О Т З Ы В официального оппонента

о диссертации Шерстюкова Владимира Борисовича «**Асимптотические свойства целых функций, корни которых лежат в некотором угле**», представленной на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01. 01. 01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Взаимосвязи между свойствами целой функции и распределением её нулей (корней) — один из ключевых аспектов теории целых функций и её многочисленных приложений. Это направление — основное в диссертации применительно к вопросам роста и «правильного» поведения целых функций конечного порядка при дополнительных ограничениях на распределение её нулей, к возможностям специальных представлений таких функций и т.п. Актуальность исследований в этом направлении, как исходя из внутренней логики развития теории целых функций, так и в в связи с многочисленными её применениями в различных разделах математики и физики, очевидна. Более подробно на истоках и истории собственно тематики диссертации здесь не останавливаемся, поскольку эти аспекты весьма детально отражены как во введении диссертации, так и в автореферате. Перейдём непосредственно к обзору содержания диссертации с обсуждением новизны и значимости исследования, а также степени завершённости результатов.

Во **введении**, параллельно с обзором известных ранее результатов по исследуемой тематике, обсуждены основные результаты диссертации. Далее $\rho \in (0, +\infty)$.

Основной объект исследований в **главе 1** — это строго возрастающая неограниченная последовательность $\Lambda := (\lambda_k)_{k=1,2,\dots}$ чисел на положительной полуоси $(0, +\infty)$ с конечными *верхней* и *нижней ρ-плотностями* соответственно

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \limsup_{t\to+\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\rho} \quad \text{и} \quad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \liminf_{t\to+\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\rho}, \quad \text{где } n_\Lambda(t) := \sum_{|\lambda_k|\le t} 1 \tag{1}$$

— считающая функция последовательности Λ. Рассматривается $\rho = 1$, $\overline{\Delta}(\Lambda) := \overline{\Delta}_1(\Lambda)$.

Основная задача — *при каких условиях на непрерывную строго возрастающую к $+\infty$ вогнутую функцию $\omega\colon [a, +\infty) \to (0, +\infty)$, $a > 0$, и индекс ω-конденсации*

$$\delta(\omega, \Lambda) := -\liminf_{k\to+\infty} \frac{1}{\omega(\lambda_k)} \sum_{j\ne k} \left(\log\frac{2}{\lambda_k} + \ln\left|1 - \frac{\lambda_k^2}{\lambda_j^2}\right|\right) \quad \textit{последовательности } \Lambda \tag{2}$$

имеет место равенство $\overline{\Delta}(\Lambda) = \underline{\Delta}(\Lambda)$, т. е., в традиционной терминологии, последовательность Λ *измерима*? Здесь (2) — развитие естественно возникающего при $\omega(x) \equiv x$, $x \in [a, +\infty)$, классического индекса конденсации $\delta(\Lambda)$ целой чётной функции экспоненциального типа с точной последовательностью нулей $\Lambda \cup (-\Lambda)$ кратности 1.

Решение задачи, данное в главе 1:

теорема 1.1($\Rightarrow$) *если*

$$\overline{\Delta}(\Lambda) < +\infty, \quad \delta(\omega, \Lambda) < +\infty \quad и \quad \int_a^\infty \frac{\omega(r)}{r^2}\, dr < +\infty, \tag{3}$$

то Λ *— измеримая последовательность;*

теорема 1.2($\Leftarrow$) *если для некоторого числа* $p \in (-\infty, +\infty)$ *существует предел*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} \equiv t^p,\ t \in (1, +\infty), \quad и \quad \int_a^\infty \frac{\omega(r)}{r^2}\, dr = +\infty, \tag{4}$$

то для любых чисел $0 \le \alpha < \beta < +\infty$ *можно сконструировать строго возрастающую неограниченную последовательность* $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1,2,\dots} \subset (0, +\infty)$, *для которой*

$$\underline{\Delta}(\Lambda) = \alpha < \beta = \overline{\Delta}(\Lambda), \qquad \delta(\omega, \Lambda) = \delta(\Lambda) = 0, \qquad \liminf_{k\to+\infty} \inf_{j>k} |\lambda_j - \lambda_k| > 0. \tag{5}$$

Доказательства многоэтапны, используют ряд вспомогательных утверждений и формул (§§ 2,3), представляющих и самостоятельный интерес. В главе 1 использованы весьма изощрённые конструкции сглаживания весовой функции ω с сохранением её свойств в § 5, а также специальной последовательности Λ в доказательстве теоремы 1.2 в § 6. Все построения сопровождаются (контр-)примерами из § 7. В § 8 рассматривается известная задача А. Ф. Леонтьева о полной регулярности роста целой функции экспоненциального типа L с точной последовательностью простых нулей $\Lambda \subset \mathbb{C}$ и индикатором роста h_L при условии

$$\lim_{k\to+\infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |L'(\lambda_k)| - h_L(\arg \lambda_k) \right\} = 0. \tag{6}$$

Это теоремы 8.1, 8.2, содержащие явные конструкции-контрпримеры к задаче А. Ф. Леонтьева в случае индикатора $h_L(\theta) \equiv \sigma|\sin\theta|$, $\theta \in [0, 2\pi)$, а также для $h_L > 0$, но при условии чуть более слабом, чем (6). Теоремы 8.3, 8.4 со следствием дают широкий спектр случаев положительного решения задачи А. Ф. Леонтьева. Несмотря на то, что пока окончательное решение этой задачи при $h_L > 0$ неизвестно, исследования диссертации в этом направлении — серьёзное продвижение в этой непростой, но актуальной проблеме. Заключительный § 9 главы 1 даёт условия представимости голоморфных функций в выпуклой области рядом экспонент (теоремы 9.2, 9.4, 9.6).

В **главе 2** рассматривается $\rho \in (0, 1)$, а основной является экстремальная задача — найти величину

$$s(\alpha, \beta; \rho) := \inf\left\{ \sigma_\rho(\Lambda) := \limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{r^\rho} \sum_k \left(1 + \frac{r}{\lambda_k}\right) : \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \ge \alpha,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta \right\}. \tag{7}$$

Законченное решение, данное в §§ 10–11 из гл. 1 — **теорема 10.1**: *для любых чисел* $\rho \in (0,1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\beta]$

$$s(\alpha,\, \beta;\, \rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{a\,(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{\beta\, a^{-\rho} - \alpha\, x^{-\rho}}{x+1}\, dx. \tag{8}$$

Теорема 10.1 содержит в себе точный результат А. Ю. Попова о значении $s(0,\, \beta;\, \rho)$. В §§ 12–13 даны разнообразные наглядные оценки величины (8), исследованы её взаимосвязи с другими характеристиками последовательности Λ, установлены асимптотические соотношения для неё. Подобного рода экстремальные задачи применяются к аппроксимации системами экспонент

$$\Big\{\exp\big(\lambda_k e^{\frac{2\pi j}{m} i} z\big) : j = 0, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots \Big\} \tag{9}$$

в пространствах голоморфных функций в круге. В § 14 даны оценки радиуса полноты $R(\Lambda^{(m)})$ — точной верхней грани чисел $R \geq 0$, для которых система (9) полна в пространстве голоморфных функций в круге $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$ в топологии равномерной сходимости на компактах. Эти оценки выражаются через α, β, m и существенно дополняют подобные оценки оппонента и других авторов. Точные выражения радиуса полноты неизвестны и последние результаты в этом направлении показывают, что они вряд ли возможны через конечное число характеристик-плотностей последовательности показателей. Задача вычисления радиуса полноты системы экспонент через последовательность показателей рассматривалась рядом математиков (Л. Шварц, Р. Редхеффер, А. Бёрлинг, Л. А. Рубел, П. Мальявен, А. Ф. Леонтьев и многие другие) и часто отмечалась ими как исключительно сложная проблема. Оценки радиуса полноты в § 14 сопровождаются тонким сравнительным анализом их по отношению к другим известным оценкам подобного рода. В § 15 точные оценки величины (7) распространяются на аналогичную ей величину $s_\theta(\alpha,\, \beta;\, \rho)$ для случая, когда последовательность Λ расположена не на вещественной оси, а в угле $\Gamma_\theta := \big\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \theta\big\}$ с произвольным фиксированным $\theta \in [0, \pi/2]$ (**теорема 15.1**). Если в точном значении для $s_\theta(\alpha,\, \beta;\, \rho)$ из теоремы 15.1 подставить $\theta = 0$, то получаем именно (8). Таким образом, теорема 15.1 содержит в себе теорему 10.1. Её результат позволяет распространить оценки радиуса полноты для системы экспонент (9) на случай последовательности показателей $\Lambda \subset \Gamma_\theta$ с $\theta \in [0, \pi]$.

В последней **главе 3** рассматривается ныне уже классическая задача, восходящая к М. Г. Крейну, о целых функциях L, для которых мероморфная функция $1/L$ раскладывается в ряд из простых дробей с полюсами в нулях функции L. В **теореме 16.4** удалось избавиться от ряда условий, накладывавшихся ранее в предшествующих исследованиях, при предположениях, что все нули целой функции L экспоненциального типа простые и лежат в некоторой полосе конечной ширины. Сама теорема 16.4, как и следствия 1–4 из неё имеют форму критерия, и даже её частные случаи (теоремы 16.5 и

16.6) представляют самостоятельный интерес и обобщают ранее известные результаты. Предпринятые в § 17 исследования общих свойств соответствующих функции $1/L$ рядов простых дробей интересны и сами по себе. В § 19 детально разобраны случаи (не)чётной функции L (теоремы 19.1 и 19.2). В последнем § 20 приведены реализации разложений на простые дроби для конкретных видов целых функций и выписаны, конечно, с обоснованием, соответствующие им явные формулы и соотношения, т. е. разработанная в диссертации методика и техника вполне конструктивна и может быть использована в исследованиях специальных функций.

В заключении намечены дальнейшие перспективы исследований и их применений, а также поставлены открытые на момент оформления диссертации вопросы.

Таким образом, все основные результаты диссертации — новые, часто имеют достаточно завершенный характер, усиливают и обобщают как классические, так и современные результаты, охватывают серию новых проблем и открывают перспективы для дальнейших исследований. Доказательства весьма непростые, многоэтапные и потребовали как оригинальных технических приемов, так и существенного развития предшествующих методов и подходов. Неожиданны в своей общности новые результаты и в казалось бы давно исследованных классических областях. Все утверждения строго доказаны и там, где это необходимо, сопровождаются конкретными наглядными реализациями полученных общих результатов в виде частных, но новых случаев, раскрывающих существенность условий, преимущества по сравнению с результатами других авторов. В частности, приведено несколько примеров, иллюстрирующих отдельные результаты. Особо следует отметить, что изложение в диссертации отточенное, весьма информативное, но без излишеств.

Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации и доступно разъясняет как идейную, так и техническую сторону исследований.

Основные результаты автора опубликованы в 16 работах, 13 из которых — в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, входящих в рекомендованный список ВАК.

Замечания. **1.** Все результаты гл. 2 относятся к поведению модуля целой функции и считающей функции её нулей. Следовательно, они могут быть доказаны для субгармонических функций конечного типа при порядке ρ в увязке с радиальной считающей функцией меры Рисса этой функции. Более того, это может облегчить построение примеров, подтверждающих точность результатов: сначала построить меры и субгармонические функции с определёнными требуемыми свойствами, а затем использовать хорошо разработанную технику аппроксимации субгармонических функций логарифмами модуля целых. То же относиться к главе 1. В ней, конечно, участвует модуль производной целой функции L в нулях, но использованный в диссертации подход А. Ю. Попова через L^* в § 2 позволяет «субгармонически» адаптировать понятия простых нулей и индекса конденсации. **2.** Результаты § 15 о радиусе полноты не развивают результат Б. Н. Хабибуллина, а дополняют его, поскольку не содержат его в себе полностью как частный случай. **3.** В автореферате сформулированы и теорема 10.1, и теорема 15.1.

Последняя содержит в себе теорему 10.1 как частный случай. В самой диссертации это уместно, а в автореферате уже лишнее. Эти замечания, а в п. 1 даже просто намеченная перспектива, никоим образом не могут снизить значимость, актуальность, ценность и глубокую содержательность результатов диссертации.

Предложенная диссертация В. Б. Шерстюкова по совокупности результатов и методов может быть квалифицированна как крупный вклад в актуальную область исследований по теории функций и полностью соответствует всем предписаниям «Положения о порядке присуждения учёных степеней».

Считаю, что диссертация Шерстюкова Владимира Борисовича «**Асимптотические свойства целых функций, корни которых лежат в некотором угле**» вполне удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора физико-математических наук, а её автор — Шерстюков Владимир Борисович — безусловно заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01. 01. 01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

13 января 2017 года

Доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.01, профессор,
заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии
Башкирского государственного университета Б. Н. Хабибуллин

450076, РФ, Башкортостан, г. Уфа, ул. З. Валиди, 32, БашГУ,
факультет математики и информационных технологий
рабочий телефон (347)2736718, E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Подпись Хабибуллина Б.Н.
заверяю: ученый секретарь БашГУ
Баимова С.Р.
«16» января 2017 г.