ФГБОУ "Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова"

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Минков Станислав Сергеевич

Толстые аттракторы и косые произведения

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление.

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2016

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Ильяшенко Юлий Сергеевич.

Официальные оппоненты:
Гонченко Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений НИИ ПМК ФГБОУ "Нижегородский государственный университет им. Н,И. Лобачевского".
Пилюгин Сергей Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета ФГБОУ “Санкт-Петербургский государственный университет”.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Защита состоится 9 декабря 2016 года в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ МО Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.
С диссертацией можно ознакомиться на сайте механико-математического факультета: mech.math.msu.su/~snark/index.cgi

Автореферат разослан "___" октября 2016 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 501.001.85 на базе ФГБОУ
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова Власов
Виктор Валентинович.

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень разработанности проблемы

Эта диссертация относится к теории динамических систем. В ней изучаются свойства аттракторов Минлора гомеоморфизмов метрических пространств с мерой.

Понятие аттрактора было введено Ауслендером в 1964 году[1] для описания притягивающего множества динамической системы. Существуют несколько определений, математически формализующих это понятие; в этой работе будут рассматриваться следующие два.

Определение 1. *Предположим, что у отображения f динамической системы существует поглощающая окрестность (т.е., такое открытое множество U, что $f(\bar{U}) \subset U$), тогда её максимальным аттрактором называется множество*

$$A_{max} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{\circ n}(U)$$

Определение 2 (Milnor, 1985)**.** *Аттрактором Милнора динамической системы, заданной непрерывным отображением $f : X \to X$, где X - метрическое пространство с мерой, называется минимальное (по вложению) замкнутое множество, содержащее ω-предельные точки почти всех точек фазового пространства.*

В первой главе диссертации содержится напоминание определений тех понятий, которые входят в определение аттрактора Милнора.

Как правило, X будет римановым многообразием, а мера на нём - мерой Лебега. Вот несколько примеров.

Пример 1. *Напомним, что североюжное отображение окружности - это диффеоморфизм окружности ровно с двумя неподвижными точками, одной притягивающей и одной отталкивающей. Аттрактор Милнора североюжного отображения - притягивающая неподвижная точка. Рассматривая все фазовое пространство как притягивющую область, заключаем, что максимальный аттрактор - вся окружность.*

Но если рассматривать в качестве притягивающей области односвязную окрестность притягивающей неподвижной точки, то максимальный аттрактор такой окрестности - притгяивающая неподвижная точка.

[1] J. Auslander, N.P. Bhatia, P. Seibert. Attractors in dynamical systems. //Bol. Soc. Mat. Mexicana (2), 9 (1964), pp. 55–66.

Пример 2. *Определим кольцо в полярных координатах* (r, φ) *условием* $\{0,5 < r < 2\}$ *и отображение на нём:*

$$F(r, \varphi) = \left(\frac{r+1}{2}, f(\varphi)\right),$$

где f *- произвольное северюжное отображение окружности.*

Максимальным аттрактором этого отображения (поглощающей областью следует считать всё кольцо) будет инвариантная окружность, заданная условием $r = 1$*, а аттрактором Милнора - притягивающая неподвижная точка этой окружности.*

Одним из важнейших свойств инвариантных множеств является устойчивость по Ляпунову. Для динамических систем с дискретным временем это понятие определяется так:

Определение 3. *Множество A называется устойчивым по Ляпунову для динамической системы, заданной отображением* f*, если для всякой окрестности* U *множества* A *найдется открестность* V *этого же множества такая, что все орбиты, начинающиеся в* V*, лежат в* U*:*

$$\forall x \in V, \forall n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in U$$

.

Нетрудно показать, что максимальный аттрактор всегда устойчив по Ляпунову. Простейший пример позволяет видеть, что для аттрактора Милнора это неверно.

Пример 3. *Рассмотрим, отображение окружности, заданное в координатах формулою:*

$$\varphi \to \varphi + 0,01 \sin^2(\varphi/2).$$

Итерациями этого отображения все точки окружности, кроме 0, перемещаются против часовой стрелки, а 0 - единственная неподвижная точка. Следовательно, любая точка под действием итераций рано или поздно попадет в сколь угодно малую окрестность 0, и дальнейшие итерации будут лишь приближать её к 0. Таким образом, точка 0 является аттрактором Милнора.

Нетрудно видеть, что этот аттрактор неустойчив - любую малую окрестность нуля покидают точки с малым положительным значением координаты φ*.*

Это всего лишь одиночный пример. Неподвижная точка отображения окружности в этом примере является полуустойчивой, и её можно устранить малым возмущением системы. Однако недавний результат

И. С. Шилина [2] показывает, что в очень широком классе так называемых диких динамических систем типично встречается неустойчивость аттрактора Милнора. Понятно, что неустойчивость аттрактора в известном смысле является «патологическим» свойством, потому что с физической точки зрения это означает, что малейшее возмущение системы может заставить точку начать удаляться от аттрактора под действием итераций. Возникает вопрос, какие классы динаимических систем свободны от неустойчивых аттракторов, а какие - нет. В первом случае это надо доказать, во втором - построить пример неустойчивого аттрактора.

Городецким[3] на основании классических результатов Рюэлля[4], относящихся к теории гиперболических систем, получен следующий результат: аттрактор Милнора совпадает с объединением притягивающих гиперболических множеств для C^2-гладкого диффеоморфизма замкнутого многообразия, удовлетворяющего условию аксиомы А. В частности, для транзитивного диффеоморфизма Аносова аттрактор Минлора совпадает со всем фазовым пространством.

Актуальность темы следует из вышесказанного. Изучение свойств аттракторов Милнора является одним из современных методов исследования динамических систем.

Цель и задачи работы

Целью работы является исследование свойств аттракторов Милнора диффеоморфизмов и косых произведений как их модельного примера. К задачам относится получение аттракторов Милнора со свойствами толстоты и неустойчивости или доказательство, что их не существует.

Научная новизна

. Все доказанные результаты являются новыми. Кроме того, теорема Егорова, принадлежащая к области классического функционального анализа, впервые применена к исследованию динамических систем, заданных косыми произведениями.

[2] Ivan Shilin. Locally topologically generic diffeomorphisms with Lyapunov unstable Milnor attractors. Интернет-ресурс: https://arxiv.org/abs/1604.02437

[3] А. С. Городецкий. Иерархия аттракторов для диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А. // Вестник Моск. ун-та, сер. 1. Математика. Механика. 1996, №1, С. 84-86.

[4] David Ruelle. A Measure Associated with Axiom-A Attractors.// American Journal of Mathematics. Vol. 98, No. 3 (Autumn, 1976), pp. 619-654.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты относятся к метрической теории динамических систем, и, с одной стороны, отвечают на ранее высказанные гипотезы, с другой, могут служить основанием для дальнейшего исследования.

Методы исследования и степень достоверности

В работе применяются как классические методы исследования динамических систем, так и соображения элементарной геометрии поверхностей, а также теорема Егорова из области классического функцильнального анализа. Полученные результаты обоснованы математическими доказательствами, и поэтому являются достоверными.

Положения, выносимые на защиту

В диссертации доказаны следующие основные результаты:

1. Доказано, что для дважды гладких частично-гиперболических систем аттрактор Минлора состоит из неустойчивых слоёв. При этом приведён пример косого произведения, для которого аттрактор Милнора является неустойчивым по Ляпунову.

2. Доказано существование топологически неинвариантных аттракторов Минлора в классе бесконечно-гладких отображений и в классе диффеоморфизмов Аносова.

3. Показано существование систем, для которых не выполнено заключение специальной эргодической теоремы.

Апробация результатов

. Результаты диссертации были рассказаны неоднократно в 2010, 2012 и 2014 году на семинаре «Динамические системы» (механико-математический факультет МГУ им. Ломоносова) под руководством проф. Ю.С. Ильяшенко, на летней школе «Динамические системы» в г. Дубна в 2015 году, и в 2016 году на семинаре кафедры дифференциальных уравнений НГУ им. Лобачевского под руководством проф. В.З. Гринеса.

Структура и объем

Диссертация содержит пять разделов (в их числе введение и заключение) и список литературы. Список литературы насчитывает 23 наименования. Объем диссертации - 59 страниц.

Основное содержание работы

В **первой главе диссертации** показано, что для частично-гипебролических систем аттрактор Милнора состоит из неустойчивых слоев (совместный результат с А.В. Окуневым[5]). Напомним следующее.

Определение 4. *Диффеоморфизм $F : M \to M$ многообразия называется* $E^u \oplus E^{cs}$-частично гиперболическим, *если существуют $\lambda > 1, \mu < \lambda$, $c > 0$ и два непрерывных поля плоскостей $E_x^{cs} \subset T_xM$ и $E_x^u \subset T_xM$, которые инвариантны (т.е. $dF_x(E_x^{cs,u}) = E_{F(x)}^{cs,u}$) и*

$$T_xM = E_x^{cs} \oplus E_x^u,$$

таких, что для всех $n \in \mathbb{N}$:

$$\|dF_x^n|_{E_x^{cs}}\| \leq c\mu^n, \quad \|dF^{-n}|_{E_x^u}\| \leq c\lambda^{-n}.$$

Частично-гиперболические системы, в отличие от гиперболических, предполагают существование не устойчивого, а только центрально-устойчивого поля плоскостей, для которых максимальное растяжение слабее растяжения неустойчивым полем плосkстей. Класс таких систем гораздо шире класса динамических систем, удовлетворяющих аксиоме А. Доказанную теорему можно сформулировать так:

Теорема 1. *Пусть $F : M \to M$ — $E^u \oplus E^{cs}$-частично гиперболический C^2 - диффеоморфизм. Тогда аттрактор Милнора отображения F состоит из неустойчивых слоев.*

С использованием результата о частично-гиперболических системах в диссертации также дан ответ на одну из гипотез Ю.С. Ильяшенко, связанных с понятием толстого аттрактора.

Определение 5. *Аттрактор называется толстым, если он имеет положительную меру, но не совпадает со всем фазовым пространством.*

Ю.С. Ильяшенко построил типичный пример толстых максимальных аттракторов[6] сохраняющих край диффеморфизмов в следующем смысле:

Определение 6. *Множество в банаховом пространстве называется квазиоткрытым, если его можно получить как разность какого-то открытого множества и счетного числа множеств положительной коразмерности.*

[5] С. Минков, А. Окунев. Омега-предельные множества типичных точек частично-гиперболических диффеоморфизмов// Функц. анализ и его прил., 50:1 (2016), 59–66.

[6] Yu.S. Ilyashenko. Thick attractors of boundary preserving diffeomorphisms.// Indagationes Mathematicae, Vol. 22, Issues 3–4 (2011), pp. 257–314.

Теорема (Ильяшенко). *Существует квазиоткрытое множество U в пространстве диффеоморфизмов произведения двумерного тора на отрезок на себя такое, что в нём максимальный аттрактор для некоторой поглощающей области толстый.*

Вопрос о толстоте аттрактора Милнора в этом примере сводится к вопросу о том, верно ли, что для частично-гиперболических систем с одномерным неустойчивым слоем аттрактор Милнора содержит неустойчивые слои целиком?

Положительный ответ на этот вопрос основывается на применении к одномерным слоям результата про устройство предельных множеств точек для частично-гиперболических систем[7].

Таким образом, результат можно сформулировать так:

Следствие 2. *Существует квазиоткрытое множество U в пространстве диффеоморфизмов произведения двумерного тора на отрезок такое, что аттрактор Милнора толстый.*

Во **второй главе** приведен ряд результатов, касающихся толстых и неустойчивых аттракторов Минлора, которые строятся в классе косых произведений, а также теорема об искажении Хаусдорфовой размерности при гомеоморфизмах. Напомним определение.

Определение 7. *Косым произведением называется динамическая система, чьё фазовое пространство имеет вид прямого произведения $M = S \times B$ (где S называется слоем косого произведения, а B - базой), а отображение имеет вид:*

$$F(s,b) = (f_b(s), h(b)),$$

так что ограничение отображения на базу (называемое отображением в базе) не зависит от точки слоя. Отображения f_b называются послойными отображениями.

Традиционно рассматриваются два важных класса: в первом отображением в базе является диффеоморфизм Аносова тора, в другом - сдвиг Бернулли на бесконечных в обе стороны последовательностях из нулей и единиц.

Определение 8. *Ступенчатым косым произведением над сдвигом Бернулли называется косое произведение над сдвигом Бернулли с послойными отображениями, зависящими только от первого символа точки в базе.*

[7] С. Минков, А. Окунев. Омега-предельные множества типичных точек частично-гиперболических диффеоморфизмов// Функц. анализ и его прил., 50:1 (2016), С. 59–66.

Напомним, что диффеоморфизмы Аносова - это такие сисемы, у кототорых все фазовое пространство является гиперболическим множеством (обычно подразумевают, что фазовое пространство - компакт, и в дальнейшем тексте это предполагается). Простейшим примером диффеоморфизма Аносова является линейное отображение тора, заданное, если тор представить как фактор плоскости по $\mathbb{Z}^2$, гиперболической целочисленной матрицей с определителем 1 (напомним, что матрица гиперболическая, если модуль её собственных значений отличен от 0 и 1).

Существовало предположение (гипотеза, устно высказанная Ю.С. Ильяшенко), что в ступенчатом косом произведении со сдвигом Бернулли в базе и одним из послойных отображений - диффеоморфизмом Анослова, - аттрактором Милнора будет все фазовое пространство. (Аттрактор Милнора здесь рассматривается относительно произведения меры Бернулли в базе и меры Лебега по слою.)

Однако в диссертации показано, что это не так. Этот результат представляет интерес ещё и потому, что сдвиг Бернулли, как и диффеоморфизм Аносова являются эргодическими отображениями (то есть для них не существует инвариантных множеств положительной неполной меры). Тем не менее, за счёт выбора второго послойного отображения (оно в контрпримере имеет вид отображения за единичное время по градиентному току) можно сделать так, что аттрактор Милнора будет иметь вид прямого произведения базы на одну точку (и как следствие транзитивности послойного диффеоморфизма Аносова, он будет неустойчив по Ляпунову). Формально говоря,

Теорема 3. *Существует такое косое произведение F над сдвигом Бернулли со слоем тор и с одним из послойных отображений - диффеоморфизмом Аносова, что его аттрактор Милнора не совпадает со всем фазовым пространством.*

При доказательстве используется теорема Егорова. Она, напомним, утверждает, что из почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций можно выбрать равномерно сходящуюся на множестве сколь угодно большой меры. Использование этой теоремы в динамических системах при исследовании аттракторов предложено автором и получило дальнейшее развитие (например, в[8]). Прежде всего, применение теоремы Егорова позволяет значительно сократить количество встречающихся трудностей для косых произведений. Однако использование теоремы Егорова этим далеко не исчерпывается. В частности, автором доказан следующий результат, общий для динамических систем в целом:

[8] И.С. Шилин, Ю.С. Ильяшенко. Условно неустойчивые аттратокры.// Тр. МИАН, 2012, т. 277, С. 91–100.

Теорема 4. *Если аттрактор Минлора обратимой системы имеет положительную меру, то аттрактор обратного отображения либо тоже имеет положительную меру, либо неустойчив по Ляпунову.*

Более того, фактически, если оба аттрактора устойчивы по Ляпунову, они должны иметь множество положительной меры в пересечении. На первый взгляд, представляется почти невозможным, чтобы аттракторы, имеющее общее множество положительной меры, были устойчивы по Ляпунову и для прямого, и для обратного отображения. Однако в тексте диссертации построен пример.

Сходство между косыми произведениями и частично-гиперболическими диффеоморфизмами становится особенно ясным в свете так называемой стратегии Ильяшенко-Негута-Городецкого. Эта стратегия представляет собой набор методов, позволяющих по найденному примеру или классу примеров в косых произведениях над сдвигом Бернулли строить частично-гиперболические примеры для диффеоморфизмов многообразия. Одной из важных частей стратегии Ильяшенко-Негута-Городецкого является использование хаусдорфовой размерности и гёльдеровости сопряжений.

При попытке построить сопряжение данных динамических систем часто выясняется, что, хотя сами системы и гладкие, их сопряжение всего лишь гомеоморфизм. В связи с этим возникает вопрос - является ли аттрактор Милнора топологическим инвариантом при сопряжении системы?

В диссертации показано, что аттракторы Минлора не являются топологическими инвариантами системы, то есть существуют две сопряженные гомеоморфизмом системы с негомеоморфными аттракторами Милнора. Надо заметить, что это следует из примера в третьей главе: диффеоморфизма Аносова с неустойчивым аттрактором Милнора, так как все диффеоморфизмы Аносова на торе могут быть топологически сопряжены линейному, а для линейного диффеоморфизма Аносова аттрактор - весь тор. Однако в построенном примере оба отображения могут быть сделаны бесконечно гладкими, а диффеоморфизм Аносова с неустойчивым милноровским аттрактором принципиально может быть только C^1-гладким (что следует из упомянутого выше результата Городецкого).

Теорема 5. *Существуют два C^∞ - гладких диффеоморфизма S^2 - двумерной сферы, которые топологически сопряжены, но их аттракторы Минлора не топологически сопряжены, и, таким образом, не являются топологическими инвариантами.*

Стратегия Ильяшенко-Негута-Городецкого предлагает обход этих трудностей для косых произведений за счёт свойств хаусдорфовой размерности. Сопряжения косых произведений и частично-гиперболических систем не всегда бывают гладкими, однако они обладают важным свойством, а именно гёльдеровостью. Напомним, что отображение f на многообразии с метрикой ρ называется гёльдеровым, если существуют константы α (константа Гёльдера), L такие, что для всяких x, y из области определения верно:

$$\rho(f(x), f(y)) < L\rho(x, y)^{\alpha},$$

например, все липшицевы отображения являются гёльдеровыми, но их класс гораздо шире (например, классическая канторова лестница гёльдерова, но не липшицева).

Гёльдеровы отображения тоже не сохраняют метрических свойств системы, но они обладают свойством мало изменять хаусдорфову размерность множества.

Количественно хаусдорфова размерность под действием гёльдерова отображения может быть определена с помощью леммы Фальконера, утверждающей, что отношение хаусдорфовых размерностей образа и прообраза не превосходит константы Гёльдера отображения. Известно, что для некоторых гёльдеровых отображений эта оценка точна. Однако оставался открытым вопрос о том, насколько часто точна эта оценка, то есть насколько типичны гёльдеровы отображения, для которых эта оценка завышена. В этой главе диссертации показано, что в типичном случае для гёльдероморфизма куба оценка, задаваемая леммой Фальконера, является точной.

Теорема 6. *Найдется остаточное множество в малом γ - гёльдеровом пространстве бигёльдероморфизмов n - мерного куба, такое, что для любого отображения из этого множества существует множество полной меры, образ которого имеет хаусдорфову размерность γn.*

Хаусдорфова размерность является, таким образом, важным численным показателем, отличающем множества нулевой меры. Известно, что если у отображения f есть эргодическая мера, относительно которой мера Лебега непрерывна, то для всякой функции множество орбит, чьи временные средние отличаются от распределения согласно эргодической SRB-мере с полным бассейном, имеет нулевую меру Лебега. В работах, обзор которых приведен в статье автора[9], исследовалась хаусдорфова размерность таких исключительных точек.

Определение 9. *Для произвольной непрерывной функции и положительного числа $\varphi \in C^0(M), \alpha > 0$ определим множество (φ, α)*-нетипичных

[9] V. Kleptsyn, D. Ryzhov, S. Minkov. Special ergodic theorems and dynamical large deviations.//Nonlinearity 25 (11), 2012.

точек*:*

$$K_{\varphi,\alpha} := \{x \in M : \limsup_{n\to\infty} |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(f^i(x)) - \int\limits_M \varphi d\mu| \geq \alpha\}$$

Говорят, что для функции и меры (φ, μ) выполнено заключение специальной эргодической теоремы*, если для всякой непрерывной функции* φ *и положительного числа* α *хаусдорфова размерность* $K_{\varphi,\alpha}$ *строго меньше полной:* $\dim_H K_{\varphi,\alpha} < dimM$.

Все вышеприведенные результаты показывают, что заключение специальной эргодической теоремы выполняется. Возник естественный вопрос, существует ли хоть одно отображение с эргодической SRB-мерой, для которого оно неверно?

В этой же диссертации построен пример очень простого, точеченого аттрактора - носителя SRB-меры, для которого заключение специальной эргодической теоремы неверно (результат опубликован[10]), и описанная там динамическая система является той же, которая задает пример топологической неинвариантности аттракторов).

Теорема 7. *Существует* C^∞ *- гладкий диффеоморфизм* $f : S^2 \to S^2$ *такой, что у него существует атомарная SRB-мера с носителем в одной точке, но заключение специальной эргодической теоремы неверно.*

В заключительной части главы рассматривается sine-семейство. В этой части рассматриваются свойства динамики уже не вещественных, а голоморфных отображений. Голоморфная динамика - одно из классических направлений в динамических системах, берущая начало в работах Жюлиа и Фату, относящихся к первой половине двадцатого века. В настоящее время в связи с возможностями компьютерного моделирования наблюдается возрастающий интерес к голоморфной динамике, в частности, к метрическим (связанным с мерой) свойствам голоморфных функций[11].

Определение аттратктора Милнора для комплексной плоскости с мерой Лебега можно ввести точно так же, как и для вещественных функций. Но при этом нельзя найти естественного класса открытых множеств в топологии голоморфных отображений, так как в C^1-топологии две любые голоморфные функции либо отличаются на константу, либо «бесконечно далеки» друг от друга - на сфере Римана найдется точка, в

[10]V. Kleptsyn, D. Ryzhov, S. Minkov.Special ergodic theorems and dynamical large deviations.//Nonlinearity 25 (11), 2012

[11]Об этом см.: А. Еременко, М. Любич. Динамика аналитических преобразований. // Алгебра и анализ, вып. 3, т.1., 1989

которой значения этих функций сколь угодно сильно различаются. В связи с этим исследованию метрических свойств традиционно подвергаются не топологические области, а аналитически заданные семейства. В частности, теорема Любича-Рееса утверждает, что функции вида $\exp(az)$ (где a - ненулевой комплексный параметр) имеют эргодические свойства на всей комплексной плоскости; из неё, в частности, можно немедленно заключить, что аттрактор Милнора - вся комплексная плоскость. Другого рода свойства демонстрирует так называемое sine-семейство, которое состоит из функций вида $\sin(az+b)$. Для него Макмюлленом было доказано, что существует множество неустойчивых по Ляпунову орбит положительной меры. В данном разделе диссертации из этого выводится следующее:

Теорема 8. *В семействе* $\sin(az+b)$ *при достаточно малых* a, b *аттрактор Милнора неустойчив.*

В **третьей главе диссертации** доказано следующее:

Теорема 9. *Существует такой транзитивный* C^1 *- диффеоморфизм Аносова* F*, что аттрактор Милнора* F *не совпадает со всем фазовым пространством.*

Это совместный результат автора с А.В. Окуневым и И.С. Шилиным.

Построенный пример получается малым возмущением из линейного на торе. Таким образом, в дисертации построен пример диффеоморфизма Аносова с неустойчивым по Ляпунову аттрактором Милнора, существование которого само по себе контринтуитивно.

Поскольку диффеоморфизмы Аносова являются частным случаем частично-гиперболических систем, из контрпримера следует, что обобщение изложенного в главе 1 результата на C^1-гладкие динамические системы невозможно.

Две идеи, примененные для построения контрпримера, уже использовались раньше в динамических системах. Одна из них, предложенная для утроения окружности К.Ц. Бонатти (устное сообщение), состоит в том, чтобы рассматривать негладкую динамическую систему с кусочно-линейным отображением. Позднее идея была доведена до строгого доказательства существования отображения со следующими свойствами: отображение топологически сопряжено утроению окружности, но имеет аттрактор Милнора, не совпадающий со всем фазовым пространством. Утроение окружности является упрощенной моделью для понимания динамики диффеоморфизмов Аносова. По этой причине и так как результат нигде не написан, его схематическое изложение приведено в той же главе диссертации.

Вторая идея основана на том, что динамика линейного диффеоморфизма Аносова двумерного тора при ограничении на правильно выбранный прямоугольник внутри тора устроена как отображение подковы Смейла, которое представляет собой хорошо исследованную динамическую систему. Робинсон и Янг[12] предложили локально возмутить диффеоморфизм Аносова только на специально выбранном прямоугольнике, чтобы добиться всех требуемых эффектов уже на подкове Смейла. Аналогично и в контрпримере, который будет построен в этой диссертации, используется ход с локальным возмущением диффеоморфизма Аносова только на прямоугольнике (точнее, в некоторой его окрестности), в ограничении на который отображение является подковой Смейла. Доказательство позволяет прийти к выводу, что аттрактор Минлора полностью находится внутри прямоугольника. Поскольку неустойчивые слои диффеоморфизма Аносова тора плотны во всем торе, то, в частности, аттрактор Милнора в этом примере не состоит из неустойчивых слоёв.

Заключение

Итоги и дальнейшее развитие

Итогом диссертационной работы является доказательство наличия у аттракторов Милнора диффеоморфизмов новых интересных свойств.

Показано, что аттрактор Милнора не является, вообще говоря, топологическим инвариантом ни для бесконечно гладких отображений, ни для диффеоморфизмов Аносова. Показано, что для аттракторы частично-гиперболических систем состоят из неустойчивых слоёв. Показано, что существуют динамические системы, для которых не выполнено заключение специальной эргодической теоремы.

В связи с этим дальнейшим развитием темы диссертационного исследования могли бы послужить такие вопросы:

Вопрос 1. *Является ли аттрактор частично-гиперболических диффеоморфизов состоящим из неустойчивых слоёв в C^1 случае? Существует ли типичное множество в пространстве таких диффеоморфизмов, где аттрактор состоит из неустойчивых слоёв?*

Вопрос 2. *В классе ручных диффеоморфизмов аттрактор Милнора типичным образом устойчив по Ляпунову или нет?*

Вопрос 3. *Плотно или нет в классе C^1 диффеоморфизмов Аносова двумерного тора множество отображений с аттрактором Милнора, не*

[12] Clark Robinson, Lai-Sang Young. Nonabsolutely continuous foliations for an Anosov diffeomorphism. // Invent. math. June 1980, volume 61, issue 2, pp. 159-176.

совпадающим со всем фазовым пространством? Какова их коразмерность?

Вопрос 4. *Насколько типичны или нетипичны в пространстве диффеоморфизмов многообразий (без края) диффеоморфизмы, у которых аттракторы Милнора толстые? Если они нетипичны, какова их коразмерность?*

Вопрос 5. *Существует ли топологически полное семейство диффеоморфизмов комплексно двумерной плоскости, такое, что их аттракторы Милнора неустойчивы? Такое, что их аттракторы толсты?*

Вопрос 6. *Что можно сказать о существовании SRB-меры построенного примера диффеоморфизма Аносова с аттрактором Милнора, не совпадающим со всем фазовым пространством? Какова хаусхдорфова размерность дополнения до бассейна этой меры?*

Благодарности

Я выражаю самую искренннюю и тёплую благодарность профессору Юлию Сергеевичу Ильяшенко за весь тот труд, который он прикладывал для моей поддержки как в научном, так и в личном отношении. Благодарен своим соавторам, В.А. Клепцыну, Д.В. Рыжову, а также И.С. Шилину за полезные замечания и общение, а А. В. Окуневу - как за полезные замечания общего и специального характера, так и за соавторский вклад.

Публикации автора по теме диссертации из списка ВАК

[1] V. Kleptsyn, D. Ryzhov, S. Minkov. Special ergodic theorems and dynamical large deviations.//Nonlinearity 25 (11), 2012. [В. А. Клепцыну принадлежит часть 1, Д. А. Рыжову - часть 2, С.С. Минкову, - часть 3.]

[2] С. Минков, А. Окунев. Омега-предельные множества типичных точек частично-гиперболических диффеоморфизмов// Функц. анализ и его прил., 50:1 (2016), 59–66. [А.В. Окуневу принадлежит формулировка и доказательство леммы 5, С.С. Минкову - определение пространства триптихов, формулировка и доказательство леммы 4 и доказательство следствия 2.]