ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
о диссертационной работе Шерстюкова Владимира Борисовича "Асимптотические свойства целых функций, корни которых лежат в некотором угле" ,

представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Целые функции играют важную роль в анализе и его приложениях, поскольку они являются естественным обобщением многочленов и наиболее близки к многочленам по своим свойствам. Одной из важнейших проблем теории целых функций является проблема связи между ростом целой функции и распределением ее нулей. К этой проблеме сводятся многие задачи из различных областей, смежных с теорией функций комплексного переменного. Исследование связи между ростом целой функции и распределением ее нулей началось с классических работ Бореля, Адамара, Линделефа и других авторов на стыке 19-го и 20-го столетий. Более тонкие характеристики роста и распределения нулей целых функций дали возможность установить более точные зависимости. При этом аналогичные зависимости были обнаружены для более широкого класса функций, голоморфных внутри угла. Особенно точные зависимости были получены для специального класса функций, которые теперь называют функциями вполне регулярного роста. Теория целых функций вполне регулярного роста была создана в 20 веке, независимо друг от друга, Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером. Эти исследования были продолжены математиками Москвы, Уфы, Красноярска, Ростова, Харькова, Львова, Еревана, а также математиками дальнего зарубежья.

Диссертационная работа В. Б. Шерстюкова восходит к указанному кругу задач, связанному с изучением асимптотического поведения функции в зависимости от распределения ее нулей в комплексной плоскости. Многочисленные работы, которые посвящены этой проблематике, касаются, как правило, функций вполне регулярного роста. Однако, задачи полноты и представления рядами в функциональных пространствах, теории дифференциальных операторов бесконечного порядка и многие другие зачастую сопряжены с целыми функциями, которые не являются функциями вполне регулярного роста. Поэтому тематика задач, связанных с нахождением экстремальных значений для основных асимптотических характеристик роста целых функций из более общих классов целых функций, чем функции вполне регулярного роста, несомненно является актуальной. В последнее время возникают новые направления в исследовании экстремальных задач для индикаторов и типов целых функций конечного порядка с заданными асимптотическими характеристиками распределения нулей.

Таким образом, актуальность данной работы обусловлена, с одной стороны, большим интересом к целым функциям в современной науке, с другой — недостаточным исследованием асимптотического поведения целых функций, нерегулярно растущих в окрестности бесконечности.

В теории функций комплексного переменного имеется большое число давно стоящих открытых проблем. Одной из таких проблем является проблема А. Ф. Леонтьева, возникшая в связи с вопросами разложения функций в ряды экспонент. Обобщение этой проблемы появляется при рассмотрении интерполяционной задачи в классе $[\rho(r), H(\theta)]$ целых функций с индикаторами при уточненном порядке $\rho(r)$ ($\to \rho > 0$), не превосходящими заданный индикатор $H(\theta)$. Кратко ее можно сформулировать следующим образом. Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность различных комплексных чисел, и $L(\lambda)$ — бесконечное произведение, построенное по узлам Λ. Для разрешимости задачи свободной интерполяции в классе $[\rho(r), H(\theta)]$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}}\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}+H(\arg\lambda_n)\right]=0\,. \tag{1}$$

Условие (1) является также необходимым и достаточным для разрешимости интерполяционной задачи в классе $[\rho(r),\ H(\theta)]_r$ целых функций вполне регулярного роста, если дополнительно потребовать правильной распределенности множества узлов интерполяции Λ, т. е. чтобы функция $L(\lambda)$ была функцией вполне регулярного роста. Естественно возникает вопрос: следует ли из условия (1), что множество Λ является правильно распределенным? Другими словами, следует ли из условия (1), что функция $L(\lambda)$ является функцией вполне регулярного роста? Отметим, что А. Ф. Леонтьев сформулировал проблему для случая $\rho(r)\equiv 1$.

Положительный ответ на этот вопрос для случая $0\leqslant\rho<1/2$ дал А. В. Братищев. Для случая же $\rho\geqslant 1/2$ А. В. Братищев дал отрицательный ответ. Однако, в работе А. В. Братищева не была выписана явно последовательность Λ, для которой выполняется равенство (1) и которая не является правильно распределенной (фактически, доказано лишь существование такой последовательности).

Ранее А. Ф. Гришин, используя построенную им теорию множеств регулярного роста целых функций, показал, что при выполнении условия (1) множество Λ может быть дополнено множеством $\tilde{\Lambda}$ так, что объединение $\Lambda\cup\tilde{\Lambda}$ является интерполяционным, правильно распределенным множеством. При этом доказательство А. Ф. Гришина носило конструктивный характер.

Основная часть диссертации начинается с изучения означенной проблемы для четных канонических произведений, нули которых $\pm\Lambda$ расположены на вещественной прямой. Из результатов предшественников стало ясно, что даже при дополнительных ограничениях нельзя охарактеризовать наличие плотности у последовательности $\Lambda\subset\mathbb{R}_+$ в терминах стандартного индекса конденсации

$$\delta(\Lambda)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}\,.$$

Автору диссертации потребовалось модифицировать понятие индекса конденсации так, чтобы с помощью новой характеристики можно было твердо гарантировать измеримость последовательности Λ. В первой главе диссертации вводится понятие индекса ω-конденсации (или весового индекса конденсации) последовательности Λ по правилу

$$\delta(\omega,\Lambda)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{\omega(\lambda_n)}\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}\,,$$

где $\omega(r)$ — положительная функция, определенная при $r\geqslant a$ с фиксированным $a>0$ и удовлетворяющая некоторым стандартным условиям, принятым при рассмотрении аналогичного класса задач.

Центральным результатом первой главы является теорема 1.1, в которой получено достаточное условие

$$\int\limits_a^\infty\frac{\omega(r)}{r^2}\,dr<\infty \tag{2}$$

для того, чтобы всякая положительная последовательность Λ, имеющая конечную верхнюю плотность и конечный индекс ω-конденсации, была измеримой.

Точность требования (2) на весовую функцию $\omega(r)$ при дополнительном предположении о правильном изменении $\omega(r)$ подтверждается теоремой 1.2. В ней установлено, что если интеграл (2) расходится, то найдется неизмеримая последовательность Λ с положительным шагом, имеющая конечную верхнюю плотность и конечный индекс ω-конденсации. Доказательство теоремы 1.2 является конструктивным.

Далее в первой главе рассматривается классическая проблема А. Ф. Леонтьева. В теореме 8.3 получены некоторые достаточные условия для положительного ответа на этот вопрос; в теореме 8.4 описан класс функций, для которых выполняются условия теоремы 8.3.

В заключение первой главы предыдущие методы и результаты применяются к вопросам представления аналитических в ограниченной выпуклой области функций рядами экспонент. Установлена серия фактов, в некотором смысле усиливающих известные ранее результаты. Отметим теорему 9.2, в которой уточняется критерий А. Ф. Леонтьева для того чтобы ряд экспонент сходился в области G к своей функции $f(z)$, какова бы ни была аналитическая на $\overline{G}$ функция $f(z)$; а также теоремы 9.4 и 9.6, дополняющие некоторые результаты Ю. Ф. Коробейника и А. В. Абанина и связанные с разложением в ряды по системе экспонент функций, аналитических в области G. Отличительной особенностью от работ предшественников является активное привлечение для доказательств этих теорем разложений на простые дроби соответствующих мероморфных функций.

Во второй главе диссертации рассматривается задача об оценке снизу типа целой функции, все нули которой расположены в некотором угле фиксированного раствора $\leqslant \pi$ и имеют заданные (верхнюю и нижнюю) плотности при некотором показателе $\rho \in (0,\, 1)$.

Экстремальным задачам для индикаторов и типов целых функций с нулями, расположенными произвольно или на одном луче, при заданном диапазоне изменения верхней и нижней плотностей (обычных, усредненных, максимальных, угловых и т. д.), посвящена обширная литература, начиная с известного классического мемуара Ж. Валирона 1913 г. Эта тематика активно развивалась во второй половине прошлого века. Интерес к ней сохраняется и в настоящее время, о чем свидетельствуют новые результаты, полученные в последнее время в работах отечественных и зарубежных математиков.

Для заданного угла $\Gamma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\arg\lambda| \leqslant \theta \leqslant \pi/2\}$ и заданных чисел $\rho \in (0,\, 1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\, \beta]$, рассматриваются всевозможные последовательности $\Lambda \subset \Gamma_\theta$ с верхней ρ-плотностью $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, нижней ρ-плотностью $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha$, и построенные по таким последовательностям Λ канонические произведения $L(\lambda)$, которые определяют целые функции нормального ρ-типа σ_ρ. При заданных условиях требуется указать наименьшее возможное значение для величины σ_ρ. Таким образом, ставится экстремальная задача отыскания точной нижней грани

$$s_\theta(\alpha, \beta; \rho) = \inf\left\{\sigma_\rho = \sigma_\rho(\Lambda) :\ \Lambda \subset \Gamma_\theta,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta,\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha\right\}.$$

В теореме 10.1 приведена формула для величины $s_\theta(\alpha, \beta; \rho)$ в случае, когда последовательность Λ распределена на одном луче, т. е. при $\theta = 0$. Доказано, что нижняя грань $s_0(\alpha,\, \beta;\, \rho)$ достигается на некоторой строго возрастающей последовательности $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ с плотностными характеристиками $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$. В частности, при $\alpha = 0$ из теоремы 10.1 получается доказанное ранее А. Ю. Поповым соотношение для $s_0(0,\, \beta;\, \rho)$, а при $\alpha = \beta$ получается известный результат Валирона о ρ-типе целой функции $L(\lambda)$ с измеримой относительно показателя $\rho \in (0,\, 1)$ последовательностью положительных нулей.

В §§ 12, 13 изучается поведение экстремальной величины $s_0(\alpha, \beta; \rho)$ как функции параметров α, β, ρ. Эта часть исследований проводилась совместно с Г. Г. Брайчевым, о чем диссертант отмечает в автореферате и в диссертации. Здесь для функции $s_0(\alpha, \beta; \rho)$ получены точные двусторонние оценки и найдена асимптотическая формула при $\rho \to 0$, описаны также особенности случая $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ по сравнению с общим случаем расположения нулей $\Lambda \subset \mathbb{C}$.

В § 14, который связан с исследованиями Л. А. Рубела, П. Мальявена и Л. А. Рубела, Б. Н. Хабибуллина, рассматриваются целые функции экспоненциального типа с нулями, одинаково расположенными на нескольких лучах. В теореме 14.1 найдена формула для наименьшего значения экспоненциального типа канонических произведений с симметричными вещественными нулями, которая обобщает предшествующие результаты Р. М. Редхеффера и А. Ю. Попова, полученные без учета нижней плотности нулей. Эта формула дает оценку сверху для радиуса полноты систем экспонент с вещественными симметричными показателями (теорема 14.3). Более общее утверждение об оценке сверху для радиуса полноты семейства систем кратных экспонент содержится в теореме 14.2. Оценки, приведенные в теореме 14.2, сопровождаются численными примерами.

В заключительном § 15 второй главы величина $s_\theta(\alpha, \beta; \rho)$ вычислена и исследована для значений параметра $\theta \in (0, \pi/2]$. Центральным результатом этого параграфа является теорема 15.1, в которой приводится значение $s_\theta(\alpha, \beta; \rho)$ и доказывается, что точная нижняя грань $s_\theta(\alpha, \beta; \rho)$ достигается для некоторой целой функции с последовательностью нулей Λ, расположенной на лучах $\arg \lambda = \pm\,\theta$, причем $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$. Замечательным, на мой взгляд, является то, что в формуле для $s_\theta(\alpha, \beta; \rho)$ выписана явная зависимость от ρ и θ, которая напоминает формулу индикатора целой функции и позволяет сделать предположение, что величина $s_\theta(\alpha, \beta; \rho)$ является ρ-тригонометрически выпуклой функцией. Как известно, ρ-тригонометрически выпуклые функции являются обобщением выпуклых функций и занимают важное место в анализе и его приложениях. Теорема 15.1 находит применения в вопросах единственности для целых функций и полноте систем экспонент (теорема 15.3), в теории рядов Дирихле (теорема 15.4).

Заметим, что различные экстремальные задачи в теории целых функций, когда нули расположены в некотором угле фиксированного раствора или на конечной системе лучей, рассматриваются не только для индикаторов и типов целых функций. Так, в стандартных обозначениях неванлинновской теории распределения значений, для целой функции порядка ρ, $1 < \rho < \infty$, с положительными нулями известна оценка

$$0,9\,\frac{|\sin \pi\rho|}{\rho + 1} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r, 1/f)}{T(r, f)} \leqslant A(\rho)\,,$$

где $A(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$. Рассматриваются также многочисленные задачи для целых функций бесконечного порядка с нулями, расположенными на конечной системе лучей. В частности, Майлз доказал, что такие функции имеют и нижний порядок, равный бесконечности. Интерес к такого рода задачам, по-видимому, не в последнюю очередь вызван проблемой дзета-функции Римана, нули которой расположены на отрицательной полуоси и в полосе $0 < \operatorname{Re} z < 1$ симметрично относительно так называемой "критической прямой" $\operatorname{Re} z = 1/2$.

В главе 3 рассматривается круг вопросов о разложении на простые дроби величины, обратной к целой функции. Исследуется проблема М. Г. Крейна, связанная с общими классическими теоремами Миттаг-Леффлера о представлении мероморфных функций рядами простых дробей.

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция, имеющая бесконечно много простых нулей $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. В диссертации решена задача о справедливости представления в виде ряда Крейна

$$\frac{1}{L(\lambda)} = P(\lambda) + \frac{a_0}{\lambda} + \lambda^p \sum_{\lambda_n\neq 0} \frac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^p\,(\lambda-\lambda_n)},$$

где $P(\lambda)$ — полином, для целых функций с нулями, расположенными в полосе комплексной плоскости (теорема 16.4). Показано, что для данного представления требуется лишь наличие экспоненциальной оценки сверху на рост модуля функции и неотрицательность ее индикатора. Одновременно исследован вопрос о вычислении коэффициентов полинома $P(\lambda)$.

Дана конкретизация теоремы 16.4 в случаях четной и нечетной функций. Рассмотрены специальные классы бесконечных произведений, в частности, функция из работы Харди. Изучен вопрос о разложении в ряд типа Крейна величины, обратной к функции Бесселя произвольного индекса $\nu > -1$, и описано применение универсальных соотношений для числовых рядов вида $\sum\limits_{\lambda_n\neq 0} \dfrac{1}{L'(\lambda_n)\,\lambda_n^m}$ к вычислению сумм, составленных по нулям этой функции. Используя теорему 16.4, автор обобщает или уточняет известные результаты А. Р. Форсайта и И. Н. Снеддона (теорема 20.3) о функциях Бесселя первого рода.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты будут полезны в исследованиях, которые проводятся в области теории функций в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, в Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН, ПОМИ РАН, Институте математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН, Южном математическом институте Владикавказского научного центра РАН, Башкирском государственном университете, Сибирском федеральном университете, Южном федеральном университете, Московском педагогическом государственном университете, Юго-Западном государственном университете и других отечественных и зарубежных математических центрах.

Замечаний по стилю и оформлению диссертации и автореферата нет. В целом изложение полученных результатов в диссертационной работе проведено ясно и последовательно. По диссертационной работе можно сделать следующие замечания.

1. В списке литературы и в диссертации совершенно не отражены исследования А. Ф. Гришина о множествах регулярного роста целых функций, из которых, в частности, следует, что если функция регулярно растет на множестве своих нулей, то это множество можно дополнить до правильно распределенного, что является некоторым объяснением проблемы А. Ф. Леонтьева.

2. В параграфе 1 следовало бы ввести понятие эквивалентных весовых функций: $\omega_1(r) \sim \omega_2(r)$, если $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\omega_1(r)}{\omega_2(r)} = 1$, и показать, что для любой весовой функции $\omega_1(r)$ существует эквивалентная ей, правильно меняющаяся на бесконечности весовая функция $\omega_2(r)$. Тогда, без ограничения общности, в определение весовой функции можно добавить условие правильного изменения на бесконечности и убрать это дополнительное ограничение из теоремы 1.2.

3. Было бы полезно дать конструктивное доказательство теоремы 8.2 в духе доказательства теоремы 1.2, не привлекая понятия R-множества точек.

4. Множество локализации нулей из теоремы 8.4 лучше назвать "гиперболической полосой".

5. Желательно пояснить, возможно ли в теореме 15.1 расширить значения параметра θ на промежуток, больший чем $(0, \pi/2]$.

Указанные замечания не влияют на достоверность результатов и не снижают общей высокой оценки работы.

Оценивая диссертационную работу в целом, можно констатировать ее актуальность и научную новизну и квалифицировать ее как крупное научное достижение в теории функций комплексного переменного.

Содержание диссертации полностью и адекватно отражено в автореферате. Результаты диссертации своевременно и в полном объеме опубликованы в 16 научных статьях, 13 из которых входят в перечень Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации. Полученные результаты докладывались на многочисленных ведущих научных семинарах, а также на ряде российских и международных конференциях. Все выносимые на защиту научные результаты диссертационной работы получены автором лично, являются новыми и обоснованы в виде четких математических доказательств.

Диссертация является научно-квалификационной работой, ее автором разработано крупное, новое научное направление, а созданные при этом методы позволили решить ряд сложных, актуальных и давно стоящих задач. В диссертации, в частности, решены следующие научные проблемы: исследован вопрос о регулярности роста канонических произведений с вещественными симметричными нулями, найдено точное условие регулярности роста таких произведений; изучены асимптотические свойства произвольной целой функции экспоненциального типа с простыми нулями в зависимости от поведения в нулях ее производной; доказан цикл теорем о разложении аналитических в выпуклой области функций в ряды экспонент; найдена точная нижняя грань типов при порядке $\rho \in (0, 1)$ всевозможных целых функций, нули которых расположены на одном луче или в угле фиксированного раствора и имеют заданные верхнюю и нижнюю плотности; получен критерий разложения целой функции с простыми нулями, расположенными в некоторой полосе комплексной плоскости, в специальный ряд простых дробей.

Считаю, что диссертационная работа "Асимптотические свойства целых функций, корни которых лежат в некотором угле" полностью соответствует критериям, установленным в пункте 9 "Положения о присуждении ученых степеней", утвержденного Постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24 сентября 2013 года, а ее автор Шерстюков Владимир Борисович безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.01,
профессор кафедры высшей математики
Юго-Западного
государственного университета

Малютин Константин Геннадьевич

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94;
тел.:+7(4712) 222-620;
E-mail: kaf.vm@mail.ru

К. Г. Малютина

23. 12. 2016г