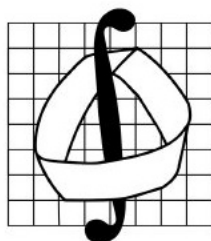




МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. Ломоносова

---



МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

Минков Станислав Сергеевич

ТОЛСТЫЕ АТТРАКТОРЫ И КОСЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Специальность 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва - 2016.

# Содержание

Введение	3
<b>Глава 1. Омега-предельные множества частично - гиперболических диффеоморфизмов</b>	<b>10</b>
1.1 Введение в раздел	10
1.1.1 Формулировка результатов	10
1.1.2 Доказательство следствия 11	12
1.1.3 Неустойчивое слоение и его абсолютная непрерывность	13
1.2 Доказательство теоремы	14
1.3 Доказательство леммы 15	15
1.3.1 Претриптихи	15
1.3.2 Основное рассуждение	16
1.3.3 Переход к степени	17
<b>Глава 2. Неустойчивые и толстые аттракторы и косые произведения</b>	<b>18</b>
2.1 Типичная неулучшаемость оценки в лемме Фальконера	18
2.1.1 Введение	18
2.1.2 Обозначения	19
2.1.3 Формулировка	20
2.1.4 Сведение теоремы к лемме	20
2.1.5 Одномерная конструкция	21
2.1.6 Доказательство леммы 21	22
2.2 Победа сжатия	23
2.2.1 Косое произведение над сдвигом Бернулли	23
2.2.2 Диффеоморфизм Аносова	26
2.2.3 Сдвиг по градиенту	27
2.2.4 Доказательство основного результата	27
2.3 Толстый или неустойчивый аттрактор	29
2.3.1 Альтернатива	29
2.3.2 Дополнительный пример	30
2.4 Аттрактор голоморфного sine-семейства	31
2.4.1 Комплексная формулировка	31
2.4.2 Топологическое доказательство	32
2.5 Размерность и инвариантность	34
2.5.1 Подготовительные построения	34

2.5.2	Теорема об уклонении временных средних . . . . .	36
2.5.3	Топологическая неинвариантность аттрактора Милнора . . . . .	37
2.5.4	Усиление этой теоремы эквивалентно открытой проблеме . . . . .	38
<b>Глава 3. Аттрактор Милнора диффеоморфизма Аносова, не совпадающий со всем фазовым пространством</b>		<b>38</b>
3.1	Развитие примера Бонатти . . . . .	38
3.1.1	Доказательство плотности . . . . .	43
3.1.2	Доказательство открытости . . . . .	43
3.2	Подкова Смейла . . . . .	44
3.3	Формулировка и обозначения . . . . .	46
3.4	Начало конструкции . . . . .	46
3.5	Определение пространства $\mathcal{C}$ . . . . .	48
3.6	Доказательство основной теоремы раздела на основе лемм . . . . .	48
3.7	Доказательство леммы 41 . . . . .	49
3.7.1	План доказательства . . . . .	49
3.7.2	Построение $F_{PL}$ — основная идея . . . . .	49
3.7.3	Полоски уровня $n$ . . . . .	49
3.7.4	Свойства полосок . . . . .	50
3.7.5	Построение $F_{PL}$ . . . . .	50
3.7.6	$\mu(B(F_{PL})) = 1$ . . . . .	52
3.7.7	Сглаживание . . . . .	53
3.8	Существование $F_{Init}$ . . . . .	54
3.8.1	Существование $F_D$ . . . . .	54
3.8.2	Ещё одно сглаживание. . . . .	55
3.8.3	$F_{Init}$ - диффеоморфизм Аносова . . . . .	55
3.9	Доказательство леммы 40 . . . . .	56
<b>Заключение</b>		<b>58</b>
<b>Список литературы</b>		<b>58</b>

# Введение

**Актуальность темы.** Эта диссертация относится к теории динамических систем. В ней изучаются свойства аттракторов Минлора гомеоморфизмов метрических пространств с мерой.

Понятие аттрактора было введено Ауслендером в 1964 году [ABS] для описания притягивающего множества динамической системы. Существуют несколько определений, математически формализующих это понятие; в этой работе будут рассматриваться следующие два.

**Определение 1.** *Предположим, что у отображения  $f$  динамической системы существует поглощающая окрестность (т.е., такое открытое множество  $U$ , что  $f(\bar{U}) \subset U$ ), тогда её максимальным аттрактором называется множество*

$$A_{max} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{\circ n}(U)$$

**Определение 2** (Milnor, 1985). *Аттрактором Милнора динамической системы, заданной непрерывным отображением  $f : X \rightarrow X$ , где  $X$  - метрическое пространство с мерой, называется минимальное (по вложению) замкнутое множество, содержащее  $\omega$ -предельные точки почти всех точек фазового пространства.*

В первой главе диссертации содержится напоминание определений тех понятий, которые входят в определение аттрактора Милнора.

Как правило,  $X$  будет римановым многообразием, а мера на нём - мерой Лебега. Вот несколько примеров.

**Пример 1.** *Напомним, что северное отображение окружности - это диффеоморфизм окружности ровно с двумя неподвижными точками, одной притягивающей и одной отталкивающей. Аттрактор Милнора северного отображения - притягивающая неподвижная точка. Рассматривая все фазовое пространство как притягивающую область, заключаем, что максимальный аттрактор - вся окружность.*

*Но если рассматривать в качестве притягивающей области односвязную окрестность притягивающей неподвижной точки, то максимальный аттрактор такой окрестности - притягивающая неподвижная точка.*

**Пример 2.** *Определим кольцо в полярных координатах  $(r, \varphi)$  условием  $\{0,5 < r < 2\}$  и отображение на нём:*

$$F(r, \varphi) = \left( \frac{r+1}{2}, f(\varphi) \right),$$

где  $f$  - произвольное северное отображение окружности.

*Максимальным аттрактором этого отображения (поглощающей областью следует считать всё кольцо) будет инвариантная окружность, заданная условием  $r = 1$ , а аттрактором Милнора - притягивающая неподвижная точка этой окружности.*

Одним из важнейших свойств инвариантных множеств является устойчивость по Ляпунову. Для динамических систем с дискретным временем это понятие определяется так:

**Определение 3.** Множество  $A$  называется устойчивым по Ляпунову для динамической системы, заданной отображением  $f$ , если для всякой окрестности  $U$  множества  $A$  найдется окрестность  $V$  этого же множества такая, что все орбиты, начинающиеся в  $V$ , лежат в  $U$ :

$$\forall x \in V, \forall n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in U$$

Нетрудно показать, что максимальный аттрактор всегда устойчив по Ляпунову. Простейший пример позволяет видеть, что для аттрактора Милнора это неверно.

**Пример 3.** Рассмотрим, отображение окружности, заданное в координатах формулой:

$$\varphi \rightarrow \varphi + 0,01 \sin^2 \varphi.$$

Итерациями этого отображения все точки окружности, кроме  $0$ , перемещаются против часовой стрелки, а  $0$  - единственная неподвижная точка. Следовательно, любая точка под действием итераций рано или поздно попадет в сколь угодно малую окрестность  $0$ , и дальнейшие итерации будут лишь приближать её к  $0$ . Таким образом, точка  $0$  является аттрактором Милнора.

Нетрудно видеть, что этот аттрактор неустойчив - любую малую окрестность нуля покидают точки с малым положительным значением координаты  $\varphi$ .

Это всего лишь одиночный пример. Неподвижная точка отображения окружности в этом примере является полустойчивой, и её можно устранить малым возмущением системы. Однако недавний результат И. С. Шилина [Shil] показывает, что в очень широком классе так называемых диких динамических систем типично встречается неустойчивость аттрактора Милнора. Понятно, что неустойчивость аттрактора в известном смысле является «патологическим» свойством, потому что с физической точки зрения это означает, что малейшее возмущение системы может заставить точку начать удаляться от аттрактора под действием итераций. Возникает вопрос, какие классы динамических систем свободны от неустойчивых аттракторов, а какие - нет. В первом случае это надо доказать, во втором - построить пример неустойчивого аттрактора.

Городецким [Гор] на основании классических результатов Рюэлля [R], относящихся к теории гиперболических систем, получен следующий результат: аттрактор Милнора совпадает с объединением притягивающих гиперболических множеств для  $C^2$ -гладкого диффеоморфизма замкнутого многообразия, удовлетворяющего условию аксиомы А. В частности, для транзитивного диффеоморфизма Аносова аттрактор Милнора совпадает со всем фазовым пространством.

Актуальность темы следует из вышесказанного. Изучение свойств аттракторов Милнора является одним из современных методов исследования динамических систем.

**Цель и задачи работы:** Целью работы является исследование свойств аттракторов Милнора диффеоморфизмов и косых произведений как их модельного примера. К задачам относится получение аттракторов Милнора со свойствами толстоты и неустойчивости или доказательство, что их не существует.

**Положения, выносимые на защиту.** В диссертации доказаны следующие основные результаты:

1. Доказано, что для дважды гладких частично-гиперболических систем аттрактор Милнора состоит из неустойчивых слоёв. При этом приведён пример косоугольного произведения, для которого аттрактор Милнора является неустойчивым по Ляпунову.

2. Доказано существование топологически инвариантных аттракторов Минлора в классе бесконечно-гладких отображений и в классе диффеоморфизмов Аносова.

3. Показано существование систем, для которых не выполнено заключение специальной эргодической теоремы.

В **первой главе диссертации** показано, что для частично-гиперболических систем аттрактор Минлора состоит из неустойчивых слоев (совместный результат с А.В. Окуневым [МО]). Напомним следующее.

**Определение 4.** Диффеоморфизм  $F : M \rightarrow M$  многообразия называется  $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболическим, если существуют  $\lambda > 1, \mu < \lambda, c > 0$  и два непрерывных поля плоскостей  $E_x^{cs} \subset T_x M$  и  $E_x^u \subset T_x M$ , которые инвариантны (т.е.  $dF_x(E_x^{cs,u}) = E_{F(x)}^{cs,u}$ ) и

$$T_x M = E_x^{cs} \oplus E_x^u,$$

таких, что для всех  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\|dF_x^n|_{E_x^{cs}}\| \leq c\mu^n, \quad \|dF_x^{-n}|_{E_x^u}\| \leq c\lambda^{-n}.$$

Частично-гиперболические системы, в отличие от гиперболических, предполагают существование не устойчивого, а только центрально-устойчивого поля плоскостей, для которых максимальное растяжение слабее растяжения неустойчивым полем плоскостей. Класс таких систем гораздо шире класса динамических систем, удовлетворяющих аксиоме А. Доказанную теорему можно сформулировать так:

**Теорема 1.** Пусть  $F : M \rightarrow M$  —  $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболический  $C^2$ -диффеоморфизм. Тогда аттрактор Минлора отображения  $F$  состоит из неустойчивых слоев.

С использованием результата о частично-гиперболических системах в диссертации также дан ответ на одну из гипотез Ю.С. Ильяшенко, связанных с понятием толстого аттрактора.

**Определение 5.** Аттрактор называется толстым, если он имеет положительную меру, но не совпадает со всем фазовым пространством.

Ю.С. Ильяшенко построил типичный пример толстых максимальных аттракторов [Шу] сохраняющих край диффеоморфизмов в следующем смысле:

**Определение 6.** Множество в банаховом пространстве называется квазиоткрытым, если его можно получить как разность какого-то открытого множества и счетного числа множеств положительной коразмерности.

**Теорема (Ильяшенко).** Существует квазиоткрытое множество  $U$  в пространстве диффеоморфизмов произведения двумерного тора на отрезок на себя такое, что в нём максимальный аттрактор для некоторой поглощающей области толстый.

Вопрос о толстоте аттрактора Минлора в этом примере сводится к вопросу о том, верно ли, что для частично-гиперболических систем с одномерным неустойчивым слоем аттрактор Минлора содержит неустойчивые слои целиком?

Положительный ответ на этот вопрос основывается на применении к одномерным слоям результата про устройство предельных множеств точек для частично-гиперболических систем (см. [МО]).

Таким образом, результат можно сформулировать так:

**Следствие 2.** *Существует квазиоткрытое множество  $U$  в пространстве диффеоморфизмов произведения двумерного тора на отрезок такое, что аттрактор Милнора толстый.*

Во **второй главе** приведен ряд результатов, касающихся толстых и неустойчивых аттракторов Минлора, которые строятся в классе косых произведений, а также теорема об искажении Хаусдорфовой размерности при гомеоморфизмах. Напомним определение.

**Определение 7.** *Косым произведением называется динамическая система, чьё фазовое пространство имеет вид прямого произведения  $M = S \times B$  (где  $S$  называется слоем косого произведения, а  $B$  - базой), а отображение имеет вид:*

$$F(s, b) = (f_b(s), h(b)),$$

так что ограничение отображения на базу (называемое отображением в базе) не зависит от точки слоя. Отображения  $f_b$  называются послойными отображениями.

Традиционно рассматриваются два важных класса: в первом отображением в базе является диффеоморфизм Аносова тора, в другом - сдвиг Бернулли на бесконечных в обе стороны последовательностях из нулей и единиц.

**Определение 8.** *Ступенчатым косым произведением над сдвигом Бернулли называется косое произведение над сдвигом Бернулли с послойными отображениями, зависящими только от первого символа точки в базе.*

Напомним, что диффеоморфизмы Аносова - это такие системы, у которых все фазовое пространство является гиперболическим множеством (обычно подразумевают, что фазовое пространство - компакт, и в дальнейшем тексте это предполагается). Простейшим примером диффеоморфизма Аносова является линейное отображение тора, заданное, если тор представить как фактор плоскости по  $\mathbb{Z}^2$ , гиперболической целочисленной матрицей с определителем 1 (напомним, что матрица гиперболическая, если модуль её собственных значений отличен от 0 и 1).

Существовало предположение (гипотеза, устно высказанная Ю.С. Ильяшенко), что в ступенчатом косом произведении со сдвигом Бернулли в базе и одним из послойных отображений - диффеоморфизмом Аносова, - аттрактором Милнора будет все фазовое пространство. (Аттрактор Милнора здесь рассматривается относительно произведения меры Бернулли в базе и меры Лебега по слою.)

Однако в диссертации показано, что это не так. Этот результат представляет интерес ещё и потому, что сдвиг Бернулли, как и диффеоморфизм Аносова являются эргодическими отображениями (то есть для них не существует инвариантных множеств положительной неполной меры). Тем не менее, за счёт выбора второго послойного отображения (оно в контрпримере имеет вид отображения за единичное время по градиентному току) можно сделать так, что аттрактор Милнора будет иметь вид прямого произведения базы на одну точку (и как следствие транзитивности послойного диффеоморфизма Аносова, он будет неустойчив по Ляпунову). Формально говоря,

**Теорема 3.** *Существует такое косое произведение  $F$  над сдвигом Бернулли со слоем  $\tau$  и с одним из послойных отображений - диффеоморфизмом Аносова, что его аттрактор Милнора не совпадает со всем фазовым пространством.*

При доказательстве используется теорема Егорова. Она, напомним, утверждает, что из почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций можно выбрать равномерно сходящуюся на множестве сколь угодно большой меры. Использование этой теоремы в динамических системах при исследовании аттракторов предложено автором и получило дальнейшее развитие (например, в [ISh]). Прежде всего, применение теоремы Егорова позволяет значительно сократить количество встречающихся трудностей для косых произведений. Однако использование теоремы Егорова этим далеко не исчерпывается. В частности, автором доказан следующий результат, общий для динамических систем в целом:

**Теорема 4.** *Если аттрактор Минлора обратимой системы имеет положительную меру, то аттрактор обратного отображения либо тоже имеет положительную меру, либо неустойчив по Ляпунову.*

Более того, фактически, если оба аттрактора устойчивы по Ляпунову, они должны иметь множество положительной меры в пересечении. На первый взгляд, представляется почти невозможным, чтобы аттракторы, имеющее общее множество положительной меры, были устойчивы по Ляпунову и для прямого, и для обратного отображения. Однако в тексте диссертации построен пример.

Сходство между косыми произведениями и частично-гиперболическими диффеоморфизмами становится особенно ясным в свете так называемой стратегии Ильяшенко-Негута-Городецкого. Эта стратегия представляет собой набор методов, позволяющих по найденному примеру или классу примеров в косых произведениях над сдвигом Бернулли строить частично-гиперболические примеры для диффеоморфизмов многообразия. Одной из важных частей стратегии Ильяшенко-Негута-Городецкого является использование хаусдорфовой размерности и гёльдеровости сопряжений.

При попытке построить сопряжение данных динамических систем часто выясняется, что, хотя сами системы и гладкие, их сопряжение всего лишь гомеоморфизм. В связи с этим возникает вопрос - является ли аттрактор Минлора топологическим инвариантом при сопряжении системы?

В частности, в разделе 2.5 диссертации показано, что аттракторы Минлора не являются топологическими инвариантами системы, то есть существуют две сопряженные гомеоморфизмом системы с негомеоморфными аттракторами Минлора. Надо заметить, что это следует из примера в третьей главе: диффеоморфизма Аносова с неустойчивым аттрактором Минлора, так как все диффеоморфизмы Аносова на торе могут быть топологически сопряжены линейному, а для линейного диффеоморфизма Аносова аттрактор - весь тор. Однако в построенном примере оба отображения могут быть сделаны бесконечно гладкими, а диффеоморфизм Аносова с неустойчивым минлоровским аттрактором принципиально может быть только  $C^1$ -гладким (что следует из упомянутого выше результата Городецкого).

**Теорема 5.** *Существуют два  $C^\infty$  - гладких диффеоморфизма  $S^2$  - двумерной сферы, которые топологически сопряжены, но их аттракторы Минлора не топологически сопряжены, и, таким образом, не являются топологическими инвариантами.*

Стратегия Ильяшенко-Негута-Городецкого предлагает обход этих трудностей для косых произведений за счёт свойств хаусдорфовой размерности. Сопряжения косых произведений и частично-гиперболических систем не всегда бывают гладкими, однако они обладают важным свойством, а именно гёльдеровостью. Напомним, что отображение  $f$  на многообразии с метрикой  $\rho$  называется гёльдеровым, если существуют константы  $\alpha$  (константа Гёльдера),  $L$  такие, что для всяких  $x, y$  из области определения верно:

$$\rho(f(x), f(y)) < L\rho(x, y)^\alpha,$$



например, все липшицевы отображения являются гёльдеровыми, но их класс гораздо шире (например, классическая канторова лестница гёльдерова, но не липшицева).

Гёльдеровы отображения тоже не сохраняют метрических свойств системы, но они обладают свойством мало изменять хаусдорфову размерность множества.

Количественно хаусдорфова размерность под действием гёльдерова отображения может быть определена с помощью леммы Фальконера, утверждающей, что отношение хаусдорфовых размерностей образа и прообраза не превосходит константы Гёльдера отображения. Известно, что для некоторых гёльдеровых отображений эта оценка точна. Однако оставался открытым вопрос о том, насколько часто точна эта оценка, то есть насколько типичны гёльдеровы отображения, для которых эта оценка завышена. В части 2.1 диссертации показано, что в типичном случае для гёльдероморфизма куба оценка, задаваемая леммой Фальконера, является точной.

**Теорема 6.** *Найдется остаточное множество в малом  $\gamma$ -гёльдеровом пространстве бигёльдероморфизмов  $n$ -мерного куба, такое, что для любого отображения из этого множества существует множество полной меры, образ которого имеет хаусдорфову размерность  $\gamma n$ .*

Хаусдорфова размерность является, таким образом, важным численным показателем, отличающем множества нулевой меры. Известно, что если у отображения  $f$  есть эргодическая мера, относительно которой мера Лебега непрерывна, то для всякой функции множество орбит, чьи временные средние отличаются от распределения согласно эргодической SRB-мере с полным бассейном, имеет нулевую меру Лебега. В работах, обзор которых можно найти в [KMR] исследовалась хаусдорфова размерность таких исключительных точек.

**Определение 9.** *Для произвольной непрерывной функции  $\varphi$  и положительного числа  $\alpha \in C^0(M)$ ,  $\alpha > 0$  определим множество  $(\varphi, \alpha)$ -нетипичных точек:*

$$K_{\varphi, \alpha} := \left\{ x \in M : \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(f^i(x)) - \int_M \varphi d\mu \right| \geq \alpha \right\}$$

*Говорят, что для функции  $\varphi$  и меры  $(\varphi, \mu)$  выполнено заключение специальной эргодической теоремы, если для всякой непрерывной функции  $\varphi$  и положительного числа  $\alpha$  хаусдорфова размерность  $K_{\varphi, \alpha}$  строго меньше полной:  $\dim_H K_{\varphi, \alpha} < \dim M$ .*

Все вышеприведенные результаты показывают, что заключение специальной эргодической теоремы выполняется. Возник естественный вопрос, существует ли хоть одно отображение с эргодической SRB-мерой, для которого оно неверно?

В главе 2.5 диссертации построен пример очень простого, точечного аттрактора - носителя SRB-меры, для которого заключение специальной эргодической теоремы неверно (результат опубликован [KMR], и описанная там динамическая система является той же, которая задает пример топологической неинвариантности аттракторов).

**Теорема 7.** *Существует  $C^\infty$ -гладкий диффеоморфизм  $f : S^2 \rightarrow S^2$  такой, что у него существует атомарная SRB-мера с носителем в одной точке, но заключение специальной эргодической теоремы неверно.*

В заключительной части главы рассматривается sine-семейство. В этой части рассматриваются свойства динамики уже не вещественных, а голоморфных отображений. Голоморфная динамика - одно из классических направлений в динамических

системах, берущая начало в работах Жюлиа и Фату, относящихся к первой половине двадцатого века. В настоящее время в связи с возможностями компьютерного моделирования наблюдается возрастающий интерес к голоморфной динамике, в частности, к метрическим (связанным с мерой) свойствам голоморфных функций.

Определение аттрактора Милнора для комплексной плоскости с мерой Лебега можно ввести точно так же, как и для вещественных функций. Но при этом нельзя найти естественного класса открытых множеств в топологии голоморфных отображений, так как в  $C^1$ -топологии две любые голоморфные функции либо отличаются на константу, либо «бесконечно далеки» друг от друга - на сфере Римана найдется точка, в которой значения этих функций сколь угодно сильно различаются. В связи с этим исследованию метрических свойств традиционно подвергаются не топологические области, а аналитически заданные семейства. В частности, теорема Любича-Рееса утверждает, что функции вида  $\exp(az)$  (где  $a$  - ненулевой комплексный параметр) имеют эргодические свойства на всей комплексной плоскости; из неё, в частности, можно немедленно заключить, что аттрактор Милнора - вся комплексная плоскость. Другого рода свойства демонстрирует так называемое sine-семейство, которое состоит из функций вида  $\sin(az + b)$ . Для него Макмюлленом было доказано, что существует множество неустойчивых по Ляпунову орбит положительной меры. В разделе 2.4 диссертации из этого выводится следующее:

**Теорема 8.** *В семействе  $\sin(az + b)$  при достаточно малых  $a, b$  аттрактор Милнора неустойчив.*

В третьей главе диссертации доказано следующее:

**Теорема 9.** *Существует такой транзитивный  $C^1$  - диффеоморфизм Аносова  $F$ , что аттрактор Милнора  $F$  не совпадает со всем фазовым пространством.*

Это совместный результат автора с А.В. Окуневым и И.С. Шилиным.

Построенный пример получается малым возмущением из линейного на торе. Таким образом, в диссертации построен пример диффеоморфизма Аносова с неустойчивым по Ляпунову аттрактором Милнора, существование которого само по себе контринтуитивно.

Поскольку диффеоморфизмы Аносова являются частным случаем частично-гиперболических систем, из контрпримера следует, что обобщение результата [МО] на  $C^1$ -гладкие динамические системы невозможно.

Две идеи, примененные для построения контрпримера, уже использовались раньше в динамических системах. Одна из них, предложенная для устроения окружности К.Ц. Бонатти (устное сообщение), состоит в том, чтобы рассматривать негладкую динамическую систему с кусочно-линейным отображением. Позднее идея была доведена до строгого доказательства существования отображения со следующими свойствами: отображение топологически сопряжено устроению окружности, но имеет аттрактор Милнора, не совпадающий со всем фазовым пространством. Устроение окружности является упрощенной моделью для понимания динамики диффеоморфизмов Аносова. По этой причине и так как результат нигде не написан, его схематическое изложение приведено в той же главе диссертации.

Вторая идея основана на том, что динамика линейного диффеоморфизма Аносова двумерного тора при ограничении на правильно выбранный прямоугольник внутри тора устроена как отображение подковы Смейла, которое представляет собой хорошо исследованную динамическую систему. Робинсон и Янг [RY] предложили локально возмутить диффеоморфизм Аносова только на специально выбранном прямоугольнике, чтобы добиться всех требуемых эффектов уже на подкове Смейла. Аналогично

и в контрпримере, который будет построен в этой диссертации, используется ход с локальным возмущением диффеоморфизма Аносова только на прямоугольнике (точнее, в некоторой его окрестности), в ограничении на который отображение является подковой Смейла. Доказательство позволяет прийти к выводу, что аттрактор Минлора полностью находится внутри прямоугольника. Поскольку неустойчивые слои диффеоморфизма Аносова тора плотны во всем торе, то, в частности, аттрактор Минлора в этом примере не состоит из неустойчивых слоёв.

**Теоретическая и практическая значимость; научная новизна.** Работа носит теоретический характер. Полученные результаты относятся к метрической теории динамических систем, и, с одной стороны, отвечают на ранее высказанные гипотезы, с другой, могут служить основанием для дальнейшего исследования. Конкретные доказанные результаты являются полностью новыми.

**Методы исследования и степень достоверности** В работе применяются как классические методы исследования динамических систем, так и соображения элементарной геометрии поверхностей. Полученные результаты обоснованы математическими доказательствами, и поэтому являются достоверными.

**Апробация результатов.** Результаты диссертации были рассказаны неоднократно в 2010, 2012 и 2014 году на семинаре «Динамические системы» (механико-математический факультет МГУ им. Ломоносова) под руководством проф. Ю.С. Ильяшенко, на летней школе «Динамические системы» в г. Дубна в 2015 году, и в 2016 году на семинаре кафедры дифференциальных уравнений НГУ им. Лобачевского под руководством проф. В.З. Гринеса.

## 1 Глава 1. Омега-предельные множества частично - гиперболических диффеоморфизмов

Автору принадлежит формулировка и доказательство леммы 14, доказательство следствия 11 и определение сепарабельного пространства триптихов, а А. Окуневу — формулировка и доказательство леммы 15.

### 1.1 Введение в раздел

#### 1.1.1 Формулировка результатов

Чтобы дать точное определение аттрактора Минлора, необходимо прежде ввести понятие омега-предельного множества точки.

**Определение 10.** Для динамической системы, заданной отображением  $f$  множество точек  $\{x, f(x), f^2(x) \dots f^n(x) \dots\}$  называется положительной орбитой или положительной полуорбитой точки  $x$ . Множество предельных точек положительной полуорбиты называется  $\omega$ -предельным множеством точки  $x$ .

Следует отметить, что здесь и в дальнейшем под записью  $f^n(x)$  понимается  $f^{\circ n}(x)$  - композиционная степень отображения, т.е. результат  $n$  последовательных итераций точки  $x$ . Кроме того, всюду, где это не будет приводить к путанице, орбитой точки будет называться её положительная орбита.

**Определение 11.** Аттрактором Минлора динамической системы  $(X, F)$  (где  $X$  — многообразие с определенной на нём мерой Лебега,  $F$  — его гомеоморфизм) называется минимальное по вложению замкнутое подмножество  $X$ , содержащее  $\omega$ -предельные множества почти всех по мере Лебега точек фазового пространства. Обозначение:  $A_M(F)$ , или просто  $A_M$ .

Пусть  $M$  – компактное риманово многообразие (возможно, с краем), мера Лебега на  $M$  индуцирована римановой метрикой.

**Определение 12.** Диффеоморфизм  $F : M \rightarrow M$  многообразия называется  $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболическим, если существуют  $\lambda > 1, \mu < \lambda, c > 0$  и два непрерывных поля плоскостей  $E_x^{cs} \subset T_x M$  и  $E_x^u \subset T_x M$ , которые инвариантны (т.е.  $dF_x(E_x^{cs,u}) = E_{F(x)}^{cs,u}$ ) и

$$T_x M = E_x^{cs} \oplus E_x^u,$$

таких, что для всех  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\|dF_x^n|_{E_x^{cs}}\| \leq c\mu^n, \quad \|dF_x^{-n}|_{E_x^u}\| \leq c\lambda^{-n}.$$

Визуализировать это определение можно следующим образом: касательное пространство к многообразию в каждой точке распадается в прямую сумму двух непрерывно зависящих от точки плоскостей. Мы рассматриваем итерации системой, которая на точки действует отображением  $F$ , а на вектор в касательном пространстве его дифференциалом. Тогда под действием таких итераций вектор, лежащий в одном из полей плоскостей, начинает сильно сжиматься *под действием обратных итераций* (это поле называется неустойчивым), а вектор, лежащий в другом поле, либо сжимается, либо по крайней мере растягивается так, что сжатие в первом поле всегда сильнее любого растяжения для второго (это поле называется центрально-устойчивым).

Если бы в определении для второго поля речь шла только о сжатии, то мы бы получили гиперболическую систему. Такие системы обладают в известном смысле регулярным поведением. Класс частично-гиперболических систем гораздо шире.

Существует несколько разных подходов к тому, какие отображения можно считать напоминающими гиперболические, и, как следствие, существуют несовпадающие определения частичной гиперболичности. В определении указано, что речь идет о  $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболических системах, но никаких других в диссертации не встретится, и в дальнейшем они иногда будут неформально называться просто частично-гиперболическими. Достаточно подробно теория таких систем была рассмотрена, например, в [Pes], но все необходимые свойства частично-гиперболических систем будут изложены независимо в разделе 1.1.3.

Пока достаточно сказать, что неустойчивое поле плоскостей интегрируется, и интегральные многообразия этого поля называются неустойчивыми слоями.

Под  $C^2$ -диффеоморфизмом будет пониматься такое отображение, которое дважды гладко вместе со своим обратным.

**Теорема 10.** Пусть  $F : M \rightarrow M$  –  $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболический  $C^2$ -диффеоморфизм. Тогда  $\omega$ -предельное множество почти любой по мере Лебега точки состоит из неустойчивых слоев (т.е. оно либо содержит неустойчивый слой целиком, либо не пересекает его).

**Следствие 11.** В предположениях теоремы 10 аттрактор Милнора отображения  $F$  состоит из неустойчивых слоев.

В [Пу] построено локально типичное множество сохраняющих край диффеоморфизмов произведения отрезка на двумерный тор с «толстым» (т.е. имеющим положительную меру, но не совпадающим со всем фазовым пространством) топологически транзитивным максимальным аттрактором. То, что аттрактор Милнора также толст, было сведено к следствию 11, которое в вышеупомянутой работе формулируется как гипотеза для случая одномерного неустойчивого слоения ([Пу, Conjecture 1]).

Сформулированная теорема родственна теореме 11.16 из [BDV], которая в тех же предположениях утверждает (хотя и в другой формулировке), что для почти любой точки  $x$  все предельные точки последовательности мер

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{F^j(x)},$$

где сходимость рассматривается в смысле слабой топологии, обладают следующим свойством: соответствующие условные меры на неустойчивых слоях имеют равномерно отделенные от нуля и бесконечности плотности. Из этого можно увидеть, что статистический аттрактор, определенный в [AAISh, §8.2], состоит из неустойчивых слоев. Там же приведен пример несовпадения милноровского и статистического аттракторов, из чего можно заключить, что речь идет о родственных, но не совпадающих теоремах: результат [BDV] относится к статистическому аттрактору, а результат диссертации - к аттрактору Милнора.

### 1.1.2 Доказательство следствия 11

Выведем следствие из теоремы.

Воспользуемся следующим фактом:

**Лемма 12.** *Точка  $x$  лежит в аттракторе Милнора, тогда и только тогда, когда любая ее окрестность пересекает  $\omega$ -предельные множества положительной меры точек.*

Докажем необходимость. Пусть найдется такая окрестность  $U$  точки  $x$ , что её пересекают *omega*-предельные множества только нулевой меры точек, а  $x$  при этом лежит в аттракторе Милнора. Рассмотрим множество  $A_M \setminus U$  - аттрактор Милнора, из которого убрали точки, лежащие в  $U$ . Это множество замкнуто и содержит  $\omega$ -предельные множества такой же меры точек, что и сам  $A_M$ . Но  $A_M$  должен быть минимальным замкнутым множеством, содержащим *omega*-предельные множества почти всех точек. Противоречие доказывает необходимость.

Докажем достаточность. Пусть, наоборот, для любой окрестности  $x$  найдется положительная мера точек, таких, что их  $\omega$ -предельные точки пересекаются с этой окрестностью, а  $x$  не в аттракторе Милнора. По определению  $A_M$  - замкнутое множество, так что если  $x$  не лежит в аттракторе Милнора, то найдется окрестность  $x$ , которая не пересекается с аттрактором Милнора. Обозначим такую окрестность  $U$ . Обозначим  $B$  - множество тех точек,  $\omega$ -предельные множества которых пересекаются с  $U$ . По предположению множество  $B$  положительной меры, и  $\omega$ -предельные множества точек из  $B$  не лежат в аттракторе Милнора. Но аттрактор Милнора должен содержать  $\omega$ -предельные множества почти всех точек. Получившееся противоречие показывает достаточность. □

Хорошо, теперь будем вести доказательство от противного. Пусть в условиях теоремы следствие неверно; это означает что на одном неустойчивом слое есть точка  $x \in A_M$  и точка  $y \notin A_M$ . Поскольку  $y \notin A_M$ , найдется окрестность  $U(y)$  точки  $y$ , такая, что мера точек, чьи  $\omega$ -предельные множества пересекают  $U(y)$ , равна нулю.

Возьмем настолько малую окрестность  $U(x)$  точки  $x$ , что любой пересекающий ее неустойчивый слой пересекает также  $U(y)$  (по лемме 12). Это можно сделать в силу непрерывной зависимости конечной части слоя от точки, из которой его выпустили,

о чем будет подробнее сказано дальше, но что является также следствием общей теории дифференциальных уравнений.

Поскольку  $x \in A_M$ , мера точек, чьи  $\omega$ -предельные множества пересекают  $U(x)$ , положительна (по лемме). Но (по теореме 10)  $\omega$ -предельные множества почти всех из этих точек состоят из неустойчивых слоев, и поэтому пересекают  $U(y)$ . Противоречие.  $\square$

### 1.1.3 Неустойчивое слоение и его абсолютная непрерывность

В этом разделе  $F : M \rightarrow M$  предполагается  $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболическим  $C^2$ -диффеоморфизмом. Тогда по определению касательное расслоение разбито в прямую сумму полей плоскостей  $E_x^u \oplus E_x^{cs}$ , таких, что на неустойчивом подпространстве  $E^u$  происходит растяжение, а на центрально устойчивом  $E^{cs}$  максимальное растяжение слабее минимального растяжения на  $E^u$ . Интегральные многообразия неустойчивого поля плоскостей называются неустойчивыми слоями; по определению (см. [Pes, стр. 47])

**Определение 13.** Неустойчивое слоение — это  $F$ -инвариантное разбиение многообразия  $M$  на непересекающиеся неустойчивые слои.

Всякие две точки одного неустойчивого слоя экспоненциально быстро сближаются итерациями обратного отображения. Более того, существует  $\varkappa < 1$ , такая что точки  $x$  и  $y$  лежат на одном неустойчивом слое тогда и только тогда, когда для некоторого  $c > 0$  и всех  $n > 0$  выполнено

$$\text{dist}(F^{-n}(x), F^{-n}(y)) \leq c\varkappa^n.$$

На самом деле эта  $\varkappa$  является величиной, обратной к  $\lambda$ , фигурирующей в определении частичной гиперболичности, а  $c$  можно выбрать то же, что и в определении.

Слоение называется *гладким*, если его гладкой заменой координат можно локально сопрячь с прямым произведением (такое сопряжение называется выпрямлением слоения). Для него верно следующее свойство: множество положительной меры не может пересекать почти все слои по множествам послойной меры нуль (для доказательства нужно выпрямить слоение и применить теорему Фубини).

К сожалению, слоение может быть негладким, даже если сами слои гладкие. В частности, слоение на неустойчивые слои негладко. Для негладких слоений, вообще говоря, предыдущее свойство может нарушаться (это явление носит яркое название «кошмар Фубини», и описано в [Mil], [ShW]). Но именно для слоения на неустойчивые слои это свойство выполнено, что и будет показано дальше в этом разделе диссертации.

**Определение 14.** *Отображение называется абсолютно непрерывно вместе с обратным, если для любого множества мера его образа равна нулю тогда и только тогда, когда мера самого этого множества равна нулю.*

**Определение 15.** *Пусть в области  $U$  слоение тривиализуемо (т.е. гомеоморфно прямому произведению диска на слой на трансверсальный диск). Назовем компоненты связности пересечений слоев с областью  $U$  локальными слоями. Тогда отображением голономии вдоль слоя с трансверсали  $A$  на трансверсаль  $B$  в области  $U$  называется отображение, сопоставляющее точке трансверсали  $A$  точку трансверсали  $B$ , лежащую на том же локальном слое.*

Интересно, что голономия вдоль неустойчивых слоёв не обязательно гладкая, но всегда гёльдерова (определение гёльдеровости можно найти во введении).

**Теорема** ([Pes, теорема 7.1], [BP, §8.6]). *Отображение голономии вдоль неустойчивых слоев абсолютно непрерывно вместе с обратным относительно мер Лебега на трансверсальных (слоение с таким свойством называется абсолютно непрерывным).*

Эта теорема доказана в [Pes, теорема 7.1]; в диссертации она будет использована без доказательства.

**Следствие 13.** *Пусть  $P \subset M$  — множество положительной меры. Тогда  $P$  пересекает некоторый неустойчивый слой по множеству положительной послойной меры (мера на слое индуцирована римановой метрикой).*

*Доказательство.* Это известное следствие абсолютной непрерывности (см. [PVW]), но хотелось бы дать его доказательство, ясно изложенное на уровне идей.

Рассмотрим открытое множество  $B \subset M$ , настолько малое, что слоение в нем выпрямляется, неустойчивые гиперплоскости внутри  $B$  почти параллельны, и  $B$  помещается в одну карту на многообразии, к которой мы переходим.

Введем на  $B \subset \mathbb{R}^n$  аффинные координаты: координатная гиперплоскость  $Ox$  ( $x$  — вектор) почти параллельна неустойчивым направлениям, гиперплоскость  $Oy$  ( $y$  — тоже вектор) перпендикулярна  $Ox$ . Также введем координату  $\tilde{y}$ , равную  $y$ -координате пересечения слоя точки  $(x, y)$  с плоскостью  $Oy$ .

Пусть выпрямляющее отображение  $h : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  (это то  $\mathbb{R}^n$ , в котором лежит  $B$ , с теми же координатами  $(x, y)$ ) отправляет точку с координатами  $(x, y)$  в точку с координатами  $(x, \tilde{y})$ . Оно сохраняет гиперплоскости  $x = const$  и действует на координату  $y$  на каждой из этих гиперплоскостей голономией на плоскость  $Oy$ , эта голономия абсолютно непрерывна. Применив теорему Фубини к разбиению  $\mathbb{R}^n$  на гиперплоскости  $x = const$ , получим, что отображение  $h$  абсолютно непрерывно.

Отображение  $h$  переводит неустойчивые слои в гиперплоскости  $\tilde{y} = const$ . Поскольку неустойчивые слои гладки, ограничение отображения  $h$  на любой из них (которое есть просто проекция параллельно  $Oy$  на гиперплоскость, в которую этот слой переходит) гладко вместе с обратным и, следовательно, абсолютно непрерывно.

В силу абсолютной непрерывности отображения  $h$  множество  $h(P)$  имеет положительную меру. По теореме Фубини это множество пересекает некоторую гиперплоскость  $\tilde{y} = const$  по множеству положительной меры. Прообраз этой гиперплоскости под действием  $h$  и есть неустойчивый слой, который пересекает  $P$  по множеству положительной меры.  $\square$

## 1.2 Доказательство теоремы

Пусть  $\omega$ -предельное множество некоторой точки пересекает некоторый неустойчивый слой, но не содержит его. В этой ситуации возникает конструкция, которую мы называем триптихом<sup>1</sup>.

**Определение 16.** *Рассмотрим замкнутый шар  $B$  в каком-то неустойчивом слое с центром в  $x$  и замкнутый шар  $B' \subset B$  в том же слое, с тем же центром, но с меньшим радиусом. Рассмотрим локально тривиализирующий неустойчивое слоение гомеоморфизм  $H : B \times S \rightarrow M$ , где  $S$  — произвольный трансверсальный слоению диск, проходящий через  $x$ .*

*Множество  $H(B \times S)$  мы будем называть триптихом, а  $H(B' \times S)$  — центром триптиха, дополнение центра до всего триптиха — его периферией.*

<sup>1</sup>название мотивировано случаем одномерного неустойчивого слоения — тогда триптих есть разделенный на три части цилиндр из неустойчивых слоев.

Расстояние между триптихами определяется как сумма расстояния (по Хаусдорфу) между их центрами и расстояния между их перифериями. Множество триптихов сепарабельно как подмножество сепарабельного метрического пространства пар замкнутых множеств (метрика необходима, так как вообще говоря подмножество сепарабельного пространства необязательно сепарабельно). Фиксируем счетное всюду плотное множество триптихов и назовем их рациональными.

Последнее название связано с тем, что они будут играть ту же роль, что и рациональные числа на вещественной прямой.

**Определение 17.** Точка запрещена для триптиха  $T$ , если ее положительная орбита не заходит в центр  $T$ , но ее  $\omega$ -предельное множество пересекает внутренность периферии триптиха  $T$ . Множество всех запрещенных точек  $T$  называется запрещенным множеством триптиха  $T$  и обозначается  $P(T)$ .

**Лемма 14.** Пусть  $\omega$ -предельное множество некоторой точки  $x$  не состоит из неустойчивых слоев. Тогда найдется рациональный триптих, для которого точка  $x$  запрещена.

*Доказательство.* Если множество  $\omega(x)$  не состоит из неустойчивых слоев, то какой-то из этих слоев пересекает множество  $\omega(x)$ , но не лежит в нем. Рассмотрим в этом слое замкнутый шар, не пересекающий  $\omega(x)$ . Орбита (здесь и далее имеется в виду положительная орбита) точки  $x$  может пересекать этот шар только в конечном числе точек. Действительно, если бы орбита бесконечно много раз пересекала этот шар, то из неё можно было бы выбрать сходящуюся подпоследовательность точек; но замкнутый шар, - компакт, поэтому в нём нашлась бы предельная точка этой сходящейся подпоследовательности, а эта точка по определению в  $\omega$ -предельном множестве  $x$ . Значит, этого быть не может.

Так как орбита  $x$  пересекает шар только в конечном числе точек, поэтому в нём найдется точка  $y$  не из замыкания орбиты точки  $x$ . Маленький шар  $U$  во всем многообразии с центром в  $y$  не пересекает орбиту точки  $x$ , поместим внутри него центр триптиха. Для этого выберем любой сколь угодно маленький шар  $B'$  с центром в  $y$  строго внутри  $U$ , рассмотрим сколь угодно маленький шар  $B$  с тем центром в  $y$  и настолько большим радиусом, что хотя бы одна точка  $\omega(x)$  попадет в его внутренность. Теперь выберем сколь угодно маленький шар  $S$  в проходящей через  $y$  трансверсали, что центр триптиха  $H(B \times S)$  лежит внутри  $U$ . Ясно, что точка  $x$  запрещена для этого триптиха и его малых возмущений. Малым возмущением получим рациональный триптих.  $\square$

**Лемма 15.** Запрещенное множество любого триптиха имеет меру ноль.

*Доказательство теоремы 10.* По лемме 14 множество точек, чьи  $\omega$ -предельные множества не состоят из неустойчивых слоев, содержится в (счетном) объединении запрещенных множеств всех рациональных триптихов. Эти запрещенные множества имеют нулевую меру по лемме 15.  $\square$

## 1.3 Доказательство леммы 15

### 1.3.1 Претриптихи

Триптих  $T$  расслоен на диски неустойчивых слоев  $H(B \times \{y\})$ , мы будем называть их *слоями* триптиха. В каждом слое триптиха выделен центр — пересечение этого слоя с центром триптиха.



Рассмотрим произвольный шар  $D$  в неустойчивом слое. Назовем *претриптихом* любой  $n$ -й прообраз ( $n \geq 0$ ) некоторого слоя триптиха  $T$ , такой что этот прообраз пересекается с шаром  $D$ . Число  $n$  мы назовем *уровнем* этого претриптиха, а  $n$ -й прообраз центра этого диска — центром претриптиха, или *прецентром*. Претриптихи уровня  $n$  — в точности  $n$ -е прообразы всех дисков триптиха  $T$ , пересекающих  $F^n(D)$ . Диаметр триптихов уровня  $n$  экспоненциально быстро стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  из-за того, что, как было сказано выше, точки на неустойчивых слоях экспоненциально быстро сближаются при итерациях обратными отображениями. Это стремление равномерно, поскольку диаметры слоев триптиха равномерно ограничены. Претриптихи одного уровня не пересекаются, но претриптихи разных уровней могут пересекаться. Назовем претриптих *граничным*, если он пересекает границу шара  $D$ , иначе назовем его *внутренним*.

**Предложение 16.** *Рассмотрим произвольный шар  $D'$  в неустойчивом слое. Фиксируем шар  $D \subset D'$ , для которого определяются претриптихи. Тогда найдется константа  $c(T, F, D') > 0$ , такая что послойный объем центра любого внутреннего претриптиха больше объема этого претриптиха, умноженного на  $c$ .*

*Доказательство.* Для краткости в этом доказательстве фраза «якобиан отображения» будет означать якобиан ограничения этого отображения на неустойчивый слой. Послойный объем претриптиха уровня  $N$  есть интеграл от якобиана отображения  $F^{-N}$  по соответствующему слою триптиха. По теореме о среднем в определенном интеграле этот интеграл равен объему этого диска, умноженному на якобиан  $F^{-N}$  в какой-то точке этого диска. Аналогично, объем прецентра равен объему центра этого же неустойчивого диска, умноженному на якобиан отображения  $F^{-N}$  в какой-то точке. Отношение объема центра неустойчивого диска триптиха к объему самого этого неустойчивого диска отделено от нуля некоторой зависящей от триптиха константой  $C_1$  (т.к. отображение, выпрямляющее слоение, действует на слои гладко с равномерно ограниченным якобианом). С другой стороны, отношение якобианов отображения  $F^{-N}$  в двух точках неустойчивого диска равно отношению в обратном порядке якобианов отображения  $F^N$  в прообразах этих точек, которые лежат в шаре  $D$ . Обозначим эти прообразы  $x$  и  $y$ . Докажем, что это отношение ограничено некоторой константой  $C_0$  (тогда предложение будет доказано для  $c = C_1/C_0$ ). Это прямо следует из следующей известной леммы, основанной на технике контроля искажения.

**Лемма 17** ([BDV, lemma 11.9]). *Пусть  $F$  — произвольный  $E^u \oplus E^{cs}$ -частично гиперболический  $C^2$ -диффеоморфизм. Тогда для любой области  $D'$  внутри неустойчивого слоя и числа  $L > 0$  найдется константа  $C_0 > 0$ , такая что для любых точек  $x, y \in D'$  и целого  $N > 1$ , таких что  $\text{dist}(F^N(x), F^N(y)) \leq L$  (здесь  $\text{dist}$  — расстояние вдоль неустойчивого слоя), выполнено*

$$\frac{\det(DF_x^N|E_x^u)}{\det(DF_y^N|E_y^u)} \leq C_0.$$

Применим эту лемму к определенным выше точкам  $x$  и  $y$  и шару  $D'$ . Возьмем в качестве  $L$  максимальный послойный диаметр слоев триптиха. Условие  $\text{dist}(F^N(x), F^N(y)) \leq L$  выполнено, поскольку точки  $F^N(x)$  и  $F^N(y)$  лежат в одном слое триптиха  $T$ .  $\square$

### 1.3.2 Основное рассуждение

Приведенное ниже рассуждение использует известную технику, выраженную в [BDV, proposition 11.1] одним предложением: «by considering a density point and using the

fact that forward iterates of  $F$  do not distort Lebesgue measure much . . . »; эта техника используется в [Kud, lemma 15] в ситуации, похожей на рассматриваемую нами.

Перейдем к более детальному доказательству. Предположим противное. Пусть мера запрещенного множества  $P(T)$  триптиха  $T$  положительна. Тогда в силу следствия 13 пересечение  $Q$  множества  $P(T)$  с некоторым неустойчивым слоем  $s$  имеет положительную послойную меру. Пусть  $a \in Q$  — точка плотности множества  $Q$ . Пусть  $D' \subset s$  — шар с центром в точке  $a$  единичного радиуса. Выберем шар  $D \subset D'$  с центром в точке  $a$ , в котором доля запрещенных точек больше  $1 - \varepsilon$ , где малое  $\varepsilon$  будет выбрано позже. Рассмотрим претриптихи относительно шара  $D$ .

Сначала докажем лемму 15 в следующем предположении. Общий случай будет сведен к этому в разделе 1.3.3.

**Условие \*.** *Существует конечный или счетный набор внутренних претриптихов  $T_i$ , таких что их центры  $C_i$  не пересекаются и любой внутренний претриптих лежит в одном из  $T_i$ .*

Любая запрещенная точка в шаре  $D$  по своему определению покрыта бесконечным числом претриптихов (или, что то же самое, претриптихами сколь угодно большого уровня), но не лежит ни в одном прецентре. Поскольку диаметр триптихов уровня  $n$  стремится к нулю, любая внутренняя точка  $D$  покрыта лишь конечным числом граничных претриптихов, и, следовательно, бесконечным числом внутренних.

Рассмотрим меру на шаре  $D$  — послойный объем, нормированный так, что мера  $D$  равна 1. В силу условия \* любая запрещенная точка накрыта одним из  $T_i$ , поэтому сумма мер  $T_i$  больше  $1 - \varepsilon$ . Из предложения 16 следует, что сумма мер  $C_i$  больше чем  $c(1 - \varepsilon)$ , где  $c = c(D', F, T)$ . Но  $C_i$  не пересекаются и состоят из не запрещенных точек, а мера всех не запрещенных точек меньше  $\varepsilon$ . Получаем  $\varepsilon > c(1 - \varepsilon)$ , что приводит к противоречию при малом  $\varepsilon$ . Это доказывает лемму 15 при условии \*.

### 1.3.3 Переход к степени

Условие \* не верно для произвольного частично гиперболического диффеоморфизма  $F$ , но верно для некоторой его большой степени  $F^m$ , где  $m = m(T)$  (см. предложение 18 ниже). Предложение 19 ниже утверждает, что если лемма 15 верна с заменой  $F$  на  $F^m$ , то она верна и для  $F$ . Отметим, что неустойчивые слои для отображений  $F^m$  и  $F$  совпадают.

**Предложение 18.** *Для достаточно большого  $m$  выполнено следующее свойство: если центры двух  $F^m$ -претриптихов пересекаются, то один из этих претриптихов лежит в другом.*

*Доказательство.* В этом доказательстве претриптихи, образы и прообразы рассматриваются для отображения  $F^m$ . Большое число  $m$  будет выбрано в конце доказательства. Заметим, что претриптихи одного уровня не пересекаются. Рассмотрим два претриптиха разных уровней, пусть  $l$  — меньший из этих уровней. После итерирования вперед  $l$  раз один из этих претриптихов перейдет в слой триптиха, поэтому доказываемое предложение сводится к следующему утверждению:

Диаметр (в метрике слоя) любого прообраза любого слоя триптиха настолько мал, что если этот слой пересекает центр триптиха, то он целиком лежит в триптихе.

Выберем  $m$  так, чтобы это свойство выполнялось. Найдутся  $R, r > 0$ , такие что послойные диаметры всех слоев триптиха меньше  $R$ , и любой шар радиуса  $r$  в метрике всего многообразия с центром внутри центра триптиха не пересекает объединение

границ всех слоев триптиха. Тогда достаточно взять такое  $m$ , что  $F^m$  растягивает неустойчивые слои хотя бы в  $R/r$  раз.  $\square$

Теперь чтобы выполнить условие  $*$  для  $F^m$ , достаточно взять в качестве набора  $T_i$  множество всех внутренних  $F^m$ -претриптихов, не вложенных ни в какой внутренний претриптих меньшего уровня. Это доказывает лемму 15 для отображения  $F^m$ . Теперь докажем ее для  $F$ .

**Предложение 19.** Пусть для некоторого  $m > 0$  запрещенное множество  $P(F^m, T)$  триптиха  $T$  под действием диффеоморфизма  $F^m$  имеет меру ноль. Тогда запрещенное множество  $P(F, T)$  триптиха  $T$  под действием  $F$  также имеет меру ноль.

*Доказательство.* Достаточно доказать, что

$$P(F, T) \subset P(F^m, T) \cup F^{-1}(P(F^m, T)) \cup \dots \cup F^{-(m-1)}(P(F^m, T)).$$

Эта формула переписывается так: если точка  $x$  запрещена для  $F$ , то хотя бы одна из точек  $x, F(x), \dots, F^{m-1}(x)$  запрещена для  $F^m$ . То, что  $F^m$ -орбиты всех этих точек не пересекают центр  $T$ , сразу следует из того, что  $F$ -орбита точки  $x$  не пересекает центр  $T$ . Поскольку  $F$ -орбита точки  $x$  пересекает  $T$  бесконечно много раз, для некоторого  $0 \leq i < m$  номера точек орбиты  $x$ , попадающих в триптих  $T$ , дают остаток  $i$  по модулю  $m$  бесконечно много раз, т.е.  $F^m$ -орбита точки  $F^i(x)$  пересекает  $T$  бесконечно много раз. Поэтому точка  $F^i(x)$  запрещена для отображения  $F^m$ , что и требовалось доказать.  $\square$

**Замечание.** Идея перехода к сильно растягивающей неустойчивые слои степени диффеоморфизма  $F$  и то, что это позволяет справиться с пересечениями прецентров, взята из [BDV, доказательство теоремы 11.16].

## 2 Глава 2. Неустойчивые и толстые аттракторы и ко- сые произведения

### 2.1 Типичная неулучшаемость оценки в лемме Фальконера

#### 2.1.1 Введение

В работе [AbdA] Ф.Абденур и М.Андерссон исследовали эргодические свойства типичных гомеоморфизмов. Среди прочего они доказали, что для типичного гомеоморфизма найдется множество полной меры, образ которого имеет меру ноль. Их рассуждение основано на рассмотрении простейшего случая гомеоморфизма тетраэдра, а затем склеивании любого многообразия из тетраэдров, при этом ими показано, что типичный гомеоморфизм тетраэдра настолько сильно сжимает большинство точек, что множество полной меры даже имеет нулевую хаусдорфову размерность образа.

Мы будем работать с кубической хаусдорфовой размерностью, и чтобы её ввести, напомним сначала определение стандартной хаусдорфовой размерности.

**Определение 18.** Пусть  $A$  - множество точек в  $\mathbb{R}^n$ . Если конечный или счётный набор  $\{W_i\}$  шаров в  $\mathbb{R}^n$  таков, что радиус  $r_i$  каждого из них не больше  $\varepsilon$  и  $A$  лежит в их объединении, то такой набор называется  $\varepsilon$ -покрытием множества  $A$ . Хаусдорфовым  $\alpha$ -объёмом покрытия называется величина

$$\sum_i r_i^\alpha$$

, а хаусдорфовым объёмом множества  $A$  называется предел инфимумов объёмов по всем возможным покрытиям при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Хаусдорфова размерность множества  $A$  - это точная верхняя грань тех  $\alpha$ , для которых  $\alpha$ -объём множества  $A$  конечен.

Аналогично хаусдорфовой размерности, основанной на покрытии шарами, можно ввести понятие хаусдорфовой размерности, основанной на покрытии кубиками. Легко показать, что эти определения задают одну и ту же размерность.

Известная лемма Фальконера [Falconer, Proposition 2.3] утверждает, что  $\gamma$ -гёльдеровы отображения могут искажать хаусдорфову размерность не более чем в  $\gamma$  раз. Легко видеть, что эта оценка точна.

Далее будет доказано, что для типичного бигёльдерова гомеоморфизма в естественном сепарабельном пространстве (пространство всех бигёльдеровых гомеоморфизмов несепарабельно) эта оценка точна в следующем смысле: найдется множество полной меры (и потому полной хаусдорфовой размерности  $n$ ), размерность образа которого равна  $\gamma n$ . Построение функции и переход к многомерному случаю выполнены автором, а оценка хаусдорфовой размерности и выбор подходящего параметра - совместно автором и А.В. Окуневым.

Предполагается, что исследование свойств таких бигёльдеровых гомеоморфизмов будет полезно при изучении гёльдеровых сопряжений динамических систем, возникающих при исследовании их методами Ильяшенко-Негута-Городецкого, где естественно возникают хаусдорфова размерность и гёльдеровы сопряжения.

В диссертации сделан шаг в этом направлении, но прямо применить её результат для усиления теорем, возникающих в стратегии Ильяшенко-Негута-Городецкого нельзя, потому что не доказано, что сопряжение типичных косых произведений является типичным бигёльдеровым гомеоморфизмом, хотя это является, по-видимому, довольно правдоподобной гипотезой.

### 2.1.2 Обозначения

$I$  отрезок  $[0, 1]$ ,

$I^n$  -  $n$ -мерный гиперкуб,

$\mu$  мера Лебега на  $I^n$ ,

$\mu_k$   $k$ -мерная мера Хаусдорфа на  $I^n$ ,  $\dim_H$  - хаусдорфова размерность,

$\gamma \in (0, 1)$  показатель Гёльдера,

$Hold_\gamma(I^n)$  пространство  $\gamma$ -бигёльдеровых гомеоморфизмов  $I^n$ , тождественных на  $\partial I^n$ , с метрикой

$$\text{dist}_\gamma(F, G) = \|F - G\|_\gamma + \|F^{-1} - G^{-1}\|_\gamma,$$

$$\|H\|_\gamma = \|H\|_{C^0} + \sup_{x \neq y} \frac{\|F(x) - F(y)\|}{\|x - y\|^\gamma}.$$

Это пространство полно.

$H_\gamma(I^n)$  замыкание множества сохраняющих границу  $C^1$ -дiffeоморфизмов в  $Hold_\gamma(I^n)$ .

Это пространство вводится по аналогии с так называемым *малым гёльдеровым пространством*, замыканием  $C^\infty$  в гёльдеровых функциях.

### 2.1.3 Формулировка

Фиксируем произвольное число  $\gamma \in (0, 1)$ .

**Лемма.** (Фальконер, [Falconer, Proposition 2.3]). Пусть  $M \subset \mathbb{R}^n$  и отображение  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$   $\gamma$ -гёльдерово,  $A \subset M$ . Тогда

$$\dim_H f(A) \leq \frac{1}{\gamma} \dim_H A.$$

**Следствие.** Пусть множество  $A \subset I^n$  имеет полную меру,  $f \in H_\gamma(I^n)$ . Тогда

$$\dim_H f(A) \geq \gamma n.$$

Иными словами, для  $\gamma$ -бигёльдерова отображения  $n$ -мерного куба образ множества полной меры имеет размерность больше  $\gamma n$ . Покажем типичную точность этой оценки.

**Теорема 20.** Найдется остаточное множество в малом  $\gamma$ -гёльдеровом пространстве бигёльдероморфизмов  $n$ -мерного куба, такое, что для любого отображения из этого множества существует множество полной меры, образ которого имеет хаусдорфову размерность  $\gamma n$ .

### 2.1.4 Сведение теоремы к лемме

**Обозначим** через  $X_\varepsilon$  множество отображений  $F \in H_\gamma(I^n)$ , для которых существуют множество  $U_\varepsilon \subset I^n$  и покрытие  $\Pi_\varepsilon$  множества  $f(U_\varepsilon)$ , такие что

1.  $\mu(U_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ ,
2.  $\text{diam}(\Pi_\varepsilon) < \varepsilon$ ,
3.  $(\gamma + \varepsilon)n$ -хаусдорфов объем покрытия  $\Pi_\varepsilon$  меньше  $\varepsilon$ .

**Лемма 21.** Для любых  $n, \varepsilon > 0, \gamma \in [0, 1]$  найдется отображение  $f_\varepsilon \in X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon$ -близкое к тождественному в метрике  $H_\gamma(I^n)$ .

Выведем теорему из леммы. Множество  $X_\varepsilon$  открыто, потому что если фиксировать  $U_\varepsilon$  и немного увеличить  $\Pi_\varepsilon$ , то эта пара будет удовлетворять вышенаписанным условиям для всех близких отображений.

Докажем плотность  $X_\varepsilon$ . Поскольку диффеоморфизмы плотны в  $H_\gamma(I^n)$ , достаточно рядом с любым диффеоморфизмом  $g$  найти отображение  $\tilde{g} \in X_\varepsilon$ . Рассмотрим отображение  $\tilde{g} = f_{\varepsilon'} \circ g$ ;  $\varepsilon'$  - достаточно малое число, которое будет выбрано ниже, а отображение  $f_{\varepsilon'}$  из  $X_\varepsilon$  и  $\varepsilon$ -близко к тождественному (его существование следует из леммы 21).

Мы воспользуемся следующим элементарным предложением, не доказывая его.

**Предложение 22.** Для любого диффеоморфизма  $g$  отображение  $h \mapsto h \circ g$  из  $H_\gamma(I^n)$  в себя непрерывно.

Поскольку  $g$  диффеоморфизм и  $f_{\varepsilon'}$  близко к тождественному, гёльдерово расстояние между  $\tilde{g} = f_{\varepsilon'} \circ g$  и  $g = \text{Id} \circ g$  мало при достаточно малом  $\varepsilon'$ .

Выберем  $U_{\varepsilon'}$  и покрытие  $\Pi_{\varepsilon'}$  его  $f_{\varepsilon'}$ -образа согласно лемме 21. Возьмем  $U_\varepsilon = g^{-1}(U_{\varepsilon'})$  и покрытие  $\Pi_\varepsilon = \Pi_{\varepsilon'}$  множества  $\tilde{g}(U_\varepsilon) = f_{\varepsilon'}(U_{\varepsilon'})$ . Поскольку  $g$  - диффеоморфизм,  $\mu(U_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$  при достаточно малом  $\varepsilon'$ . Мы доказали, что  $\tilde{g} \in X_\varepsilon$  при достаточно малом  $\varepsilon'$ .

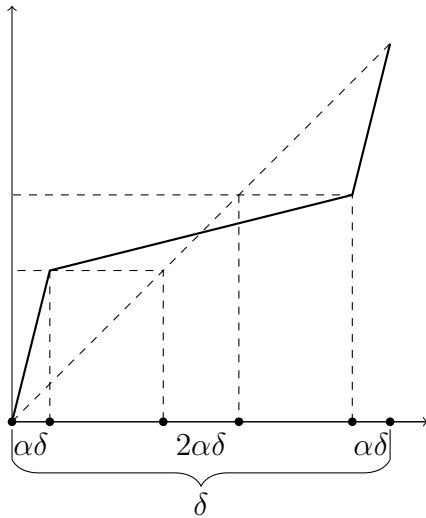
Рассмотрим остаточное множество  $R = \bigcap_{\varepsilon=1/n} X_\varepsilon$ . Пусть  $f \in R$ . Зададимся  $\delta > 0$ .

Пусть  $V_\delta = \bigcap_{\varepsilon=\delta 2^{-n-1}} U_\varepsilon$ . Тогда имеем

1.  $\mu(V_\delta) > 1 - \sum \delta 2^{-n-1} = 1 - \delta$ .
2. Для любого  $\varepsilon$  есть покрытие  $\Pi_\varepsilon \supset f(V_\delta)$  с  $\text{diam}(\Pi_\varepsilon) < \varepsilon$ , такое что  $(\gamma + \varepsilon)n$ -хаусдорфова мера покрытия  $\Pi_\varepsilon$  меньше  $\varepsilon$ .
3. Значит, при любом  $\gamma' < \gamma$  имеем  $\mu_{\gamma'n}(f(V_\delta)) = 0$ .

Объединяя множества  $V_\delta$  по  $\delta = 1/n$ , получим множество  $V_{fin}$  полной меры. Для любого  $\gamma' < \gamma$  видим, что  $\mu_{\gamma'n}(f(V_{fin})) = 0$ , откуда заключаем, что  $\dim_H(f(V_{fin})) \leq \gamma n$ . Обратное неравенство верно по следствию из леммы Фальконера.

### 2.1.5 Одномерная конструкция



Построим вспомогательное отображение  $f$  следующим образом. Разобьем  $I$  на  $N$  отрезков длины  $\delta = 1/N$ . На каждом из этих отрезков построим гомеоморфизм, как описано ниже.

Рассмотрим произвольный получившийся отрезок длины  $\delta$ , обозначим его  $P$ . Выделим в нём краевые подотрезки  $K_1, K_2$ , имеющие каждый длину  $\alpha\delta$  ( $\alpha$  - фиксированное число для всех отрезков, которое будет выбрано потом), и подотрезок в центре  $C$  длины  $2\alpha\delta$ . При отображении  $f$   $K_1, K_2$  линейно растягиваются, занимая почти весь отрезок, кроме центральной части:  $f(K_1 \cup K_2) = P \setminus C$ . Весь остальной отрезок сильно линейно сжимается в центральную часть.

Это описание задает наше отображение однозначно.

Докажем теперь, что в гёльдеровой метрике наше отображение близко к тождественному.

$$\text{dist}_\gamma(f, \text{Id}) = \|f - \text{Id}\|_\gamma + \|f^{-1} - \text{Id}\|_\gamma.$$

Отметим, что график  $f(x)$  переходит в почти такой же график после отражения относительно прямой  $y = x$ , так что второе слагаемое равно первому, и достаточно оценить его. Пусть  $F = f - \text{id}$ , следует оценить

$$\|F\|_\gamma = \|F\|_{C^0} + \sup_{x \neq y} \frac{\rho(F(x), F(y))}{\rho(x, y)^\gamma}.$$

Опишем на поведение этой функции на отрезке длины  $\delta$ . Функция  $F$  возрастает при аргументе от 0 до  $\delta\alpha$ , потом убывает до аргумента  $\delta(1 - \alpha)$ , потом возрастает до  $\delta$ . При этом функция является  $\delta$ -периодической. Поэтому наша функция выглядит как «пила» с кривыми зубчиками, «отломанная» в начальном и конечном маленьких отрезках. Мы разобьем наш отрезок  $I$ , кроме этих начального и конечного отрезка, на отрезки двух классов: в отрезках первого класса функция убывает (эти отрезки - средние части, т.е.,  $C$  каждого из  $\delta$ -отрезков); в отрезках второго класса функция возрастает (эти отрезки - склеенные краевые подотрезки  $\delta$ -отрезков, объединение  $K_1$  и  $K_2$  для смежных отрезков длины  $\delta$ ). Поведение функции  $F$  на отрезках одного класса совершенно одинаково, так как она периодична.

Отрезки как первого, так и второго класса будут называться *отрезками монотонности*.

Заметим, что  $\|F\|$  нигде не превышает  $\delta/2$  - это оценка на первое слагаемое.

Оценим второе слагаемое. Мы хотим посчитать точную верхнюю грань

$$\sup_{x \neq y} \frac{\rho(F(x), F(y))}{\rho(x, y)^\gamma};$$

заметим, что если мы выбрали две точки  $x, y$  на разных отрезках монотонности, то можно увеличить значение дроби, заменив любую из этих точек на концевую точку отрезка монотонности, содержащуюся в  $[x, y]$ , ведь при этом числитель возрастет, а знаменатель уменьшится. С другой стороны, если мы выбрали две точки  $x, y$  на одном отрезке монотонности, то максимальное значение дроби достигается, когда точки находятся как можно дальше - в силу аффинности функции на каждом из этих отрезков при увеличении расстояния между  $x$  и  $y$  в  $\beta$  раз числитель увеличится тоже в  $\beta$  раз, а знаменатель - только в  $\beta^\gamma$  раз, и дробь возрастет. Поэтому супремум достигается, когда  $x, y$  - концевые точки одного из отрезков монотонности или начального интервала.

Видно, что при малом  $\alpha$  супремум достигается на отрезках второго класса и равен  $\delta/(2\delta\alpha)^\gamma$ . Мы получили такую оценку на отклонение нашей функции от тождественной:

$$\|F\|_\gamma \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{(2\alpha\delta)^\gamma}.$$

Отсюда получим

$$\text{dist}_\gamma(f, \text{Id}) = 2\|F\|_\gamma \leq \delta + \frac{2\delta}{(\alpha\delta)^\gamma}.$$

### 2.1.6 Доказательство леммы 21

Покажем, что построенная в предыдущей части функция  $f$  лежит в  $X_\varepsilon$  при надлежащем выборе малых  $\delta$  и  $\alpha$ .

Возьмем в качестве множества  $U_\varepsilon \subset I$  объединение всех отрезков первого класса (т.е.  $\delta$ -отрезков без краевых кусков длины  $\alpha\delta$ ). В качестве покрытия  $\Pi_\varepsilon$  множества  $f(U_\varepsilon)$  возьмем набор всех отрезков длиной  $2\alpha\delta$  в серединах  $\delta$ -отрезков.

Для выполнения первого условия,  $\mu(U_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ , достаточно выполнения  $2\alpha\delta < \varepsilon$ , т.е.  $\alpha < \frac{\varepsilon}{2\delta}$ .

Для выполнения второго условия леммы,  $\text{diam}(\Pi) < \varepsilon$ , достаточно  $\delta < \varepsilon$ .

Обозначим  $\gamma' = \gamma + \varepsilon$ . Для выполнения третьего условия леммы,  $\text{mes}_{\gamma'}(\Pi) < \varepsilon$ , заметим, что наше покрытие состоит из  $N$  одинаковых отрезков, и потому достаточно  $(2\alpha\delta)^{\gamma'} N < \varepsilon$ .

С другой стороны, мы посчитали в предыдущей части, насколько функция  $f$  уклоняется от тождественной в гёльдеровой метрике. Получаем, что  $f$   $\varepsilon$ -близко к тождественному, если:

$$\delta + \frac{2\delta}{(\alpha\delta)^\gamma} < \varepsilon.$$

Видно, что здесь  $\alpha$  стоит в знаменателе левой части, поэтому мы получим оценку на  $\alpha$  снизу, и для доказательства леммы, надо, чтобы она не противоречила оценкам на  $\alpha$  сверху, которые были получены выше. Сейчас будет показано, что это возможно.

Из оценки на уклонение получаем, что:

$$\alpha > \frac{1}{\delta} \left( \frac{2\delta}{\varepsilon - \delta} \right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

а из третьего условия леммы:

$$\alpha < \frac{(\varepsilon/N)^{\frac{1}{\gamma'}}}{2\delta}$$

Эти неравенства совместны, если (вспомним, что  $N = \frac{1}{\delta}$ ):

$$2\left(\frac{2\delta}{\varepsilon - \delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} < (\varepsilon\delta)^{\frac{1}{\gamma'}}$$

Но при стремлении  $\delta$  к 0 левая часть убывает быстрее (т.к.  $\gamma' > \gamma$ ), поэтому при достаточно маленьких  $\delta$  это выполнено. Второе условие тоже выполнено при маленьких  $\delta$ , как и первое (из нашей оценки на  $\alpha$  сверху видно, что при маленьких  $\delta$  выполнено  $\alpha < 1/4$ , что дает первое неравенство, и гарантирует корректность построения, так как  $f$  можно построить при  $\alpha < 1/4$ ).

Перейдем от  $I$  к  $I^n$  - гиперкубу. Докажем основную лемму для гиперкуба. Для этого зададим наше близкое к тождественному отображение как прямое произведение одномерных отображений, обозначим его  $f_{n,\varepsilon}$ . Открытое множество и покрытие будут устроены просто как декартовы произведения соответствующих одномерных множеств, мы обозначим их  $U_{n,\varepsilon}$  и  $\Pi_{n,\varepsilon}$ .

Определим  $\gamma n$ -хаусдорфов объем куба как длину его стороны в степени  $\gamma n$ , а хаусдорфов объем кубического покрытия как сумму объемов всех составляющих его кубов.

Заметим, что хаусдорфова размерность множества не зависит от того, используем ли мы в нашем покрытии шары или гиперкубы: в самом деле, в каждый куб можно вписать шар, и около каждого куба - описать шар; хаусдорфовы объемы вписанного и описанного шаров различаются в фиксированное число раз. Поэтому если покрытие кубами можно сделать сколь угодно малого хаусдорфова объема, то и покрытие шарами - тоже, и наоборот.

Для  $f_{n,\varepsilon}$  ясно, что  $\gamma n$ -хаусдорфов объем соответствующего ему кубического покрытия  $\Pi^n$  меньше  $\varepsilon$ . Это и требуется основной леммой. Понимая хаусдорфов объем покрытия как кубический хаусдорфов объем, завершаем доказательство как и в одномерном случае.

## 2.2 Победа сжатия

### 2.2.1 Косое произведение над сдвигом Бернулли

В этом разделе будет построен пример неустойчивого аттрактора Милнора в классе косых произведений с эргодическим отображением в базе и одним эргодическим отображением по слою.

**Определение 19.** Косым произведением называется динамическая система, заданная на множестве  $B \times X$  отображением следующего вида:

$$F(b, x) = (\sigma b, f_b(x))$$

где  $b \in B$ ,  $x \in X$ ,  $B$  называется базой косого произведения,  $X$  - его слоем, а  $f_b$  - послойные отображения.

Заметим, что послойные отображения зависят от точки базы. Мы будем рассматривать отображение  $F$ , у которого множество в базе -  $\Sigma^2$  (множество бесконечных в обе стороны последовательностей из нулей и единиц), а отображение  $\sigma$  в базе - сдвиг Бернулли. Под сдвигом Бернулли в этой работе понимается только левый сдвиг Бернулли, то есть отображение, переводящее слово  $\dots w_{-1}|w_0w_1\dots$  (знаком  $|$  отмечена нулевая позиция) в слово  $\dots|w_{-1}w_0w_1\dots$ .

Для таких отображений можно ввести более узкий класс ступенчатых косых произведений.



**Определение 20.** *Отображение на множестве на множестве  $\Sigma^2 \times X$  называется ступенчатым косым произведением, если оно имеет вид:*

$$F(b, x) = (\sigma b, f_{b_0}(x)),$$

*то есть является таким косым произведением, что послойные отображения зависят только от первого знака последовательности.*

В этом разделе обсуждается аттрактор Минлора ступенчатых косых произведений. Определение аттрактора Милнора требует задания меры и непрерывности отображения, для чего необходимо ввести топологию.

На этом множестве последовательностей можно ввести метрику. Расстояние между несовпадающими последовательностями задается формулой:

$$\text{dist}(a, b) = \min\{|n|, n : a_n \neq b_n\}.$$

Эта метрика неархимедова, но она задает топологию, в которой открытыми множествами являются цилиндры. Топология на всем фазовом пространстве задается как топология прямого произведения.

Ступенчатое косое произведение зависит только от первого знака  $b$ , и при его смене резко, «ступенькой» меняется. И, однако, топология на  $\Sigma^2$  устроена так специфически, что это не противоречит непрерывности! Результат звучит так:

**Лемма 23.** *Если непрерывны послойные отображения, то ступенчатое косое произведение над сдвигом Бернулли в топологии прямого произведения непрерывно.*

Несмотря на общеупотребительность этого факта в теории косых произведений, его доказательство нигде не написано, и для полноты изложения представляется необходимым дать придуманное автором доказательство.

*Доказательство.* Действительно, всякое открытое множество  $A$  в косом произведении  $B \times S$  можно рассматривать как объединение двух открытых:  $A \cap \{0\} \times S$  и  $A \cap \{1\} \times S$  - каждое из них открыто как пересечение двух открытых. Для доказательства открытости осталось лишь показать, что прообраз каждого из них открыт. Для этого надо показать, что прообраз под действием прямого произведения сдвига Бернулли на одно из послойных отображений непрерывен. Но то, что прямое произведение непрерывных отображений непрерывно, следует из определения топологии прямого произведения.  $\square$

Мера на пространстве последовательностей задается на цилиндрах следующим образом:

**Определение 21.** *Мера Бернулли  $\mu$  на цилиндре с фиксированными  $n$  позициями, равна  $\frac{1}{2^n}$ .*

Мера, относительно которой в этой главе рассматривается аттрактор Милнора - прямое произведение меры Бернулли на меру Лебега.

Доказываемая в этом разделе теорема формулируется так:

**Теорема 24.** *Существует ступенчатое косое произведение со сдвигом Бернулли в базе, у которого одно из послойных отображений является линейным диффеоморфизмом Аносова на торе, но аттрактор Милнора такой системы не совпадает со всем фазовым пространством.*

Этот пример интересен потому, что как отображение в базе, так и одно из послойных отображений являются эргодическими. Напомним в связи с этим теорему Биркгофа, на которой будут ссылки также и в других частях главы.

Поскольку мера Бернулли зависит только от числа фиксированных позиций и вовсе не зависит от их расположения относительно друг друга и начала слова, то эта мера инвариантна для сдвига Бернулли. Более того, эта мера для него является эргодической.

**Определение 22.** Мера  $\mu$  называется эргодической для отображения  $f$  (а отображение  $f$  называется эргодическим относительно меры  $\mu$ ) если всякое измеримое  $f$ -инвариантное множество либо само имеет нулевую меру, либо такое, что его дополнение имеет нулевую меру.

Мы не будем доказывать, что мера Бернулли является эргодической для сдвига, но изложим одно важное свойство эргодических отображений, называемое эргодической теоремой Биркгофа.

**Теорема (Биркгоф).** Пусть отображение  $f$  эргодично относительно вероятностной меры  $\mu$  на компактном многообразии  $M$ . Временными средними порядка  $n$  в точке  $x$  непрерывной функции  $\varphi$  называются суммы вида  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(f^i(x))$ , пространственным средним называется  $\int \varphi d\mu$ . Тогда почти наверное по мере  $\mu$  с ростом числа итераций временные средние сходятся к пространственным:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(f^i(x)) = \int_M \varphi d\mu$$

Стоит особенно отметить, что сходимость в этой теореме происходит не по мере Лебега, а по мере  $\mu$ , поэтому априорно ничего не известно об аттракторах Минлора эргодических отображений. Этот вопрос будет подробнее обсужден в главе диссертации, посвященной  $C^1$ -гладкому диффеоморфизму Аносова с неустойчивым аттрактором Милнора.

Ступенчатые косые произведения над сдвигом Бернулли моделируют поведение мягких косых произведений, а те, в свою очередь - частично-гиперболических систем. Чтобы продемонстрировать это, можно привести результат, который является аналогичным теореме о том, что аттрактор Милнора частично-гиперболической системы состоит из неустойчивых слоёв.

**Теорема (И.С. Шилин, А.В. Окунев).** Аттрактор Милнора косоугольного произведения над сдвигом Бернулли не зависит от прошлого, то есть точки с одинаковой последовательностью символов после разделителя либо одновременно лежат в аттракторе, либо одновременно не лежат.

Заметим ещё, что для всякого слова его часть после разделителя (отмечающего нулевую позицию) называется *будущей судьбой* или просто будущим точки, а часть после разделителя - *прошлой судьбой* или прошлым. Тогда сдвиг Бернулли постепенно переводит будущую судьбу в прошлую, что и мотивирует название. Таким образом, мнемонически приведенная теорема говорит о том, что входит ли точка в аттрактор Милнора не зависит от её будущего. Прошлое точки косоугольного произведения является дискретным аналогом неустойчивого слоения - точки с одним прошлым экспоненциально сближаются под действием обратных итераций сдвига Бернулли. Так что то, что все точки с данным прошлым при любом будущем лежат в аттракторе Милнора - дискретизация факта, что аттрактор Милнора состоит из неустойчивых слоёв.

Сейчас будет показано, насколько, по существу, это мало говорит это об устойчивости аттрактора в целом, и что даже в гораздо более сильных предположениях аттрактор Милнора может быть сделан неустойчивым.

### 2.2.2 Диффеоморфизм Аносова

Диффеоморфизм Аносова, используя уже данные определения, можно было бы описать как частично-гиперболическую систему с частично-гиперболической обратной. Но можно дать и более явное определение; стандартное определение таково:

**Определение 23.** Множество  $\Lambda$  называется гиперболическим множеством для диффеоморфизма  $f$  многообразия  $M$ , если в ограничении на  $\Lambda$  касательное пространство распадается в прямую сумму двух непрерывных полей плоскостей  $E_x^s \subset T_x\Lambda$  и  $E_x^u \subset T_x\Lambda$ ,  $T_x\Lambda = E_x^s \oplus E_x^u$ , которые обладают следующими свойствами:

они постоянного ранга,

они инвариантны (т.е.  $dF_x(E_x^{s,u}) = E_{F(x)}^{s,u}$ ),

дифференциал отображения сжимает в одном из этих полей плоскостей, а в другом поле сжимает дифференциал обратного: существуют  $\lambda > 1$ ,  $c > 0$  что для всех  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\|dF_x^n|_{E_x^s}\| \leq c \lambda^n, \quad \|dF_x^{-n}|_{E_x^u}\| \leq c \lambda^{-n}.$$

Диффеоморфизмом Аносова называют отображение, у которого всё многообразие, на котором оно определено, является гиперболическим.

Известно не так много классов диффеоморфизмов Аносова. Классическими модельными примерами являются геодезические токи на поверхностях отрицательной кривизны, которые в этой диссертации рассматриваться не будут, и отображения, сопряженные линейным диффеоморфизмам тора. Простейшим примером диффеоморфизма тора, который является диффеоморфизмом Аносова, является линейный пример, который в координатах, отвечающих тору как фактору плоскости по целочисленной решетке, задается так:  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Понятно, что вдоль собственного вектора, отвечающего большему собственному значению, строится неустойчивое поле плоскостей, а вдоль вектора, отвечающего меньшему собственному значению - устойчивое. Теорема, которая в дальнейшем будет использоваться без доказательства, поскольку является классической (см., например, [КН, стр. 588]), утверждает, что *всякий* диффеоморфизм Аносова тора сопряжён линейному (определение сопряжения динамических систем может быть найдено во введении), правда, не гладко, а всего лишь гёльдерово.

Неизвестно, существуют ли нетранзитивные диффеоморфизмы Аносова связных многообразий, но простое рассуждение демонстрирует, что все диффеоморфизмы Аносова тора транзитивны ([КН, стр. 590]). Этот факт нам в дальнейшем понадобится.

Кроме того, диффеоморфизмы Аносова эргодичны относительно своей инвариантной меры.

Кроме того, у диффеоморфизмов Аносова тора есть периодические точки, что следует из того, что они сопряжены линейному, задаваемому целочисленной матрицей, а такое отображение у точки с рациональными координатами не увеличивает их знаменателей, и, следовательно, орбита такой точки может попасть только в конечное число позиций, и потому замкнётся. Мы будем строить пример, доказывающий теорему, для диффеоморфизма Аносова, у которого есть неподвижная точка.

### 2.2.3 Сдвиг по градиенту

Опишем второе послынное отображение, сдвиг по градиенту. Напомним сначала определение градиентного потока.

**Определение 24.** Пусть даны риманово многообразие  $M$  и функция  $G$ . В каждой точке  $x \in M$ , не являющейся критической для  $G$ , можно определить вектор скорейшего спуска - такой единичный вектор  $\xi(x)$  из касательного подпространства, что  $L_{\xi(x)}G = \max_{\eta \in ST_x M} L_{\eta}G$ , где  $L$  - производная по направлению. Градиентное векторное поле в не критических векторных точках определяется так:

$$\nabla G(x) = L_{\xi(x)}G\xi(x),$$

а в критических оно равно 0. Поток этого поля называется градиентным потоком.

Опишем теперь второе послынное отображение. Оно действует на торе. Будем считать, что тор вложен в трехмерное пространство с помощью уравнения:

$$(R - \sqrt{x^2 + y^2}) + z^2 = r^2,$$

где  $r, R$  такие, что тор изомертичен единичному (то есть такому, который получается фактором плоскости по решётке целых чисел). В качестве функции для задания градиентного потока возьмем функцию высоты  $G(x, y, z) = -z$ .

Геометрически это означает, что тор вложен в  $R^3$  как вертикально расположенный бублик, а градиентный поток в каждой точке указывает направление «скорейшего спуска» вдоль бублика.

Второе послынное отображение  $f_0$  будет отображением градиентного потока за время  $T$ , точное значение  $T$  будет выбрано позднее. Назовём это отображение *сдвигом по градиенту*. У него четыре неподвижные точки в критических значениях функции  $G$ , и из этих точек лишь одна притягивающая («в нижней точке» тора).

При построении примера эта притягивающая точка будет совпадать с неподвижной точкой диффеоморфизма Аносова. Обозначим её  $O$ . Теперь выберем  $T$  из условия, что произведение норм дифференциалов послынных отображений в  $O$  меньше единицы:

$$\|Df_0\| \|Df_1\| < 1.$$

Выбором достаточно большого  $T$  этого всегда можно добиться. Таким образом,  $f_0$  задано.

### 2.2.4 Доказательство основного результата

Пусть  $F$  - ступенчатое косое произведение со сдвигом Бернулли со слоем тор,  $f_1$  - диффеоморфизм Аносова с неподвижной точкой, а  $f_0$  построено так, как описано выше. Докажем, что для такого отображения выполнено заключение теоремы, то есть аттрактор Милнора нашего косого произведения - декартово произведение базы на притягивающую точку сдвига по градиенту.

Так как для произведения норм дифференциалов верно  $\|Df_0\| \|Df_1\| < 1$ , то для суммы логарифмов норм дифференциалов  $\ln \|Df_0\| + \ln \|Df_1\| < 0$ .

В силу непрерывности послынных отображений найдется такая окрестность  $U(O)$  общей неподвижной точки, что в ней колебание логарифмов норм дифференциалов обеих функций не превосходит  $L/4$ ; обозначим  $\delta_0$  - радиус шара с центром в точке  $O$ , попавшего в  $U(O)$ .

Обозначим за  $M$  максимум нормы дифференциалов послынных отображений.

**Лемма 25.** Для всякого заданного  $\varepsilon$  и области  $\Sigma^2 \times U(O)$  найдется такое множество в базе  $A$ ,  $\mu(A) > 1 - \varepsilon$  и такое число  $\delta$ , что множество  $A \times B_\delta(O)$  под действием итераций косога произведения всегда лежит в этой области.

Доказательство. По теореме Бирхгофа имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n \|DF^{oi}(O)\|}{n} = 1/2(\|Df_0(O)\| + \|Df_1(O)\|) = L$$

По теореме Егорова мы знаем, что на множестве сколь угодно близкой к полной меры это стремление равномерно. Потому мы можем утверждать, что для заданного  $\varepsilon$  по теореме Егорова найдется такое множество  $A$ ,  $\mu(A) > 1 - \varepsilon$ , что существует  $N$ :

$$\frac{\sum_{i=0}^n \|DF^{oi}(O)\|}{n} = L/2, n > N.$$

Теперь выберем подходящее число  $\delta$ :

$$\delta = \delta_0/M^N.$$

Докажем, что орбита любой точки из  $A \times B_\delta(O)$  под действием нашего косога произведения не покидает выбранной нами узкой полоски.

Доказательство будем вести по индукции. Для первых  $N$  итераций это очевидно из определения  $M$ . Пусть это верно для  $n$ -той итерации. Заметим, что для точки, которая первые  $n$  итераций проводит в  $\Sigma^2 \times U(O)$ , в силу выбора  $A$  и определения  $U(O)$  выполнена такая оценка:

$$\frac{\sum_{i=0}^n \|DF^{oi}(x)\|}{n} < L/4, n > N, x \in U(O)$$

Таким образом, сумма норм дифференциалов меньше 0, а потому произведение норм, а значит, и норма произведений дифференциала композиции послынных отображений меньше единицы, и потому образ под действием  $n + 1$ -ой итерации лежит в узкой полоске в окрестности 0, что и требовалось.

Выведем теперь из леммы теорему.

Для этого мы воспользуемся трюком, предложенным Ю.Г. Кудряшовым, который для данной ситуации был рассказан автору И.С. Шилиным. Изначальное доказательство содержало более ограничительные условия на послынные отображения и было более техническим.

Для начала заметим, что если данная точка имеет такую же будущую судьбу, как точка над множеством  $A$ , то она имеет то же  $\omega$ -предельное множество. Поэтому можно пополнить наше множество  $A$  точками с таким же будущим, как у одной из точек  $A$ , и произвольным прошлым. Далее мы будем считать, что наше  $A$  - уже такое пополненное множество.

Для каждой точки существует такая последовательность отображений  $f_0$  и  $f_1$ , которая переводит ее в  $U_\varepsilon$  окрестность нуля. Заметим, что для данного  $\varepsilon$  длина такой последовательности может быть выбрана равномерно ограниченной по всем точкам - для всех точек, далеких от орбит геодезического тока, не притягивающихся к 0, достаточно просто применить  $f_0$ , а орбиты, которые близки к седловым, можно применением  $f_1$  перевести в далекие от них, и далее уже применять  $f_0$ . Таким образом,

существует  $N(\varepsilon)$  - оценка для всех точек на число отображений, которое необходимо применить к произвольной точке слоя, чтобы перевести ее в  $U_\varepsilon$ .

Введем теперь множества последовательностей  $w_n A$ , которые устроены следующим образом: по данному  $\varepsilon$  по лемме выбраны  $A$  и  $\delta$ ,  $w_n$  - какое-то слово длины  $N(\delta)$ , а множество  $w_n A$  - это такое множество последовательностей, у которых в начале стоит слово  $w_n$ , а затем приписано будущее из  $A$ . Такие множества имеют одинаковую положительную меру.

Докажем теперь, что метрически полное множество точек притягивается к нижнему основанию.

Зафиксируем произвольную точку  $p$  и оценим меру множества  $G(p)$  точек, которые притягиваются к нулевому сечению. Разобьем произвольную последовательность в базе на блоки по  $N$  элементов каждый; назовем блок хорошим, если после него точка попадает в  $B_\delta(O)$ . Заметим, что каждый блок в нашей последовательности хороший с фиксированной ненулевой вероятностью (по выбору  $N$  хотя бы один из блоков хороший, а всего блоков -  $2^N$ ). Поэтому в каждой последовательности хороший блок содержится с единичной вероятностью. Введем множества  $H_i$  точек, для которых первый хороший блок -  $i$ -тый. Заметим, что множество вида

$$\bigcup H_i \cap \sigma^{Ni} A$$

обладает тем свойством, что все точки с такой координатой по базе из  $p$ -сечения косо́го произведения притягиваются к нулевому сечению. В самом деле, всякая точка под действием итераций сперва под действием хорошего блока попадает в  $B_\delta(O)$ , а потом лежит в  $A \times B_\delta(O)$ , и потому по лемме не покинет  $U(O)$  по слою.

Посчитаем меру этого множества:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup H_i \cap \sigma^{Ni} A\right) &= \sum_i \mu(H_i) \mu(\sigma^{Ni} A) = \\ &= \sum_i \mu(H_i) \mu(A) = \mu(A) \sum_i \mu(H_i) = \mu A > 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

где первое равенство вытекает из того, что мы считаем меру двух цилиндрических множеств, а последнее - из того, что хороший блок содержится в последовательности с единичной вероятностью.

По теореме Фубини отсюда заключаем, что и общая мера множества точек, притягивающихся к нижнему основанию, больше  $1 - \varepsilon$ . Но поскольку по нашей лемме  $\varepsilon$  сколь угодно мало, а  $U(O)$  можно выбрать произвольно малой окрестностью  $O$ , то почти всякая точка притягивается к нижнему основанию, которое таким образом и совпадает с аттрактором Милнора.

## 2.3 Толстый или неустойчивый аттрактор

### 2.3.1 Альтернатива

В этом разделе под толстым аттрактором будет пониматься аттрактор положительной меры, при этом он может и совпадать со всем фазовым пространством.

Этот раздел представляет ещё один результат применения теоремы Егорова к динамическим системам, на этот раз уже за пределами косых произведений. Наиболее интересной деталью в нижеприведенной теореме, по-видимому, стоит считать её универсальность - она выполнена для всех диффеоморфизмов.

**Теорема 26.** *Если у диффеоморфизма  $g$  компактного многообразия  $M$  аттрактор Милнора толстый, то у обратного к этому диффеоморфизму - аттрактор Минлора или тоже толстый, или неустойчив по Ляпунову.*

*Доказательство.* Доказывать будем от противного. Пусть у отображения  $f$  аттрактор нулевой меры и устойчив по Ляпунову. Докажем, что тогда у обратного к нему аттрактор Минлора нулевой меры. Так как аттрактор  $f$  нулевой меры, то для всякого  $\varepsilon$  можно найти его покрытие шарами общей меры меньше  $\varepsilon$ , обозначим его  $U$ . Докажем, что почти всюду верно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_U(f^n(x)) = 1,$$

Для доказательства заметим, что в силу устойчивости аттрактора по Ляпунову для  $U_\varepsilon$  существует окрестность аттрактора  $V$  такая, что точки из  $V$  при дальнейших итерациях никогда не покидают  $U_\varepsilon$ . Почти все точки стремятся к аттрактору Минлора, и, следовательно, попадают в  $V$ , и, следовательно, не покидают  $U_\varepsilon$ .

По теореме Егорова, по всякому  $\delta > 0$  можно найти замкнутое множество  $A_\delta$  такое, что  $\mu(M - A) < \varepsilon$ , и на  $A_\delta$  есть равномерная сходимост:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_U(f^n(x)) \Rightarrow 1$$

Потому после некоторого числа  $N$  итераций все точки из  $A_\delta$  попадают в  $U_\varepsilon$ . Таким образом, мы знаем, что существует открытое множество  $M - A_\delta$  меры меньше  $\delta$ , в которое при обратных итерациях попадают все точки, кроме тех, что пришли из  $U_\varepsilon$  - множества меры  $\varepsilon$ .

Значит, все точки, кроме точек меры  $\delta$  и точек из  $U_\varepsilon$  являются блуждающими. Но аттрактор Минлора состоит из неблуждающих точек, поэтому мера точек из аттрактора Минлора за пределами  $U_\varepsilon$  не больше  $\delta$ . Но поскольку  $\delta$  и  $\varepsilon$  можно выбрать сколь угодно малыми, аттрактор Минлора нулевой меры, что и требовалось доказать.  $\square$

### 2.3.2 Дополнительный пример

Возникает естественный вопрос, можно ли как-то усилить эту теорему, не теряя общности? Наиболее правдоподобным кажется следующее предположение: если множество положительной меры содержится в аттракторе и прямого, и обратного отображения, то оно не может быть устойчивым. Действительно, казалось бы, точки, которые притягиваются под действием прямого отображения к этому множеству, от него же отталкиваются действием обратного.

И тем не менее, это предположение неверно.

Приступим к построению примера. Его можно задать формулами, но более существенным представляется его качественное описание.

Вообразим себе отображение на диске, устроенное так. В концентрическом диске половинного радиуса (далее он называется *центральной диском*) это отображение тождественное. На координатных осях это отображение тождественное. Во всех остальных точках отображение перемещает точки от оси абсцисс к оси ординат по дугам окружности, причем скорость этого перемещения падает к нулю при приближении к координатным осям и к диску половинного радиуса.

Это отображение неформально можно описать так. Представим себе мгновенно остановившееся колесо водяной мельницы с четырьмя лопастями, капельки которого еще продолжают двигаться. Тогда ось и лопасти неподвижны, а капельки летят от одной лопасти к другой. Теперь мысленно развернем в обратном времени картину

во втором и четвертом квадрантах колеса. Это дает представление о перемещении точек под действием нашего отображения.

Формулой это отображение в диске единичного радиуса записывается так:

$$F(x, y) = [\psi(x, y) \circ R_\alpha + (1 - \psi(x, y)) \circ \text{id}](x, y),$$

где  $R_\alpha$  - матрица поворота на угол  $\alpha$ ,  $\text{id}$  - единичная матрица, и  $\alpha = \pi/2$ , а

$$\psi(x, y) = f(x^2 + y^2)$$

- бесконечно гладкая, одинаковая на всякой проходящей через 0 прямой функция, равная 0 в круге радиуса  $1/2$  (т.е., при  $x^2 + y^2 \leq 1/4$ ) и положительная вне него, но равная 0 на самой границе нашего фазового пространства - единичного диска.

У этого отображения аттрактором Милнора будет объединение центрального диска (радиуса  $1/2$ ) и оси ординат. Действительно, на центральном диске все точки неподвижны, так что они все должны войти в аттрактор Милнора, а вне диска все точки движутся к оси ординат, причем по дугам окружностей, так что вся ось должна войти в аттрактор Милнора.

Обратное отображение устроено точно так же, только вращение в каждом квадранте происходит в другую сторону. У такого отображения аттрактором Милнора будет объединение центрального диска уже с осью абсцисс. Ясно, что и прямое, и обратное отображение устойчивы по Ляпунову. Этот пример показывает, что условия теоремы существенны, и бывают толстые аттракторы Милнора, устойчивые и в прямом, и в обратном времени.

## 2.4 Аттрактор голоморфного sine-семейства

### 2.4.1 Комплексная формулировка

Как и было сказано во введении, эта часть представляет собой исследование поведения sine-семейства голоморфных функций на комплексной плоскости (такие функции называются целыми):  $\sin(az + b)$ . Эти функции необратимы, но это не мешает определить  $\omega$ -предельные множества для точек, и, соответственно, ввести понятие аттрактора Милнора и устойчивости по Ляпунову. Выше было рассказано, что для вещественных динамических систем зачастую исследование их свойств сводится к исследованию множеств с наиболее хаотической динамикой - гомоклинических классов, в то время как на остальной части фазового пространства динамика регулярна. Нечто подобное существует и для голоморфных функций, а именно:

**Определение 25.** *Точка принадлежит множеству Жюлиа голоморфного отображения  $h$  сферы Римана, если замыкание её орбиты неустойчиво по Ляпунову.*

Множество Жюлиа замкнуто; дополнение до него, открытое множество точек, устойчивых по Ляпунову, называется множеством Фату. Классическая теорема утверждает, что множество Жюлиа никогда не пусто, но для нашего семейства она автоматически следует из более сильного и необходимого для доказательства результата Макмюллена:

**Теорема (McMullen).** *Множества Жюлиа отображений из sine-семейства (т.е., вида  $\sin(az + b)$ ) имеют положительную меру Лебега.*

Для дальнейших рассуждений доказательство Макмюллена неважно, но интересно отметить, что оно также использует технику контроля искажений, которая применялась в доказательстве самого первого результата диссертации.

Теперь можно сформулировать теорему, которая будет доказана в этом разделе:



**Теорема 27.** *В семействе  $\sin(az + b)$  при достаточно малых  $a, b$  аттрактор Милнора неустойчив.*

Конечно, может показаться, что положительность меры точек с неустойчивой по Ляпунову орбитой автоматически должна давать неустойчивость аттрактора Милнора в целом. Однако это предположение неверно. Если мы вернемся к примеру из предыдущей части, демонстрирующему устойчивый по Ляпунову толстый аттрактор, то в нем можно увидеть, что почти все граничные точки аттрактора Милнора как индивидуальные точки имеют неустойчивую по Ляпунову орбиту (ибо каждая граничная точка неподвижна, но в любой её окрестности найдется точка, которая движется к одной из осей, поэтому если точка не лежит на осях, то она заведомо неустойчива по Ляпунову), и только все вместе образуют устойчивое по Ляпунову множество. Хотя мы не будем этого доказывать, но для  $\sin$ -семейства все точки множества Жюлиа граничные, поэтому их неустойчивость не должна удивлять; так что для доказательства неустойчивости аттрактора Милнора в целом нам потребуется ещё один факт голоморфной динамики.

**Теорема (Baker).** *Для целых функций в множестве Жюлиа плотно множество отталкивающих периодических орбит.*

Доказательство этой теоремы в дальнейшем не потребуется.

**Теорема 28.** *Если в множестве  $A$  плотно множество отталкивающих периодических орбит голоморфной функции  $g$ , то есть плотная в  $A$  орбита.*

Доказательство этого факта тоже не потребуется. Он не формулируется как отдельная теорема, но является классической леммой при доказательстве транзитивности рациональных функций в множестве Жюлиа, в частности, его доказательство, основанное на теореме Альфорса, можно найти [EL, стр. 16]. Сочетание этого факта с теоремой Бейкера дает очевидное следствие: целая функция транзитивна на своем множестве Жюлиа. Хотя этот факт известен специалистам по голоморфной динамике, он нигде прямо не сформулирован, поэтому в этой главе была пояснена его формулировка и вывод. На этом по существу завершается голоморфная часть доказательства. Дальнейшие рассуждения носят топологический характер.

#### 2.4.2 Топологическое доказательство

Функция  $g$  имеет периодическую притягивающую точку  $0$ . Неподвижность очевидна, притягивается, т.к. производная меньше единицы по модулю. Зададим окрестность  $U$  функции  $g$  тем условием, что периодическая притягивающая точка сохраняется в этой окрестности. Дальнейшие рассуждения проводятся для любой функции из  $U$ .

Множество Жюлиа для функций  $U$  положительной меры согласно результату Макмюллена. Оно является полным (в силу компактности как замкнутое подмножество Римановой сферы), метризуемым (метрика наследуется с Римановой сферы), сепарабельным (база наследуется из топологии на сферы Римана, а счетная база топологии для метризуемых пространств равносильна сепарабельности) пространством.

Согласно теореме Бейкера, в множестве Жюлиа плотны периодические отталкивающие орбиты, а это влечет топологическое перемешивание, которое для полных метризуемых сепарабельных пространств означает существование всюду плотной орбиты. Так как множество Жюлиа полно и положительной меры, то в нем есть точка аттрактора Милнора – если бы ее не было, то все точки множества Жюлиа имели

бы  $\omega$ -предел вне аттрактора Милнора, но такие точки образуют множество положительной меры, и это противоречит определению аттрактора Милнора.

Если ни одна точка плотной в множестве Жюлиа орбиты не принадлежит аттрактору, то поступим так. Возьмем какую-то точку  $x$  множества Жюлиа, не принадлежащую аттрактору; она не принадлежит АМ с некоторым шаром в силу замкнутости аттрактора. Обозначим  $2\varepsilon$  – радиус этого шара. Теперь заметим, что в любой окрестности аттрактора есть точка плотной в множестве Жюлиа орбиты (так как пересечение аттрактора Милнора и множества Жюлиа непусто по предыдущему). В силу плотности положительные итерации приводят ее в  $\varepsilon$ -окрестность  $x$ , то есть на расстояние больше  $\varepsilon$  от аттрактора. Таким образом, из любой окрестности аттрактора можно убежать на расстояние больше  $\varepsilon$ , а это и есть неустойчивость по Ляпунову.

Если же хоть одна точка плотной в множестве Жюлиа орбиты принадлежит аттрактору Милнора, то и все ее образы принадлежат, а значит, принадлежит целая плотная в множестве Жюлиа орбита, и по замкнутости аттрактора Милнора, все множество Жюлиа лежит в аттракторе Милнора.

Возьмем  $V$  – притягивающую окрестность неподвижной притягивающей точки; обозначим  $O$  – объединение всех полных прообразов  $V$  под действием какого угодно числа итераций.  $O$  – не вся сфера Римана, ибо содержит только точки множества Фату. Поэтому есть точка  $d$ , лежащая на границе  $O$  (если бы граничных точек не было, то любая точка была бы внутренней либо для  $O$ , либо для дополнения  $O$ , и потому  $O$  и дополнение  $O$  любую точку содержали бы с некоторым шаром, что означает, что сфера Римана разбита на два непустых открытых множества, что противоречит связности).

Точка  $d$  лежит в множестве Жюлиа. Действительно, в любой окрестности точки  $d$  есть точки  $O$ , которые стремятся к неподвижной точке, а сама точка  $d$  к неподвижной точке не стремится, поскольку все ее образы лежат на границе  $O$  в силу инвариантности границы, а между границей  $O$  и неподвижной точкой ненулевое расстояние (граница замкнута, а неподвижная точка – компакт, поэтому расстояние определено; оно не нуль, так как  $V$  изначально содержало неподвижную точку с некоторым шаром). Поэтому из любой окрестности  $d$  точки убегают при итерациях, и орбита  $d$  неустойчива по Ляпунову, а это и значит, что  $d$  принадлежит множеству Жюлиа по определению.

Неподвижная точка лежит в  $V$  с некоторым шаром. Обозначим его радиус  $2\alpha$ . Возьмем  $\alpha$ -окрестность неподвижной точки, ее образ под действием функции, и найдем расстояние между границей образа  $\alpha$ -окрестности и неподвижной точкой. Обозначим это расстояние  $2\varepsilon$ . Заметим, что во всей области  $V$  нет точек аттрактора, кроме неподвижной точки, потому что все остальные точки  $V$  – блуждающие, а аттрактор Милнора не содержит блуждающих точек.

Теперь скажем вот что: в любой окрестности аттрактора лежат точки из  $O$ , так как  $d$  лежит в множестве Жюлиа, а оно – в аттракторе Милнора. Значит, в любой окрестности аттрактора найдется точка с орбитой, притягивающейся к нашей неподвижной точке. Эта орбита в некоторый момент первый раз посетит образ  $\alpha$ -окрестности неподвижной точки. Тогда на предыдущем шаге она лежала в разности между  $\alpha$ -окрестностью и ее образом. Значит, ее расстояние до любой точки аттрактора было больше  $\varepsilon$  (до неподвижной точки – по построению, а до любой другой – потому, что точка с  $\varepsilon$ -шаром полностью лежит в  $2\alpha$ -окрестности неподвижной точки, а там нет точек аттрактора по построению). Итак, из любой окрестности аттрактора можно уйти на расстояние больше  $\varepsilon$  и для этого случая. Аттрактор Милнора неустойчив.

## 2.5 Размерность и неинвариантность

### 2.5.1 Подготовительные построения

В этой главе будет построено отображение, дающее отрицательный ответ на сразу две гипотезы - о том, что хаусдорфова мера точек, имеющих «неправильное» статистическое поведение для отображений с SRB-мерой, мала; и о том, что аттрактор Минлора топологически инвариантен.

Как и в большинстве примеров, где речь идет о игре на противоречиях между топологией и мерой, пример использует канторовы множества.

Напомним, что канторовым совершенным множеством называется замкнутое множество с пустой внутренностью и без изолированных точек. Нам понадобятся канторовы множества на отрезке, которые строятся следующим образом.

Начнём построение с отрезка единичной длины. На первом шаге из середины отрезка выбрасывается интервал длины  $a_1$ , на втором - из каждого из двух оставшихся отрезков из середины выбрасываем равные интервал так, что суммарная длина выброшенных отрезков  $a_2$  и так далее.

Результатом этой процедуры будет канторово совершенное множество лебеговой меры  $1 - \sum_i a_i$ , в частности, выбрав быстро сходящийся ряд, можно сделать эту меру положительной. Заметим, что построенное таким образом канторово множество обладает свойством симметричности - каждый выброшенный на данном шаге интервал (и каждый оставшийся к этому шагу отрезок) имеют одинаковую длину.

**Лемма 29.** *Выбором  $\{a_i\}$  в вышевведенных обозначениях можно добиться того, чтобы хаусдорфова размерность симметричного канторова множества была полной, а мера - нулевой.*

*Доказательство.* Это достигается аккуратным подбором  $\{a_i\}$ ; во-первых, чтобы получить нулевую меру канторова множества, надо потребовать, чтобы

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1.$$

Во-вторых, для того, чтобы получить оценку на хаусдорфову размерность канторова множества, найдем его  $\alpha$ -мерный хаусдорфов объём для всякого  $\alpha$ . Объём множества по определению является пределом суммы радиусов в степени  $\alpha$  шаров, образующих  $\varepsilon$ -покрытия множества, при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , причём этот объём с уменьшением  $\varepsilon$  может только возрастать.

Заметим, что после  $n$  шагов с выбрасыванием на каждом шаге интервалов соответствующей длины мы получим  $2^n$  отрезков, все одинаковой длины (по построению наше множество симметрично), и суммарной длины  $1 - \sum_{i=1}^n a_i$ , поэтому длина каждого отрезка, который остается после  $n$ -того шага -

$$\frac{1 - \sum_{i=1}^n a_i}{2^n}.$$

Обозначим это число  $x_n$ . Докажем, что при покрытии нашего канторова множества шарами радиуса  $x_n$  оптимально использовать  $2^n$  таких шаров, положив их в отрезки, оставшиеся после  $n$ -того шага (по крайней мере, для достаточно большого шага  $n$ ). Покажем это.

Вспомним, что мы ищем  $\{a_i\}$ , чтобы реализовать канторово множество с нужными свойствами. Будем считать, что мы выбрали эту последовательность убывающей.

Заметим, что  $x_n$  не может покрывать три отрезка сразу - тогда один из них, средний, он покрывал бы целиком, но длина того уже  $x_n$ . Значит, шар радиуса  $x_n$  максимум покрывает два отрезка; но если он покрывает два, то, из-за своей длины, ни один из них не целиком. В частности, один шар может покрывать правый конец только одного отрезка.

Сопоставим каждый шар самому левому из отрезков, который он покрывает. Каждому отрезку сопоставлен шар, правый конец которого этот шар покрывает, при этом каждый шар сопоставлен только одному отрезку. Следовательно, шаров не меньше, чем отрезков. Поэтому указанное покрытие, помещающее шары точно на отрезки, оптимально.

Получим хаусдорфов  $\alpha$ -объём покрытия равным  $2^n x_n^\alpha$ , или, если вспомнить о том, что такое  $x_n$ :

$$vol_\alpha(K) = 2^n \frac{(1 - \sum_{i=1}^n a_i)^\alpha}{2^{\alpha n}} = 2^{(1-\alpha)n} (1 - \sum_{i=1}^n a_i)^\alpha$$

Пусть теперь мы выбрали  $\{a_i\}$  убывающей медленнее любой убывающей геометрической прогрессии. Предположим, что хаусдорфова размерность канторова множества меньше 1. В силу выбора последовательности для достаточно больших  $n$  мы можем сравнить её с геометрической прогрессией со знаменателем  $\frac{1+2^{(\alpha-1)}}{2}$  - заметим, что всё честно, и знаменатель прогрессии меньше 1, потому что  $2^{(\alpha-1)} < 1$  как большее единицы число в отрицательной степени. Получим:

$$1 - \sum_{i=1}^n a_i > \left(\frac{1 + 2^{(\alpha-1)}}{2}\right)^n$$

Тогда, сравнив это с формулой выше, приходим к выводу, что

$$vol_\alpha(K) > 2^{(1-\alpha)n} \left(\frac{1 + 2^{(\alpha-1)}}{2}\right)^n = \left(\frac{1 + 2^{(1-\alpha)}}{2}\right)^n.$$

Последняя последовательность является геометрической со знаменателем на сей раз больше 1, потому что  $2^{(1-\alpha)} > 1$ , откуда следует, что хаусдорфов объём  $\varepsilon$ -покрытия при достаточно малых  $\varepsilon$  может быть сделан сколь угодно близким к бесконечности при  $\alpha < 1$ , поэтому хаусдорфова размерность должна быть равна единице.

Для завершения доказательства осталось только указать на такую последовательность чисел  $\{a_i\}$ , которая удовлетворяет всем использованным при доказательстве свойствам: убывает, при этом медленнее всякой геометрической прогрессии, и при этом с суммой ряда, равной 1. Описанным свойствам удовлетворяет, например, последовательность чисел

$$a_i = \frac{6}{\pi^2 i^2}.$$

□

При доказательстве результата этого раздела в дальнейшем симметричность канторова множества несущественна, но использование именно такого канторова множества является необходимым для построения  $C^1$ -гладкого диффеоморфизма Аносова с неустойчивым аттрактором Милнора, поэтому никаких других канторовых множеств мы рассматривать не будем.

В этой главе диссертации будет построен пример семейства динамических систем, в котором можно найти контрпримеры сразу к двум гипотезам о них: во-первых, удастся доказать, что аттрактор Милнора не является топологическим инвариантом, во-вторых, что наличие SRB-меры в некотором роде не улучшает эргодических

свойств системы. Напомним определение SRB-меры: участвующие в нём суммы понадобятся для формулировки эргодической теоремы.

**Определение 26.** Мера  $\mu$  называется SRB-мерой для отображения  $f$  риманова многообразия  $M$ , если для всякой непрерывной функции  $\varphi$  временные средние сходятся к пространственным относительно этой меры почти всюду по мере Лебега

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(f^i(x)) = \int_M \varphi d\mu.$$

Как видно, определение SRB-меры очень напоминает результат теоремы Биркгофа для эргодических мер. Но в теореме Биркгофа утверждалось, что временные средние сходятся к пространственному среднему по эргодической мере  $\mu$  почти всюду по этой же самой мере  $\mu$ , а в определении SRB-меры это происходит почти всюду по мере Лебега. В частности, любая атомарная мера, у которой равный вес приписан точкам одной периодической орбиты функции  $f$ , является эргодической (если множество содержит одну точку периодической орбиты и инвариантно, то оно содержит все её точки, и потому имеет полную меру, а если не содержит ни одной, - то нулевой). Но далеко не всякая атомарная мера на периодической орбите является SRB-мерой.

В связи с этим возникает вопрос о хаусдорфовой размерности точек, чьи временные средние отличаются от пространственных. Оценка дается следующим образом.

**Определение 27.** Для произвольной непрерывной функции  $\varphi$  и положительного числа  $\alpha \in C^0(M)$ ,  $\alpha > 0$  определим множество  $(\varphi, \alpha)$ -нетипичных точек:

$$K_{\varphi, \alpha} := \left\{ x \in M : \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(f^i(x)) - \int_M \varphi d\mu \right| \geq \alpha \right\}$$

Говорят, что для функции  $\varphi$  и меры  $(\varphi, \mu)$  выполнено заключение специальной эргодической теоремы, если для всякой непрерывной функции  $\varphi$  и положительного числа  $\alpha$  хаусдорфова размерность  $K_{\varphi, \alpha}$  строго меньше полной:  $\dim_H K_{\varphi, \alpha} < \dim M$ .

Получены результаты, доказывающие, что в широких классах отображений заключение специальной эргодической теоремы выполнено (см., например, введение). Возникает вопрос, существуют ли вообще отображения, для которых это не выполнено. Ответ на этот вопрос и дает следующий результат.

### 2.5.2 Теорема об уклонении временных средних

**Теорема 30.** Существуют отображения, для которых заключение эргодической теоремы не выполнено.

Для того, чтобы построить такое отображение, сопоставим канторову совершенному множеству на отрезке  $K$  функцию на сфере так, как это описано ниже.

Зададим сначала функцию на отрезке, которая на  $K$  равна 0, а на дополнении к  $K$  - больше 0, причем она гладкая.

Построение можно провести, пользуясь следующим рассуждением.  $K$  - замкнуто, дополнение до замкнутого множества открыто, а открытое множество на отрезке - объединение счетного числа интервалов. Пронумеруем эти интервалы. Для  $n$ -того интервала зададим бесконечно гладкую функцию, которая не равна 0 только на этом интервале, не превосходит  $1/2^n$ , и на границе интервала имеет все производный

нулевыми. Теперь сумма таких функций задаёт функцию, равную 0 только на нашем замкнутом множестве, и она бесконечно гладкая, так как на каждом интервале все слагаемые-функции, кроме одной, равны нулю, а вне интервалов все её производные просто нулевые.

Склеим из отрезка единичную окружность и получим функцию на окружности, равную нулю на канторовом множестве  $K$  и больше нуля вне его. Обозначим её  $\rho$ .

Обозначим за  $g$  функцию на единичном отрезке, которая имеет следующую простую динамику: она все точки, кроме конечных, она «прижимает к 0», то есть,  $g(x) < x$  на  $(0, 1)$ , а все её производные в 0 и 1 - такие же, как у тождественного отображения.

Теперь зададим функцию на цилиндре следующим образом:

$$\tilde{F}(x, \varphi) = ((1 - \rho)id(x) + \rho g(x), \varphi)$$

Цилиндр можно доклеить до сферы, соединив краевые точки отрезков; обозначим функцию на сфере  $F$ . Заметим, что это можно сделать, выбрав отображение склейки гладким всюду, кроме границ цилиндра. В силу выбора  $g$  полученная склеенная функция будет бесконечно гладкой.

Можно выбрать канторово множество  $K$ , по которому мы строили  $F$ , множеством нулевой меры и полной хаусдорфовой размерности (существование таких множеств было доказано раньше).

Покажем, что для такой функции заключение специальной эргодической теоремы не выполняется. SRB-мерой функции  $F$  будет точка сферы, полученная при склеивании нулевого слоя цилиндра. Действительно, к этой точке притягивается полная мера точек на сфере - все точки, кроме неподвижных. Неподвижные точки являются образом под действием отображения склейки точек цилиндра, которые по координате на окружности принадлежали к множеству  $K$ . Заметим, что таких точек нулевая мера и полная хаусдорфова размерность в любой окрестности отталкивающей неподвижной точки.

Зададим  $\varphi$  так: она равна 0 в малой окрестности притягивающей точки, 1 в окрестности отталкивающей и непрерывна. Тогда  $\int_M \varphi d\mu = 0$ , но для всех неподвижных точек в окрестности отталкивающей неподвижной точки при всяком  $n$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(F^i(x)) = 1.$$

Таким образом, для построенного отображения  $f$  заключение специальной эргодической теоремы неверно.

### 2.5.3 Топологическая неинвариантность аттрактора Милнора

**Теорема 31.** *Аттрактор Милнора динамической системы не является топологическим инвариантом.*

Доказательство. Выберем два канторовских множества  $K_1$  и  $K_2$  так, чтобы они были гомеоморфны, но при этом  $K_1$  было нулевой меры, а  $K_2$  - положительной. Это можно сделать, например, так.  $K_1$  выберем стандартным канторовским множеством, а  $K_2$  - образом  $K_1$  под действием отображения  $(id+l)/2$ , где  $l$  - отображение стандартной канторовой лестницы. Таким образом, эти канторовы множества гомеоморфны, но мера  $K_2$  равна одной второй.

Построим для этих множеств соответствующие  $F_{K_1}$  и  $F_{K_2}$ . Как уже было показано в доказательстве теоремы 1, для  $F_{K_1}$  полная мера точек притягивается к одной точке

сферы. Она и будет аттрактором Милнора этого отображения. Но для отображения  $F_{K_2}$  аттрактор не является одной точкой, потому что у  $F_{K_2}$  есть положительная мера неподвижных точек (это точки, которые перед склейкой по координате на окружности цилиндра принадлежали к  $K_2$ , с произвольной координатой по слою). Поэтому аттракторы этих отображений не могут быть сопряжены гомеоморфизмом.

#### 2.5.4 Усиление этой теоремы эквивалентно открытой проблеме

Конечно, хотелось бы получить результат не для индивидуальных отображений, а для целых их областей. Наиболее естественно было бы ожидать такой результат:

**Вопрос 1.** *Гипотеза. Существуют области  $U, V$  пространства диффеоморфизмов и гомеоморфизм  $h$  такой, что  $h \circ U \circ h^{-1} = V$ , причем аттракторы в областях  $U$  и  $V$  не гомеоморфны.*

К сожалению, есть существенные трудности на пути попыток доказать эту гипотезу. Для того, чтобы обрисовать их, нам понадобятся следующие определения:

**Определение 28.** *Гомоклиническим классом седла  $s$  называется замыкание множества его гомоклинических точек, то есть точек, принадлежащих одновременно устойчивому и неустойчивому многообразию седла.*

Для типичного диффеоморфизма все его гомоклинические классы транзитивны.

**Определение 29.** *Гомоклинический класс называется аттракторным, если он притягивает свою окрестность. Замыкание объединения всех аттракторных гомоклинических классов называется топологическим аттрактором.*

**Определение 30.** *Диффеоморфизм называется ручным, если количество гомоклинических классов конечно. Иначе он называется диким.*

По самому определению аттракторного гомоклинического класса видно, что это понятие инвариантно относительно сопряжения гомеоморфизмом. Возникает вопрос:

**Вопрос 2.** *Гипотеза. Может ли аттрактор Милнора не совпадать с топологическим аттрактором?*

Для диких диффеоморфизмов известно очень мало примеров: во всех известных случаях аттрактор Милнора совпадает с замыканием объединения аттракторных гомоклинических классов. Для ручных диффеоморфизмов топологический аттрактор устойчив по Ляпунову и даже асимптотически. Поэтому если мы хотим найти гомеоморфизм  $h$ , сопрягающий области ручных диффеоморфизмов, то мы должны сперва найти ручные диффеоморфизмы, типично обладающие неустойчивым аттрактором Милнора. Но это открытая проблема. Более того, неизвестно даже, правда ли, что аттракторные гомоклинические классы для них притягивают полную меру - это гипотеза [BDV, problem 10.31].

## 3 Глава 3. Аттрактор Милнора диффеоморфизма Аносова, не совпадающий со всем фазовым пространством

### 3.1 Развитие примера Бонатти

Этот пример основан на устном сообщении Бонатти, изложившим стратегию построения сходного отображения. Целью является получение  $C^1$ -гладкого утробения окружности с аттрактором Милнора, который не совпадает со всей окружностью.

**Определение 31.** Непрерывное отображение называется топологическим утроением окружности, если оно отображает окружность на себя так, что у каждой точки есть ровно три различных прообраза.

**Теорема 32.** Существует  $C^1$  - гладкое отображение утроения окружности такое, что его аттрактор Милнора не совпадает со всей окружностью.

Следует отметить, что топологические утроения окружности сопряжены линейному утроению (отображению  $\varphi \rightarrow 3\varphi$ ), и потому являются топологически транзитивными. Таким образом, для примера, существование которого утверждает теорема, аттрактор Милнора неустойчив по Ляпунову. Кроме того, из сопряженности линейному следует, что у утроения окружности есть неподвижная точка (образ 0 при сопряжении).

Можно мысленно разрезать окружность в этой неподвижной точке, и рассматривать утроение как композицию двух отображений:

1.  $F_B : [0, 1] \rightarrow [0, 3]$  - гомеоморфизм.
2. Факторизации отрезка  $[0, 3]$  по целым числам  $\mathbb{Z}$ .

Для доказательства теоремы опишем явно  $F_B$ . Сначала построим на  $[0, 1]$  симметричное канторово совершенное множество (определение было дано выше)  $A$ , такое, что суммарная длина интервалов, выбрасываемых при построении на  $n$ -том шаге (далее они будут называться *интервалами  $n$ -того уровня*) равна

$$\frac{1}{(n+10)^2}.$$

Определим на отрезке  $[0, 3]$  канторово совершенное множество  $B = A \cup A + 2$ .

Теперь построим такой гомеоморфизм  $F_B$ , что  $F_B(A) = B$ . Это равносильно построению отображения, которое переводит дополнение до  $A$  в дополнение до  $B$ . Дополнение до канторова множества, как уже было указано, является объединением счетного числа интервалов, причем заметим, что интервалов  $n$ -того уровня множества  $A$  ровно  $2^{n-1}$ , а интервалов  $n$ -того уровня множества  $B$  ровно  $2^n$ .

Определим  $F_B$  сначала на интервалах дополнения до множества  $A$ .

Зададим отображение  $F_B$  так: оно переводит интервалы  $n$ -того уровня множества  $A$  на интервалы множества  $B$   $n - 1$ -го уровня линейно, то есть с помощью функций вида  $x \rightarrow ax + b$ , где  $a$  и  $b$  однозначно выбираются из условия того, что концы интервала переходят в концы. Потребуем ещё, чтобы  $F_B$  сохраняло порядок интервалов на отрезке.

Понятно, что при  $n > 1$  это можно сделать, так как число интервалов множества  $A$   $n$ -того уровня равно числу интервалов множества  $B$   $n - 1$ -го уровня.

Интервал первого уровня множества  $A$   $F_B$  переводит в интервал  $[1, 2]$  (напомним, что в этом интервале нет точек  $B$ ).

Итак, динамика  $F_B$  на интервалах дополнения до  $A$  описана. На множестве  $A$  теперь можно доопределить  $F_B$  по непрерывности - действительно, дополнение до канторова множества всюду плотно (в любой отрезке найдется отрезок дополнения до канторова множества), поэтому любая точка отрезка является пределом последовательности точек дополнения до канторова множества, и можно положить:

$$F_B(x) = \lim_{x_n \rightarrow x} F_B(x_n),$$

где  $x_n$  лежат в дополнении к  $A$ .

Осталось лишь проверить, что продолжение корректно, то есть не зависит от выбора последовательности  $x_n$ . Без ограничения общности можно считать, что достаточно показать независимость этого продолжения для возрастающих и убывающих последовательностей.



**Лемма 33.** *Отображение  $F_B(x)$  определено корректно и, более того, оно липшицево.*

*Доказательство.* Схема доказательства состоит в следующем: сначала покажем липшицевость непродолженного отображения. Из неё следует корректность определения продолженного отображения. После этого можно посмотреть на доказательство липшицевости непродолженного, и увидеть, что, повторенное слово в слово, оно даёт доказательство липшицевости продолженного, когда уже доказана его корректность.

Начнем с того, что построенное нами на интервалах (непродолженное) отображение обладает свойством Липшица:

$$\exists C : dist(F_B(x), F_B(y)) < C dist(x, y)$$

для любых двух точек  $x, y$  из любых двух интервалов.

Это следует из того, что достаточно близкие точки должны лежать между двумя соседними интервалами  $n$ -того уровня для достаточно большого  $n$  в  $A$ , но тогда они лежат между соседними интервалами  $n - 1$ -го уровня в  $B$ , а такие точки автоматически достаточно близки. Поэтому константа Липшица может быть оценена как максимальное отношение длин расстояний между интервалами  $n$ -того и  $n - 1$ -го уровня, которое не превосходит 3 для всех  $n > 1$ , а для  $n = 1$  равна какому-то фиксированному числу  $C_1$ . Следовательно, в качестве константы Липшица  $F_B$  можно взять  $C = \max\{3, C_1\}$ .

Липшицевость на интервалах доказана. Докажем теперь корректность.

Предположим, что найдется точка  $x_0$  и две такие разные последовательности  $\{x_n^a\}$  и  $\{x_n^b\}$ , сходящиеся к точке  $x_0$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Bow}(x_n^a) = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Bow}(x_n^b) = B$ ,  $B \neq A$ . Но тогда для всякого  $n$  должно быть выполнено следующее:

$$dist(x_n^a, x_n^b) > \frac{|B - A|}{C}$$

Но это не может быть верно для последовательностей, сходящихся к одному и тому же пределу. Полученное противоречие доказывает, что определение нашего отображения дано корректно.

То, что отображение липшицево всюду, теперь следует из буквального повторения того доказательства, которое в начале этого рассуждения было проведено только для интервалов лишь потому, что нигде больше не было доказано, что функция корректно определена.  $\square$

Итак, наша функция непрерывна, липшицева, но, разумеется, не гладка, потому что есть интервалы, на которых она кусочно-линейна. Напомним, что определение аттрактора Милнора можно дать для любых непрерывных отображений. Факторизуем отображение по целым числам, и получим непрерывное отображение на окружности, которое мы обозначим  $F$ . У этого отображения каждая точка имеет три прообраза (так как отрезок  $[0, 3]$  трижды намотался на окружность), так что оно является топологическим утрением.

Мы докажем, что аттрактор Минлора построенного нами отображения  $F$  - не вся окружность. Это, конечно, не доказывает теорему, потому что отображение не гладко, но является существенной частью доказательства.

**Лемма 34.** *Для построенного выше  $F$  аттрактор Минлора содержится внутри канторова множества  $A$ .*

*Доказательство.* Во-первых, заметим, что наше множество  $A$  инвариантно вперед -  $F(A) = A$ . Это очевидно, потому что прообраз точки интервала дополнения до канторова множества по построению отображения лежит в интервале дополнения.

Зато оно не инвариантно назад: существуют точки на интервалах дополнения, чей образ лежит в  $A$  - наше отображение устроено так, что всякий интервал переходит в интервал более высокого уровня до самого первого уровня, а интервал первого уровня покрывает всю окружность, и при этом, конечно, некоторые точки отображаются в  $A$ .

Рассмотрим интервал первого уровня. На нем есть точки, чьи образы лежат в  $A$ , и есть дополнение до них. Это дополнение состоит само по себе из мелких интервалов, которые мы назовем интервалами второго порядка *на первом уровне* (изначальные интервалы будем называть интервалами первого порядка). Посмотрим на интервалы второго уровня. Они переходят в интервал первого уровня; на них есть точки, которые попадают в интервалы второго порядка на первом уровне, а есть те, которые не попадают. Те, которые не попадают, следующей итерацией отображения попадают в  $A$ . А те, которые попадают, сами по себе образуют интервалы; назовём их интервалами второго порядка *на втором уровне*.

Продолжая описанную процедуру и рассматривая интервал любого уровня, мы можем построить на нём интервалы второго порядка как прообраз после нескольких обратных итераций интервалов второго порядка на первом уровне. Все точки, которые не попали в интервалы второго порядка, после нескольких итераций попадут в  $A$  и там уже и останутся; образно говоря, они «засосутся» в  $A$ .

Поэтому все точки, которые не являются точками интервалов второго порядка, заведомо имеют  $\omega$ -предельное множество, лежащее в  $A$ .

Посмотрим теперь на интервалы второго порядка на первом уровне. Итерацией  $F$  они отображаются на один из интервалов первого порядка. После ещё нескольких итераций этот интервал снова перейдет в интервал первого уровня. И на следующей итерации какие-то его точки попадут в  $A$ . Те точки, которые не попадут в  $A$  при этой итерации, образуют набор интервалов, который мы назовем набором интервалов третьего порядка на первом уровне.

Их прообразы под действием  $F$  после  $n - 1$  обратных итераций - интервалы третьего порядка на  $n$ -том уровне. Все точки, которые не являются точками интервалов третьего порядка, заведомо имеют  $\omega$ -предельное множество, лежащее в  $A$ .

Понятно, что этот процесс можно продолжать и дальше (образ интервала третьего порядка на первом уровне - интервал второго порядка на каком-то уровне, и после нескольких итераций он в конце концов перейдет в самый первый интервал, а потом некоторые точки попадут в  $A$ ). В итоге мы можем построить интервалы произвольного порядка на любом уровне, при этом интервалы более высокого порядка лежат в интервалах более низкого. Если для точки невозможно найти интервал сколь угодно высокого порядка, покрывающий её, то эта точка после нескольких итераций попадет в множество  $A$ . Действительно, пусть для точки  $x$  нет интервала порядка выше  $m$ -того, который бы её покрывал, и при этом она ни при какой итерации не попадает в  $A$ . Эта точка после нескольких итераций попадает в интервал первого уровня, а на следующей итерации попадает в такую точку  $y$ , что нет интервала порядка выше  $m - 1$ -го, который бы её покрывал. Продолжая итерации, получаем, что после нескольких итераций точка  $x$  должна попасть в такую точку, что нет интервала даже первого порядка, который бы её открывал. Но это и значит, что точка попала в  $A$ . Полученное противоречие доказывает, что точки, не попадающие в  $A$  должны быть покрыты интервалом сколь угодно высокого порядка.

Подсчитаем меру таких точек. Обозначим  $q = \mu(A)$ . Общая мера интервалов пер-

вого порядка  $1 - q$ . Интервал первого уровня и первого порядка отображается на всю окружность линейно, поэтому доля отрезков второго уровня на этом интервале  $1 - q$ . Но все интервалы более высокого порядка линейно отображаются на интервал первого порядка, поэтому и на них доля интервалов второго уровня  $1 - q$ . Следовательно, доля интервалов второго уровня в интервалах первого -  $1 - q$ , и поэтому доля интервалов второго порядка на всей окружности  $(1 - q)^2$ . Продолжая эти рассуждения, получаем, что доля интервалов  $n$ -того порядка на всей окружности  $(1 - q)^n$ .

В итоге, очевидно, мера точек, которые могут быть накрыты интервалом сколь угодно высокого порядка, нулевая. Поэтому полная мера точек имеет  $\omega$ -предел, лежащий в  $A$ , и поэтому аттрактор Милнора лежит в  $A$ , и, как следствие, не совпадает со всей окружностью, что и доказывает лемму.  $\square$

Это доказательство идеологически важно для построения диффеоморфизма Аносова с неполным аттрактором Милнора, поэтому хотелось бы дать его мнемоническое описание. Происходит следующее: интервал дополнения до канторова множества подвергается итерациям, и в какой-то момент фиксированная доля его меры поглощается множеством  $A$ , а остатки представляют собой более мелкие интервалы, которые, снова итерируясь, снова превращаются в отрезок первого порядка, для которого при следующей итерации фиксированная доля точек поглощается  $A$ . Поэтому в итоге доля точек, не поглощаемых множеством  $A$ , нулевая, что и доказывает нужные свойства аттрактора Милнора.

Теорема, которую мы доказываем, гарантирует существования отображения с таким свойством. Однако предъявлять конкретное отображение не обязательно; мы докажем его существование, показав, что в полном классе в  $C^1$ -гладких утروениях множество таких функций остаточное.

**Определение 32.** Введем класс утроений  $\mathcal{C} \subset \text{Homeo}(S^1)$  такой, что отображение  $f$  принадлежит  $\mathcal{C}$ , если:

1. В ограничении на  $A$   $f|_A$  совпадает с  $F|_A$ .
2. Вне  $A$   $f$  гладко, и его производная на интервале  $I_n$  порядка  $n$  не меньше 2 и не больше  $2 + \frac{|f(I_n)|}{|I_n|}$ .

Определим  $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C} \cap C^1$ , метрика в  $\mathcal{C}^1$  индуцирована метрикой в  $C^1$ .

Заметим, что  $\frac{|f(I_n)|}{|I_n|}$  определяется только из  $F$ , и не зависит от конкретного отображения, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(I_n)|}{|I_n|} = 2.$$

Классы  $\mathcal{C}, \mathcal{C}^1$  полны как пересечение замкнутых множеств, что следует из того, что условия 1 и 2 замкнуты (условие 2 - нестрогое неравенство, а условие 1 - равенство).

В классе  $\mathcal{C}$  мы будем смотреть на множества  $A_\varepsilon$  отображений таких, что мера бассейна притяжения  $A$  больше  $1 - \varepsilon$ .

Если множества  $A_\varepsilon \cap \mathcal{C}^1$  для всякого  $\varepsilon$  открыты и всюду плотны в  $\mathcal{C}^1$ , то их счетное пересечение остаточное в этом классе; по теореме Бэра для полного класса остаточные множества непусты. Но множество  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{1/n} \cap \mathcal{C}^1$  - это множество, в котором мера точек, притягиваемых к нашему канторовскому множеству, сколь угодно близка к 1, то есть просто 1, и потому аттрактор Милнора в нашем остаточном множестве - инвариантное канторово множество, что и требовалось.

Для завершения доказательства осталось показать открытость и плотность  $A_\varepsilon \cap \mathcal{C}^1$ . План доказательства в следующем. Мы докажем открытость и плотность в  $A_\varepsilon$

в классе  $\mathcal{C}$ . Открытость  $A_\varepsilon \cap \mathcal{C}^1$  в классе  $\mathcal{C}^1$  следует из этого автоматически. Что касается плотности, то если  $A_\varepsilon$  плотно в  $\mathcal{C}$  и открыто, то значит, во всяком шаре с центром в произвольном отображении из  $\mathcal{C}^1$  в пространстве  $\mathcal{C}$  пространства липшицевых утроений найдется шар из  $A_\varepsilon$ , а в нём найдется гладкое утроение (так как гладкие плотны в липшицевых).

Осталось показать, что это гладкое отображение в  $\mathcal{C}^1$ -метрике близко к исходному. Это делается правильным выбором плотного семейства, и при его описании мы это сразу же докажем.

### 3.1.1 Доказательство плотности

Предъявим плотное семейство отображений в  $\mathcal{C}^1$  таких, что мера точек, поглощаемых множеством  $A$  - единичная. Это означает, что такие отображения лежат во всех  $A_\varepsilon$ , что и доказывает плотность.

Выберем произвольное отображение  $g$  из  $\mathcal{C}$ . Построим отображения  $f_n$ , которые мы назовем отображениями *частичной линейаризации*. Они устроены следующим образом: всюду, кроме интервалов порядка больше, чем  $n$ , отображение  $f_n$  совпадает с  $g$ , а на интервалах порядка больше, чем  $n$ , отображение  $f_n$  совпадает с  $F$ , то есть линейно на каждом интервале.

Рассмотрим множество, состоящее из отображений частичной линейаризации для всех отображений из  $\mathcal{C}$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Докажем, что это множество плотно в топологии  $\mathcal{C}$  и отображения из него обладают заявленным свойством.

Плотность следует из того, что для произвольного  $\delta$  выбором достаточно большого  $n$  отображение  $f_n$  может быть сделано совпадающим с  $g$  всюду, кроме отрезков длины меньше  $\delta/3$ . Но отрезки длины  $\delta/3$  и для  $f_n$ , и для  $g$  переходят в одни и те же отрезки длины не больше  $\delta$ , поэтому  $dist(f_n, g) < \delta$ . Плотность доказана.

Заметим, что отображения в  $\mathcal{C}^1$ -окрестности  $f_n$   $\mathcal{C}^1$ -близки к  $g$ , так как они совпадают всюду, кроме отрезков высокого уровня. По всякому  $\delta$  можно выбрать  $n$  так, что производная  $g$  в силу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(I_n)|}{|I_n|} = 2$$

лежит на отрезке  $[2, 2 + \delta]$ , но на том же отрезке лежит производная отображения, достаточно близкого к  $f_n$ , что и доказывает утверждение. Напомним, что это утверждение в точности требовалось для завершения доказательства.

Осталось показать, что эти отображения обладают заявленным свойством. Как следует из доказательства для отображения  $F$ ,  $A$  не поглощает только те точки, которые накрыты бесконечным числом интервалов высоких уровней. Но для всякого  $f_m$  доля точек, накрытых интервалами  $n + m$ -того порядка, в силу этого же доказательства, не превосходит  $(1 - p)^n$ , где  $p$  - суммарная мера  $m$ -того прообраза  $A$  под действием  $f_m$  на отрезках  $m$ -того порядка. Поэтому к  $A$  притягивается полная мера точек, что и требовалось.

### 3.1.2 Доказательство открытости

Пусть  $f \in A_\varepsilon$ . По непрерывности меры найдется  $n$ , такое что  $A \cup \dots \cup f^{-n}(A)$  имеет меру больше  $1 - \varepsilon$ . Найдется число  $\delta$ , такое, что эта мера больше  $1 - \varepsilon + \delta$ .

Для  $g \in \mathcal{C}$ ,  $B \subset S^1$  определим  $G(B) = g(B) \cup \dots \cup g^{-n}(B)$ . Пусть  $A' \supset A$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} G(A') &= G(A) \cup G(A' \setminus A), \\ \mu(G(A)) &\geq \mu(G(A')) - \mu(G(A' \setminus A)). \end{aligned}$$

Поскольку есть три ветви  $g^{-1}$ , и они сжимают,

$$\mu(G(A' \setminus A)) \leq (1 + \dots + 3^n)\mu(A' \setminus A).$$

Следовательно,

$$\mu(G(A)) \geq \mu(G(A')) - (1 + \dots + 3^n)\mu(A' \setminus A). \quad (1)$$

Выберем конечное объединением отрезков  $A'$  так, чтобы  $\mu(A' \setminus A) < (\delta/2)/(1 + \dots + 3^n)$ . Тогда:

$$\mu(F(A')) \geq \mu(F(A)) > 1 - \varepsilon + \delta$$

для  $G$ , достаточно близкого к  $F$ , имеем  $\mu(G(A')) > 1 - \varepsilon + \delta/2$ , поскольку  $G(A')$  это объединение отрезков, и их граничные точки меняются непрерывно.

в силу (1) получим  $\mu(G(A)) > 1 - \varepsilon$ .

Следует заметить, что в пространстве  $C^2$  подобное рассуждение невозможно. Это было заранее известно, поскольку теоремы, полученные Боуэном и Рюэллем, запрещают подобное. Но можно привести и явные соображения, показывающие, что дальнейшие, за пределы  $C^1$  сглаживания нашей конструкции невозможны: а именно потому что гладкое отображение, отображающее маленький отрезок в большой, должно иметь на маленьком отрезке большую производную; но вне этого отрезка производная ограничена константой. Это соображение позволяет понять, что вторая производная построенного нами отображения неограниченна, и никакая модификация этого не исправит.

## 3.2 Подкова Смейла

Отображение подковы Смейла относится к классическим примерам гиперболических отображений. Динамика этого отображения полусопряжена динамике сдвига Бернулли на  $\Sigma^2$ . Впервые такие динамические системы наблюдались Картрайт и Литтлвудом [KL] при исследовании дифференциальных уравнений; Смейл дал явное описание простой геометрической конструкции такого отображения.

В диссертации будет рассматриваться только трёхчастная подкова Смейла, которая определяется так, как описано ниже.

**Определение 33.** Пусть даны открытое множество  $D$ , содержащее единичный квадрат:  $[0, 1] \times [0, 1] \subset D$  и произвольное непрерывное отображение  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ , такое, что

$$h([0, 1] \times [0, 1/3]) = [0, 1/3] \times [0, 1],$$

$$h([0, 1] \times [2/3, 1]) = [2/3, 1] \times [0, 1],$$

причем  $h|_{[0,1] \times [0,1/3]}$  и  $h|_{[0,1] \times [2/3,1]}$  - аффинные отображения. Тогда любое отображение, аффинно сопряжённое  $h$ , называется трёхчастной линейной подковой Смейла.

Когда это не будет приводить к путанице, мы будем говорить просто о подкове Смейла, всюду подразумевая трёхчастные линейные подковы. От классической подковы, определение которой дано Смейлом, трёхчастная подкова отличается тем, что две её неподвижные точки  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  расположены в углах квадрата.

Ключевым при доказательстве гиперболичности является тот факт, что первая и третья горизонтальные трети квадрата отображаются на первую и третью вертикальные трети квадрата с помощью растяжения по одной координатной оси и сжатия

по другой. Даже при отсутствии аффинности, при этом отображение все равно порождает инвариантное гиперболическое множество (оно так же, как и отображение, называется «подковой»): это множество точек, вся орбита которых лежит в квадрате под действием отображения подковы.

В частности, Боуэн построил пример  $C^1$ -гладкого отображения подковы, для которого гиперболическое множество имеет положительную меру. Этот пример подробно описан в его статье [Bowen], и может быть описан с помощью уже построенных отображений: сглаживание примера Бонатти для отображения  $F_B$  дает отображение  $F_s$  (с исторической точки зрения, наоборот, пример Бонатти был получен как частичная линеаризация отображения Боуэна), а пара отображений  $(F_s^{-1}, F_s)$  задает отображение, которое переводит единичный квадрат в прямоугольник, у которого высота в  $1/3$ , а длина 3. После этого к нему можно применить отображение, скручивающее его в подкову, и достроить его до гиперболического отображения квадрата на себя с гиперболическим множеством положительной меры (а именно, квадратом меры канторова множества  $A$ ).

Нам потребуется следующий результат:

**Лемма 35.** *Диффеоморфизм Аносова, заданный линейным гиперболическим отображением на торе с неподвижной точкой с достаточно далекими от единицы собственными значениями может быть ограничен на такой прямоугольник своего фазового пространства, что отображение в ограничении - отображение подковы Смейла.*

Кратко это утверждение разобрано в работе Робинсона и Янг [RY].

*Доказательство.* Выберем прямоугольник так, что его стороны образованы устойчивыми и неустойчивыми многообразиями двух неподвижных точек, а внутри прямоугольника неподвижных точек нет. Тогда диффеоморфизм Аносова «наматывает» прямоугольник на себя следующим образом: два неподвижные точки останутся там, где и были, к ним будут примыкать узкие полоски, а весь остальной образ лежит снаружи прямоугольника. Последнее верно по следующей причине: если бы было три компонента связности пересечения образа прямоугольника с самим прямоугольником, то у диффеоморфизма было бы хотя бы три неподвижных точки; но по выбору прямоугольника их всего две, значит, компонент всего две.

Таким образом, в ограничении на прямоугольник произошло линейное отображение, что и требуется для того, чтобы отображение в ограничении было подковой Смейла, и эта подкова трёхчастная. □

При этом существует соображение, которое будет использовано в нашем примере и уже использовалось в работе Робинсона и Янг [RY]. Оно состоит в следующем: мы можем провести локальную хирургию нашего диффеоморфизма Аносова, заменив его аффинное отображение подковы на любое, топологически ему сопряженное, правда, чтобы сохранить  $C^1$ -гладкость примера, во-первых, хирургия должна заменить гладкое отображение гладким, а во-вторых, надо сгладить отображение вдоль линий разрыва. Это будет реализовано в дальнейшем тексте.

Пример  $C^1$ -гладкого диффеоморфизма Аносова с неполным аттрактором Милнора, как и пример для утроения, не строится явно. Общая схема доказательства аналогично: мы докажем, что в пространстве  $C^1$ -гладких функций, близких к заданному линейному диффеоморфизму Аносова, открыты и плотны отображения, для которых мера точек  $1 - \varepsilon$  притягивается к подкове, что следует из открытости этого свойства для липшицевых функций. Затем пересечение по счетному числу  $\varepsilon_n$ , таких, что

$\varepsilon_n \rightarrow 0$  - даёт остаточное множество диффеоморфизмов Аносова таких, что полная мера точек для них притягивается к подкове. Теперь существование диффеоморфизма с указанными свойствами следует из полноты рассматриваемого пространства.

Таков план. Следует чуть подробнее рассказать его ключевую деталь.

Построение гладких функций, притягивающих меру  $1 - \varepsilon$  получается сглаживанием (необходимая аккуратность сглаживания следует из малости выбора  $\varepsilon$ ) липшицевых функций, притягивающих к подкове полную меру. Построение же липшицевых функций производится с помощью хирургии, заменяющей подкову Смейла на прямоугольнике в фазовом пространстве диффеоморфизма, на другую подкову, которая по одной из осей устроена как отображение  $F_B$ . Такая хирургия приводит к тому, что почти все точки отображения после хирургии (правда, у него появляются линии разрыва на паре отрезков) имеют  $\omega$ -предельные множества, целиком лежащие в подкове. Это свойство сохраняется и после небольшого сглаживания, которое делает наше отображение липшицевым из кусочно-разрывного.

### 3.3 Формулировка и обозначения

Результаты этого раздела будут состоять в доказательстве следующей теоремы:

**Теорема 36.** *Существуют  $C^1$ -гладкий диффеоморфизм Аносова двумерного тора и подкова  $P \subset \mathbb{T}^2$ , такие что  $\omega$ -предельное множество почти любой по мере Лебега точки лежит в  $P$ .*

Построенный пример будет получаться как возмущение линейного. Линейное отображение имеет устойчивое и неустойчивое направление. Чтобы удобнее представить производимые манипуляции, кажется, удобнее всего представлять себе тор как квадрат со склеенными сторонами, причем устойчивое и неустойчивое направление располагаются соответственно по вертикали и по горизонтали (сам тор мыслится как лежащий «диагонально» квадрат с отождествленными попарно противоположными сторонами).

Обозначения:

- $\partial_v(\cdot)$  - граница вдоль  $u$ -слоев.  $\partial_h(\cdot)$  - граница, которую можно описать как «похожую на горизонтальную»; наш пример будет возникать из возмущения линейного, для которого горизонтальное направление определено, и возмущения этого направления тоже будет называться горизонтальным направлением. По ходу изложения всюду будет ясно, что имется в виду.
- $\mu$  - мера Лебега на  $\mathbb{T}^2$ ,  $\mu(\mathbb{T}^2) = 1$ .

### 3.4 Начало конструкции

Пусть  $F_{Lin}$  — линейный диффеоморфизм Аносова на  $\mathbb{T}^2$ , заданный матрицей  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{N_{cone}}$ . Число  $N_{cone}$  будет выбрано позднее, когда потребуется, чтобы собственные числа матрицы были достаточно большими и можно будет дать достаточную оценку на их величину.

Можно в торе найти прямоугольник  $A$ , такой что  $F_{Lin}|_A$  задает линейную подкову Смейла. Динамика подковы Смейла такова, что прямоугольник можно разбить на три вертикальные полосы и три горизонтальные так, что подкова отображает две горизонтальные полосы (обозначим их  $H_0$  и  $H_1$ ) на две вертикальные полосы (обозначим их  $V_0$  и  $V_1$ ). Кроме того, построим его так, что в углах  $A$  сидят две неподвижные точки подковы  $p_0$  и  $p_1$ . Также потребуем  $F_{Lin}(A) \cap A = V_0 \cup V_1$ .

Напомним, что называется *вертикальным* направление вдоль неустойчивых слоев  $F_{Lin}$ , а *горизонтальным* — вдоль устойчивых. Все рассматриваемые нами отображения тора будут сохранять неустойчивое слоение диффеоморфизма  $F_{Lin}$ , которое мы назовем *вертикальным слоением*.

Мы хотим расширить  $A$  в горизонтальном направлении, получив прямоугольник  $UK \supset A$  с определенными свойствами; для него автоматически  $\partial_h UK \supset \partial_h A$  (так как мы расширяли по горизонтали). Для достаточно большого  $N_{cone}$  (мы его не фиксируем, так как это лишь одно из условий, исходя из которых мы дальше будем выбирать  $N_{cone}$  большим) прямоугольник  $UK$  можно выбрать так, что

1. диаметр  $UK$  меньше  $0.01C_{cone}$  для константы  $C_{cone}$ , определенной в предложении 52 ниже,
2. у  $F_{Lin}$  есть неподвижная точка  $q$  на расстоянии хотя бы  $0.1$  от  $UK$  (сторона тора предполагается единичной длины), и  $\partial_v UK \subset W^u(q)$  - неустойчивому многообразию  $q$ . То есть при обратной итерации вертикальных границ нашего прямоугольника они «уходят» в  $q$ ; более формально, точки границ квадрата имеют  $\alpha$ -пределом точку  $q$ . Это нетрудно сделать потому, что неустойчивое многообразие всякой точки, в частности, произвольной неподвижной точки  $q$ , плотно (для линейного случая оно представляет собой иррациональную обмотку тора).

Итак, мы расширили  $A$  в горизонтальном направлении до  $UK$ , - по существу, мы приставили к  $A$  два прямоугольника рядом по горизонтали. Мы обозначим их  $U$  и назовём «ушами».

Пусть  $UH_i$  — естественное продолжение  $H_i$  «в уши» (просто удлинением горизонтальной стороны),  $UV_i = F_{Lin}(UH_i)$ .

Построим отображение  $F_{Bow} : UH_0 \cup UH_1 \rightarrow UV_0 \cup UV_1$ , задающее подкову  $P$ , толстую по вертикали. Его детальное описание будет сделано при доказательстве предложения, сформулированного ниже, но для лучшего понимания дальнейшего следует описать это отображение вкратце.  $F_{Bow}$  получается из линейного отображения, которое было задано на  $UH_0 \cup UH_1$  нашим стартовым диффеоморфизмом Аносова; по горизонтали оно остается линейным, а по вертикали устроено как  $f_B$  из предыдущего раздела диссертации. Сгладив этот пример, можно получить следующее:

**Предложение 37.** *Существует  $C^1$ -гладкий диффеоморфизм Аносова  $F_{Init}$ , такой что*

1.  $F_{Init} = F_{Bow}$  на  $UH_0 \cup UH_1$ . Таким образом,  $F_{Init}$ , как и  $F_{Bow}$ , имеет подкову  $P$
2.  $F_{Init}(H_i) = V_i$
3.  $F_{Init}(A) \cap A = V_0 \cup V_1$
4. *вертикальное слоение инвариантно для  $F_{Init}$  и совпадает с неустойчивым слоением  $F_{Init}$*
5.  $F_{Init} = F_{Lin}$  вдали от  $UK$  (чтобы потом построить рамку)
6. У  $F_{Init}$  есть неподвижная точка  $q$  вне  $UK$ , и  $\partial_v UK$  лежит в вертикальном слое  $q$ .



Обозначим через  $S$  локально устойчивое слоение подковы  $P$  для диффеоморфизма  $F_{Init}$  внутри  $UK$ . Слои  $S$  горизонтальны, поскольку они горизонтальны для  $F_{Bow}$  (так как оно линейно на отрезках дополнения до подковы), а  $F_{Init}|_S = F_{Bow}|_S$ .

Возьмем наш ушастый прямоугольник в рамку. Рамка будет тонкой, ее объединение с  $UK$  мы назовем  $R$ . Это  $R$  будет почти прямоугольником,  $\partial_v R$  строго вертикально, а  $\partial_h R \subset W_{F_{Init}}^s(p_0)$ . Потребуем

$$q \in \text{int}(\mathbb{T}^2 \setminus R). \quad (2)$$

### 3.5 Определение пространства $\mathcal{C}$

В этом подразделе будет дано определение нашего основного пространства, с которым мы будем работать. Чтобы показать, что оно не пусто, следует выбрать  $L$  настолько большим, что  $F_{Init}$  удовлетворяет свойству 4 ниже (выбор  $L$  зависит от выбора  $N_{Cone}$ , поэтому мы в дальнейшем фиксируем  $L$  только после выбора  $N_{Cone}$ ).

**Определение 34.** *Определим  $\mathcal{C} \subset \text{Homeo}(\mathbb{T}^2)$  как множество гомеоморфизмов  $H$  тора со следующими свойствами:*

1.  $H|_S = F_{Init}|_S$ .
2.  $H$  сохраняет вертикальное слоение.
3.  $H = F_{Lin}$  вне  $R$ .
4. ограничение  $H$  на любой вертикальный слой растягивает хотя бы в  $1 + \frac{1}{L}$  раз и не более чем в  $L$  раз.
5.  $H$  совпадает с  $F_{Init}$  на начальном куске  $W_{F_{Init}}^s(p_0)$ , включающем  $\partial_h R$ .
6.  $H(A) \cap A = V_0 \cup V_1$
7. У  $F_{Init}$  есть неподвижная точка  $q \in \mathbb{T}^2 \setminus R$ , и  $\partial_v UK$  лежит в вертикальном слое  $q$ .

Отметим, что  $F_{Init} \in \mathcal{C} \cap C^1$ . Обозначим через  $\mathcal{C}^1$  пересечение пространства  $\mathcal{C}$  с маленьким замкнутым шаром в пространстве  $\text{Diff}^1(\mathbb{T}^2)$  вокруг диффеоморфизма Аносова  $F_{Init}$ . Далее воспользуемся следующим фактом про диффеоморфизмы Аносова:

**Теорема 38.** *Диффеоморфизмы Аносова структурно устойчивы в  $C^1$ , то есть достаточно малый шар в пространстве  $C^1$  - отображений с центром в диффеоморфизме Аносова  $F$  содержит только отображения, топологически сопряжённые  $F$ .*

Поскольку  $F_{Init}$  структурно устойчив, то если шар выбран достаточно малым, то  $\mathcal{C}^1$  состоит из диффеоморфизмов Аносова.

### 3.6 Доказательство основной теоремы раздела на основе лемм

Для  $H \in \mathcal{C}$  обозначим через  $B(H)$  бассейн притяжения толстой подковы:  $B(H) = S \cup H^{-1}(S) \cup \dots$ . Теорема следует из следующих трех фактов.

**Предложение 39.** *Пространство  $\mathcal{C}^1$  полно.<sup>2</sup>*

<sup>2</sup>На  $\text{Diff}^1(\mathbb{T}^2)$  фиксирована обычная полная метрика.

*Доказательство.* Каждое из условий 1-6 определяет замкнутое подмножество в  $\text{Diff}^1(\mathbb{T}^2)$ , как и шар вокруг  $F_{Init}$ . Поэтому  $\mathcal{C}^1$  замкнуто в  $\text{Diff}^1(\mathbb{T}^2)$ , а замкнутое подпространство полного метрического пространства полно.  $\square$

Обозначим  $B(H)$  множество точек бассейна притяжения  $S$  ( $S$  одно и то же для всех отображений из нашего класса и построено выше). Определим  $A_\varepsilon \subset \mathcal{C}$  как множество таких  $H \in \mathcal{C}$ , что  $\mu(B(H)) > 1 - \varepsilon$ .

**Лемма 40.** *Множество  $A_\varepsilon$  открыто в индуцированной Немео-топологии.*

**Лемма 41.** *Множество  $A_\varepsilon \cap \mathcal{C}^1$  плотно в  $\mathcal{C}^1$  в  $\mathcal{C}^1$ -топологии.*

Теорема следует из заявленных фактов, потому что  $\bigcap_{\varepsilon=1/n} A_\varepsilon \cap \mathcal{C}^1$  будет остаточным подмножеством полного метрического пространства  $\mathcal{C}^1$  и потому непустым.

## 3.7 Доказательство леммы 41

### 3.7.1 План доказательства

Пусть  $D = \mathbb{T}^2 \setminus UK$ . Для  $H \in \mathcal{C}$  и  $n \geq 0$  определим  $H$ -отрезки уровня  $n$ . Отрезками уровня 0 будут куски вертикальных слоев внутри  $D$ , граница которых лежит в границе  $D$ . Отрезками уровня  $n$  будут их  $n$ -тые прообразы.

По произвольному диффеоморфизму  $F_0 \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^1$  и достаточно большому  $N$  мы построим гомеоморфизм  $F_{PL} \in \mathcal{C}$ , линейный на всех  $F_{PL}$ -отрезках уровня больше  $N$  и совпадающий с  $F_0$  вне объединения этих отрезков. Потом мы докажем, что из линейности на отрезках больших уровней следует, что  $\mu(B(F_{PL})) = 1$ , что, в свою очередь, влечет  $F_{PL} \in A_\varepsilon$ . При помощи  $C^0$ -сколь угодно-малого возмущения мы сгладим  $F_{PL}$  до  $F \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^1$ . Из леммы 40 тогда будет следовать, что  $F \in A_\varepsilon$ . Далее мы проверим, что при большом  $N$  диффеоморфизмы  $F$  и  $F_0$  близки в  $\text{Diff}^1(\mathbb{T}^2)$ . Таким образом, мы научимся находить диффеоморфизм из  $A_\varepsilon \cap \mathcal{C}^1$  сколь угодно близко к произвольному диффеоморфизму из  $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}^1$ , что доказывает лемму 41.

### 3.7.2 Построение $F_{PL}$ — основная идея

Для  $H \in \mathcal{C}$  и  $H$ -отрезка уровня  $n$  определим *линеаризацию* на нем: отображение на этом отрезке заменяется на линейное с тем же образом.

Мы хотим построить гомеоморфизм  $F_{PL} \in \mathcal{C}$ , линейный на всех своих отрезках уровня больше  $N$ . Для этого сначала линеаризуем  $F_0$  на всех  $F_0$ -отрезках уровня  $N+1$ , получим отображение  $F_{N+1}$ , линейное на всех  $F_{N+1}$ -отрезках уровня  $N+1$ . Потом линеаризуем  $F_{N+1}$  на всех  $F_{N+1}$ -отрезках уровня  $N+2$ , получим отображение  $F_{N+2}$ , линейное на всех  $F_{N+2}$ -отрезках уровня  $N+2$ . Ниже мы докажем, что  $F_{N+2}$  также линейно на всех  $F_{N+2}$ -отрезках уровня  $N+1$ . Продолжая этот процесс, мы получим последовательность,  $C^0$ -пределом которой и будет  $F_{PL}$ .

### 3.7.3 Полоски уровня $n$

Мы хотим провести линеаризацию на отрезках уровня  $n$ . Что они из себя представляют? Нужно взять  $H^{-n}(UK)$  и посмотреть на куски вертикальных слоев вне этого множества — это в точности отрезки уровня  $n$ . Поскольку вне  $R$  отображение линейно, нас будут интересовать только отрезки, пересекающие  $R$ .

**Предложение 42.** *Найдется  $N_0$ , такое что при любых  $H \in \mathcal{C}$ ,  $n > N_0$  вертикальная граница  $H^{-n}(UK)$  лежит вне  $R$ , а горизонтальная граница  $H^{-n}(UK)$  содержит горизонтальную границу  $R$ .*

*Доказательство.* Утверждение про вертикальную границу следует из свойства 7 множества  $\mathcal{C}$ ; про горизонтальную — из свойства 5.  $\square$

**Следствие 43.** *При  $n > N_0$  объединение всех отрезков уровня  $n$ , пересекающих  $R$ , есть объединение нескольких непересекающихся полосок — компонент связности множества  $R \setminus H^{-n}(UK)$ . Горизонтальные границы этих полосок трансверсальны вертикальным слоям, а вертикальные лежат в  $\partial_v R$ .*

Назовем эти полоски  $H$ -полосками уровня  $n$ . Заметим, что все эти полоски открыты.

### 3.7.4 Свойства полосок

**Предложение 44.** *Пусть  $a > b > N_0$ ,  $\Pi_a$  и  $\Pi_b$  —  $H$ -полоски уровней  $a$  и  $b$ . Тогда либо  $\Pi_a$  и  $\Pi_b$  не пересекаются, либо  $\Pi_a \subset \Pi_b$ .*

*Доказательство.* Предположим противное. Тогда часть границы полосы  $\Pi_b$  лежит в полосе  $\Pi_a$ . Обозначим эту часть  $Q$ . Применим к  $Q$  отображение  $H^a$ . С одной стороны,  $H^a(Q) \subset H^a(\Pi_a) \subset D = \mathbb{T}^2 \setminus UK$ . С другой стороны,  $H^{a-b} \circ H^b(Q) \subset H^{a-b}(\partial_h UK) \subset \partial_h UK \subset UK$ . Противоречие.  $\square$

**Предложение 45.** *Любое возмущение внутри полосок уровня  $n$  не меняет полоски уровней  $N_0 + 1, \dots, n$ . Формально говоря, для любых  $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$ , таких что  $H_1$ - и  $H_2$ -полоски уровня  $n$  совпадают, и  $H_1 = H_2$  вне объединения этих полосок, для любого  $t \in [N_0 + 1, n]$   $H_1$ - и  $H_2$ -полоски уровня  $t$  совпадают.*

*Доказательство.* Рассмотрим множество  $H^{-n}(\partial_h UK)$ . Объединение горизонтальных границ полосок уровня  $n$  — это в точности пересечение  $H^{-n}(\partial_h UK) \cap R$ . Таким образом, любое возмущение внутри полосок не меняет динамику на  $H^{-n}(\partial_h UK)$ .

Поскольку  $\partial_h UK$  является объединением локальных устойчивых многообразий точек  $p_0, p_1$ , при  $t \leq n$  имеем  $H^{-t}(\partial_h UK) \subset H^{-n}(\partial_h UK)$ . Значит, горизонтальные границы полосок уровня  $t \leq n$  содержатся в  $H^{-n}(\partial_h UK)$ . Так как динамика на множестве  $H^{-n}(\partial_h UK)$  не меняется, границы полосок уровня  $t$  сохраняются, а потому сохраняются и сами эти полоски.  $\square$

### 3.7.5 Построение $F_{PL}$

**Предложение 46.** *Для любого  $F_0 \in \mathcal{C} \cap C^1$  найдется число  $N_0$ , такое что для любого  $N > N_0$  можно построить гомеоморфизм  $F_{PL} \in \mathcal{C}$ , линейный на всех  $F_{PL}$ -отрезках уровня больше  $N$  и совпадающий с  $F_0$  вне объединения всех  $F_{PL}$ -полосок уровня больше  $N$ .*

Число  $N_0$  берется из предложения 42. Фиксируем любое  $N > N_0$ .

Построим последовательность возмущений  $F_0, F_1, \dots$ , пределом которой в  $C^0$ -топологии будет искомым гомеоморфизм  $F_{PL}$ . Положим  $F_0 = F_1 = \dots = F_N$ . Для  $k > N$  отображение  $F_k$  будет получаться из  $F_{k-1}$  вертикальной линеаризацией на всех  $F_{k-1}$ -отрезках уровня  $k$ . На тех отрезках уровня  $k$ , что не пересекают  $R$ , отображение  $F_{k-1}$  уже линейно. Отрезки, пересекающие  $R$ , образуют, согласно следствию 43,  $F_{k-1}$ -полоски уровня  $k$ .

**Предложение 47.** Для любого  $k > N$  выполнено следующее.

1.  $F_k \in \mathcal{C}$ .
2. Отображение  $F_k$  линейно на всех  $F_k$ -отрезках уровней  $N + 1, \dots, k$ .
3.  $F_k = F_0$  вне объединения всех  $F_k$ -полосок уровней  $N + 1, \dots, k$ .
4. Множество  $W_k := F_k^{-k}(\partial_h UK)$  — объединение двух гладких кривых.

*Доказательство.* Индукция по  $k \geq N$ . База  $k = N$  очевидна (договоримся считать, что диапазон “от  $N + 1$  до  $N$ ” пуст). Докажем нужные свойства  $F_k$ , предполагая, что они выполнены для  $F_{k-1}$ .

1. Проверим, что  $F_k \in \mathcal{C}$ .

Сначала покажем, что  $F_k$  обладает свойством 1 из определения  $\mathcal{C}$ . Для этого достаточно проверить, что  $F_k|_S = F_{k-1}|_S$ . Поскольку отображение  $F_k$  получается из  $F_{k-1}$  линеаризацией на всех  $F_{k-1}$ -полосках уровня  $k$ , достаточно показать, что  $S$  лежит вне этих полосок, т.е. что  $S \subset F_{k-1}^{-k}(UK)$ . Применив  $F_{k-1}^k$ , сведем это вложение к вложению  $F_{k-1}^k(S) \subset UK$ . Но последнее сразу следует из инвариантности вперед множества  $S$ , которая обеспечена тем, что  $F_{k-1}$  по предположению индукции обладает свойством 1 из определения  $\mathcal{C}$ .

Свойство 5 имеет место, поскольку  $F_{k-1}$ -полоски уровня  $k$  не пересекаются с  $\partial_h R$ : это следует из включения  $\partial_h R \subset F_{k-1}^{-N_0-1}(\partial_h(UK))$  и предложения 44. Остальные свойства очевидны.

2. Отображение  $F_k$  получается из  $F_{k-1}$  линеаризацией на всех  $F_{k-1}$ -полосках уровня  $k$ . Эта линеаризация сохраняет полоски уровней  $N + 1, \dots, k$  по предложению 45. Из предложения 44 следует, что  $F_{k-1}$ -полоски уровня  $k$ , пересекающие внутренности уже “линеаризованных” полосок, лежат в них. Повторная линеаризация на таких полосках ничего не меняет. Поэтому возмущение не задевает уже “линеаризованные” полоски, так что гомеоморфизм  $F_k$  линеен в ограничении на вертикальные слои на всех  $F_k$ -полосках уровней  $N + 1, \dots, k$ . Линейность на всех  $F_k$ -отрезках этих уровней следует из линейности  $F_k$  вне  $R$  и следствия 43.
3. По предложению 45 полоски уровней  $N + 1, \dots, k$  для  $F_k$  и  $F_{k-1}$  совпадают. Вне объединения этих полосок гомеоморфизм  $F_{k-1}$  совпадает с  $F_0$  по предположению индукции, а  $F_k$  совпадает с  $F_{k-1}$ , потому что  $F_k$  получается из  $F_{k-1}$  линеаризацией на всех  $F_{k-1}$ -полосках уровня  $k$ .
4. Заметим, что  $W_k = F_{k-1}^{-1}(W_{k-1})$ . Мы можем предполагать, что  $W_{k-1} = F_{k-1}^{-(k-1)}(\partial_h UK)$  — объединение двух гладких кривых. Гомеоморфизм  $F_{k-1}$  — кусочный диффеоморфизм, у которого разрывы производных могут быть только на  $\text{int}(W_{k-1})$ , поэтому в малой окрестности каждой точки из  $F_{k-1}^{-1}(W_{k-1}) \setminus \text{int}(W_{k-1})$  отображение  $F_{k-1}$  есть диффеоморфизм и то же можно сказать про  $F_{k-1}^{-1}$  в ограничении на малые окрестности  $F_{k-1}$ -образов этих точек. Отсюда следует то, что нужно.

□

**Предложение 48.** Последовательность гомеоморфизмов  $(F_k)_{k=1}^\infty$  сходится в Номеотопологии к гомеоморфизму  $F_{PL} \in \mathcal{C}$ .

*Доказательство.* Метрика  $\text{dist}_{\text{Homeo}}(F, G) = \max(d_{C_0}(F, G), d_{C_0}(F^{-1}, G^{-1}))$  превращает  $\text{Homeo}(\mathbb{T}^2)$  в полное метрическое пространство. Множество  $\mathcal{C}$  замкнуто в  $\text{Homeo}(\mathbb{T}^2)$ , поскольку каждое из свойств, определяющих  $LDA$ , замкнуто. Это означает, что пространство  $\mathcal{C}$  с этой метрикой тоже полно. Таким образом, достаточно показать, что наша последовательность фундаментальна в этой метрике.

Рассмотрим два гомеоморфизма  $F_k$  и  $F_l$  с  $l > k$ . Они совпадают всюду за исключением дизъюнктного объединения конечного числа полос. А именно, нужно взять объединение  $F_{j-1}$ -полос уровня  $j$  для  $j = k + 1, \dots, l$  и, чтобы сделать объединение дизъюнктным, вычеркнуть из него полосы, которые попадают внутрь других полос объединения. Если число  $k$  достаточно велико, все эти полоски достаточно узкие, а потому вертикальная линейаризация, которая выполняется при переходе от  $F_{j-1}$  к  $F_j$ , является достаточно малым возмущением в  $C_0$ -топологии: величина возмущения не превосходит максимальную ширину полосы. Для обратных отображений можно рассуждать аналогично: линейаризация в некоторой полосе для  $F_j$  эквивалента линейаризации для  $F_j^{-1}$  в  $F_j$ -образе этой полосы, а при больших  $k$  эти образы тоже достаточно тонкие в вертикальном направлении. Таким образом, для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать число  $n$ , такое что при  $l > k > n$  гомеоморфизмы  $F_k$  и  $F_l$   $\varepsilon$ -близки.  $\square$

### 3.7.6 $\mu(B(F_{PL})) = 1$

**Предложение 49.** *Для любого гомеоморфизма  $H \in \mathcal{C}$  и любой точки  $x \in \mathbb{T}^2 \setminus S$  найдется число  $m \geq 0$ , такое что  $H^m(x) \in D$ .*

*Доказательство.* Пусть  $x \notin D$ . Тогда точка  $x$  лежит в некоторой компоненте связности  $\Pi$  множества  $UK \setminus S$  — эта компонента представляет из себя горизонтальную полосу. Пусть  $\Pi_0$  — средняя полоса  $UK \setminus S$ . Из динамики на подкове Смейла следует, что  $F_{\text{Init}}^n(\Pi) \subset \Pi_0$  для некоторого  $n \geq 0$ . Полоса  $\Pi$  «зажата» между двумя горизонтальными отрезками  $\partial_h \Pi$ , и двумя вертикальными отрезками  $\partial_v \Pi$ . Поскольку  $H$  и  $F_{\text{Init}}$  совпадают на  $S$  и вертикальное слоение для обоих отображений инвариантно, имеем  $H^n(\Pi) = F_{\text{Init}}^n(\Pi) \subset \Pi_0$ .

По свойству 6 множества  $\mathcal{C}$  получим  $H(\Pi_0) \subset D$ ,  $H^{n+1}(\Pi) \subset D$ . Тогда  $H^m(x) \in D$ , где  $m = n + 1$ .  $\square$

**Предложение 50.** *Пусть для некоторого  $N$  гомеоморфизм  $H \in \mathcal{C}$  линеен на всех отрезках уровня больше  $N$ . Тогда найдется число  $c > 0$ , такое что доля точек  $B(H)$  в любом  $H$ -отрезке любого уровня больше  $c$ .*

*Доказательство.* Поскольку  $H \in \mathcal{C}$ , его производная по вертикальному направлению лежит между 1.001 и 1001. Рассмотрим число  $M$ , такое что за  $M$  итераций любой отрезок  $I_0$  уровня 0 пересечет  $\text{int } UK$  «насквозь». Такое  $M$  есть, потому что вертикальные слои как у линейного ДА  $F_L$  и они растягиваются хотя бы в 1.001 раз. Доля точек  $S$  в  $H^M(I_0)$  не меньше  $\mu(S)/\mu(UK)$  делить на длину  $H^M(I_0)$ . Поскольку искажение за  $M$  шагов ограничено, это влечет нужное утверждение для отрезков уровня 0. Для отрезков уровня не больше  $N$  утверждение следует из того, что эти отрезки растягиваются на отрезки уровня 0 с ограниченным искажением. А отрезки уровня больше  $N$  линейно растягиваются на отрезки уровня  $N$ .  $\square$

**Предложение 51.** *Пусть для некоторого  $N$  гомеоморфизм  $H \in \mathcal{C}$  линеен на всех  $H$ -отрезках уровня больше  $N$ . Тогда  $\mu(B(H)) = 1$ .*

*Доказательство.* От противного. Пусть дополнение  $D_{\text{or}}$  до множества  $B(H)$  имеет положительную меру. Тогда ограничение множества  $D_{\text{or}}$  на некоторый вертикальный слой имеет точку плотности  $x \in D_{\text{or}}$ . Напомним, что  $D = \mathbb{T}^2 \setminus UK$ . По предложению 49 орбита точки  $x$  попадает в  $D$  бесконечно много раз. Значит, точка  $x$

накрыта  $H$ -отрезком сколь угодно большого уровня. Из-за растяжения вертикальных слоев длина этого отрезка может быть сколь угодно мала. Поскольку  $x$  — точка плотности, плотность точек  $Dor$  в этом отрезке будет сколь угодно близка к 1, что противоречит предположению 50.  $\square$

### 3.7.7 Сглаживание

*Доказательство леммы 41.* По  $F_0 \in \mathcal{C} \cap \text{Diff}^1(\mathbb{T}^2)$  и  $\delta > 0$  мы построим диффеоморфизм  $F \in A_\varepsilon \cap \text{Diff}^1(\mathbb{T}^2)$ , такой что  $\text{dist}_{C^1}(F, F_0) < C\delta$ , где константа  $C$  не зависит от  $F_0$ .

Пока что для каждой полоски  $\Pi$  введем  $\delta_\Pi$ , которая будет достаточно малой, чтобы выполнялись все условия, наложенные на неё позже. Выберем  $N > N_0$  так, чтобы для всех полосок уровня больше  $N$ , которые появятся ниже, эта константа не превосходила  $\delta$ .

Построим по этому  $N$  отображение  $F_{PL}$  как в предложении 46. Мы покажем, что отображение  $F_{PL}$  можно сколь угодно малым в Номео-топологии возмущением сгладить до отображения  $F \in \mathcal{C} \cap C^1$ , такого что  $\text{dist}_{C^1}(F, F_0) < C\delta$ , где  $C$  — универсальная константа, общая для всех  $F_0$ . Тогда доказательство леммы можно будет завершить следующим образом. По предложению 51  $\mu(B(F_{PL})) = 1$ . Значит,  $F_{PL} \in A_\varepsilon$ . Это свойство  $C^0$ -открыто по лемме 40, следовательно,  $F \in A_\varepsilon$ .

Перейдем к построению диффеоморфизма  $F$ .

Пусть функция  $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$  — сглаженная ступенька, т.е.  $\rho(t) = 0$  при  $t < 0$ ,  $\rho(t) = 1$  при  $t > 1$  и  $\rho$  монотонно возрастает на отрезке  $[0, 1]$ . Пусть  $\Pi$  —  $F_{PL}$ -полоска некоторого уровня  $n > N$ , не лежащая в  $F_{PL}$ -полосках уровней  $N + 1, \dots, n - 1$ , — будем называть такие полоски *самостоятельными*. Для такой полоски  $F_0|_{\partial_h \Pi} = F_{PL}|_{\partial_h \Pi}$ . Пусть в локальных  $x, y$ -координатах на  $R$  (т.е., координатах, в которых одно слоение исходного диффеоморфизма Аносова вертикально, а другое горизонтально, как было описано в самом начале) горизонтальная (в очевидном смысле) граница полоски образована графиками функций  $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ . Для достаточно малого  $\alpha > 0$  определим  $F$  на  $\Pi$  следующим образом:

$$F(x, y) = \rho\left(\frac{\varphi_2(x) - y}{\alpha}\right) \rho\left(\frac{y - \varphi_1(x)}{\alpha}\right) F_{PL} + \left(1 - \rho\left(\frac{\varphi_2(x) - y}{\alpha}\right) \rho\left(\frac{y - \varphi_1(x)}{\alpha}\right)\right) F_0.$$

Для краткости введем обозначения  $\rho_1 = \rho\left(\frac{y - \varphi_1(x)}{\alpha}\right)$ ,  $\rho_2 = \rho\left(\frac{\varphi_2(x) - y}{\alpha}\right)$ .

Если расстояние от точки  $(x, y)$  до  $\partial_h \Pi$  по вертикали больше  $\alpha$ , то  $F(x, y) = F_{PL}(x, y)$ . Легко видеть, что  $F|_\Pi$  является  $C^1$ -гладким отображением. Посмотрим, насколько его дифференциал отличается от дифференциала  $F_0$ . Для начала оценим разность производных по  $y$ . Вдали от  $\partial_h \Pi$  разность та же, что и для пары  $F_0, F_{PL}$ . Вблизи верхней границы полосы  $\Pi$  имеем  $\rho_1 \equiv 1$ , так что выполнено равенство  $F = \rho_2 F_{PL} + (1 - \rho_2) F_0$ , и потому

$$\begin{aligned} |F'_y - (F_0)'_y| &= |(\rho_2)'_y (F_{PL} - F_0) + \rho_2 ((F_{PL})'_y - (F_0)'_y)| \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \cdot \max |\rho'| \cdot |F_{PL} - F_0| + |(F_{PL})'_y - (F_0)'_y|. \end{aligned}$$

Если точка  $(x, y)$  близка к верхней границе полосы, справедлива оценка  $|F_{PL} - F_0| \leq \alpha \delta_\Pi$ , и в любом случае выполнено неравенство  $|(F_{PL})'_y - (F_0)'_y| \leq \delta_\Pi$ . Таким образом, вблизи верхней границы имеем оценку  $|F'_y - (F_0)'_y| \leq C_y \delta_\Pi$ , где  $C_y = \max |\rho'| + 1$  — константа, не зависящая от отображений  $F_0, F_{PL}$  и выбора полосы  $\Pi$ . Аналогично получаем такую же оценку в окрестности нижней границы полосы  $\Pi$ . Более того,

аналогично можно оценить разность частных производных по  $x$  вблизи горизонтальной границы полосы, только в оценку войдут максимумы производных функций  $\varphi_j$ :

$$|F'_x - (F_0)'_x| \leq (1 + \max |\rho'| \cdot \max_x(\varphi'_1(x), \varphi'_2(x)))\delta_{\Pi} = C_x \cdot \delta_{\Pi}.$$

Таким образом, в силу компактности внутри полосы имеем оценку  $\|DF - DF_0\| < C\delta_{\Pi}$ , где  $C$  - постоянная, зависящая только от сглаживаемого отображения. Если  $\delta_{\Pi}$  достаточно мало,  $F|_{\Pi}$  — локальный диффеоморфизм, а следовательно, диффеоморфизм на образ.

Теперь заметим, что выбором достаточно малого  $\alpha$  можно сделать ограничения  $F$  и  $F_{PL}$  на  $\Pi$  сколь угодно близкими в  $C_0$ . Далее,  $\delta_{\Pi}$ -близость в  $C^0$  отображений  $F$  и  $F_0$  на  $\Pi$  следует из выбора  $N$  (так же, как  $\delta_{\Pi}$ -близость  $F_0$  и  $F_{PL}$ ), а  $C\delta_{\Pi}$ -близость их дифференциалов над  $\Pi$  мы только что показали.

Положим  $F = F_{PL} = F_0$  вне объединения самостоятельных полос. Покажем, что полученное отображение  $F$  является диффеоморфизмом,  $\delta$ -близким к  $F_0$  в  $C^1$ . Отображение  $F$  — предел сходящейся последовательности  $C^1$ -диффеоморфизмов, которые строятся следующим образом. Сгруппируем самостоятельные полосы так, чтобы соответствующие  $\delta_{\Pi}$  полосок  $j$ -й группы лежали в промежутке  $(\frac{\delta}{2^{j+1}}, \frac{\delta}{2^j}]$ . В каждой группе окажется конечное число полосок. Зададим для каждого натурального  $j$  отображение  $F_j$  так, чтобы оно совпадало с  $F$  на самостоятельных полосках из первых  $j$  групп и равнялось  $F_0$  вне этих полосок. Эта последовательность сходится к  $F$  поточечно. Так как  $C^1$ -расстояние между  $F_j$  и  $F_{j+1}$  не превосходит  $C\delta/2^j$ , а пространство  $C^1$ -отображений полно, эта последовательность сходится в  $C^1$  к отображению  $F$ , и притом последнее отстоит от  $F_0$  не более чем на  $\sum \frac{C\delta}{2^j} = C\delta$ . Следовательно,  $F$  близок к  $F_0$  в  $C^1$ , а потому является диффеоморфизмом, так как пространство диффеоморфизмов открыто в  $C^1$ . Таким образом, построенный диффеоморфизм  $F$  обладает всеми нужными нам свойствами.  $\square$

## 3.8 Существование $F_{Init}$ .

### 3.8.1 Существование $F_D$ .

Мы будем строить  $F_{init}$  как хирургию  $F_{Lin}$  на прямоугольнике  $\Pi$ , так что образ прямоугольника устраиваемого отображения совпадает с образом линейного, т.е.,  $F_{init}(\Pi) = F_{Lin}(\Pi)$ . Кроме того, на  $L$  отображение зададим так, что  $F_{init} = F_{Lin}$  на  $L$ ,  $L$  было введено для нашего начального отображения  $F_{Lin}$ .

Для начала построим не гладкий и даже не непрерывный аналог  $F_{init}$ , который будет называться  $F_D$ .

Напомним, что  $F_{Lin}$  на прямоугольнике  $\Pi$  действует так:  $H_0$  и  $H_1$  переходят в  $V_0$  и  $V_1$ , а средняя часть между двумя вертикальными полосками переходит наружу прямоугольника. Вне прямоугольника и на его средней части динамика  $F_D$  и  $F_{Lin}$  будет одинаковой. Что касается остального, то зададим отображение  $F_D$  на  $H_0, H_1$ , как описано ниже.

Введем координаты вдоль устойчивого ( $x$ ) и неустойчивого ( $y$ ) слоения линейного диффеоморфизма на  $\Pi$ , так что начало координат в левом нижнем углу квадрата. Обозначим ширину наших полосок  $H_0, H_1$  за  $h$ , а за  $b(y)$  отображение Боуэна на отрезке, введенное в предыдущей части. По сути дела, мы хотим, чтобы наше отображение на двух горизонтальных полосках по вертикали действовало как отображение типа Боуэна, которое обеспечит существование подковы с положительной мерой проекции на ось  $y$ . Чтобы этого добиться, сделаем вот что:

1. Для точек из  $H_0$  точка  $(x, y)$  под действием  $F_D$  перейдет в точку с такой же координатой  $x$ , как и под действием  $F_{Lin}$ , а вот координата  $y$  образа будет теперь задана для точек нижней полоски как  $b(3y/h)$ .

2. Для точек из  $H_1$  точка  $(x, y)$  под действием  $F_D$  перейдет в точку с такой же координатой  $x$ , что и под действием  $F_{Lin}$ , а координата  $y$  образа этой точки:  $b(3(y - 1 + h)/h)$ .

В итоге получается, что образы  $H_0$  и  $H_1$  - это  $V_0$  и  $V_1$ , как при действии  $F_D$ , так и  $F_{Lin}$ .

Мы полностью описали динамику  $F_D$ . Отображение получилось разрывно на верхней и нижней части вертикальных границ прямоугольника, и непрерывно, но не гладко на горизонтальных границах  $H_0$  и  $H_1$ , а в остальном гладко.

Теперь будем строить  $F_{Init}$ , сглаживая  $F_D$ . Сглаживание будет проходить в двух местах - на горизонтальных границах прямоугольников и на их вертикальных границах, причем по-разному: на горизонтальных впрямую, а в вертикальных с помощью сглаживающей функции-шляпы.

### 3.8.2 Ещё одно сглаживание.

Сглаживание будет основано на том, что динамика  $F_D$  будет продолжена в окрестность  $H_0$  и  $H_1$ .

А именно, обозначим  $Uh_i$  множество, состоящее из произвольной небольшой прямоугольной окрестности  $H_i$  построим отображение  $F_{DD}$  следующим образом. На  $H_i$  оно совпадает с  $F_D$  (и, как следствие, имеет на каждом из  $H_i$  структуру прямого произведения сжатия на отображение типа Боуэна), а вне  $H_i$  оно продолжается гладко с сохранением структуры прямого произведения, с тем же отображением сжатия, а отображение Боуэна гладко продолжим так, чтобы на границе  $Uh_i$  оно гладко перешло в  $F_{Lin}$ . При этом ещё потребуем, что  $F_{DD}(Uh_i) = F_D(Uh_i)$ . Поскольку окрестность  $Uh_i$  мала, это можно сделать. Вне  $Uh_i$  продолжим отображение как  $F_{Lin}$ .

У  $F_{DD}$  уже нет горизонтальных изломов, но вертикальные разрывы остались. Чтобы от них избавиться, используем функцию  $\varphi$ , которую зададим следующим образом: она определена в локальных координатах  $x, y$ , зависит только от  $x$ , гладка, равна 1, если  $(x, 0) \in H_0$ , равна 0, если  $(x, 0) \in \partial_v Uh_i$ , и не превосходит 1, - классическая шляпа.

Теперь сглаженное отображение будет задано формулой в  $Uh_i$  в координатах  $x, y$ :

$$F_{Init}(x, y) = (1 - \varphi(x))F_{Lin}(x, y) + \varphi(x)F_{DD}(x, y),$$

а вне этой окрестности просто совпадет с линейным.

### 3.8.3 $F_{Init}$ - диффеоморфизм Аносова

Фиксируем  $i = 0$  или  $1$ . Наше отображение  $F_{Init}$  есть

$$\varphi F_{Lin} + (1 - \varphi)F_{Bow}. \quad (3)$$

Тут  $F_{Bow}$  определено в окрестности  $UH_0 \cup UH_1$ ,  $C^1$ -гладко, прямое произведение. Функция  $\varphi$  будет равна 0 внутри  $UH_0 \cup UH_1$  и 1 вдали от этого множества.

Очевидно, что отображение  $F_{Lin}$  является локальным гомеоморфизмом связного компакта и, следовательно накрытием. Но наше отображение совпадает с  $F_{Lin}$  вдали от  $UH_0 \cup UH_1$ , поэтому накрытие однослойно. Таким образом, наше отображение является биекцией.



Прямые  $dx = \pm dy$  делят касательное пространство в каждой точке тора на два конуса, устойчивый для  $F_{Lin}$  (содержащий вертикальное направление) и неустойчивый. Проверим, что функцию  $\phi$  можно выбрать так, что  $DF_I$  невырожден и переводит неустойчивые конуса в себя. Тогда по условию конусов  $F_{Init}$  будет диффеоморфизмом Аносова.

Чтобы проверить это, продифференцируем (3). По формуле Лейбница получим

$$DF_{Init} = \varphi DF_{Lin} + (1 - \varphi) DF_{Bow} + (F_{Lin} - F_{Bow}) D\varphi.$$

Тут  $D\varphi$  это вектор-строка,  $F_{Lin} - F_{Bow}$  это вектор-столбец, поэтому их произведение это матрица  $2 \times 2$ .

Нам понадобится следующее элементарное утверждение.

**Предложение 52.** *Найдется число  $C_{cone} > 0$ , такое что для любых двух  $2 \times 2$  матриц  $A$  и  $B$ , таких что  $\|B\| < C_{cone}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ ,  $a_1 \in (0, 0.5)$ ,  $a_2 > 2$  их сумма  $A + B$  невырождена, и переводит конус  $x < y$  в себя.*

Применим это предложение к  $A = \varphi DF_{Lin} + (1 - \varphi) DF_{Bow}$ ,  $B = (F_{Lin} - F_{Bow}) D\varphi$ .

У  $F_{Lin}$  и  $F_{Bow}$  вертикальное и горизонтальное направление собственные, по горизонтали сжатие хотя бы в два раза, а по вертикали — растяжение хотя бы в два раза. Поэтому то же самое верно и для их выпуклой комбинации  $A$ . Покажем, что  $\|B\| < C_{cone}$ . Множитель  $F_{Lin} - F_{Bow}$  ограничен вертикальным размером  $A$ , (т.к. и  $F_{Lin}$ , и  $F_{Bow}$  отображают  $UH_i$  на  $UV_i \subset UK$ ) который не превосходит  $0.01C_{cone}$ . Множитель  $D\varphi$  ограничен единицей делить на размер «внешних ушей» — области перехода от  $\varphi = 0$  к  $\varphi = 1$ . Этот размер «внешних ушей» у нас будет порядка  $1/10$ , а прямоугольник  $A$  будет очень мал, потому что  $F_{Lin}$  сильно-сильно растягивает вдоль неустойчивого направления. Поэтому условие конусов выполнено.

### 3.9 Доказательство леммы 40

Рассмотрим произвольное  $F \in \mathcal{C}$  и произвольный отрезок  $I \subset \mathbb{T}^2$  в вертикальном слое. Обозначим через  $\nu$  естественную меру Лебега на вертикальных отрезках (индуцированную длиной).

**Предложение 53.** *Для любого  $\delta > 0$  найдется число  $\varepsilon > 0$ , такое что для любого гомеоморфизма  $G \in \mathcal{C}$ , такого что  $\text{dist}_{\text{Homeo}}(F, G) < \varepsilon$ , выполнено  $\nu(I \cap B(G)) > \nu(I \cap B(F)) - \delta$ .*

*Доказательство.* Представим  $I \cap B(F)$  в виде возрастающего объединения множеств:

$$I \cap B(F) = \cup_{N=1}^{\infty} [\cup_{j=1}^N F^{-j}(S) \cap I] = \cup_{N=1}^{\infty} M_N(F).$$

Найдется такое  $N$ , что  $\nu(M_N(F)) > \nu(I \cap B(F)) - \frac{\delta}{3}$ .

Для любого  $\delta_1 > 0$  множество  $S$  можно покрыть объединением  $\hat{S}$  конечного числа прямоугольников так, чтобы разность  $\hat{S} \setminus S$  имела меру меньше  $\delta_1$ . Действительно,  $S$  является произведением «вертикального» толстого канторова множества — назовем его  $C$  — на «горизонтальный» отрезок. Покрытие  $C$  конечным числом отрезков получается, если выкинуть из выпуклой оболочки  $C$  конечное число интервалов дополнения до  $C$ . Умножая это покрытие на горизонтальный отрезок, получим покрытие множества  $S$  с нужными свойствами. Заметим, что множество  $\hat{S} \setminus S$  в пересечении с любым вертикальным сечением прямоугольника  $UK$  высекает множество одной и той же меры  $\delta_0 = \delta_1/l$ , где  $l$  — длина горизонтальной стороны  $UK$ .

Убедимся, что для любого  $j \in 1, \dots, N$  справедлива оценка

$$\nu(I \cap F^{-j}(\hat{S} \setminus S)) \leq c \cdot |F^j(I)| \cdot \delta_0, \quad (4)$$

где  $c$  – константа, общая для всех отображений из  $\mathcal{C}$ .

Для этого рассмотрим  $F^j(I)$  — это отрезок в вертикальном слоеении, который может несколько раз обвиваться вокруг тора и иметь несколько компонент связности пересечения с  $UK$ . Множитель  $c \cdot |F^j(I)|$  является оценкой сверху для числа таких компонент; выбор константы  $c$  зависит от размеров квадрата и угла наклона обмотки тора вертикальным слоеением, которые общие для всех  $F \in \mathcal{C}$ . Каждая такая компонента связности в пересечении с множеством  $\hat{S} \setminus S$  дает множество,  $\nu$ -мера которого не больше  $\delta_0$ . Таким образом, имеем неравенство

$$\nu(F^j(I) \cap (\hat{S} \setminus S)) \leq c \cdot |F^j(I)| \cdot \delta_0.$$

Остается заметить, что  $F^{-j}$  в ограничении на вертикальные отрезки липшицево и сжимает согласно свойству 4 из определения класса  $\mathcal{C}$ , а значит  $\nu(I \cap F^{-j}(\hat{S} \setminus S)) < \nu(F^j(I) \cap (\hat{S} \setminus S))$ , откуда следует неравенство 4.

Так как  $S = \hat{S} \setminus (\hat{S} \setminus S)$ , а  $F$  – биекция, имеем

$$M_N(F) = I \cap \cup_1^N F^{-j}(S) = \left[ I \cap \cup_1^N F^{-j}(\hat{S}) \right] \setminus \left[ I \cap \cup_1^N F^{-j}(\hat{S} \setminus S) \right]$$

и можем написать оценку

$$\nu(M_N(F)) \geq \nu(I \cap \cup_1^N F^{-j}(\hat{S})) - c \cdot \sum_{j=1}^N |F^j(I)| \cdot \delta_0.$$

Заметим, что сумму длин в правой части можно оценить сверху равномерно для всех  $F \in \mathcal{C}$ . Если  $\delta_1$  и, следовательно,  $\delta_0$  достаточно малы, будем иметь

$$\nu(M_N(F)) \geq \nu(I \cap \cup_1^N F^{-j}(\hat{S})) - \delta/3,$$

причем эта оценка справедлива для всех  $F \in \mathcal{C}$ .

Для  $G \in \mathcal{C}$ , достаточно близкого к  $F$ , будем иметь  $\nu(\cup_{j=1}^N G^{-j}(\hat{S})) \geq \nu(\cup_{j=1}^N F^{-j}(\hat{S})) - \delta/3$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \nu(I \cap B(G)) &\geq \nu(I \cap \cup_{j=1}^N G^{-j}(S)) \geq \nu(I \cap \cup_{j=1}^N G^{-j}(\hat{S})) - \delta/3 \geq \\ &\geq \nu(I \cap \cup_{j=1}^N F^{-j}(\hat{S})) - 2\delta/3 \geq \nu(I \cap B(F)) - \delta. \end{aligned}$$

□

Заметим, что аналогичный вывод с заменой  $\delta$  на  $2\delta$  можно получить для достаточно близкого к  $I$  вертикального отрезка  $I'$ . После этого можно представить тор в виде квадрата с отождествленными сторонами и отрезать у этого квадрата два уголка, в которые не входят слои вертикального слоеения, пожертвовав мерой  $\delta$ . На оставшемся шестиугольнике вертикальное слоеение не имеет особенностей, так что для него можно рассмотреть конечное почти-дизъюнктивное (пересечение по мере ноль) покрытие замыканиями окрестностей вертикальных отрезков. В каждой окрестности применяем теорему Фубини и получаем, что дефект меры бассейна при достаточно малом возмущении не превосходит  $3\delta$ .

## Заключение

**Итоги.** Итогом диссертационной работы является доказательство наличия у аттракторов Милнора диффеоморфизмов новых интересных свойств.

Показано, что аттрактор Милнора не является, вообще говоря, топологическим инвариантом ни для бесконечно гладких отображений, ни для диффеоморфизмов Аносова. Показано, что для аттракторы частично-гиперболических систем состоят из неустойчивых слоёв. Показано, что существуют динамические системы, для которых не выполнено заключение специальной эргодической теоремы.

**Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.** В связи с этим дальнейшим развитием темы диссертационного исследования могли бы послужить такие вопросы:

**Вопрос 1.** *Является ли аттрактор частично-гиперболических диффеоморфизмов состоящим из неустойчивых слоёв в  $C^1$  случае? Существует ли типичное множество в пространстве таких диффеоморфизмов, где аттрактор состоит из неустойчивых слоёв?*

**Вопрос 2.** *В классе ручных диффеоморфизмов аттрактор Милнора типичным образом устойчив по Ляпунову или нет?*

**Вопрос 3.** *Плотно или нет в классе  $C^1$  диффеоморфизмов Аносова двумерного тора множество отображений с аттрактором Милнора, не совпадающим со всем фазовым пространством? Какова их коразмерность?*

**Вопрос 4.** *Насколько типичны или нетипичны в пространстве диффеоморфизмов многообразий (без края) диффеоморфизмы, у которых аттракторы Милнора толстые? Если они нетипичны, какова их коразмерность?*

**Вопрос 5.** *Существует ли топологически полное семейство диффеоморфизмов комплексно двумерной плоскости, такое, что их аттракторы Милнора неустойчивы? Такое, что их аттракторы толсты?*

**Вопрос 6.** *Что можно сказать о существовании SRB-меры построенного примера диффеоморфизма Аносова с аттрактором Милнора, не совпадающим со всем фазовым пространством? Какова хаусдорфова размерность дополнения до бассейна этой меры?*

## Список литературы

- [AbdA] Flavio Abdenur, Martin Andersson, *Ergodic Theory of Generic Continuous Maps*, Communications in Mathematical Physics March 2013, Volume 318, Issue 3, pp 831-855.
- [Falconer] K. Falconer *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. Thomson Press, 1990.
- [Shil] Ivan Shilin *Locally topologically generic diffeomorphisms with Lyapunov unstable Milnor attractors* <https://arxiv.org/abs/1604.02437>
- [ABS] J. Auslander, N.P. Bhatia, P. Seibert. Attractors in dynamical systems. Bol. Soc. Mat. Mexicana (2), 9 (1964), pp. 55–66.

- [Гор] *Иерархия аттракторов для диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A* Вестник Моск. ун-та, сер. 1. Математика. Механика. 1996, №1, стр. 84-86.
- [R] David Ruelle *A Measure Associated with Axiom-A Attractors* American Journal of Mathematics Vol. 98, No. 3 (Autumn, 1976), pp. 619-654.
- [Bowen] R. Bowen, *A horseshoe with positive measure*. Invent. math. 29, 1975, 203-204.
- [BP] L. Barreira, Ya.B. Pesin *Nonuniform Hyperbolicity: Dynamics of Systems with Nonzero Lyapunov Exponents*, Cambridge University Press, 2007.
- [BDV] C. Bonatti, L.J. Diaz, M. Viana, *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity*, Springer, 2004.
- [Ily] Yu.S. Ilyashenko, *Thick attractors of boundary preserving diffeomorphisms*, Indagationes Mathematicae, Vol. 22, Issues 3–4 (2011), 257–314.
- [Kud] Yu.G. Kudryashov, *Bony attractors in higher dimensions*, arXiv:1305.3889v1
- [Mil] J. Milnor, *Fubini foiled: Katok's paradoxical example in measure theory*, Math. Intelligencer 19 (1997), no. 2, 30–32.
- [MP] C. A. Morales and M. J. Pacifico, *Lyapunov stability of generic  $\omega$ -limit sets*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, Vol. 8, Issue 3 (2002), 671-674.
- [PVW] C. Pugh, M. Viana, A. Wilkinson, *Absolute continuity of foliations*, <http://w3.impa.br/~viana/out/pvw.pdf>, 2007.
- [ShW] M. Shub, A. Wilkinson, *Pathological foliations and removable zero exponents*, Invent. math. 139 (2000), 495–508.
- [AAISh] В. И. Арнольд, В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников, *Теория бифуркаций*, ВИНТИ, 1986 .
- [МО] С. Минков, А. Окунев. *Омега-предельные множества типичных точек частично-гиперболических диффеоморфизмов* Функц. анализ и его прил., 50:1 (2016), 59–66.
- [RY] Clark Robinson, Lai-Sang Young *Nonabsolutely continuous foliations for an Anosov diffeomorphism* Invent. math. June 1980, volume 61, issue 2, pp 159-176.
- [KMR] V. Kleptsyn, D. Ryzhov, S. Minkov. *Special ergodic theorems and dynamical large deviations* Nonlinearity 25 (11), 2012.
- [EL] А. Еременко, М. Любич. *Динамика аналитических преобразований* Алгебра и анализ, вып. 3, т.1., 1989.
- [ISh] *Условно неустойчивые аттракторы* Тр. МИАН, 2012, том 277, стр. 91–100.
- [KL] M. L. Cartwright and J. E. Littlewood. *On Non-Linear Differential Equations of the Second Order II* Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 48, No. 2 (Apr., 1947), pp. 472-494.
- [KH] А. Каток, Б. Хассельблат. *Введение в современную теорию динамических систем* Факториал, 1999.

- [Pes] Я.Б. Песин. *Лекции по теории частичной гиперболичности и устойчивой эргодичности* МЦНМО, 2006 — перевод с английского книги  
Yakov Pesin, *Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity*, European Mathematical Society, 2004