Отзыв официального оппонента о диссертационной работе
Шерстюкова Владимира Борисовича
"Асимптотические свойства целых функций,
корни которых лежат в некотором угле",

представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа В. Б. Шерстюкова посвящена изучению асимптотических свойств целых функций, корни которых принадлежат заданному множеству определенного класса. Эти классы характеризуются теми или иными геометрическими или асимптотическими ограничениями. Тематика диссертации занимает одно из центральных мест в теории целых функций, начиная со времени возникновения этой теории в работах Адамара, Бореля и Валирона. Несмотря на то, что этой тематике посвятили немало работ такие знаменитые математики прошлого века как Пойа, Мандельбройт, Пфлюгер, Левин, Боас, Гольдберг, Левинсон, а также ряд современных ученых (все их имена непросто перечислить в отзыве), к началу нынешнего века в рассматриваемой области теории целых функций осталось немало нерешенных проблем.

Расскажу об одной такой проблеме, которой я сам занимаюсь уже двадцать лет, и в которой соискатель достиг значительного успеха (вторая глава диссертации).

Рассматривается целая функция f, множество корней которой имеет заданную (конечную и положительную) верхнюю ρ-плотность

$$D_\rho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \left(r^{-\rho} n_f(r)\right)$$

($n_f(r)$ — количество корней функции $f(z)$ в круге $|z| \leqslant r$).

Валирон в 1913 г. доказал, что тип f при порядке ρ допускает оценку снизу

$$\sigma_\rho(f) \geqslant (e\rho)^{-1} D_\rho(f).$$

Через полвека Б. Я. Левин установил неулучшаемость этой оценки. Возникает вопрос, насколько можно улучшить эту оценку снизу $\sigma_\rho(f)$, если на множество корней наложены геометрические ограничения и если есть информация о значении нижнего предела $\varliminf\limits_{r\to+\infty} (r^{-\rho} n_f(r))$. Простейшее геометрическое ограничение таково: все корни функции f лежат в некотором угле раствора α.

При условии $\rho \in (0,\, 1)$, $\alpha \in [0,\, \pi]$ В. Б. Шерстюков решил поставленную задачу полностью. Он нашел точную нижнюю грань величин $\sigma_\rho(f)$, взятую по всем функциям, верхние и нижние ρ-плотности множества корней которых принимают заданные значения, а корни вне некоторого угла раствора α отсутствуют.

Отмечу, что случай $\alpha \in (\pi,\, 2\pi)$ пока не поддается исследованию, а если даже $\alpha = 0$ (корни функции лежат на одном луче), но $\rho > 1$, то в этой ситуации для наименьшего возможного значения $\sigma_\rho(f)$ при заданной $D_\rho(f)$ имеется только моя двусторонняя оценка, полученная восемь лет назад и до сих пор не усиленная. Сделанное замечание демонстрирует сложность проблемы.

Таким образом, результат второй главы диссертации можно квалифицировать как существенное продвижение в актуальной, давно исследуемой и весьма сложной проблематике.

Основным объектом исследования в первой главе диссертации являются четные канонические произведения

$$L_\Lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - z^2/\lambda_n^2\right),$$

последовательность корней которых вещественна и имеет конечную положительную верхнюю плотность

$$D(\Lambda) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n}.$$

(Считается, что $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность положительных чисел.) Весьма важную роль в теории интерполяции и теории рядов экспонент

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp\left(\lambda_k z\right)$$

играет связанная с последовательностью Λ величина

$$\delta(\Lambda) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln\left|\frac{1}{L'_\Lambda(\lambda_n)}\right|.$$

Как известно, верно неравенство $\delta(\Lambda) \geqslant 0$, и "наилучшей" признается ситуация $\delta(\Lambda) = 0$. Например, она имеет место, если существует предел отношения n/λ_n и элементы Λ равномерно отделены друг от друга: $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left(\lambda_{n+1} - \lambda_n\right) > 0$.

Около сорока лет назад возник вопрос: влечет ли за собой равенство $\delta(\Lambda) = 0$ "регулярность" поведения Λ ? Существует ли в этом случае $\lim_{n\to\infty} (n/\lambda_n)$? В 1983 г. А. В. Братищев дал на такой вопрос отрицательный ответ (предел может не существовать), и исследования в этом направлении прекратились. И вот у соискателя возникла блестящая идея: существование плотности у последовательности Λ зависит от скорости стремления к нулю последовательности

$$\frac{1}{\lambda_n} \ln\left|\frac{1}{L'_\Lambda(\lambda_n)}\right|.$$

Поставленный вопрос всесторонне и полно исследован в первой главе диссертации, насколько это возможно в рамках ее объема.

Основным результатом первой главы является следующая теорема.

Теорема. Пусть $\omega(r)$ — возрастающая к бесконечности, правильно меняющаяся, вогнутая при $r \geqslant a > 0$ функция. Тогда если интеграл $\int_a^\infty \left(\omega(r)/r^2\right) dr$ сходится, то асимптотическая оценка $\ln\left(1/|L'_\Lambda(\lambda_n)|\right) = O(\omega(\lambda_n))$, $n \to \infty$, влечет наличие плотности у последовательности Λ. Если же интеграл $\int_a^\infty \left(\omega(r)/r^2\right) dr$ расходится, то существует последовательность Λ, не имеющая плотности и удовлетворяющая асимптотической оценке $\ln\left(1/|L'_\Lambda(\lambda_n)|\right) = o(\omega(\lambda_n))$, $n \to \infty$.

По моему мнению серьезное исследование этой темы только начато в диссертации и сможет вырасти в новое направление. Предвижу, что в недалеком будущем сам соискатель и его возможные последователи получат, развивая методы диссертации, ряд результатов в этом направлении. Речь идет о том, чтобы при условии принадлежности множества корней некоторого канонического произведения F одному лучу (или, быть может, малому углу) из скорости сходимости последовательности $|\lambda_n|^{-\rho} \ln |F'(\lambda_n)|$ к своему пределу при $n \to \infty$ выводить асимптотику λ_n с оптимальным остаточным членом, а также асимптотику $\ln \left|F(r\, e^{i\theta})\right|$ при $r \to +\infty$ и различных $\theta \in (0,\, 2\pi]$.

Таким образом, результаты первой главы диссертации можно квалифицировать одновременно как открытие нового направления в теории распределения корней целых функций и как полное решение давно известной и весьма сложной задачи.

В третьей главе диссертации исследуется классический вопрос о разложении минус первой степени целой функции в ряд из простых дробей (может быть, немного модифицированный). Соискателем получены значимые результаты, главный из которых состоит в нахождении критерия разложимости для целых функций достаточно узкого, но (что очень существенно!) весьма востребованного в приложениях класса. Приведено немало новых примеров разложений функций в ряды простых дробей.

Результаты третьей главы диссертации можно квалифицировать как существенный прогресс в классической и востребованной в приложениях области исследований.

Рассмотрение диссертации позволяет сделать следующие выводы.

Диссертация В. Б. Шерстюкова "Асимптотические свойства целых функций, корни которых лежат в некотором угле" относится к хорошо известному специалистам и активно развивающемуся направлению современного анализа "распределение корней целых функций конечного порядка". Таким образом, тема диссертации является актуальной.

Основными достижениями диссертации, определяющими ее научную новизну, являются следующие результаты.

1. Найдено неулучшаемое на классе возрастающих последовательностей положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ условие, состоящее в асимптотической оценке снизу последовательности $\ln \left|L'_\Lambda(\lambda_n)\right|$, где $L_\Lambda(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - z^2/\lambda_n^2\right)$, гарантирующее наличие плотности у последовательности Λ.

2. Для любых $\rho \in (0,\, 1)$ и $\alpha \in [0,\, \pi]$ найдено наименьшее возможное значение типа при порядке ρ целых функций, верхняя и нижняя ρ-плотности множества корней которых равны заданным числам, причем все корни лежат в некотором угле раствора α.

3. При определенных условиях на множество корней целой функции F (считается, что все ее корни — простые) найден критерий возможности разложения $1/F(z)$ в ряд простых дробей.

Все полученные автором результаты обоснованы строгими и аккуратными математическими доказательствами. Это подтверждает их достоверность.

Результаты диссертации носят теоретический характер, а сама диссертация является, по моему мнению, научно-теоретическим трудом высокого уровня. В ней открыто новое направление исследований и решены три важные научные проблемы, перечисленные выше. Таким образом, диссертацию В. Б. Шерстюкова можно квалифицировать как крупное научное достижение; теоретическая ценность диссертации несомненна.

Считаю, что полученные в диссертации результаты найдут дальнейшее применение в исследованиях по теории целых функций, проводимых в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, Башкирском государственном университете, Институте математики с вычислительным центром УНЦ РАН и других математических исследовательских центрах в России и за рубежом. Это, в частности, определяет практическую значимость результатов диссертации.

Результаты диссертации своевременно и в полном объеме опубликованы автором в 16 работах, 13 из которых — в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК. Все основные результаты диссертации были представлены на ряде семинаров и международных конференций. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Таким образом, считаю, что диссертация В. Б. Шерстюкова "Асимптотические свойства целых функций, корни которых лежат в некотором угле" соответствует всем требованиям п. 9 "Положения о присуждении ученых степеней" , утвержденного Постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24.09.2013, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор, Шерстюков Владимир Борисович, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.01,
ведущий научный сотрудник
кафедры математического анализа
механико-математического факультета
Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова

Попов
19.01.2017

Попов Антон Юрьевич

119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1,
МГУ, механико-математический факультет,
кафедра математического анализа;
тел.:+7(495)939-18-01;
E-mail: mysfed@mail.ru

Подпись ведущего научного сотрудника
кафедры математического анализа,
д.ф.-м.н. А. Ю. Попова заверяю

И. о. декана механико-математического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Чубариков