}, \qquad A_4 \equiv \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|L_1'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+4}}.$$

Применяя формулы (17.3), (17.4) из леммы 17.1 при $p_1 = p+3$, получим соотношение

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L_1'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda - \lambda_n)} = \lambda^3 \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L_1'(\lambda_n)\,\lambda_n^{p+3}\,(\lambda - \lambda_n)} - \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L_1'(\lambda_n)\lambda_n^{p+1}}$$

$$- \lambda \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L_1'(\lambda_n)\lambda_n^{p+2}} - \lambda^2 \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L_1'(\lambda_n)\lambda_n^{p+3}} - \lambda^3 \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L_1'(\lambda_n)\lambda_n^{p+4}}.$$

Введем множество кругов

$$U_n = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_n| < \frac{1}{|\lambda_n|^2} \right\}, \qquad U = \bigcup_{\lambda_n \neq 0} U_n.$$

Тогда при $\lambda \notin U$ имеем

$$|\Phi(\lambda)| = |L_1(\lambda)| \left| \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L_1'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda - \lambda_n)} \right|$$

$$\leq |L_1(\lambda)| \, \Big((A_1 + A_4)\,|\lambda|^3 + A_3\,|\lambda|^2 + A_2\,|\lambda| + A_1 \Big).$$

Таким образом, с некоторой положительной константой M верна оценка

$$|\Phi(\lambda)| \leq M\,|\lambda|^3\,|L_1(\lambda)|, \qquad \lambda \notin U. \tag{18.27}$$

Множество U представляет собой объединение кружков с конечной суммой радиусов, так как показатель сходимости последовательности $\Lambda(L)$ не превосходит порядка функции $L(\lambda)$. Согласно основному результату работы И. Ф. Красичкова-Терновского [65] множество U можно покрыть множеством попарно не пересекающихся кругов нулевой линейной плотности. Применяя к $\Phi(\lambda)$ в таких кругах принцип максимума модуля, из (18.27) с учетом непрерывности индикатора функции $L_1(\lambda)$ выводим, что $\Phi(\lambda)$ имеет экспоненциальный тип, причем

$$h_\Phi(\theta) \leq h_{L_1}(\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \tag{18.28}$$

Итак, по следствию теоремы о категориях [72; гл. I, § 9] функция $\Delta^p_{L_1}(\lambda)$, определенная формулой (18.24) и входящая в тождество (18.25) или (18.26), является целой функцией экспоненциального типа. Оценим ее рост на мнимой оси. Благодаря (18.23) для произвольного малого $\varepsilon > 0$ можно подобрать номер N так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{|L_1'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^2} < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}. \tag{18.29}$$

Кроме того, из (18.19) следует (18.7), и поэтому можно считать, что

$$|\mu_n| \equiv |\operatorname{Re}\lambda_n| \ge h, \qquad n > N. \tag{18.30}$$

Если теперь $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| > h$, и $n > N$, то с учетом (18.19), (18.30) имеем

$$|i\mu - \lambda_n| \ge |\mu_n| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{h^2+\mu_n^2} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\nu_n^2+\mu_n^2} = \frac{|\lambda_n|}{\sqrt{2}}. \tag{18.31}$$

Привлекая (18.29), (18.31), при всех достаточно больших по модулю вещественных μ получаем оценку

$$\left| \sum_{\lambda_n \ne 0} \frac{1}{L_1'(\lambda_n)\,\lambda_n\,(i\mu-\lambda_n)} \right| \le \sum_{\lambda_n\ne 0,\, n\le N} \frac{1}{|L_1'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|\,|i\mu-\lambda_n|}$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{|L_1'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|\,|i\mu-\lambda_n|} < \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{|L_1'(\lambda_n)||\lambda_n|^2} < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\sum_{\lambda_n\ne 0} \frac{1}{L_1'(\lambda_n)\,\lambda_n\,(i\mu-\lambda_n)} \to 0, \qquad \mu \to \pm\infty. \tag{18.32}$$

Вернемся к определению (18.24). Принимая во внимание (18.22), (18.32), убеждаемся в том, что с некоторой константой $D > 0$ верна оценка

$$\left|\Delta^p_{L_1}(i\mu)\right| \le D\,|\mu|^p, \qquad \mu \in \mathbb{R}. \tag{18.33}$$

Но тогда согласно [72; гл. V, § 4, теорема 11] функция $\Delta^p_{L_1}(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост. Теперь оценим индикатор функции $\Delta^p_{L_1}(\lambda)$. Поскольку $\Delta^p_{L_1}(\lambda)$ есть целая функция вполне регулярного роста, то

$$h_{\Delta^p_{L_1} L_1}(\theta) = h_{\Delta^p_{L_1}}(\theta) + h_{L_1}(\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{18.34}$$

Напомним, что функция $L_1(\lambda)$ имеет неотрицательный индикатор $h_{L_1}(\theta)$. Отсюда с учетом (18.28) находим, что

$$\max\{0,\, h_{L_1}(\theta),\, h_\Phi(\theta)\} = h_{L_1}(\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{18.35}$$

Используя (18.34), (18.35), на основании (18.25) или (18.26) имеем

$$h_{\Delta^p_{L_1}}(\theta) + h_{L_1}(\theta) \le h_{L_1}(\theta)$$

и $h_{\Delta^p_{L_1}}(\theta) \le 0$ при всех $0 \le \theta \le 2\pi$. Отсюда следует, что $\Delta^p_{L_1}(\lambda)$ есть целая функция нулевого экспоненциального типа. Тогда из оценки (18.33) в силу принципа Фрагмена-Линделефа получаем, что $\Delta^p_{L_1}(\lambda)$ — полином.

Теперь (18.24) означает, что величина, обратная к целой функции $L_1(\lambda)$, раскладывается в ряд Крейна порядка p. Поскольку $L_1(\lambda)$ есть целая функция экспоненциального типа, и выполняется условие (18.19), то

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda_n} \right| = \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_n|}{|\lambda_n|^2} \leq h \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{|\lambda_n|^2} < +\infty.$$

Значит, $L_1(\lambda)$ — функция класса $\mathbb{A}$. По теореме М. Г. Крейна (см. теорему 16.1 и комментарий к ней) функция $L_1(\lambda)$ принадлежит классу Картрайт. Вследствие этого $L_1(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост, а ее индикаторная диаграмма D_{L_1} является отрезком мнимой оси. Этот отрезок содержит точку $\lambda = 0$, поскольку $h_{L_1}(\theta) \geq 0$. Соотношение (18.21) показывает, что $L(\lambda)$ также является функцией вполне регулярного роста.

Итак, $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа вполне регулярного роста, и ее индикаторная диаграмма есть отрезок мнимой оси, содержащий точку $\lambda = 0$. Докажем, что функция $\Delta_L^p(\lambda)$, определенная формулой (18.20), является полиномом, и обоснуем вид этого полинома. Рассмотрим три возможные ситуации расположения индикаторной диаграммы D_L.

Пусть точка $\lambda = 0$ не является концом отрезка, изображающего индикаторную диаграмму D_L. Поскольку $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост, и выполнено условие (18.19), то

$$|L(i\mu)| \to \infty, \qquad \mu \to \pm\infty. \tag{18.36}$$

В этом случае $\Delta_L^p(\lambda)$ есть полином $P(\lambda)$, поскольку проходят все рассуждения, примененные выше к $L_1(\lambda)$. Нужно лишь вместо (18.22) использовать (18.36). Обоснование вида полинома $P(\lambda)$ проводится так же, как и в конце пункта 18.2.

Пусть теперь точка $\lambda = 0$ является одним из концов индикаторной диаграммы D_L. Для определенности считаем, что $D_L = [-i\delta, 0]$, где $\delta > 0$. Этот случай сводится к предыдущему. Действительно, при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \delta)$ новая функция $L(\lambda)\, e^{-i\varepsilon\lambda}$ удовлетворяет условию вида (18.36) и, как показывает вывод соотношения (18.23), условию вида (ii) из теоремы 16.4. Следовательно, справедливо представление

$$\frac{e^{i\varepsilon\lambda}}{L(\lambda)} = P_\varepsilon(\lambda) + \frac{a_0}{\lambda} + \lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{e^{i\varepsilon\lambda_n}}{L'(\lambda_n)\, \lambda_n^p\, (\lambda - \lambda_n)}, \tag{18.37}$$

где $P_\varepsilon(\lambda) \equiv 0$ при $p = 0$, и $P_\varepsilon(\lambda)$ есть полином степени $\leq p - 1$, посчитанный по формуле (16.11) для $F_\varepsilon(\lambda) \equiv e^{i\varepsilon\lambda}/L(\lambda)$, при $p \in \mathbb{N}$. Заметим, что при фиксированном $\lambda \notin \Lambda(L)$ ряд в (18.37) сходится равномерно по ε. Это позволяет перейти в (18.37) почленно к пределу при $\varepsilon \to +0$ и установить нужное представление

$$\frac{1}{L(\lambda)} = P(\lambda) + \frac{a_0}{\lambda} + \lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\, \lambda_n^p\, (\lambda - \lambda_n)},$$

где $P(\lambda) \equiv 0$ при $p = 0$, и $P(\lambda)$ вычисляется по формуле (16.11) при $p \in \mathbb{N}$.

Пусть, наконец, индикаторная диаграмма функции $L(\lambda)$ состоит из единственной точки $\lambda = 0$, т.е. $L(\lambda)$ имеет нулевой экспоненциальный тип. Тогда соотношения (18.21), (18.22) могут выполняться одновременно лишь при $b = 0$. Но это означает, что $L(\lambda) = L_1(\lambda)$, а для величины $1/L_1(\lambda)$ нужное разложение получено выше.

Доказательство теоремы 16.4 завершено.

Внимательный анализ проведенного доказательства теоремы 16.4 показывает, что требование $h_L(\theta) \geq 0$ в условии (i) этой теоремы можно заменить на следующее: индикаторная диаграмма D_L есть отрезок[7], перпендикулярный границе полосы Π и содержащий точку $\lambda = 0$.

Отметим, что сочетание теорем 16.1 и 16.4 дает следующий результат, обобщающий предложение 2.1.

Теорема 18.1. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с индикатором $h_L(\theta) \geq 0$ и множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, расположенным в некоторой горизонтальной полосе. Пусть с положительными константами M, q выполнено условие*

$$|L'(\lambda_n)| \geq M\,|\lambda_n|^{-q}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{18.38}$$

Тогда функция $L(\lambda)$ принадлежит классу Картрайт, имеет вполне регулярный рост, и индикаторная диаграмма D_L есть отрезок мнимой оси, содержащий точку $\lambda = 0$.

Доказательство. Как отмечалось в пункте 18.3, целая функция экспоненциального типа с нулями, расположенными в горизонтальной полосе, принадлежит классу $\mathbb{A}$. В силу оценки (18.38) имеем

$$\sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{[q]+3}} \leq \frac{1}{M} \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{|\lambda_n|^{[q]-q+3}} \leq \frac{1}{M} \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{|\lambda_n|^2} < +\infty.$$

Следовательно, выполнено условие сходимости ряда

$$\sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{p+1}}$$

со значением $p = [q] + 2 \in \mathbb{N}$. По теореме 16.4 функция $1/L(\lambda)$ раскладывается в ряд Крейна указанного порядка p. Для завершения доказательства остается применить теорему 16.1.

[7]Сама точка $\lambda = 0$ считается отрезком (с совпавшими концами), перпендикулярным границе полосы Π, с тем, чтобы условие (i) по-прежнему действовало для случая целой функции нулевого экспоненциального типа.

§ 19. Соображения четности

В этом параграфе рассматривается вопрос о разложении величины, обратной к четной (нечетной) целой функции, в «сгруппированный» ряд типа Крейна. Пусть вначале $L(\lambda)$ является четной целой функцией с множеством простых нулей, записанным в виде последовательности $\Lambda(L) = (\mu_l)_{l\in\mathbb{N}}$. Тогда, очевидно, $0 \notin \Lambda(L)$, и множество $\Lambda(L)$ может быть записано в «симметричном» виде $\Lambda(L) = (\pm\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Производная $L'(\lambda)$ является нечетной функцией, что влечет выполнение соотношений

$$L'(-\lambda_n) \,=\, -\,L'(\lambda_n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что при любом $p \in \mathbb{Z}_+$ условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{2p+1}} \,<\, +\infty \tag{19.1}$$

выполнено тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\mu_l)|\,|\mu_l|^{2p+1}} \,<\, +\infty. \tag{19.2}$$

При выполнении любого из этих равносильных условий имеем тождество

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{2p-1}\,(\lambda^2-\lambda_n^2)} \,=\, \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\mu_l)\,\mu_l^{2p}\,(\lambda-\mu_l)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}\setminus\Lambda(L), \tag{19.3}$$

где ряды сходятся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$.

Опираясь на основную теорему 16.4 о разложении в ряд Крейна, дадим результат, учитывающий специфику четной функции.

Теорема 19.1. *Пусть $L(\lambda)$ — четная целая функция с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\pm\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, расположенным в некоторой полосе Π комплексной плоскости, и $p \in \mathbb{Z}_+$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если величина $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ допускает разложение*

$$\frac{1}{L(\lambda)} \,=\, P(\lambda) \,+\, 2\lambda^{2p}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{2p-1}\,(\lambda^2-\lambda_n^2)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}\setminus\Lambda(L), \tag{19.4}$$

где $P(\lambda)$ — некоторый полином, а ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C}\setminus\Lambda(L)$, то выполнены условия:

(i) *$L(\lambda)$ имеет экспоненциальный тип;*

(ii) *сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{2p+1}}$.

При этом, если $p = 0$, то $P(\lambda) \equiv 0$, а если $p \in \mathbb{N}$, то $P(\lambda)$ вычисляется по формуле

$$P(\lambda) \,=\, \sum_{m=0}^{p-1} \frac{F^{(2m)}(0)}{(2m)!}\,\lambda^{2m}. \tag{19.5}$$

2. *Если выполнены условия* (i), (ii), *то величина* $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ *раскладывается в «сгруппированный» ряд Крейна* (19.4), *сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области* $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$, *где полином* $P(\lambda) \equiv 0$ *для* $p = 0$, *и* $P(\lambda)$ *определен формулой* (19.5) *для* $p \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Пусть $L(\lambda)$ — четная целая функция с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\mu_l)_{l\in\mathbb{N}} = (\pm\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, расположенным в некоторой полосе Π. Пусть при некотором $p \in \mathbb{Z}_+$ справедливо разложение (19.4), сходящееся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$. Покажем, что $L(\lambda)$ имеет экспоненциальный тип, и выполняется (19.1). После этого конкретизируем вид полинома $P(\lambda)$ в (19.4).

Благодаря характеру сходимости ряда в (19.4) будет выполнено условие (19.1), а, значит, и условие (19.2). Но тогда можно гарантировать справедливость соотношения (19.3). Подставляя (19.3) в (19.4) и учитывая (19.2), видим, что обратная величина $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ раскладывается в ряд Крейна порядка $2p$, именно,

$$\frac{1}{L(\lambda)} = P(\lambda) + \lambda^{2p} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\mu_l)\,\mu_l^{2p}\,(\lambda - \mu_l)}. \tag{19.6}$$

Применяя теорему 16.4, получим, что $L(\lambda)$ есть целая функция экспоненциального типа. Итак, условия (i), (ii) теоремы 19.1 выполнены. При этом, как утверждается в теореме 16.4, полином $P(\lambda) \equiv 0$, если $p = 0$, и полином $P(\lambda)$ вычисляется по формуле (16.11), если $p \in \mathbb{N}$. В последнем случае с учетом четности функции $F(\lambda)$ и условия $0 \notin \Lambda(L)$ формула (16.11) запишется в виде (19.5). Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть $L(\lambda)$ является четной целой функцией экспоненциального типа с множеством простых нулей

$$\Lambda(L) = (\mu_l)_{l\in\mathbb{N}} = (\pm\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Pi,$$

где Π — некоторая полоса. Пусть при некотором $p \in \mathbb{Z}_+$ выполнено условие (19.1). Покажем, что справедливо разложение (19.4) с полиномом $P(\lambda)$ предписанного вида.

В силу четности функции $L(\lambda)$ имеем $h_L(\theta) \geq 0$ при всех $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Значит, выполнено условие (i) теоремы 16.4. Из (19.1) получаем (19.2). Это означает, что условие (ii) теоремы 16.4 также выполнено (с заменой p на $2p$). По теореме 16.4 функция $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ раскладывается в ряд Крейна (19.6). Подставляя (19.3) в (19.6), приходим к (19.4). Остальное ясно. Теорема доказана.

Отметим, что в условиях теоремы 19.1 справедливы суммационные соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{2m+1}} = -\frac{F^{(2m)}(0)}{2\,(2m)!}, \qquad m = p,\ p+1,\ \dots\ . \tag{19.7}$$

Действительно, в силу (19.6) и условия $0 \notin \Lambda(L)$ действует первая из формул (17.15), в которой нужно p заменить на $2p$, т. е.

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\mu_l)\,\mu_l^{s}} = -\frac{F^{(s-1)}(0)}{(s-1)!}, \qquad s = 2p+1,\ 2p+2,\ \dots\ .$$

Но свойство нечетности производной $L'(\lambda)$ дает

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\mu_l)\,\mu_l^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{L'(-\lambda_n)\,(-\lambda_n)^s} + \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}+1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^s}.$$

Последняя сумма обращается в нуль для $s = 2m+2$ при $m = p,\ p+1,\ \dots$, и равна

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{2m+1}}, \qquad s = 2m+1, \quad m = p,\ p+1,\ \dots\ .$$

Отсюда получаем (19.7).

Пусть теперь $L(\lambda)$ является нечетной целой функцией с множеством простых нулей $\Lambda(L) = (\mu_l)_{l\in\mathbb{N}}$, упорядоченным по возрастанию модулей. Тогда, очевидно, имеем $\mu_1 = 0 \in \Lambda(L)$, и множество $\Lambda(L)\setminus\{0\}$ может быть записано в «симметричном» виде $\Lambda(L)\setminus\{0\} = (\pm\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Производная $L'(\lambda)$ является четной функцией, что влечет выполнение соотношений

$$L'(-\lambda_n) = L'(\lambda_n), \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что при любом $p\in\mathbb{Z}_+$ условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{2p+2}} < +\infty$$

выполнено тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{|L'(\mu_l)|\,|\mu_l|^{2p+2}} < +\infty.$$

При выполнении любого из этих равносильных условий имеем тождество

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{2p}\,(\lambda^2-\lambda_n^2)} = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{L'(\mu_l)\,\mu_l^{2p+1}\,(\lambda-\mu_l)}, \qquad \lambda\notin\Lambda(L)\setminus\{0\},$$

где ряды сходятся абсолютно и равномерно на компактах из $\mathbb{C}$, не содержащих точек $\pm\lambda_n$.

Повторяя почти дословно доказательство теоремы 19.1 либо сразу применяя эту теорему к четной функции $L(\lambda)/\lambda$, получаем следующий результат, учитывающий специфику нечетной функции.

Теорема 19.2. *Пусть $L(\lambda)$ — нечетная целая функция с множеством простых нулей $\Lambda(L) = \{0\}\cup(\pm\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, расположенным в некоторой полосе Π комплексной плоскости, и $p\in\mathbb{Z}_+$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если величина $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ допускает разложение*

$$\frac{1}{L(\lambda)} = P(\lambda) + \frac{1}{L'(0)\lambda} + 2\lambda^{2p+1}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{2p}\,(\lambda^2-\lambda_n^2)}, \quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\Lambda(L), \quad (19.8)$$

где $P(\lambda)$ — некоторый полином, а ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$, то выполнены условия:

(i) $L(\lambda)$ *имеет экспоненциальный тип*;

(ii) *сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{2p+2}}$.

При этом, если $p = 0$, то $P(\lambda) \equiv 0$, а если $p \in \mathbb{N}$, то $P(\lambda)$ вычисляется по формуле

$$P(\lambda) = \sum_{m=1}^{p} \frac{(\lambda F(\lambda))^{(2m)}(0)}{(2m)!}\, \lambda^{2m-1}. \tag{19.9}$$

2. *Если выполнены условия* (i), (ii)*, то величина $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ раскладывается в «сгруппированный» ряд Крейна* (19.8)*, сходящийся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$, где полином $P(\lambda) \equiv 0$ для $p = 0$, и $P(\lambda)$ определен формулой* (19.9) *для $p \in \mathbb{N}$.*

Отметим, что в условиях теоремы 19.2 справедливы суммационные соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{2m}} = -\frac{(\lambda F(\lambda))^{(2m)}(0)}{2\,(2m)!}, \qquad m = p+1,\ p+2,\ \dots\,. \tag{19.10}$$

Действительно, поскольку имеет место разложение

$$\frac{1}{L(\lambda)} = P(\lambda) + \frac{1}{L'(0)\lambda} + \lambda^{2p+1} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{L'(\mu_l)\,\mu_l^{2p+1}\,(\lambda - \mu_l)},$$

и $0 \in \Lambda(L)$, то действует вторая из формул (17.15), в которой нужно p заменить на $2p+1$, т. е.

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{L'(\mu_l)\,\mu_l^{s}} = -\frac{(\lambda F(\lambda))^{(s)}(0)}{s!}, \qquad s = 2p+2,\ 2p+3,\ \dots\,.$$

Но свойство четности производной $L'(\lambda)$ дает

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{L'(\mu_l)\,\mu_l^{s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{L'(-\lambda_n)\,(-\lambda_n)^s} + \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^s + 1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^s}.$$

Последняя сумма обращается в нуль для $s = 2m+1$, $m = p+1$, $p+2$, $\dots$, и равна

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^{2m}}, \qquad s = 2m, \quad m = p+1,\ p+2,\ \dots\,.$$

Отсюда получаем (19.10).

Дадим простую иллюстрацию к теоремам 19.1 и 19.2.

Пример 19.1. Рассмотрим четную целую функцию экспоненциального типа

$$L(\lambda) \,=\, \cos\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Все ее нули являются простыми вещественными и записываются в виде

$$\Lambda(L) = (\pm\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}: \quad \lambda_n = \pi n - \pi/2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку

$$L'(\lambda_n) \,=\, -\,\sin(\pi n - \pi/2) \,=\, (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

то наименьшее значение $p \in \mathbb{Z}_+$, для которого сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{2p+1}},$$

равно единице. Применяя вторую часть теоремы 19.1, разложим функцию

$$F(\lambda) \,=\, \frac{1}{L(\lambda)} \,=\, \sec\lambda$$

в ряд (19.4) с $p = 1$ и полиномом $P(\lambda) \equiv F(0) = 1$, найденным по формуле (19.5). Имеем

$$\frac{1}{\cos\lambda} \,=\, 1 \,+\, 2\,\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\pi n - \pi/2)\;(\lambda^2 - (\pi n - \pi/2)^2)}, \tag{19.11}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$.

Учтем еще, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \,=\, -\,\frac{\pi}{4},$$

$$2\,\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\pi n - \pi/2)\;(\lambda^2 - (\pi n - \pi/2)^2)} \,=\, \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \,+\, \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n-1)}{\lambda^2 - \left(\frac{\pi\,(2n-1)}{2}\right)^2}$$

$$=\, -1 \,+\, \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n-1)}{\lambda^2 - \left(\frac{\pi\,(2n-1)}{2}\right)^2}.$$

Тогда из (19.11) получим известное разложение $\sec\lambda$ на простые дроби:

$$\frac{1}{\cos\lambda} \,=\, \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n-1)}{\lambda^2 - \left(\frac{\pi\,(2n-1)}{2}\right)^2}, \tag{19.12}$$

где ряд, однако, сходится на множестве $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$ поточечно, но не абсолютно и равномерно на компактах из $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$.

Применив (19.7) к функции $L(\lambda) \,=\, \cos\lambda$, запишем соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\pi n - \pi/2)^{2m+1}} \,=\, -\,\frac{\sec^{(2m)}(0)}{2\,(2m)!}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

равносильные формулам

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{2m+1}} = (-1)^m \frac{\pi^{2m+1}}{2^{2m+2}\,(2m)!}\,E_{2m}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{19.13}$$

с числами Эйлера

$$E_2 = -1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = -61, \quad \ldots$$

(см., например, [83; гл. IV, § 4]).

Пример 19.2. Как и в примере 17.1 рассмотрим нечетную целую функцию экспоненциального типа

$$L(\lambda) = \sin\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Все ее нули являются простыми вещественными и записываются в виде

$$\Lambda(L) = \{0\} \cup (\pm\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}: \quad \lambda_n = \pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь

$$L'(0) = 1, \qquad L'(\lambda_n) = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и наименьшее значение $p \in \mathbb{Z}_+$, для которого сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{2p+2}},$$

равно нулю. По теореме 19.2 для $\operatorname{cosec}\lambda$ справедливо сходящееся абсолютно и равномерно на компактах из $\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$ разложение (19.8) с полиномом $P(\lambda) \equiv 0$, т. е.

$$\frac{1}{\sin\lambda} = \frac{1}{\lambda} + 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - \pi^2 n^2},$$

что совпадает с (17.7).

Применив (19.10) к функции $L(\lambda) = \sin\lambda$, запишем соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\pi n)^{2m}} = -\frac{(\lambda\operatorname{cosec}\lambda)^{(2m)}(0)}{2\,(2m)!}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

равносильные формулам

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{(2^{2m-1}-1)\,\pi^{2m}}{(2m)!}\,B_{2m}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{19.14}$$

с числами Бернулли

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad \ldots$$

(см., например, [102; гл. V, раздел 5.1.2]). Приведем для ориентировки несколько первых значений сумм

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^6} = \frac{31\pi^6}{30240}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^8} = \frac{127\pi^8}{1209600},$$

заложенных в (19.14).

§ 20. Специальные классы целых функций

Одно из самых естественных и наглядных приложений результатов этой главы заключается в существенном упрощении известных процедур разложения конкретных функций на простые дроби, позволяющем фактически сразу выписывать нужные тождества (см. примеры 19.1 и 19.2). Полезно также иметь представление о сопутствующих суммационных соотношениях, конкретизирующих общие формулы (17.15), (19.7), (19.10). Упомянутые соотношения часто оказываются весьма любопытными. Приведем в подтверждение еще несколько элементарных примеров на применение основной теоремы 16.4, не охватываемых теоремами из § 19. Затем рассмотрим вопрос о разложении в ряд Крейна бесконечных произведений специального вида и величин, обратных к функциям Бесселя.

20.1. Элементарные примеры.

Пример 20.1. Рассмотрим целую функцию экспоненциального типа

$$L(\lambda) = e^{\lambda} - 1, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ее индикаторная диаграмма D_L есть отрезок $[0, 1]$, а индикатор неотрицателен и задается формулой

$$h_L(\theta) = \frac{1}{2}\left(\,|\cos\theta| + \cos\theta\,\right), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Функция $L(\lambda)$ имеет бесконечно много нулей, и все они лежат на мнимой оси. Если записать их в порядке неубывания модулей, то получится последовательность

$$\Lambda(L) = (\mu_l)_{l\in\mathbb{N}}: \quad \mu_l = (-1)^l\, 2\pi i\, [l/2], \quad l \in \mathbb{N}.$$

Более наглядная запись:

$$\Lambda(L) = \{0\} \cup (\pm\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}: \quad \lambda_n = 2\pi n i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Все нули простые, так как

$$L'(\mu_l) = 1, \qquad l \in \mathbb{N}.$$

Наименьшее значение $p \in \mathbb{Z}_+$, для которого сходится ряд

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{|L'(\mu_l)|\,|\mu_l|^{p+1}} = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{(2\pi\,[l/2])^{p+1}},$$

равно единице. Согласно следствию 4 из теоремы 16.4 справедливо сходящееся абсолютно и равномерно на компактах области $\mathbb{C} \setminus \Lambda(L)$ разложение

$$\frac{1}{e^\lambda - 1} = \left(\frac{\lambda}{e^\lambda - 1}\right)'(0) + \frac{1}{\lambda} + \lambda \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{\mu_l\,(\lambda - \mu_l)}.$$

Несложно проверить, что

$$\left(\frac{\lambda}{e^\lambda - 1}\right)'(0) = -\frac{1}{2},$$

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{\mu_l\,(\lambda - \mu_l)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n\,(\lambda - \lambda_n)} - \frac{1}{\lambda_n\,(\lambda + \lambda_n)}\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 - \lambda_n^2}.$$

Поэтому итоговое разложение имеет вид:

$$\frac{1}{e^\lambda - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda} + 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 + 4\pi^2 n^2}. \tag{20.1}$$

Применив к $L(\lambda) = e^\lambda - 1$ вторую формулу в (17.15), запишем соотношения

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{\mu_l^s} = -\frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{e^\lambda - 1}\right)^{(s)}(0), \qquad s = 2, 3, \ldots,$$

содержательные лишь при четных s. Для таких s имеем

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{\mu_l^{2m}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n i)^{2m}} = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}\,\pi^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}.$$

Следовательно,

$$\frac{(-1)^m}{2^{2m-1}\,\pi^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = -\frac{1}{(2m)!} \left(\frac{\lambda}{e^\lambda - 1}\right)^{(2m)}(0), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Окончательный вариант этих формул записывается через числа Бернулли и выглядит так (см. [83; гл. IV, § 4], [102; гл. V, раздел 5.1.2]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m-1}\,\pi^{2m}}{(2m)!} B_{2m}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{20.2}$$

Полезно привести несколько первых значений сумм (20.2):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Отметим, что разложения (17.7), (19.12), (20.1), а также суммационные соотношения (19.13), (19.14), (20.2) были известны еще Л. Эйлеру [135].

Заменяя в (20.1) переменную λ на $-\lambda$, получим разложение

$$\frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda} + 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 + 4\pi^2 n^2},$$

которое может быть выведено также непосредственным применением следствия 4 теоремы 16.4 к целой функции $L(\lambda) = e^{-\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)$.

Пример 20.2. Зафиксируем число $0 < a < 1$ и рассмотрим целую функцию экспоненциального типа[8]

$$L(\lambda) = e^{-a\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

с тем же нулевым множеством, что и в примере 20.1. Ее индикаторная диаграмма D_L есть отрезок $[-a,\, 1-a]$, а индикатор неотрицателен и задается формулой

$$h_L(\theta) = \frac{1}{2}\left(|\cos\theta| + (1-2a)\cos\theta\right), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Сохраняя обозначения для нулей и схему рассуждений из предыдущего примера, после элементарных преобразований приходим к разложению

$$\frac{e^{a\lambda}}{e^{\lambda}-1} = \left(\frac{\lambda e^{a\lambda}}{e^{\lambda}-1}\right)'(0) + \frac{1}{\lambda} + \lambda \sum_{l=2}^{\infty} \frac{e^{a\mu_l}}{\mu_l(\lambda-\mu_l)}.$$

Поскольку

$$\left(\frac{\lambda e^{a\lambda}}{e^{\lambda}-1}\right)'(0) = a - \frac{1}{2},$$

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{e^{a\mu_l}}{\mu_l(\lambda-\mu_l)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{a\lambda_n}}{\lambda_n(\lambda-\lambda_n)} - \frac{e^{-a\lambda_n}}{\lambda_n(\lambda+\lambda_n)}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda\sin(2\pi a n) + 2\pi n\cos(2\pi a n)}{\pi n(\lambda^2+4\pi^2 n^2)},$$

то полученное разложение перепишется в виде

$$\frac{e^{a\lambda}}{e^{\lambda}-1} = a - \frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda} + 2\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi a n)}{\lambda^2+4\pi^2 n^2} + \lambda^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi a n)}{\pi n(\lambda^2+4\pi^2 n^2)}.$$

Дальнейшие упрощения основаны на том, что

$$\lambda^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi a n)}{\pi n(\lambda^2+4\pi^2 n^2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi a n)}{\pi n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi n\sin(2\pi a n)}{\lambda^2+4\pi^2 n^2},$$

[8] Случаи $a = 0$ и $a = 1$ разобраны в примере 20.1; для значений параметра $a \in \mathbb{C}\setminus[0,1]$ обратная величина функции $L(\lambda)$ вообще не раскладывается в ряд Крейна ввиду нарушения условия $0 \in D_L$.

а известное соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \qquad 0 < x < 2\pi,$$

при $x = 2\pi a$ дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi a n)}{\pi n} = \frac{1}{2} - a.$$

В результате имеем (см. [114; гл. 7, § 7.4, пример 2]; см. также [71])

$$\frac{e^{a\lambda}}{e^{\lambda} - 1} = \frac{1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda \cos(2\pi a n) - 4\pi n \sin(2\pi a n)}{\lambda^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

Для функции $L(\lambda) = e^{-a\lambda}\big(e^{\lambda} - 1\big)$ с параметром $0 < a < 1$ суммационные соотношения (17.15) принимают вид

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{e^{a\mu_l}}{\mu_l^s} = -\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda\, e^{a\lambda}}{e^{\lambda} - 1}\right)^{(s)}(0) = -\frac{1}{s!}\, B_s(a), \qquad s = 2, 3, \ldots,$$

где фигурируют значения полиномов Бернулли $B_s(a)$. Интересна эквивалентная запись в форме разложения полиномов Бернулли в комплексный ряд Фурье:

$$B_s(a) = -\frac{s!}{(2\pi i)^s} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{2\pi a n i}}{n^s}, \qquad 0 < a < 1, \qquad s = 2, 3, \ldots.$$

Отсюда получаем формулы (см. [102; гл. V, раздел 5.4.2]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi a n)}{n^{2m}} = \frac{(-1)^{m-1}\,(2\pi)^{2m}}{2\,(2m)!}\, B_{2m}(a), \qquad 0 < a < 1, \qquad m \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi a n)}{n^{2m+1}} = \frac{(-1)^{m-1}\,(2\pi)^{2m+1}}{2\,(2m+1)!}\, B_{2m+1}(a), \qquad 0 < a < 1, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Выбор функции $L(\lambda)$ в примере 20.2 во многом обусловлен тем, что ее обратная величина $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ является экспоненциальной производящей функцией полиномов Бернулли. Точно так же, рассматривая целую функцию

$$L(\lambda) = \frac{1}{2}\, e^{-a\lambda}\big(e^{\lambda} + 1\big), \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

с параметром $0 \le a \le 1$, получаем, что

$$F(\lambda) \equiv \frac{1}{L(\lambda)} = \frac{2\, e^{a\lambda}}{e^{\lambda} + 1} = \sum_{s=0}^{\infty} E_s(a)\, \frac{\lambda^s}{s!}, \qquad |\lambda| < \pi.$$

Здесь $E_s(a)$ — полиномы Эйлера, а суммационная формула (17.15) дает после естественных преобразований разложения в ряд Фурье (см. [102; гл. V, раздел 5.4.6]):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi a(2n+1))}{(2n+1)^{2m+1}} = \frac{(-1)^m \pi^{2m+1}}{4\,(2m)!} E_{2m}(a), \qquad 0 \le a \le 1, \qquad m \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi a(2n+1))}{(2n+1)^{2m}} = \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{4\,(2m-1)!} E_{2m-1}(a), \qquad 0 \le a \le 1, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Укажем без особых подробностей и на такой пример:

$$L(\lambda) = \frac{1}{a-1}\left(e^{(a-1)\lambda} - a\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad a \in \mathbb{C} \setminus \{0,\, 1\}.$$

Как известно [43; гл. 3],

$$F(\lambda) \equiv \frac{1}{L(\lambda)} = \frac{a-1}{e^{(a-1)\lambda} - a} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(a)\,\frac{\lambda^m}{m!}$$

есть производящая функция полиномов $A_m(a)$, также связанных с именем Эйлера и задаваемых по формуле

$$A_m(a) = \sum_{k=0}^{m-1} \left\langle {m \atop k} \right\rangle a^k, \qquad m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\,.$$

(Различные аспекты теории фигурирующих здесь специальных эйлеровых чисел первого рода $\left\langle {m \atop k} \right\rangle$ изложены в [43; гл. 3], [42; гл. 6].) Несложно проверить, что после переобозначения

$$a = e^{\pi b\, i}, \qquad b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},$$

суммационные соотношения (17.15) конкретизируются в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(b+n)^{m+1}} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi b}\right)^{m+1} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m-1} \left\langle {m \atop k} \right\rangle \cos\left((m-2k-1)\,\pi b\right), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Выражения для подобных бесконечных сумм обычно записывают через производные котангенса (см., например, [102; гл. V, раздел 5.1.3]):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(b+n)^{m+1}} = \frac{\pi\,(-1)^m}{m!}\,\frac{d^m}{db^m}\,\operatorname{ctg} \pi b.$$

Сравнение двух последних формул приводит к соотношениям

$$(\operatorname{ctg} z)^{(m)} = \frac{(-1)^m}{(\sin z)^{m+1}} \sum_{k=0}^{m-1} \left\langle {m \atop k} \right\rangle \cos\left((m-2k-1)\,z\right), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Такую форму представления производных $(\operatorname{ctg} z)^{(m)}$ в литературе отыскать не удалось. Впрочем, известны другие варианты записи, использующие специальные тангенциальные числа высоких порядков (см. [149]).

В каждом из рассмотренных выше примеров нулевое множество $\Lambda(L)$ располагалось на некоторой прямой. Завершим изложение этого пункта разбором одной конкретной ситуации, когда $\Lambda(L)$ лежит на двух прямых.

Пример 20.3. Зафиксируем число $a > 1$ и рассмотрим целую функцию экспоненциального типа

$$L(\lambda) \,=\, \sin\lambda - a, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

с индикаторной диаграммой $D_L = [-i,\, i]$ и индикатором

$$h_L(\theta) \,=\, |\sin\theta\,|, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Нули функции $L(\lambda)$ располагаются комплексно сопряженными парами на двух параллельных прямых

$$\operatorname{Im}\lambda \,=\, \pm\ln(a + \sqrt{a^2-1})$$

и могут быть записаны в виде последовательности $\Lambda(L) = (\mu_l)_{l\in\mathbb{N}}$, где

$$\mu_l \,=\, \frac{\pi}{2} \,+\, 2\pi\,(-1)^{[(l-1)/2]}\left[\frac{l-1}{2}\right] \,+\, i\,(-1)^l\ln(a+\sqrt{a^2-1}), \quad l\in\mathbb{N}.$$

Эквивалентная запись:

$$\Lambda(L) \,=\, (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \cup (\,\overline{\lambda}_n\,)_{n\in\mathbb{N}},$$

где

$$\lambda_n \,=\, \frac{\pi}{2} \,+\, 2\pi\,(-1)^{n-1}\,(n-1) \,+\, i\,\ln(a+\sqrt{a^2-1}), \quad n\in\mathbb{N}.$$

Далее, при любом $l\in\mathbb{N}$ имеем

$$L'(\mu_l) \,=\, \cos\mu_l \,=\, \cos\Big(\frac{\pi}{2} \,+\, i\,(-1)^l\ln(a+\sqrt{a^2-1})\Big)$$

$$=\, -\,\sin\Big(i\,(-1)^l\ln(a+\sqrt{a^2-1})\Big) \,=\, -\,i\operatorname{sh}\Big((-1)^l\ln(a+\sqrt{a^2-1})\Big)$$

$$=\, -\frac{i}{2}\Big(a+(-1)^l\sqrt{a^2-1}-(a+(-1)^{l+1}\sqrt{a^2-1})\Big) \,=\, i\,(-1)^{l+1}\sqrt{a^2-1}\neq 0,$$

и все нули функции $L(\lambda)$ являются простыми. Как и в предыдущем примере, значение $p=1$ есть наименьшее из тех $p\in\mathbb{Z}_+$, для которых сходится ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty}\,\frac{1}{|L'(\mu_l)|\,|\mu_l|^{p+1}} \,=\, \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\,\sum_{l=1}^{\infty}\,\frac{1}{|\mu_l|^{p+1}}.$$

Привлекая следствие 2 из теоремы 16.4 и учитывая, что $L(0) \,=\, -\,a$, запишем

$$\frac{1}{\sin\lambda - a} \,=\, -\,\frac{1}{a} \,+\, \frac{i\lambda}{\sqrt{a^2-1}}\,\sum_{l=1}^{\infty}\,\frac{(-1)^l}{\mu_l\,(\lambda-\mu_l)}, \qquad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\Lambda(L).$$

Первая из формул (17.15), примененная к $L(\lambda) = \sin\lambda - a$, дает суммационные соотношения

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\mu_l^m} = \frac{i}{\sqrt{a^2-1}}\,\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{1}{\sin\lambda - a}\right)^{(m-1)}(0), \qquad m = 2, 3, \dots, \qquad a > 1.$$

В частности,

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{\mu_l^2} = \frac{i}{a^2\sqrt{a^2-1}}, \qquad a > 1.$$

20.2. Специальные бесконечные произведения. Продолжая иллюстрацию полученных в этой главе общих утверждений, рассмотрим вопрос о разложении на простые дроби функций из некоторых специальных классов. Приведём два необходимых в дальнейшем известных факта. Первый из них относится к каноническим произведениям вида (1.4) и получен Б. Я. Левиным в 1949 году (см., например, [169]).

Теорема 20.1. *Пусть* Λ *— последовательность вида* (1.1), *удовлетворяющая с некоторой константой* $d > 0$ *условию*

$$|\lambda_n - n| \le d, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{20.3}$$

и условию отделимости

$$\inf_{n \ne j} |\lambda_n - \lambda_j| > 0. \tag{20.4}$$

Тогда с некоторой константой $B > 0$ *для производной канонического произведения*

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{20.5}$$

справедлива оценка

$$|L'(\lambda_n)| \ge B\,|\lambda_n|^{-4d}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность из теоремы 20.1. Тогда Λ имеет плотность

$$\Delta(\Lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n} = 1,$$

а требование (20.4) отделимости точек этой последовательности влечет регулярность множества нулей $\Lambda(L) = (\pm\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ целой функции экспоненциального типа (20.5). Хорошо известно, что $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост, а индикаторная диаграмма $D(L)$ изображается отрезком $[-\pi i, \pi i]$ мнимой оси. Кроме того, условие

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|L'(\lambda_n)|\,\lambda_n^{2p+1}} < +\infty$$

выполняется с $p = [2d] + 1$. Поэтому из теоремы 19.1 вытекает такое утверждение.

Предложение 20.1. *Пусть Λ — последовательность вида* (1.1), *удовлетворяющая условиям* (20.3), (20.4). *Тогда обратная величина $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ канонического произведения* (20.5) *допускает представление* (19.4) *с $p = [2d] + 1$ и многоленом $P(\lambda)$, вычисляемым по формуле* (19.5). *Если, в частности, $d < 1/2$, то это представление можно записать в виде*

$$\frac{1}{L(\lambda)} = 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n L'(\lambda_n)(\lambda^2 - \lambda_n^2)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \pm\Lambda.$$

Простейшему случаю $\lambda_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, отвечает каноническое произведение

$$\frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Согласно предложению 20.1 справедливо разложение

$$\frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda} = 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \pm\mathbb{N},$$

согласующееся с (17.7).

Укажем еще, что к функции $L(\lambda)$ из предложения 20.1 применимы формулы (19.7), в которых нужно взять $p = [2d] + 1$.

Следующий результат относится к целым функциям нулевого экспоненциального типа и принадлежит А. М. Седлецкому [104; лемма 6].

Теорема 20.2. *Пусть корни канонического произведения*

$$L(\lambda) = \lambda \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{20.6}$$

удовлетворяют условию

$$\lambda_n = n^s + O(1), \qquad s > 1, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{20.7}$$

Тогда выполняется асимптотическое равенство

$$L'(\lambda_n) = \exp\left(\pi n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{s} + O(\ln n)\right), \qquad n \to \infty. \tag{20.8}$$

В частности, заключение теоремы 20.2 верно для бесконечного произведения вида

$$L_s(\lambda) = \lambda \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n^s}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad s > 1. \tag{20.9}$$

Например, при $s = 2$ в подтверждение теоремы 20.2 для функции

$$L_2(\lambda) = \lambda \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n^2}\right) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \sin \pi\sqrt{\lambda}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

имеем (ср. с формулой (20.8)):

$$L_2'(n^2) = \frac{(-1)^n}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Что же касается произвольной функции (20.6) с корнями (20.7), то при $s > 2$ в силу (20.8) найдутся такие положительные числа a, γ, для которых выполнено соотношение

$$|L'(\lambda_n)| = \exp(a\,n + O(\ln n)) \ge e^{a\,n}\, n^{-\gamma}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} < +\infty,$$

и теорема 16.6 применима к $L(\lambda)$ с $p = 0$. Если же $s \in (1, 2)$, то обозначив для краткости

$$-a \equiv \pi \operatorname{ctg} \frac{\pi}{s} < 0,$$

запишем оценку

$$|L'(\lambda_n)| = e^{-\,a\,n + O(\ln n)} \le e^{-\,b\,n}, \qquad n \ge n_o(a),$$

с некоторой константой $b > 0$. Эта оценка показывает, что при $s \in (1, 2)$ условие (ii) теоремы 16.4 для функции (20.6) не выполняется ни при каком $p \in \mathbb{Z}_+$. Подведем итог.

Предложение 20.2. *Пусть $L(\lambda)$ — каноническое произведение* (20.6), *построенное по последовательности точек λ_n вида* (20.7). *Тогда при $s \ge 2$ для величины $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ справедливо разложение в ряд*

$$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,(\lambda - \lambda_n)},$$

сходящийся абсолютно и равномерно на любом компакте, не содержащем нулей функции $L(\lambda)$. При $1 < s < 2$ обратная величина $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ функции (20.6) *ни при каком $p \in \mathbb{Z}_+$ не может быть разложена в ряд Крейна фиксированного порядка p.*

Напомним, что простейшему случаю $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, отвечает каноническое произведение

$$L_2(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \sin \pi\sqrt{\lambda} = \lambda \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n^2}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Согласно предложению 20.2 справедливо разложение

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\sin \pi\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda - n^2},$$

согласующееся с (17.7).

Уделим особое внимание бесконечному произведению (20.9). Изучению этой функции посвящена работа Г. Харди [155]. Пусть параметр s принимает натуральные значения ≥ 2. Справедливо представление [102; глава VI, раздел 6.2]

$$L_s(\lambda) \equiv \lambda \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n^s}\right) = -\prod_{k=0}^{s-1} \frac{1}{\Gamma\left(-e^{\frac{2\pi i}{s}k} \sqrt[s]{\lambda}\right)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad s \in \mathbb{N},\ s \geq 2, \tag{20.10}$$

связывающее функцию (20.9) с гамма-функцией Эйлера. При натуральных четных s функция (20.9) раскладывается в произведение конечного числа элементарных функций. Действительно, используя в (20.10) формулу симметрии для гамма-функции, запишем

$$L_{2r}(\lambda) = -\prod_{k=0}^{2r-1} \frac{1}{\Gamma\left(-e^{\frac{\pi i}{r}k}\ \sqrt[2r]{\lambda}\right)} = -\prod_{k=0}^{r-1} \frac{1}{\Gamma\left(-e^{\frac{\pi i}{r}k}\ \sqrt[2r]{\lambda}\right)} \prod_{k=r}^{2r-1} \frac{1}{\Gamma\left(-e^{\frac{\pi i}{r}k}\ \sqrt[2r]{\lambda}\right)}$$

$$= -\prod_{k=0}^{r-1} \frac{1}{\Gamma\left(-e^{\frac{\pi i}{r}k}\ \sqrt[2r]{\lambda}\right)\ \Gamma\left(e^{\frac{\pi i}{r}k}\ \sqrt[2r]{\lambda}\right)} = -\prod_{k=0}^{r-1} \frac{-e^{\frac{\pi i}{r}k}\ \sqrt[2r]{\lambda}}{\pi\ \operatorname{cosec}\left(\pi\, e^{\frac{\pi i}{r}k}\ \sqrt[2r]{\lambda}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^{r+1}\sqrt{\lambda}}{\pi^r}\quad e^{\frac{\pi i}{r}\sum\limits_{k=0}^{r-1} k} \quad \prod_{k=0}^{r-1} \frac{1}{\operatorname{cosec}\left(\pi\, e^{\frac{\pi i}{r}k}\ \sqrt[2r]{\lambda}\right)} = \frac{i^{3r+1}\sqrt{\lambda}}{\pi^r} \prod_{k=0}^{r-1} \sin\left(\pi\, e^{\frac{\pi i}{r}k}\ \sqrt[2r]{\lambda}\right).$$

Таким образом,

$$L_{2r}(\lambda) = \frac{i^{3r+1}\sqrt{\lambda}}{\pi^r} \prod_{k=0}^{r-1} \sin\left(\pi\, e^{\frac{\pi i}{r}k}\ \sqrt[2r]{\lambda}\right), \qquad r \in \mathbb{N}. \tag{20.11}$$

Приведем для полноты картины несколько частных случаев формулы (20.11), выражающей $L_{2r}(\lambda)$ через элементарные функции:

$$L_4(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2}\ \sin\left(\pi\sqrt[4]{\lambda}\right)\ \operatorname{sh}\left(\pi\sqrt[4]{\lambda}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C};$$

$$L_6(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^3}\ \sin\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,\pi\sqrt[6]{\lambda}\right)\ \sin\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\,\pi\sqrt[6]{\lambda}\right)\ \sin\left(\pi\sqrt[6]{\lambda}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C};$$

$$L_8(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^4}\ \sin\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\pi\sqrt[8]{\lambda}\right)\ \sin\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\,\pi\sqrt[8]{\lambda}\right)\ \sin\left(\pi\sqrt[8]{\lambda}\right)\ \operatorname{sh}\left(\pi\sqrt[8]{\lambda}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Эквивалентную запись для $L_4(\lambda)$ можно обнаружить в задачнике [29; № 6.54].

Пусть $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$. Для функции (20.10) с заданным s действует вторая из формул (17.15), т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_s'(n^s)\, n^{ms}} = -\frac{1}{m!}\ \left(\frac{1}{G_s(\lambda)}\right)^{(m)}(0), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{20.12}$$

где обозначено
$$G_s(\lambda) \;\equiv\; \frac{L_s(\lambda)}{\lambda} \;=\; \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n^s}\right), \qquad \lambda\in\mathbb{C}.$$
В частности, при $m=1$ имеем
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_s'(n^s)\,n^s} \;=\; -\,\left(\frac{1}{G_s(\lambda)}\right)'(0).$$
Вычислив логарифмическую производную функции $G_s(\lambda)$, найдем, что
$$\frac{G_s'(\lambda)}{G_s(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda-n^s}.$$
Отсюда
$$-\,\left(\frac{1}{G_s(\lambda)}\right)'(0) \;=\; \frac{G_s'(0)}{\bigl(G_s(0)\bigr)^2} \;=\; \frac{G_s'(0)}{G_s(0)} \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},$$
и поэтому
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_s'(n^s)\,n^s} \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}, \qquad s\in\mathbb{N}, \quad s\ge 2. \tag{20.13}$$
В случае $s=2$ из (20.13) извлекаем легко проверяемое (см. (19.14) и (20.2)) равенство
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \left(=\frac{\pi^2}{12}\right).$$
При других значениях параметра s соотношения (20.13) уже не столь просты. Конечно, формула (20.13) справедлива при любом $s>1$ (не обязательно натуральном), но для ее эффективного применения необходимо уметь вычислять точные значения производной $L_s'(n^s)$. Мы же в общей ситуации располагаем лишь асимптотикой (20.8).

Для того чтобы конкретизировать суммационные соотношения (20.13), выведем следующую формулу:
$$L_s'(n^s) \;=\; \frac{(-1)^n\,n!}{s\,n^{s-1}} \;\prod_{k=1}^{s-1}\frac{1}{\Gamma\left(-\,e^{\frac{2\pi i}{s}k}\,n\right)}, \qquad n\in\mathbb{N}, \qquad s\in\mathbb{N},\;\; s\ge 2. \tag{20.14}$$
Из (20.10) имеем
$$L_s'(n^s) \;=\; \lim_{\lambda\to n^s}\frac{L_s(\lambda)}{\lambda-n^s} \;=\; \lim_{\lambda\to n^s}\frac{-1}{(\lambda-n^s)\prod\limits_{k=0}^{s-1}\Gamma\left(-\,e^{\frac{2\pi i}{s}k}\,\sqrt[s]{\lambda}\right)}$$
$$=\prod_{k=1}^{s-1}\frac{1}{\Gamma\left(-\,e^{\frac{2\pi i}{s}k}\,n\right)}\;\lim_{u\to n}\frac{1}{(n^s-u^s)\,\Gamma(-\,u\,)}.$$

Но в целых отрицательных точках $u = -n$ гамма-функция имеет простые полюсы с вычетами $(-1)^n/n!$, откуда

$$\lim_{u \to n} (n^s - u^s)\,\Gamma(-\,u\,) \;=\; s\,n^{s-1} \operatorname*{Res}_{u=-n} \Gamma(u) \;=\; s\,n^{s-1}\,\frac{(-1)^n}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Формула (20.14) получена. Подставляя (20.14) в (20.13), находим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!\,n} \prod_{k=1}^{s-1} \Gamma\left(-\,e^{\frac{2\pi i}{s}k}\,n\right) \;=\; \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \;=\; \frac{\zeta(s)}{s}, \qquad s \in \mathbb{N}, \quad s \geq 2. \quad (20.15)$$

Посмотрим, что дает соотношение (20.15) при $s = 4$ (этот случай является наиболее простым после $s = 2$). Для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\prod_{k=1}^{3} \Gamma\left(-\,e^{\frac{\pi i}{2}k}\,n\right) \;=\; \Gamma(-\,in)\,\Gamma(n)\,\Gamma(in) \;=\; (n-1)!\;|\Gamma(in)|^2 \;=\; \frac{\pi\,(n-1)!}{n\,\operatorname{sh}\pi n}.$$

Следовательно, общий член ряда в левой части (20.15) при $s = 4$ записывается в виде

$$\pi\,\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\,\operatorname{sh}\pi n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

а правая часть (20.15) в соответствие с (20.2) равна $\pi^4/360$. Полученное соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3\,\operatorname{sh}\pi n} \;=\; \frac{\pi^3}{360} \qquad (20.16)$$

встречается в справочниках (см., например, [102; глава V, раздел 5.3.5]). Его можно получить из (20.13), если вычислить $L_4'(n^4)$ не по формуле (20.14), а используя представление

$$L_4(\lambda) \;=\; \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2}\,\sin\left(\pi\sqrt[4]{\lambda}\right)\,\operatorname{sh}\left(\pi\sqrt[4]{\lambda}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Последний способ благодаря (20.11) пригоден и для других четных s. Действительно, вычисления, основанные на (20.11), дают

$$L_{2r}'(n^{2r}) \;=\; \frac{(-1)^n\,i^{3r+1}}{2r\,(\pi n)^{r-1}} \prod_{k=1}^{r-1} \sin\left(\pi\,e^{\frac{\pi i}{r}k}\,n\right), \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad r \in \mathbb{N}, \quad r \geq 2. \quad (20.17)$$

Подставляя эти выражения в (20.13) и учитывая (20.2), получаем для $s = 2r$ следующий вариант формулы (20.15):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{r+1}\prod\limits_{k=1}^{r-1}\sin\left(\pi\,e^{\frac{\pi i}{r}k}\,n\right)} \;=\; \frac{(4\pi i)^{r+1}}{16r\,(2r)!}\,B_{2r}, \qquad r \in \mathbb{N}, \quad r \geq 2. \qquad (20.18)$$

При $r=2,$ как мы знаем, (20.18) трансформируется в (20.16). Подставим теперь в (20.18) значение $r=3$. После несложных преобразований приходим к необычному соотношению

$$16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4\,\mathrm{ch}^2\left(\frac{\pi\sqrt{3}\,(2n-1)}{2}\right)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\,\mathrm{sh}^2(\pi\sqrt{3}\,n)}=\frac{8\pi^4}{2835},$$

в котором каждая из бесконечных сумм в отдельности, по-видимому, не выражается в замкнутой форме. Ясно, что формула (20.18) служит источником множества нетривиальных соотношений подобного рода.

Кстати, явное представление (20.17) позволяет быстро вывести следующую асимптотику

$$\left|L'_{2r}(n^{2r})\right|\sim\frac{1}{2r\,(2\pi n)^{r-1}}\,\exp\left(\pi n\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{2r}\right),\qquad n\to\infty,$$

действующую при фиксированном $r\in\mathbb{N},\ r\geq 2$ (ср. с (20.8)). В самом деле,

$$\prod_{k=1}^{r-1}\left|\sin\left(\pi\,e^{\frac{\pi i}{r}k}\,n\right)\right|=\prod_{k=1}^{r-1}\sqrt{\mathrm{sh}^2\left(\pi n\,\sin\frac{\pi k}{r}\right)+\sin^2\left(\pi n\,\cos\frac{\pi k}{r}\right)}$$

$$\sim\prod_{k=1}^{r-1}\frac{1}{2}\,\exp\left(\pi n\,\sin\frac{\pi k}{r}\right)=\frac{1}{2^{r-1}}\,\exp\left(\pi n\sum_{k=1}^{r-1}\sin\frac{\pi k}{r}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{r-1}}\,\exp\left(\pi n\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{2r}\right),\qquad n\to\infty,$$

откуда с учетом (20.17) получаем нужное.

Следующий (после $s=4$) по простоте частный случай формулы (20.15) отвечает значению $s=3.$ Здесь элементарный подсчет приводит к соотношению

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!\,n}\left|\Gamma\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,n\right)\right|^2=\frac{\zeta(3)}{3}$$

с константой Апери $\zeta(3).$ Развернутая форма записи этого соотношения уже весьма громоздка, поскольку из рекуррентных формул для гамма-функции вытекает, что для $n=2j,\ j\in\mathbb{N},$ справедливо равенство

$$\left|\Gamma\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,n\right)\right|^2=\frac{\pi\sqrt{3}}{4j\,\mathrm{sh}(\pi\sqrt{3}\,j)}\prod_{k=1}^{j}(3j^2+k^2),$$

а для $n=2j-1,\ j\in\mathbb{N},$ — соответственно равенство

$$\left|\Gamma\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,n\right)\right|^2=\frac{\pi}{(2j-1)^2\,\mathrm{ch}\left(\frac{\pi\sqrt{3}\,(2j-1)}{2}\right)}\prod_{k=0}^{j-1}(3j^2-3j+1+k^2+k).$$

Прокомментируем, наконец, коротко соотношение (20.12) при $m = 2$. Здесь после преобразования правой части возникает запись

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_s'(n^s)\, n^{2s}} = -\frac{1}{2}\left(\zeta^2(s) + \zeta(2s)\right), \qquad s \in \mathbb{N}, \quad s \geq 2.$$

Например, в случае $s = 2$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720},$$

что согласуется с (19.14). В случае $s = 4$ имеем несколько более сложное, но также известное [102; глава V, раздел 5.3.5] равенство[9]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^7 \operatorname{sh} \pi n} = \frac{13\pi^7}{453600}.$$

Возможно, что в связи с (20.12) представляют интерес и другие сочетания параметров s, m, но на этом мы закончим обсуждение суммационных соотношений, порождаемых функцией (20.9).

Вернемся к вопросу об условиях разложимости на простые дроби величины, обратной к целой функции. Предложение 20.2 демонстрирует невозможность представления рядом Крейна функции $F(\lambda) = 1/L(\lambda)$ с быстро стремящейся к нулю последовательностью $(L'(\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Другой причиной отсутствия такого разложения для обратной величины целой функции экспоненциального типа может быть условие $0 \notin D(L)$. Здесь уместно привести простой пример, принадлежащий П. Кусису (см. комментарий к цитированной в § 16 лемме Л. де Бранжа).

Пример 20.4. Пусть

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{2^n}\right) e^{\lambda/2^n} = e^{\lambda} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{2^n}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Поскольку бесконечное произведение

$$a(\lambda) \equiv \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{2^n}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

изображает целую функцию нулевого экспоненциального типа (и даже нулевого порядка), то целая функция

$$L(\lambda) = e^{\lambda}\, a(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

имеет экспоненциальный тип. Все нули $L(\lambda)$ являются простыми вещественными, образуя последовательность

$$\Lambda(L) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}: \qquad \lambda_n = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

[9] В справочнике [102] формула 6 из раздела 5.3.5 дана с опечаткой: вместо правильного множителя π^7 стоит π^2.

Ясно, что $D(L) = \{1\}$ в нарушение условия (i) теоремы 16.5. Но условие (ii) этой теоремы выполнено с $p = 0$, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(2^n)|} < +\infty.$$

Для обоснования сходимости ряда достаточно записать соотношение

$$L'(2^n) = e^{2^n} a'(2^n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

и оценку

$$|a'(2^n)| = 2^{-n} \prod_{k \neq n} \left| 1 - \frac{1}{2^{k-n}} \right| \geq 2^{-n} \prod_{k=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{k-n}} \right) = a(1)\, 2^{-n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Тем не менее, по теореме 16.5 величина $1/L(\lambda)$ не раскладывается в ряд Крейна порядка $p = 0$ (или какого-либо другого порядка $p \in \mathbb{N}$). Указанный факт может быть установлен непосредственно. В самом деле, на мнимой оси справедливо соотношение

$$|L(\pm\, ir)| = \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{r^2}{2^{2n}}} \geq \sqrt{1 + \frac{r^2}{4}} \to +\infty, \qquad r \to +\infty.$$

На вещественной отрицательной полуоси с учетом асимптотического равенства

$$\ln \max_{|\lambda|=r} |a(\lambda)| = \ln a(-\,r) = \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{2^n} \right) = o(r), \qquad r \to +\infty,$$

имеем

$$\frac{1}{L(-\,r)} = \frac{e^r}{a(-\,r)} \to +\infty, \qquad r \to +\infty.$$

Последнее свойство, несмотря на наличие предыдущих, делает невозможным даже представление

$$\frac{1}{L(-\,r)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(2^n)\,(r + 2^n)}, \qquad r \in \mathbb{R}_+,$$

поскольку при $r \to +\infty$ его правая часть стремится к нулю, а левая — к бесконечности.

20.3. Функции Бесселя. Цель данного пункта — получить разложение в ряд Крейна обратной величины функции Бесселя $J_\nu(\lambda)$ и использовать его для вычисления точных значений сумм определенной структуры, содержащих нули функции $J_\nu(\lambda)$. Опыт подобного рода применительно к некоторым специальным функциям изложен в совместных работах автора [132], [133]; идею рассмотреть функции Бесселя подал И. В. Тихонов. В изложении материала мы следуем статье [109].

Будем опираться на теорему 19.1. Отметим, что она позволяет охватить семейство функций Бесселя первого рода $J_\nu(\lambda)$ индекса $\nu > -1$. Всюду далее функции $J_\nu(\lambda)$ рассматриваем только при таких ν. Укажем, что в отличие от метода Коши наш подход не требует построения специальных контуров и оценок на них разлагаемой функции, а по существу сводит задачу к проверке основного условия (ii) теоремы 19.1.

Приведём минимальный необходимый в дальнейшем набор сведений о бесселевых функциях. Подробное изложение различных аспектов общей теории см. в [27], [41], [111], [91]. Итак, рассматриваем функцию Бесселя первого рода

$$J_\nu(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\nu+2n}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \nu > -1. \tag{20.19}$$

Тогда

$$L(\lambda) = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\nu} J_\nu(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2n} \tag{20.20}$$

является четной целой функцией переменной $\lambda \in \mathbb{C}$, имеющей бесконечно много нулей. Благодаря условию $\nu > -1$ все нули функции (20.20) будут вещественными (изящное доказательство этого факта дано в [110; § 8.6]) и простыми. Их можно записать в виде $\Lambda(L) = (\pm\,\gamma_{\nu,n})_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$0 < \gamma_{\nu,1} < \gamma_{\nu,2} < \ldots < \gamma_{\nu,n} < \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_{\nu,n} = +\infty. \tag{20.21}$$

Свойства последовательности (20.21) при различных значениях параметра ν интересовали многих математиков. Ещё Л. Эйлер (см. [27; с. 551-553]) вычислил приближенно несколько первых положительных нулей функции $J_0(2\sqrt{\lambda})$, исходя из открытого им способа нахождения точных значений сумм вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0,n}^{2m}}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Позднее Рэлей и ряд других исследователей получали явные формулы для более общих сумм

$$\sigma_{2m}(\nu) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{\nu,n}^{2m}}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{20.22}$$

Этим и другим вопросам, связанным с нулями бесселевых функций, отведена глава XV специализированной монографии [27]. Современное состояние теории специальной функции Рэлея $\sigma_{2m}(\nu)$, заданной по формуле (20.22), обстоятельно изложено в обзорах [45], [46]. Нулям функций Бесселя посвящен огромный пласт научной литературы. Отметим здесь лишь работы [48], [50], в которых изучались комплексные нули функций Бесселя при $\nu < -1$, и несколько работ сравнительно недавнего времени, принадлежащих зарубежным авторам [159], [157], [151].

Применим теперь теорему 19.1 к функции (20.20) для получения разложения в ряд Крейна обратной величины функции Бесселя.

Теорема 20.3. *Пусть* $J_\nu(\lambda)$ *— функция Бесселя первого рода с* $\nu > -1$, *заданная посредством* (20.19), *и* $\gamma_{\nu,n}$ *— ее положительные нули, упорядоченные согласно* (20.21). *Определим величины*

$$a_{\nu,2m} = \left(\frac{\lambda^\nu}{J_\nu(\lambda)}\right)^{(2m)}(0), \qquad m = 0,\, 1,\, \dots\,. \tag{20.23}$$

Зададим число p формулой

$$p = \left[\frac{2\nu+1}{4}\right] + 1, \tag{20.24}$$

где квадратные скобки означают целую часть. Пусть полином $P(\lambda)$ *определяется по правилу:*

$$P(\lambda) \equiv 0, \qquad -1 < \nu < -\frac{1}{2}, \tag{20.25}$$

$$P(\lambda) = \sum_{m=0}^{p-1} a_{\nu,2m}\,\frac{\lambda^{2m}}{(2m)!}, \qquad \nu \geq -\frac{1}{2}. \tag{20.26}$$

Тогда справедливо разложение

$$\frac{1}{J_\nu(\lambda)} = \lambda^{-\nu}P(\lambda) - 2\lambda^{2p-\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})\,\gamma_{\nu,n}^{2p-\nu-1}\,(\lambda^2-\gamma_{\nu,n}^2)}, \tag{20.27}$$

сходящееся абсолютно и равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$, *не содержащем точек* $\lambda = 0$ *и* $\lambda = \pm\gamma_{\nu,n}$. *При этом для любого* $\nu > -1$ *выполняются суммационные соотношения*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})\,\gamma_{\nu,n}^{2m-\nu+1}} = \frac{a_{\nu,2m}}{2\,(2m)!}, \qquad m = p,\, p+1,\, \dots\,, \tag{20.28}$$

где величины $a_{\nu,2m}$ *и число p определены в* (20.23) *и* (20.24) *соответственно.*

Доказательство. При заданном $\nu > -1$ для функции Бесселя $J_\nu(\lambda)$ определяем согласно формуле (20.20) целую функцию $L(\lambda)$. Привлекая формулу Стирлинга для вычисления порядка и типа целой функции $L(\lambda)$ по её тейлоровским коэффициентам [84; гл. 7, § 1], получаем, что обе эти характеристики равны единице. Последний факт по отношению к порядку отмечался в [110; § 8.4] (см. также задачник [29; № 6.94]). Нужный результат можно извлечь также из общих формул, предназначенных для вычисления порядка и типа специальных функций Райта и Миттаг-Леффлера [162], [49]. Таким образом, $L(\lambda)$ является чётной целой функцией экспоненциального типа с простыми вещественными нулями $\pm\gamma_{\nu,n}$. Проверим, что для функции (20.20) условие (ii) теоремы 19.1 выполняется с показателем p, заданным в (20.24). Воспользуемся асимптотическими формулами

$$J_\nu(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\cos\left(r - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\nu}{2}\right) + O\left(\frac{1}{r\sqrt{r}}\right), \qquad r \to +\infty, \tag{20.29}$$

$$\gamma_{\nu,n} \;=\; \pi n \;-\; \frac{\pi}{4} \;+\; \frac{\pi\nu}{2} \;+\; o(1), \qquad n \to \infty. \tag{20.30}$$

Асимптотика (20.29) приводится в большинстве стандартных учебников по уравнениям математической физики (например, [111], [91]). Поведение нулей (20.21), характеризуемое соотношением (20.30), допускает более детальное описание. В монографии [27; §§ 15.32-15.35] приводятся результаты Шафхейтлина о локализации нулей $\gamma_{\nu,n}$ при $\nu > -1/2$, а также разложение $\gamma_{\nu,n}$ в асимптотический ряд. Отметим ещё, что (20.30) есть частный случай установленной в [162] асимптотической формулы для нулей функции Райта; при $-1/2 < \nu < 1/2$ формула (20.30) содержится также в теореме об асимптотическом поведении нулей специального финитного преобразования Фурье [105; § 3.1, теорема 4].

В силу рекуррентного соотношения

$$J_\nu^{\prime}(\lambda) \;=\; -\,J_{\nu+1}(\lambda) \;+\; \frac{\nu}{\lambda}\, J_\nu(\lambda) \tag{20.31}$$

имеем

$$J_\nu^{\prime}(\gamma_{\nu,n}) \;=\; -\,J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n}), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{20.32}$$

Заменяя в (20.29) параметр ν на $\nu{+}1$ и подставляя в полученную формулу (20.30), находим, что при $n \to \infty$ справедлива асимптотика

$$J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n}) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_{\nu,n}}}\;\cos\left(\gamma_{\nu,n} \;-\; \frac{3\pi}{4} \;-\; \frac{\pi\nu}{2}\right) \;+\; O\left(\frac{1}{\gamma_{\nu,n}^{3/2}}\right)$$

$$=\; \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_{\nu,n}}}\;\cos(\pi n \;-\; \pi + o(1)) \;+\; O\left(\frac{1}{\gamma_{\nu,n}^{3/2}}\right) \;=\; (-1)^{n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_{\nu,n}}} \;+\; o\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_{\nu,n}}}\right).$$

Следовательно,

$$|\,J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})\,| \;\sim\; \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_{\nu,n}}}, \qquad n \to \infty. \tag{20.33}$$

Далее, согласно определению (20.20) имеем

$$L'(\gamma_{\nu,n}) \;=\; \left(\frac{2}{\gamma_{\nu,n}}\right)^{\nu}\, J_\nu^{\prime}(\gamma_{\nu,n}), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{20.34}$$

Возьмём какое-нибудь $p \in \mathbb{Z}_+$ и оценим поведение общего члена ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\gamma_{\nu,n})|\,\gamma_{\nu,n}^{2p+1}} \tag{20.35}$$

с учётом соотношений (20.32)–(20.34):

$$\frac{1}{|L'(\gamma_{\nu,n})|\;\gamma_{\nu,n}^{2p+1}} \;=\; \frac{2^{-\nu}}{|J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})|\;\gamma_{\nu,n}^{2p+1-\nu}} \;\sim\; \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1/2}}\,\frac{1}{\gamma_{\nu,n}^{2p+1/2-\nu}}, \qquad n \to \infty.$$

Отсюда и из (20.30) видно, что условие сходимости ряда (20.35) равносильно требованию $2p + 1/2 - \nu \;>\; 1$. Наименьшее значение $p \in \mathbb{Z}_+$, при котором выполняется последнее неравенство, задаётся формулой (20.24). Учтем еще, что случай $p = 0$ соответствует индексам $-1 < \nu < -1/2$, а случай $p \in \mathbb{N}$ — индексам $\nu \geq -1/2$.

Итак, по теореме 19.1 для функции

$$F(\lambda) = \frac{1}{L(\lambda)} = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{J_\nu(\lambda)}$$

справедливо разложение в ряд Крейна

$$F(\lambda) = P(\lambda) + 2\lambda^{2p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\gamma_{\nu,n})\, \gamma_{\nu,n}^{2p-1}\, (\lambda^2 - \gamma_{\nu,n}^2)},$$

где полином $P(\lambda)$ в зависимости от ν задается формулой (20.25) или (20.26). Подставляя в записанное разложение величину

$$L'(\gamma_{\nu,n}) = -\left(\frac{2}{\gamma_{\nu,n}}\right)^{\nu} J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n}), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{20.36}$$

и умножая на $(2/\lambda)^\nu$, приходим к (20.27). Наконец, соотношение (20.28) есть прямое следствие (19.7) и (20.36). Теорема доказана.

Общее разложение в ряд простых дробей (20.27) обратной величины функции Бесселя $J_\nu(\lambda)$ с произвольным $\nu > -1$ нам в литературе не встречалось. Напротив, представления

$$\frac{J'_\nu(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = \frac{\nu}{\lambda} + 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 - \gamma_{\nu,n}^2} = \frac{\nu}{\lambda} - \frac{2}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{2m}(\nu)\, \lambda^{2m},$$

$$\frac{J_{\nu+1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = -2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 - \gamma_{\nu,n}^2} = \frac{2}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{2m}(\nu)\, \lambda^{2m},$$

где $\sigma_{2m}(\nu)$ — функция Рэлея (20.22), хорошо известны и связаны посредством рекуррентного соотношения (20.31). Первое разложение, следуя Эйлеру, обычно получают логарифмическим дифференцированием (по переменной λ) представления

$$J_\nu(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\nu} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\gamma_{\nu,n}^2}\right),$$

а второе — методом Коши (см., например, [27; § 15.41], [45; § 3]).

Конкретизируем разложение (20.27) и формулы (20.28) в зависимости от диапазона изменения параметра $\nu > -1$.

Пусть вначале $-1 < \nu < -1/2$. Тогда согласно (20.24), (20.25) имеем $p = 0$ и $P(\lambda) \equiv 0$. Представление (20.27) принимает вид

$$\frac{1}{J_\nu(\lambda)} = -2\lambda^{-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{\nu,n}^{\nu+1}}{J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})\, (\lambda^2 - \gamma_{\nu,n}^2)}, \qquad -1 < \nu < -\frac{1}{2}.$$

Выписывая для рассматриваемых ν суммационные соотношения (20.28), с учетом определения (20.23) при любом $m \in \mathbb{Z}_+$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})\,\gamma_{\nu,n}^{2m-\nu+1}} = \frac{1}{2\,(2m)!} \left(\frac{\lambda^{\nu}}{J_{\nu}(\lambda)}\right)^{(2m)}(0), \quad -1 < \nu < -\frac{1}{2}. \tag{20.37}$$

Пусть $-1/2 \le \nu < 3/2$. Тогда согласно (20.24) имеем $p = 1$. По формуле (20.26) с учётом определения (20.23) многочлен $P(\lambda)$ есть тождественная постоянная, равная $a_{\nu,0} = 2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)$. Следовательно, теперь (20.27) принимает вид

$$\frac{1}{J_{\nu}(\lambda)} = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\nu} \Gamma(\nu+1)$$

$$-\,2\lambda^{2-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})\,\gamma_{\nu,n}^{1-\nu}\,(\lambda^2 - \gamma_{\nu,n}^2)}, \qquad -\frac{1}{2} \le \nu < \frac{3}{2}. \tag{20.38}$$

Запишем суммационные соотношения (20.28):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})\,\gamma_{\nu,n}^{2m-\nu+1}} = \frac{a_{\nu,2m}}{2\,(2m)!}, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad -\frac{1}{2} \le \nu < \frac{3}{2}. \tag{20.39}$$

Формула (20.38) содержит известные разложения [11; § 7.15]:

$$\frac{1}{J_0(\lambda)} = 1 - 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_1(\gamma_{0,n})\,\gamma_{0,n}\,(\lambda^2 - \gamma_{0,n}^2)};$$

$$\frac{1}{J_1(\lambda)} = \frac{2}{\lambda} - 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_2(\gamma_{1,n})\,(\lambda^2 - \gamma_{1,n}^2)} = \frac{2}{\lambda} + 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_0(\gamma_{1,n})\,(\lambda^2 - \gamma_{1,n}^2)},$$

полученные в работе [153] методом Коши. Из этих разложений в [153] выводится несколько первых значений сумм

$$T_{\nu,2m} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})\,\gamma_{\nu,n}^{2m-\nu+1}} \tag{20.40}$$

при $\nu = 0$ и $\nu = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_1(\gamma_{0,n})\,\gamma_{0,n}^3} = \frac{1}{8}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_1(\gamma_{0,n})\,\gamma_{0,n}^5} = \frac{3}{128}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_1(\gamma_{0,n})\,\gamma_{0,n}^7} = \frac{19}{4608};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_2(\gamma_{1,n})\,\gamma_{1,n}^2} = \frac{1}{8}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_2(\gamma_{1,n})\,\gamma_{1,n}^4} = \frac{1}{96}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_2(\gamma_{1,n})\,\gamma_{1,n}^6} = \frac{7}{9216}.$$

Все эти значения могут быть найдены вычислением $a_{\nu,2m}$ с использованием соотношений (20.39). Последние три суммы можно переписать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_0(\gamma_{1,n})\,\gamma_{1,n}^2} = -\frac{1}{8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_0(\gamma_{1,n})\,\gamma_{1,n}^4} = -\frac{1}{96}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_0(\gamma_{1,n})\,\gamma_{1,n}^6} = -\frac{7}{9216},$$

если воспользоваться соотношениями

$$J_2(\gamma_{1,n}) \,=\, -\,J_0(\gamma_{1,n}), \qquad n\in\mathbb{N},$$

вытекающими из рекуррентной формулы

$$J_{\nu-1}(\lambda) \,+\, J_{\nu+1}(\lambda) \,=\, \frac{2\nu}{\lambda}\,J_\nu(\lambda).$$

Пусть теперь $3/2 \le \nu < 7/2$. Тогда по формуле (20.24) находим, что $p=2$. Далее, определения (20.26) и (20.23) дают

$$P(\lambda) \,=\, 2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)\,\left(1 \,+\, \frac{\lambda^2}{8(\nu+1)}\right).$$

Отсюда согласно (20.27), (20.28), (20.40) получаем разложение

$$\frac{1}{J_\nu(\lambda)} \,=\, \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\nu}\Gamma(\nu+1)\,\left(1 \,+\, \frac{\lambda^2}{8(\nu+1)}\right)$$

$$-\,2\lambda^{4-\nu}\,\sum_{n=1}^{\infty}\,\frac{1}{J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})\,\gamma_{\nu,n}^{3-\nu}\,(\lambda^2-\gamma_{\nu,n}^2)}, \qquad \frac{3}{2}\,\le\,\nu\,<\,\frac{7}{2};$$

и суммационные соотношения

$$T_{\nu,2m} \,=\, \frac{1}{2\,(2m)!}\left(\frac{\lambda^\nu}{J_\nu(\lambda)}\right)^{(2m)}(0), \qquad m\ge 2, \qquad \frac{3}{2}\,\le\,\nu\,<\,\frac{7}{2}. \tag{20.41}$$

В частности, при $\nu=2$, $\nu=3$ и $m\ge 2$ имеем, соответственно,

$$\frac{1}{J_2(\lambda)} \,=\, \frac{8}{\lambda^2} \,+\, \frac{1}{3} \,-\, 2\lambda^2\,\sum_{n=1}^{\infty}\,\frac{1}{J_3(\gamma_{2,n})\,\gamma_{2,n}\,(\lambda^2-\gamma_{2,n}^2)},$$

$$T_{2,2m} \,\equiv\, \sum_{n=1}^{\infty}\,\frac{1}{J_3(\gamma_{2,n})\,\gamma_{2,n}^{2m-1}} \,=\, -\,\sum_{n=1}^{\infty}\,\frac{1}{J_1(\gamma_{2,n})\,\gamma_{2,n}^{2m-1}} \,=\, \frac{1}{2\,(2m)!}\left(\frac{\lambda^2}{J_2(\lambda)}\right)^{(2m)}(0);$$

$$\frac{1}{J_3(\lambda)} \,=\, \frac{48}{\lambda^3} \,+\, \frac{3}{2\lambda} \,-\, 2\lambda\,\sum_{n=1}^{\infty}\,\frac{1}{J_4(\gamma_{3,n})\,\gamma_{3,n}\,(\lambda^2-\gamma_{3,n}^2)},$$

$$T_{3,2m} \,\equiv\, \sum_{n=1}^{\infty}\,\frac{1}{J_4(\gamma_{3,n})\,\gamma_{3,n}^{2m-2}} \,=\, -\,\sum_{n=1}^{\infty}\,\frac{1}{J_2(\gamma_{3,n})\,\gamma_{3,n}^{2m-2}} \,=\, \frac{1}{2\,(2m)!}\left(\frac{\lambda^3}{J_3(\lambda)}\right)^{(2m)}(0).$$

Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\,\frac{1}{J_3(\gamma_{2,n})\,\gamma_{2,n}^3} \,=\, \frac{5}{288}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\,\frac{1}{J_3(\gamma_{2,n})\,\gamma_{2,n}^5} \,=\, \frac{39}{51840};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\,\frac{1}{J_4(\gamma_{3,n})\,\gamma_{3,n}^2} \,=\, \frac{9}{160}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\,\frac{1}{J_4(\gamma_{3,n})\,\gamma_{3,n}^4} \,=\, \frac{13}{7680}.$$

Этот процесс можно неограниченно продолжать, последовательно конкретизируя соотношения (20.27), (20.28) на соответствующих промежутках изменения параметра ν.

Выпишем несколько общих формул для сумм (20.40). Из (20.37) при $m = 0$ получаем формулу

$$T_{\nu,0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\nu} \Gamma(\nu+1), \qquad -1 < \nu < -\frac{1}{2}. \tag{20.42}$$

Раскладывая функцию $\lambda^\nu / J_\nu(\lambda)$ в ряд по степеням λ в круге $|\lambda| < \gamma_{\nu,1}$, для величины (20.40) получим из (20.37), (20.39) при $m = 1$ формулу

$$T_{\nu,2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-\nu} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\nu+1}, \qquad -1 < \nu < \frac{3}{2}, \tag{20.43}$$

а из (20.39), (20.41) при $m = 2$ — формулу

$$T_{\nu,4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{6-\nu} \frac{(\nu+3)\,\Gamma(\nu+1)}{(\nu+1)^2\,(\nu+2)}, \qquad -1 < \nu < \frac{7}{2}. \tag{20.44}$$

Приведем еще для полноты картины соотношение

$$T_{\nu,6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{8-\nu} \frac{(\nu^2+8\nu+19)\,\Gamma(\nu+1)}{3\,(\nu+1)^3\,(\nu+2)\,(\nu+3)}, \qquad -1 < \nu < \frac{11}{2}, \tag{20.45}$$

а также соотношение, отсутствующее в основных справочниках:

$$T_{\nu,8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{12-\nu} \frac{(\nu^4+17\nu^3+117\nu^2+379\nu+422)\,\Gamma(\nu+1)}{3\,(\nu+1)^4\,(\nu+2)^2\,(\nu+3)\,(\nu+4)}, \quad -1<\nu<\frac{15}{2}. \tag{20.46}$$

Следует подчеркнуть, что в формулах (20.42)–(20.46) выписаны только те значения параметра ν, для которых соответствующий ряд вида (20.40) сходится абсолютно, хотя область применимости каждой из указанных формул несколько шире. Пусть, например, в определении (20.40) выбрано $m = 1$. Тогда в силу асимптотик (20.30) и (20.33) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})\,\gamma_{\nu,n}^{3-\nu}}$$

сходится абсолютно для значений индекса $-1 < \nu < 3/2$ и расходится для значений $\nu \geq 5/2$. Используя вместо (20.30) более точную асимптотическую формулу, можно показать, что этот ряд сходится условно при $3/2 \leq \nu < 5/2$. Таким образом, множество тех значений ν, при которых действует формула (20.43), есть промежуток $-1 < \nu < 5/2$. Формулы (20.42)–(20.45), правда, без указания области их применимости даны в книге [103; раздел 5.7.33]. Они были выведены в работе [171] с помощью рядов Фурье–Бесселя; там же приведена рекуррентная формула, выражающая $T_{\nu,\,2m+2}$ через $T_{\nu,\,2r}$, $r = 1, 2, \ldots, m$. Пользуясь случаем, укажем, что означенная рекуррентная формула помещена в [171] с ошибкой, перекочевавшей затем в [103; с. 691, формула 12]. Правильный вариант такой:

$$T_{\nu,\,2m+2} = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{m} \left(-\frac{1}{4}\right)^{m-r} \frac{T_{\nu,\,2r}}{(m-r+1)!\,(\nu+1)_{m-r+1}}$$

$$+ (-1)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-\nu+3} \frac{\Gamma(\nu+1)}{(m+1)!\,(\nu+1)_{m+1}},$$

где $(a)_s \equiv a\,(a+1)\,\ldots\,(a+s-1)$.

В заключение отметим, что результаты и методы этой главы могут найти применение к различным классам специальных функций, важным в теории дифференциальных уравнений и математической физике.

Примечания к главе 3

Основой для написания третьей главы стали работы автора [126], [128]. Часть материала п. 20.2 взята из [123]; в дополнение к цитированной в п. 20.3 литературе укажем вышедший недавно обзор М. К. Керимова [47], посвященный вещественным нулям функций Бесселя.

Благодаря новому подходу к проблеме М. Г. Крейна стало возможным с единой точки зрения охватить большое количество разнообразных примеров и получить для них либо «свежие» утверждения, либо уже известные, но существенно более простым способом. В совместных с Е. В. Суминым и М. М. Тищенко статьях [132] и [133] дано развитие результатов автора на случай целой функции экспоненциального типа с нулями в некоторой полуплоскости. Полученные в [132] достаточные условия разложимости на дроби применяются в [133] к вычислению точных значений специальных сумм, содержащих нули интеграла ошибок.

Отметим, что в связи с недавними исследованиями И. В. Тихонова [112], [113] открылись перспективы применения рядов Крейна к теории нелокальных задач для абстрактных дифференциальных уравнений.

Тематика главы 3 и § 9 главы 1 тесно примыкает к вопросам аппроксимации аналитических в областях комплексной плоскости функций посредством простых дробей. Ввиду огромного числа исследований, посвященных этому направлению комплексного анализа, дадим лишь несколько ссылок — на работы Ж. Вольфа [174], А. Данжуа [150], А. А. Гончара [40], Т. А. Леонтьевой [79], Ю. Ф. Коробейника [59], Р. В. Сибилева [107], В. Б. Шерстюкова [124].

Заключение

В диссертации исследованы асимптотические свойства целых функций экспоненциального типа с ограничениями на расположение и поведение нулей. Особое внимание уделено каноническим произведениям с вещественными симметричными нулями и целым функциям порядка меньше единицы с нулями в угле. Доказаны новые теоремы о регулярности роста целых функций экспоненциального типа. Дано полное решение экстремальной задачи о наименьшем возможном типе при порядке $\rho \in (0,\, 1)$ целых функций с нулями заданных плотностей, расположенными на луче или в угле раствора $\leqslant \pi$. Получен цикл теорем для полных в круге и для абсолютно представляющих в выпуклой области систем экспонент. Охарактеризовано множество целых функций с нулями в полосе, допускающих разложение в ряд Крейна, и дано приложение результата к специальным классам функций.

Дальнейшие перспективные направления исследований по данной тематике определяются, в первую очередь, связями с теорией интерполяции, аналитического продолжения, представления функций рядами, и состоят в следующем.

1. Нахождение точного условия регулярности роста целых функций произвольного конечного порядка (в частности, целых функций порядка $\rho \in (0,\, 1)$ с нулями на луче), выраженного в терминах обобщенного индекса конденсации нулей.

2. Развитие теории экстремальных задач для асимптотических характеристик роста целых функций с ограничениями на нулевое множество. В частности, решение задачи о наименьшем возможном типе для целых функций порядка $\rho \in (0,\, 1)$ с нулями, расположенными в угле раствора $> \pi$, и для целых функций порядка $\rho > 1$ с нулями на луче.

3. Всестороннее изучение проблемы представления обратной величины целой функции с произвольно расположенными нулями рядом типа Крейна. Применение полученных результатов в теории дифференциальных уравнений и задачах математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Абанин А. В. Характеризация минимальных систем показателей представляющих систем обобщенных экспонент // Известия вузов. Математика. – 1991. – № 2. – С. 3–12.

[2] Абанин А. В. Геометрические критерии представления аналитических функций рядами обобщенных экспонент // Доклады РАН. – 1992. – Т. 323, № 5. – С. 807–810.

[3] Абанин А. В. Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы // Матем. заметки. – 1995. – Т. 57, вып. 4. – С. 483–497.

[4] Абанин А. В. Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы. – Дисс. … д.ф.-м.н. – Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 1995. – 268 с.

[5] Азарин В. С. О лучах вполне регулярного роста целой функции // Матем. сборник. – 1969. – Т. 79(121), № 4(8). – С. 463–476.

[6] Андрашко М. І. Екстремальний індикатор цілої функції порядку меньше одиниці з додатними нулями // Доповіді АН УРСР. – 1960. – № 7. – С. 869–872.

[7] Ахиезер Н. И О некоторых свойствах целых трансцендентных функций экспоненциального типа // Известия АН СССР, сер. матем. – 1946. – Т. 10, № 5. – С. 411–428.

[8] Ахиезер Н. И Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.

[9] Бакан А. Г. Полиномиальный вид условий Луи де Бранжа плотности алгебраических многочленов в пространстве C_w^0 // Украинский матем. журнал. – 2005. – Т. 57, № 3. – С. 305–319.

[10] Бакан А. Г. Разложение обратной величины целой функции на простые дроби // Доклады НАН Украины. – 2009. – № 2. – С. 11–13.

[11] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. (Сер.: «Справочная математическая библиотека».) – М.: Наука, 1974. – 296 с.

[12] Бойчук В. С. О некоторых свойствах уточненного порядка // Сибирский матем. журнал. – 1979. – Т. 20, № 2. – С. 229–236.

[13] Брайчев Г. Г. Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. – М.: Прометей, 2005. – 232 с.

[14] Брайчев Г. Г. Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0,\, 1)$ с положительными корнями заданных усредненных плотностей // Матем. сборник. – 2012. – Т. 203, № 7. – С. 31–56.

[15] Брайчев Г. Г. Точные оценки типа целой функции порядка меньше единицы с нулями на луче заданных усредненных плотностей // Доклады РАН. – 2012. – Т. 445, № 6. – С. 615–617.

[16] Брайчев Г. Г. Точные оценки типов целой функции порядка $\rho \in (0,\, 1)$ с нулями на луче // Уфимск. матем. журнал. – 2012. – Т. 4, вып. 1. – С. 29–37.

[17] Брайчев Г. Г. Точные оценки типов целых функций с нулями на лучах // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97, вып. 4. – С. 503–515.

[18] Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. Точные соотношения между плотностями нулей целых функций конечного порядка // Математичні студії. – 2008. – Т. 30, № 2. – С. 183–188.

[19] Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. О типе целой функции порядка $\rho \in (0,\, 1)$ с нулями на луче // Итоги науки. Юг России. Серия Математический форум. Т. 4. Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям. Владикавказ: Изд-во ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. – 2010. – С. 9–21.

[20] Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0,\, 1)$ с положительными нулями // Известия РАН. Сер. матем. – 2011. – Т. 75, № 1. – С. 3–28.

[21] Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. О росте целых функций с дискретно измеримыми нулями // Матем. заметки – 2012. – Т. 91, № 5. – С. 674–690.

[22] Брайчев Г. Г., Шерстюкова О. В. Наибольший возможный нижний тип целой функции пордка $\rho \in (0,\, 1)$ с нулями фиксированных ρ-плотностей // Матем. заметки – 2011. – Т. 90, № 2. – С. 199–215.

[23] Братищев А. В. К одной задаче А. Ф. Леонтьева // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 270, № 2. – С. 265–267.

[24] Братищев А. В. Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения // Известия АН СССР, сер. матем. – 1984. – Т. 48, № 3. – С. 451–475.

[25] Братищев А. В. Возникновение и развитие понятия индекса конденсации // Актуальные вопросы теории функций. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1986. – С. 50–55.

[26] Братищев А. В. Базисы Кете, целые функции и их приложения. – Дисс. ... д.ф.-м.н. – Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 1998. – 248 с.

[27] Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Часть первая. – М.: ИЛ, 1949. – 798 с.

[28] Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. – М.: Наука, 1964. – 268 с.

[29] Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Физматлит, 2004. – 312 с.

[30] Гайсин А. М. Об одной гипотезе Полиа // Известия АН СССР, сер. матем. – 1994. – Т. 58, № 2. – С. 73–92.

[31] Гайсин А. М. Решение проблемы Пойа // Матем. сборник. – 2002. – Т. 193, № 6. – С. 39–60.

[32] Говоров Н. В. Екстремальний індикатор цілої функції з додатними нулями заданої верхньої та нижньої густини // Доповіді АН УРСР. – 1966. – № 2. – С. 148–150.

[33] Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории целых функций. I // Матем. сборник. – 1962. – Т. 58(100), № 3. – С. 289–334.

[34] Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории целых функций. II // Матем. сборник. – 1963. – Т. 61(103), № 3. – С. 334–349.

[35] Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории целых функций. III // Матем. сборник. – 1964. – Т. 65(107), № 3. – С. 414–453.

[36] Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории целых функций. IV // Матем. сборник. – 1965. – Т. 66(108), № 3. – С. 411–457.

[37] Гольдберг А. А. Об одном классе целых функций // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 229, № 1. – С. 39–41.

[38] Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В. Целые и мероморфные функции // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 85. (Комплексный анализ. Одна переменная–1.) – М.: ВИНИТИ, 1991. – С. 5–186.

[39] Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.

[40] Гончар А. А. О примерах неединственности аналитических функций // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. – 1964. – № 1. – С. 37–43.

[41] Грей Э., Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. – М.: ИЛ, 1953. – 372 с.

[42] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. – М.: Мир, 1998. – 704 с.

[43] Жевняк А. В. Эйлеровы и бернуллиевы суммы: классические и современные результаты. – Рязань: Ринфо, 2014. – 236 с.

[44] Кацнельсон В. Э. Эквивалентные нормы в пространствах целых функций экспоненциального типа // Матем. сборник. – 1973. – Т. 92(134), № 1(9). – С. 34–54.

[45] Керимов М. К. Функция Рэлея — теория и методы вычисления // ЖВМиМФ. – 1999. – Т. 39, № 12. – С. 1962–2006.

[46] Керимов М. К. Обзор некоторых новых результатов, относящихся к теории и приложениям специальной функции Рэлея // ЖВМиМФ. – 2008. – Т. 48, № 9. – С. 1540–1542.

[47] Керимов М. К. Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления // ЖВМиМФ. – 2014. – Т. 54, № 9. – С. 1387–1441.

[48] Керимов М. К., Скороходов С. Л. О вычислении комплексных нулей функций Бесселя $J_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ и их производных // ЖВМиМФ. – 1984. – Т. 24, № 10. – С. 1497–1513.

[49] Килбас А. А., Липневич В. В. Порядки и типы специальных функций Райта и Миттаг-Леффлера // Труды Ин-та матем. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 17, № 2. – С. 15–22.

[50] Кожухов И. Б., Платонов Н. И. Полиномиальная аппроксимация бесселевых функций // Фунд. и прикл. матем. – 2000. – Т. 6, № 1. – С. 143–162.

[51] Кондратюк А. А. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями // Литовский матем. сборник. – 1967. – Т. 7, № 1. – С. 79–117.

[52] Кондратюк А. А. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями, II // Литовский матем. сборник. – 1968. – Т. 8, № 1. – С. 65–85.

[53] Кондратюк А. А. Целые функции с положительными нулями, имеющими конечную максимальную плотность // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Республ. науч. сборник. Харьков. Изд-во Харьковского ун-та.) – 1968. – Вып. 7. – С. 37–52.

[54] Кондратюк А. А. Целые функции с конечной максимальной плотностью нулей // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Республ. науч. сборник. Харьков. Изд-во Харьковского ун-та.) – 1970. – Вып. 10. – С. 57–70.

[55] Кондратюк А. А. Об экстремальном индикаторе целых функций с положительными нулями // Сибирский матем. журнал. – 1970. – Т. 11, № 5. – С. 1084–1092.

[56] Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1988. – 196 с.

[57] Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // Успехи матем. наук. – 1981. – Т. 36, вып. 1. – С. 73–126.

[58] Коробейник Ю. Ф. Граничные свойства аналитических решений дифференциальных уравнений бесконечного порядка // Матем. сборник. – 1981. – Т. 115, № 3. – С. 364–390.

[59] Коробейник Ю. Ф. К вопросу о разложении аналитических функций в ряды по рациональным функциям // Матем. заметки. – 1982. – Т. 31, вып. 5. – С. 723–737.

[60] Коробейник Ю. Ф. Уравнения свертки в комплексной области // Матем. сборник. – 1985. – Т. 127, № 2. – С. 173–197.

[61] Коробейник Ю. Ф. Максимальные и γ-достаточные множества. Приложения к целым функциям. I // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Республ. науч. сборник. Харьков. Изд-во Харьковского ун-та.) – 1990. – Вып. 54. – С. 42–49.

[62] Коробейник Ю. Ф. Максимальные и γ-достаточные множества. Приложения к целым функциям. II // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Республ. науч. сборник. Харьков. Изд-во Харьковского ун-та.) – 1991. – Вып. 55. – С. 23–34.

[63] Коробейник Ю. Ф. О разрешимости в комплексной области некоторых общих классов линейных операторных уравнений. – Ростов-на-Дону: Изд-во «ЦВВР», 2005. – 244 с.

[64] Красичков И. Ф. Оценки снизу для целых функций конечного порядка // Сибирский матем. журнал. – 1965. – Т. 6, № 4. – С. 840–861.

[65] Красичков-Терновский И. Ф. Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона // Матем. заметки. – 1978. – Т. 24, вып. 4. – С. 531–546.

[66] Крейн М. Г. Об одном замечательном классе эрмитовых операторов // Доклады АН СССР. – 1944. – Т. 44, № 5. – С. 191–195.

[67] Крейн М. Г. К теории целых функций экспоненциального типа // Известия АН СССР, сер. матем. – 1947. – Т. 11, № 4. – С. 309–326.

[68] Крейн М. Г. О неопределенном случае краевой задачи Штурма-Лиувилля в интервале $(0, \infty)$ // Известия АН СССР, сер. матем. – 1952. – Т. 16, № 4. – С. 293–324.

[69] Кривошеев А. С. Критерий аналитического продолжения функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексной плоскости // Известия РАН. Сер. матем. – 2004. – Т. 68, № 1. – С. 43–78.

[70] Кривошеева О. А. Особые точки ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости // Алгебра и анализ. – 2011. – Т. 23, № 2. – С. 162–205.

[71] Курмышев Е. В., Санчес-Мондрагон Х. Х. Разложение на простейшие дроби для одного однопараметрического класса мероморфных функций // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58, вып. 6. – С. 930–933.

[72] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

[73] Левин Б. Я. Дополнения и исправления к книге «Распределение корней целых функций». Препринт ФТИНТ АН УССР. – Харьков, 1978. – С. 1–60.

[74] Левин Б. Я. Почти периодические функции с ограниченным спектром // Актуальные вопросы матем. анализа. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1978. – С. 112–124.

[75] Леонтьев А. Ф. Об условиях разложимости аналитических функций в ряды Дирихле // Известия АН СССР, сер. матем. – 1972. – Т. 36, № 6. – С. 1282–1295.

[76] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.

[77] Леонтьев А. Ф. 1.11. Представление функций рядами экспонент // Исследования по линейным операторам и теории функций, 99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа. Зап. научн. сем. ЛОМИ. – Л.: Наука, Ленингр. отд., 1978. – Т. 81. – С. 255–257.

[78] Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.

[79] Леонтьева Т. А. Представление функций, аналитических в замкнутой области, рядами рациональных функций // Матем. заметки. – 1968. – Т. 4, вып. 2. – С. 191–200.

[80] Логвиненко В. Н. Условия ограниченности целых функций экспоненциального типа внутри гипероктанта $\mathbb{R}^n_+$ // Известия АН СССР, сер. матем. – 1989. – Т. 53, № 3. – С. 644–656.

[81] Маергойз Л. С. Индикаторная диаграмма целой функции уточненного порядка и ее обобщенные преобразования Бореля-Лапласа // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12, № 2. – С. 1–63.

[82] Мандельбройт С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. – М.: ИЛ, 1955. – 268 с.

[83] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Том I. Начала теории. – М.: Наука, 1967. – 486 с.

[84] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Том II. Дальнейшее построение теории. – М.: Наука, 1968. – 624 с.

[85] Мелихов С.Н. О разложении аналитических функций в ряды экспонент // Известия АН СССР, сер. матем. – 1988. – Т. 52, № 5. – С. 991–1004.

[86] Мелихов С.Н. Правые обратные к операторам представления рядами экспонент и свертки. – Дисс. … д.ф.-м.н. – Уфа, ИМ с ВЦ УНЦ РАН, 2003. – 240 с.

[87] Мельник Ю. И. О представлении регулярных функций рядами типа рядов Дирихле // Исследование по теории приближений функций и их приложения. – Киев: Наукова Думка, 1978. – С. 132–141.

[88] Мельник Ю. И. Об условиях сходимости рядов Дирихле, представляющих регулярные функции // Математический анализ и теория вероятностей. – Киев: Наукова Думка, 1978. – С. 120–123.

[89] Мельник Ю. И. Об условиях разложимости регулярных функций в ряды экспонент // Всесоюз. симпозиум по теории аппроксимации функций в комплексной области. Тезисы докладов.– Уфа, БФ АН СССР, 1980. – С. 94.

[90] Мышаков Ф. С. Аналог теоремы Валирона-Гольдберга при ограничении на усредненную считающую функцию множества корней // Матем. заметки. – 2014. – Т. 96, вып. 5. – С. 794–798.

[91] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1984. - 344 с.

[92] Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Часть вторая. Теория функций. Распределение нулей. Полиномы. Определители. Теория чисел. – М.: Наука, 1978. - 432 с.

[93] Попов А. Ю. О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. – 1999. – № 5. – С. 48–52.

[94] Попов А. Ю. Точная оценка индекса конденсации // Mathematica Montisnigri. – 1999. – Т. 11. – С. 67–103.

[95] Попов А. Ю. Экстремальные задачи в теории аналитического продолжения // Матем. сборник. – 1999. – Т. 190, № 5. – С. 113–138.

[96] Попов А. Ю. Оценки сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами некоторых классов // Матем. заметки. – 2003. – Т. 74, вып. 6. – С. 877–888.

[97] Попов А. Ю. Экстремальные задачи в теории целых функций. – Дисс. ... д.ф.-м.н. – М.: МГУ, 2005. – 226 с.

[98] Попов А. Ю. Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. – 2005. – № 1. – С. 31–36.

[99] Попов А. Ю. О наименьшем типе целой функции порядка ρ с корнями заданной верхней ρ-плотности, лежащими на одном луче // Матем. заметки. – 2009. – Т. 85, вып. 2. – С. 246–260.

[100] Попов А. Ю. Развитие теоремы Валирона-Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ-плотностью корней // Труды крымской осенней матем. школы-симпозиума, СМФН. – 2013. – Т. 49. – С. 132–164.

[101] Попов А. Ю. Наибольший возможный рост максимума модуля канонического произведения нецелого порядка с заданной мажорантой считающей функции корней // Матем. сборник. – 2013. – Т. 204, № 5. – С. 67–108.

[102] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

[103] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 752 с.

[104] Седлецкий А. М. Об аннулируемых подсистемах тригонометрической системы // Матем. заметки. – 1983. – Т. 34, вып. 2. – С. 237–248.

[105] Седлецкий А. М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. – М.: Физматлит, 2005. – 504 с.

[106] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.

[107] Сибилев Р. В. Теорема единственности для рядов Вольфа-Данжуа // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7, № 1. – С. 170–199.

[108] Ситник С. М. Применение функций Ламберта в задачах об оценках характеристик роста целых функций // Теория операторов. Комплексный анализ и математическое моделирование. Тезисы докладов международной научной конференции, Волгодонск, 2011.– Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. – С. 46–47.

[109] Сумин Е. В., Шерстюков В. Б. Применение рядов Крейна к вычислению сумм, содержащих нули функций Бесселя // ЖВМиМФ. – 2015. – Т. 55, № 4. – С. 47–54.

[110] Титчмарш Е. Теория функций. – М.: Наука, 1980. – 464 с.

[111] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

[112] Тихонов И. В. Обратные, нелокальные и краевые задачи для эволюционных уравнений. – Дисс. … д.ф.-м.н. – Москва, МГУ, 2008. – 283 с.

[113] Тихонов И. В. Простое доказательство теоремы единственности для общих негармонических рядов Фурье на отрезке вещественной оси // Наука в вузах: математика, информатика, физика, образование. – М.: МПГУ, 2010. – С. 183–189.

[114] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 500 с.

[115] Хабибуллин Б. Н. О типе целых и мероморфных функций // Матем. сборник. – 1992. – Т. 183, № 11. – С. 35–44.

[116] Хабибуллин Б. Н. Полнота систем экспонент и множества единственности. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2006. – 172+xvi с.

[117] Хабибуллин Б. Н. Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции // Матем. сборник. – 2009. – Т. 200, № 2. – С. 129–158.

[118] Шерстюков В. Б. К вопросу о γ-достаточных множествах // Сибирский матем. журнал. – 2000. – Т. 41, № 4. – С. 935–943.

[119] Шерстюков В. Б. Об одной задаче Леонтьева и представляющих системах экспонент // Матем. заметки. – 2003. – Т. 74, вып. 2. – С. 301–313.

[120] Шерстюков В. Б. Об одном подклассе целых функций вполне регулярного роста // Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование. – Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2006. – С. 131–138.

[121] Шерстюков В. Б. О некоторых признаках полной регулярности роста целых функций экспоненциального типа // Матем. заметки. – 2006. – Т. 80, вып. 1. – С. 119–130.

[122] Шерстюков В. Б. О регулярности роста канонических произведений с вещественными нулями // Матем. заметки. – 2007. – Т. 82, вып. 4. – С. 621–630.

[123] Шерстюков В. Б. О разложении мероморфных функций специального вида на простейшие дроби // Analysis Mathematica. – 2007. – Т. 33. – С. 63–81.

[124] Шерстюков В. Б. Нетривиальные разложения нуля и представление аналитических функций рядами простых дробей // Сибирский матем. журнал. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 458–473.

[125] Шерстюков В. Б. Обобщенный индекс конденсации последовательности положительных чисел // Исследования по современному анализу и математическому моделированию. – Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН и РСО-А, 2008. – С. 75–84.

[126] Шерстюков В. Б. Представление обратной величины целой функции рядом простейших дробей и экспоненциальная аппроксимация // Матем. сборник. – 2009. – Т. 200, № 3. – С. 147–160.

[127] Шерстюков В. Б. Двойственная характеризация абсолютно представляющих систем в индуктивных пределах банаховых пространств // Сибирский матем. журнал. – 2010. – Т. 51, № 4. – С. 930–943.

[128] Шерстюков В. Б. Разложение обратной величины целой функции с нулями в полосе в ряд Крейна // Матем. сборник. – 2011. – Т. 202, № 12. – С. 137–156.

[129] Шерстюков В. Б. К проблеме Леонтьева о целых функциях вполне регулярного роста // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, вып. 2, ч. 1. – С. 30–35.

[130] Шерстюков В. Б. Распределение нулей канонических произведений и весовой индекс конденсации // Матем. сборник. – 2015. – Т. 206, № 9. – С. 140–182.

[131] Шерстюков В. Б. Минимальное значение типа целой функции порядка $\rho \in (0,\,1)$, все нули которой лежат в угле и имеют заданные плотности // Уфимск. матем. журнал. – 2016. – Т. 8, вып. 1. – С. 113–126.

[132] Шерстюков В. Б., Сумин Е. В., Тищенко М. М. Разложение обратной величины целой функции с нулями в полуплоскости в ряд простейших дробей // Вестник МГОУ. Сер. «Физика–Математика». – 2011. – № 3. – С. 43–49.

[133] Шерстюков В. Б., Сумин Е. В., Тищенко М. М. Вычисление «регуляризованных» сумм, сотавленных по нулям интеграла ошибок // Вестник НИЯУ МИФИ. Сер. Прикладная математика и математическая физика. – 2014. – Т. 3, № 1. – С. 24–26.

[134] Шкаликов А. А. Теоремы тауберова типа о распределении нулей голоморфных функций // Матем. сборник. – 1984. – Т. 123(165), № 3. – С. 317–347.

[135] Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т. I.– М.: ГИФМЛ, 1961. – 315 с.

[136] Bakan A. G. Polynomial approximation in $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$. I. // Preprint, Nat. Acad. Sci. of Ukraine, Inst. of Math. – Kiev, 1998. – № 1. – P. 1–45.

[137] Bakan A. G. Polynomial density in $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ and representation of all measures which generate a determinate Hamburger moment problem // Approximation, optimization and mathematical economics (Pointe-a-Pitre, 1999), Marc Lassonde ed., Heidelberg, New York: Physica-Verl., 2001. – P. 37–46.

[138] Berg Ch., Pedersen H. Nevanlinna matrices of entire functions // Math. Nachr. – 1995. – Vol. 171, № 1. – P. 29–52.

[139] Bernstein V. Leçons sur les progrès récents de la théorie séries de Dirichlet. – Paris: Gauthier-Villars, 1933. – 320 p.

[140] Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular variation. – Encyclopedia of Math. and its Applications; 27. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. – 494 p.

[141] Boas R. P. Entire functions. – New-York: Acad. Press, 1954. – 276 p.

[142] Borel E. Sur quelques points de la théorie des fonctions // Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. — 1895. – 3 série. – T. 12. – P. 9–55.

[143] Borichev A., Sodin M. Krein's entire functions and the Bernstein approximation problem // Illinois J. of Math. – 2001. – V. 45, № 1. – P. 167–185.

[144] Bowen N. A., Macintyre A. J. Some theorems on integral functions with negative zeros // Trans. Amer. Math. Soc. – 1951. – V. 70, № 1. – P. 114–126.

[145] Braichev G. G., Sherstyukov V. B. On an extremal problem related to the completeness of a system of exponentials in the disk // Asian-European J. of Math. – 2008. – V. 1, № 1. – P. 15–26.

[146] De Branges L. The Bernstein problem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1959. – V. 10. – P. 825–832.

[147] De Branges L. Hilbert spaces of entire functions. – Englewood Cliffs, New-York: Prentice-Hall, IX, 1968. – 326 p.

[148] Buck R. G. On the distribution of the zeros of entire function // J. Indian Math. Soc. – 1952. – V. 16, № 4. – P. 147–149.

[149] Cvijović D. Derivative polynomials and closed-form higher derivative formulae // Appl. Math. Comput. – 2009. – V. 215. – P. 3002–3006.

[150] Denjoy A. Sur les séries de fractions rationnelles // Bull. Soc. Math. France – 1924. – T. 52. – P. 418–434.

[151] Elbert A. Some recent results on the zeros of Bessel functions and orthogonal polynomials // J. of Comp. and Appl. Math. – 2001. – V. 133. – P. 65–83.

[152] Eremenko A., Yuditskii P. An extremal problem for a class of entire functions of exponential type // arXiv: math. CV/ 0807.2054.

[153] Forsyth A. R. The expression of Bessel functions of positive order as products, and of their inverse powers as sums of rational fractions // Messenger of Mathematics. Ed. by J. W. L. Glaisher. – 1920–1921. V. L. – P. 129—149.

[154] Hamburger H. L. Hermitian transformation of defficiency-index (1,1), Jacobi matrices and undetermined moment problems // Amer. J. of Math. – 1944. – V. 66, № 4. – P. 489–522.

[155] Hardy G. H. On the function $P_s(x)$ // Quart. J. of Math. – 1905. – V. 37. – P. 146–172.

[156] Ingham A. E. A note on Fourier transforms // J. London Math. Soc. – 1934. – V. 9. – P. 29–32.

[157] Ismail M. E. H., Muldoon M. E. On the variation with respect to a parameter of zeros of Bessel and q-Bessel functions // J. of Math. Analysis and Applications. – 1988. – V. 135. – P. 187—207.

[158] Koosis P. The logarithmic integral. I. – Cambridge Studies in Advanced Math., 12. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. – 606+xvi p.

[159] Laforgia A., Muldoon M. E. Monotonicity and concavity properties of zeros of Bessel functions // J. of Math. Analysis and Applications. – 1984. – V. 98. – P. 470—477.

[160] Levin B. Ya. (in collaboration with Lyubarskii Yu., Sodin M., Tkachenko V.) Lectures on entire functions. (Translations of Math. Monographs, Vol. 150) – Providence, Rhode Island: AMS, 1996. – 248+xv p.

[161] Levinson N. Gap and density theorem. (American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. 26) – New York: AMS, 1940. – 246+viii p.

[162] Luchko Yu. Asymptotics of zeros of the Wright function // J. for Analysis and its Applications. – 2000. – V. 19, № 1. – P. 1—12.

[163] Luxemburg W. A. J., Korevaar J. Entire functions and Müntz-Szász type approximation // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 157. – P. 23—37.

[164] Maergoiz L. S. On partial fraction expansion for meromorphic functions // Matem. fiz., analiz, geometriya. – 2002. – V. 9, № 3. – P. 1–6.

[165] Malliavin P., Rubel L. A. On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France. – 1961. – V. 89. – P. 175–206.

[166] Pfluger A. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytisher Functionen. I // Comment. Math. Helv. – 1938–1939. – V. 11. – P. 180–213.

[167] Pfluger A. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytisher Functionen. II // Comment. Math. Helv. – 1939–1940. – V. 12. – P. 25–65.

[168] Redheffer R. M. On even entire functions with zeros having a density // Trans. Amer. Math. Soc. – 1954. – V. 77. – P. 32–61.

[169] Redheffer R. M. Completeness of sets of complex exponentials // Advances in Math. – 1977. – V. 24, № 1. – P. 1–62.

[170] Rubel L. A. Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V. 83, № 2. – P. 417—429.

[171] Sneddon I. N. On some infinite series involving the zeros of Bessel functions of the first kind // Proc. of the Glasgow Math. Assoc. – 1960. – V. 4, № 3. – P. 144—156.

[172] Titchmarsh E. C. On integral functions with real negative zeros // Proc. London Math. Soc. – Ser. 2. – 1927. – V. 26. – P. 185—200.

[173] Valiron G. Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière // Annales de la faculte des sciences de Toulouse Ser. 3. – 1913. – T. 5. – P. 117–257.

[174] Wolff J. Sur les séries $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{A_k}{z - \alpha_k}$ // C. R. Acad. Sci. – 1921. – T. 173. – P. 1327–1328.