УТВЕРЖДАЮ
Проректор по организации научной и
проектно-инновационной деятельности
Южного федерального университета
доктор экономических наук, доцент

________________ И.К. Шевченко

«23» января 2017 г.

# ОТЗЫВ

**ведущей организации — федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Южный федеральный университет» на диссертацию Шерстюкова Владимира Борисовича «Асимптотические свойства целых функций, корни которых лежат в некотором угле», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»**

Теория целых функций одной переменной представляет собой один из традиционных и важнейших разделов современного комплексного анализа. Особое место в ней занимает тематика, в которой изучается взаимосвязь между асимптотическим ростом целых функций и распределением их нулей. Кроме самостоятельного интереса, основным мотивом для исследований в данном направлении является обилие применений их результатов к дифференциальным уравнениям в частных производных и уравнениям свертки, разложению функций в ряды, в теории интерполяции и аппроксимации, в аналитической теории чисел. Современное состояние этих исследований, помимо классиков (Ж. Адамар, Э. Борель, Ж. Валирон, Э. Линделеф), в значительной мере было обеспечено широко известными научными школами Б.Я. Левина, А.А. Гольдберга и А.Ф. Леонтьева. Несмотря на обилие, силу и глубину полученных к настоящему времени результатов и внушительный арсенал разнообразных методов, в тематике, о которой идет речь, остается нерешенным большой круг вопросов, в том числе и вызванных потребностями приложений. Поэтому тематику диссертационной работы В.Б. Шерстюкова мы с полным основанием считаем актуальной.

Остановимся на кратком анализе содержательной части диссертации.

В главе 1 основное внимание автора сосредоточено на следующей задаче. Рассматривается каноническое произведение

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right),$$

где $\Lambda = (\lambda_n)_n$ — возрастающая последовательность положительных чисел с конечной положительной плотностью (при показателе 1). Требуется найти условия на разреженность $\Lambda$, которые гарантируют полную регулярность роста $L(\lambda)$ или, что равносильно, измеримость $\Lambda$. Следуя идеям Вл. Бернштейна и А.Ф. Леонтьева и работам А.В. Братищева, А.М. Гайсина, А.Ю. Попова и др., степень разреженности автор измеряет с помощью оценок снизу на рост последовательности $(|L'(\lambda_n)|)_n$. Ранее А.В. Братищевым было показано, что для решения данной проблемы нельзя использовать классический индекс конденсации Вл. Бернштейна $\delta(\Lambda)$. Точнее, даже самые разреженные с точки зрения этого индекса последовательности, для которых $\delta(\lambda) = 0$, могут оказаться неизмеримыми. Тем удивительнее результаты автора диссертации, которые дают неулучшаемый ответ на поставленную проблему в терминах весового индекса конденсации. Остановимся на этом чуть подробнее. Автор вводит класс вогнутых весов, обладающих достаточно естественными для теории целых функций априорными свойствами, и по каждому такому весу $\omega$ определяет весовой индекс конденсации бернштейновского типа $\delta(\omega, \Lambda)$ (см. формулу (1.8)). В теореме 1.1 он доказывает, что конечность этого индекса для веса, удовлетворяющего дополнительному условию (1.10), автоматически влечет полную регулярность роста $L(\lambda)$. А в теореме 1.2 он устанавливает, что для правильно меняющихся весов $\omega$, не удовлетворяющих (1.10), всегда имеется неизмеримая последовательность $\Lambda$ с нулевым относительно $\omega$ индексом конденсации. Следует отметить, что доказательство теоремы 1.1 потребовало от автора разработки филигранной техники, а построение примеров в теореме 1.2 проведено, в отличие от предшествующих работ, конструктивно. Отметим также теорему 8.3, в которой установлены новые достаточные условия для положительного ответа на известную проблему А.Ф. Леонтьева о полной регулярности роста целой функции экспоненциального типа $L(\lambda)$ с простыми нулями, произвольным образом размещенными на плоскости, и максимально возможным ростом последовательности модулей значений производной в этих нулях. В отличие от предыдущих работ ряда авторов они формулируются в терминах оценки снизу $|L(\lambda)|$ не на расширяющейся и уходящей в бесконечность последовательности окружностей или кривых, а на фиксированной прямой. В § 9 показано, как можно использовать полученные в первой главе теоремы для усиления известных результатов об абсолютно представляющих системах леонтьевского типа, установленных ранее в работах А.Ф. Леонтьева, Ю.Ф. Коробейника и А.В. Абанина.

В главе 2 проводится систематическое исследование одной экстремальной задачи, связанной с вопросами полноты систем экспонент. Именно, рассматривается класс последовательностей комплексных чисел $\Lambda = (\lambda_n)_n$, уходящих в бесконечность, лежащих в угле $|\arg\lambda| \leq \theta$ раствора $2\theta$, не превосходящего $\pi$, имеющих при порядке $\rho \in (0,1)$ предписанную верхнюю плотность $\beta$ и нижнюю плотность, удовлетворяющую заданной оценке снизу через число $\alpha$. По каждой такой последовательности определяется каноническое произведение

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right). \tag{1}$$

Требуется найти наименьший возможный тип (при порядке $\rho$) таких произведений. В §§ 10, 11 (случай $\theta = 0$) и § 15 (случай любого $\theta \leq \pi/2$) автору удалось полностью решить сформулированную проблему. Он установил формулу для вычисления этого типа, обозначенного в диссертации символом $s_\theta(\alpha,\beta;\rho)$, и доказал, что он достигается на некоторой функции, нули которой расположены на лучах $\arg\lambda = \pm\theta$. Для решения автору потребовалась весьма изощренная техника, а найденная им формула для экстремального типа оказалась далеко нетривиальной. Отметим, что классические результаты по аналогичной проблеме в случае, когда нет ограничений на распределение нулей, доказываются достаточно просто, а соответствующая формула имеет сравнительно простой вид. В то же время, рассмотренный автором случай, когда нули расположены в угле раствора меньше $\pi$, особенно когда угол вырождается в положительный луч, имеет важное значение при исследовании ряда известных проблем. Например, канонические произведения вида (1) лежат в основе обобщенной теории ультрараспределений Берлинга-Бьорка, предложенной И. Циоранеску и Л. Жидо в 80-х годах прошлого века. Сам автор в § 14 применяет теорему 10.1 к исследованию радиуса полноты системы экспонент, показатели которой расположены одинаково на нескольких лучах.

В главе 3 исследуются разложения в ряды простейших дробей функций $1/L$, где $L$ – целая функция. Отметим, что теоремы Миттаг-Леффлера хотя и дают положительный ответ на возможность таких разложений с различными "поправками", но этого явно недостаточно для потребностей приложений. В этой главе решается проблема описания целых функций $L$ с простыми нулями $\lambda_n$, для которых существуют целое число $p \geq 0$ и многочлен $P$ такие, что имеет место разложение в ряд Крейна порядка $p$, сходящийся абсолютно и равномерно на компактах комплексной плоскости, не содержащих нулей $L$:

$$\frac{1}{L(\lambda)} = P(\lambda) + \frac{a_0}{\lambda} + \lambda^p \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\lambda_n^p(\lambda - \lambda_n)}.$$

Такие функции исследовались и применялись в большом числе работ по теории функций, негармоническому анализу, теории операторов и дифференциальным уравнениям (М.Г. Крейн, М.В. Келдыш, И.В. Островский, Луи де Бранж, Ю.Ф. Коробейник, А.А. Боричев и М.Л. Содин, Л.С. Маергойз, А.Г. Бакан и др.). Основополагающими в данном направлении являются результаты М.Г. Крейна. В 1947 г. он доказал необходимые условия представимости величины, обратной к целой функции $L$ с простыми вещественными нулями, в виде ряда по простейшим дробям (с нулевым многочленом $P$). Именно, им было показано, что если функция $1/L$ разложима в ряд Крейна некоторого порядка $p$, то $L$ принадлежит классу Картрайт. Достаточные условия представимости величины, обратной к целой функции экспоненциального типа с простыми вещественными нулями, в виде ряда Крейна (с нулевым многочленом $P$) были доказаны Луи де Бранжем в 1959 г. Возможность такого разложения была установлена затем Г. Педерсеном для целых функций $L$ нулевого экспоненциального типа, удовлетворяющих достаточным условиям Луи де Бранжа. В последнее десятилетие А.Г. Бакан получил версию теоремы Крейна для вещественных на вещественной оси целых функций с простыми вещественными нулями. Таким образом, критерии (без ограничительных дополнительных предположений) представимости в виде рядов Крейна величин, обратных к целым функциям, до исследований В.Б. Шерстюкова отсутствовали. Основным результатом главы 3 является теорема 16.4, в которой в естественных терминах доказан критерий представимости в виде ряда Крейна фиксированного порядка для величины, обратной к целой функции $L$ с простыми нулями в некоторой полосе в $\mathbb{C}$. Автор показывает, что возможность разложения равносильна тому, что $L$ является целой функцией экспоненциального типа с неотрицательным индикатором и ряд $\sum\limits_{\lambda_n\neq 0} |L'(\lambda_n)|^{-1}|\lambda_n|^{-p-1}$ сходится. И в частных случаях, когда нули $L$ вещественны (теорема 16.5) или когда $L$ – целая функция нулевого экспоненциального типа (теорема 16.6), этот результат является новым.

Глава 3 состоит из пяти параграфов. В § 16 дается постановка задачи о разложении в ряд Крейна, излагается ее история и формулируются основные результаты 3-ей главы. В § 17 изучаются общие свойства рядов Крейна и получены специальные суммационные соотношения. В § 18 доказывается центральный результат 3-ей главы – теорема 16.4. В § 19 теорема 16.4 уточняется для четных и нечетных функций. В § 20 рассматриваются примеры разложений конкретных функций и получены приложения основных результатов главы к разложениям на простые дроби величин, обратных к целым функциям из специальных классов: специальным бесконечным произведениям, функциям Бесселя $J_\nu$ с индексом $\nu > -1$. Для функций Бесселя $J_\nu$ эти разложения применены к вычислению точных значений некоторых сумм, содержащих нули $J_\nu$. Отметим ряд интересных суммационных соотношений, перекликающихся с классическими равенствами, полученными, в частности, Л. Эйлером, Дж. Рэлеем. Эта часть результатов диссертации может быть полезна в теории специальных функций.

Диссертация, написанная достаточно подробно и ясно, не лишена некоторых недостатков, носящих, в основном, редакционный характер. Не останавливаясь на описках (их совсем немного для такой большой и технически сложной работы), в качестве замечания отметим следующее. В определении весового индекса конденсации участвуют некоторые априорные требования к весу, главным из которых является его вогнутость. Для полноты исследования было бы весьма желательно провести анализ этого требования. Нам представляется возможным избавиться от требования вогнутости весовой функции без ограничения общности результатов автора. Но это только наше предположение, которое может быть предметом для дальнейшего изучения.

Указанное замечание ни в коей мере не снижает ценности и не влияет на общую оценку диссертационной работы, к которой мы сейчас переходим.

Из приведенного выше краткого анализа очевидно следует, что полученные автором результаты являются новыми. Практически все они неулучшаемы или представляют собой критерии. Их достоверность подтверждается строгостью математического обоснования, проведенного на современном уровне и разработанного лично автором. Новизну и значимость этих результатов подтверждает также и весомая апробация — выступления автора на нескольких десятках авторитетных конференций и ведущих научных семинаров и 16 основных публикаций, включая 13 работ из списка ВАК. Подавляющая часть из этих 13 работ опубликована лично автором и содержит практически все главные результаты диссертации, а вклад соавторов из двух совместных работ правильно отражен в диссертации. Автореферат адекватно и полно отражает содержание диссертации.

Результаты работы могут быть использованы при исследовании различных функциональных уравнений, в гармоническом анализе, теории аппроксимации, теории операторов, теории специальных функций и других разделах современной математики и ее приложениях. Они могут быть использованы специалистами в перечисленных областях, работающими в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Математическом институте им. В.А. Стеклова, Санкт-Петербургском государственном университете, Институте математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Московском государственном педагогическом университете, Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского, Сибирском и Южном федеральных университетах.

На основании вышеизложенного считаем, что диссертационная работа Шерстюкова Владимира Борисовича «Асимптотические свойства целых функций, корни которых лежат в некотором угле» является цельной и законченной научноквалификационной работой, содержащей полное решение нескольких классических задач. В ней введено и изучено новое полезное понятие весового индекса конденсации; разработан новый «параметрический» метод исследования канонических произведений, новый метод изучения аппроксимационных свойств функциональных систем леонтьевского типа на основе привлечения разложений порождающей функции на простые дроби; развито новое научное направление, связанное с систематическим изучением асимптотических свойств канонического произведения в зависимости от поведения в нулях его производных. Актуальность темы, достоверность и значимость для науки результатов исследования не вызывают сомнений. Результаты проведенного Шерстюковым В.Б. исследования в совокупности можно квалифицировать как крупный вклад в развитие современной теории целых функций.

Таким образом, представленная диссертация по всем параметрам удовлетворяет п. 9 «Положения о присуждении ученых степеней» ВАК РФ, а ее автор — Шерстюков Владимир Борисович — заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Отзыв подготовлен доктором физико-математических наук (специальность 01.01.01), профессором, заведующим кафедрой математического анализа Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета Абаниным Александром Васильевичем (адрес: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-а; телефон: +7(863) 2-975-111; e-mail: avabanin@sfedu.ru) и доктором физико-математических наук (специальность 01.01.01), доцентом, профессором кафедры алгебры и дискретной математики Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета Мелиховым Сергеем Николаевичем (e-mail: melih@math.rsu.ru).

Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры математического анализа Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, протокол № 1 от 18 января 2017 г.

Заведующий кафедрой
математического анализа
Южного федерального университета,
д.ф.-м.н., профессор — Абанин Александр Васильевич

Профессор кафедры алгебры
и дискретной математики
Южного федерального университета,
д.ф.-м.н., доцент — Мелихов Сергей Николаевич

Департамент административно правового регулирования

образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Личную подпись Абанина А.В.
Мелихова С.Н.
ЗАВЕРЯЮ:
Ведущий специалист по работе с персоналом
Паленова С.Ю.
«19» 01 2017 г.