Отзыв официального оппонента
на диссертационную работу Минкова Станислава Сергеевича
"Толстые аттракторы и косые произведения",
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.02 "Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление".

В диссертационной работе Минкова Станислава Сергеевича рассматриваются актуальные вопросы теории странных аттракторов – одного из самых сложных и интересных разделов теории многомерных динамических систем. Сам термин «странный аттрактор» был введен почти 50 лет назад в известной работе Рюэля и Такенса, после которой математическая теория таких аттракторов стала стремительно развиваться. Однако в ней до сих пор еще остается большое число открытых проблем и «белых пятен». Как ни странно, одна из таких проблем связана непосредственно с аксиоматической базой теории странных аттракторов – это то, а как, собственно, дать правильное определение «странного аттрактора» или просто «аттрактора»? В идеале, годящегося на все случаи жизни (что, по-видимому, невозможно), или адекватного для открытого плотного (или типичного и т.п.) множества систем. К настоящему времени существует много различных определений (странного) аттрактора. Например, «максимальный аттрактор», «статистический аттрактор», «аттрактор по Рюэлю», «аттрактор по Милнору» и т.п. Во многих случаях такие по-разному определяемые «аттракторы» описывают одно и то же притягивающее замкнутое инвариантное множество. Но также хорошо известны примеры систем, для которых это не так. В частности, в диссертации приведены как известные, так и новые примеры систем, в которых максимальный аттрактор не совпадает с аттрактором Милнора. Более того, многие авторы определяют один и тот же тип «аттрактора» по-разному. Например, для «странного аттрактора» иногда требуется, а иногда не требуется, чтобы его замыкание не являлось гладким подмногообразием (так, аттракторы Аносова, заданные на двумерном торе, в случае трехмерных диффеоморфизмов некоторые авторы относят к странным, а другие – нет). В диссертации рассматриваются аттракторы Милнора, определяемые как *«минимальные (по вложению) замкнутые множества, содержащие ω-предельные точки почти всех точек фазового пространства»* (Определение 2). Однако у самого Милнора (1985) и многих других авторов говорится об *«ω-предельных точках для множества положительной меры».* Тем не менее, определение аттрактора Милнора, данное автором диссертации, лично мне нравится больше, чем оригинальное, во всяком случае оно имеет много своих достоинств (в частности, здесь не возникает проблем с единственностью аттрактора). Как мне кажется, так определенный аттрактор более правильно было бы называть «аттрактором Милнора-Ильяшенко». Но это моё замечание совсем не относится к сути работы, и поэтому везде ниже я буду придерживаться термина диссертанта – «аттрактор Милнора».

Об основных результатах диссертации.

Сразу замечу, что мне особенно понравилось то, что автор изучает динамические и топологические свойства аттракторов Милнора, не придерживаясь идеологии исследования «типичных свойств» таких аттракторов. Наоборот, находясь строго в рамках определения, он обнаруживает много «иррациональных» свойств таких аттракторов. Одно из таких свойств – это «топологическая неинвариантность» аттракторов Милнора. Она состоит в том, что топологически эквивалентные системы могут содержать аттракторы Милнора, которые не являются топологически эквивалентными (Теорема 5). На эту тему в диссертации автором приведено два примера. Один из них достаточно простой и понятный. В его основе лежит построение двух топологически сопряженных двумерных C^∞-диффеоморфизмов, у которых их максимальные аттракторы содержат соответственно канторовские множества нулевой и положительной меры. Другой пример – совсем нетривиальный. Он связан с существованием транзитивного C^1-диффеоморфизма Аносова, у которого аттрактор Милнора не совпадает со всем фазовым пространством (Теорема 9). Эти два примера как бы противоречат «здравому смыслу», но являются строгим математическим выводом непосредственно из определения аттрактора Милнора. Это показывает, что аттракторы Милнора могут быть очень плохо устроены, и что, в более общем плане, использование какого-либо, казалось бы разумного, понятия аттрактора требует особой аккуратности.

С другой стороны, в главе 1 показано, что аттракторы Милнора обладают также и очень хорошими динамическими свойствами. Так, в случае частично гиперболических C^r-гладких систем, аттракторы Милнора состоят из неустойчивых инвариантных слоев (Теорема 1). И этот результат хорошо согласуется с тем, что во многих практических важных случаях странный аттрактор совпадает (или содержится в) с замыканием неустойчивого инвариантного многообразия какой-либо его седловой периодической точки.

На мой взгляд, очень интересными и содержательными являются также результаты диссертации, касающиеся динамических свойств т.н. толстых аттракторов Милнора (аттрактор называется толстым, если он имеет положительную меру, но не совпадает со всем фазовым пространством; Определение 5). Существование таких аттракторов в косых произведениях над сдвигом Бернулли (Определение 8) доказано в Теореме 3. Другой результат автора на эту тему, Теорема 4, показывает, что если у обратимой системы (диффеоморфизм или поток) существует толстый аттрактор Милнора, то ее репеллер либо тоже толстый, либо неустойчив по Ляпунову (как аттрактор обратной системы). Более того, здесь же показано, что если и аттрактор и репеллер являются толстыми и устойчивыми по Ляпунову, то они пересекаются по множеству положительной меры. На мой взгляд, это последнее утверждение должно быть сформулировано как отдельная весьма интересная теорема. Дело в том, что возможность непустого пересечения аттрактора с репеллером была открыта сравнительно недавно (первый результат на эту тему был получен Гонченко, Тураевым и Шильниковым в 1997г., статья в Трудах МИАН). Как сейчас стало понятным, это явление связано с существованием третьего типа динамического хаоса, т.н. «смешанной динамики» ($A \neq R$ и $A \cap R \neq \varnothing$), дополнительного к двум хорошо известным другим: «странный аттрактор» ($A \cap R = \varnothing$) и «консервативный хаос» ($A=R$). Заметим, что смешанная динамика характерна для систем со знакопеременной дивергенцией (или для диффеоморфизмов, у которых якобиан может быть больше и меньше 1) а также для реверсивных систем, которые часто встречаются в приложениях. В последнем случае аттрактор и репеллер могут содержать в пересечении эллиптические периодические точки вместе с их окрестностями, т.е. они автоматически являются толстыми. Это еще раз подчеркивает актуальность исследований, проведенных в диссертации, и их непосредственную связь с исследованиями других авторов на темы, которые при первом взгляде могут показаться далекими от того, чем занимается диссертант.

Диссертация Минкова Станислава Сергеевича состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении дается краткое содержание работы, которое позволяет достаточно полно и адекватно понять основные положения диссертации.

В первой главе доказан весьма общий результат о свойствах аттрактора Милнора частично-гиперболических систем, говорящий о том, что такой аттрактор в C^2-случае состоит из неустойчивых слоев.

Во второй главе получен ряд интересных результатов, касающихся динамических и топологических свойств толстых и неустойчивых аттракторов Милнора. В частности, здесь установлена «топологическая неинвариантность» толстых аттракторов Милнора, а также доказано существование толстых аттракторов в косых произведениях над сдвигом Бернулли. Для последних также доказана теорема об искажении хаусдорфовой размерности при гомеоморфизмах (Теорема 6). На основании этой теоремы доказано (Теорема 7) существование C^{∞}-гладких двумерных диффеоморфизмов с SRB-мерой с носителем в одной точке, для которых заключение специальной эргодической теоремы не выполнено (т.е., хаусдорфова размерность множества нетипичных точек равна 2). В этой главе также показано, что аттрактор Милнора в случае sine-семейства неустойчив (Теорема 8).

Основной результат **третьей главы** – это теорема (Теорема 9) о существовании транзитивного C^1-гладкого двумерного диффеоморфизма Аносова, у которого аттрактор Милнора (неустойчивый по Ляпунову) не совпадает со всем фазовым пространством. Построенный пример получается малым C^1-возмущением линейного диффеоморфизма Аносова на торе. Заметим, что он невозможен в C^2-гладком случае (и поэтому полученный результат кажется на первый взгляд весьма удивительным).

В заключении автор описывает общую картину полученных результатов и, что важно, обрисовывает направления дальнейших исследований в развитии темы диссертации.

Список литературы включает две работы автора по теме диссертации из списка ВАК.

Отдельные недостатки.

1) В определении 2 аттрактора Милнора, как мне кажется, пропущено слово «инвариантное» (в фразе «замкнутое инвариантное множество»). Это, конечно, дискуссионный момент, но требование «инвариантности» в определении аттрактора кажется естественным.
2) В автореферате отсутствует разделение результатов, полученных совместно диссертантом и А.В. Окуневым при доказательстве, в частности, Теоремы 1. В тексте диссертации такое разделение присутствует.
3) Автор использует не совсем понятную нумерацию теорем, лемм, определений, следствий и предложений (она то сквозная, то несквозная), что затрудняет чтение диссертации (например, Теорема 1 – она же Теорема 10; Теорема 3 – она же Теорема 24 и т.д.)
4) На стр. 14 диссертации фраза «Эта теорема доказана в [Pes, теорема 7.1] (*теорема Песина*); в диссертации она будет использована без доказательства» является совершенно ненужной. То же самое касается аналогичных фраз «доказательство этой теоремы в дальнейшем не потребуется» или «доказательство этого факта тоже не потребуется» на стр. 32 относительно известных теорем.
5) Заголовки параграфов типа «доказательство теоремы» (стр. 14), «сведение теоремы к лемме» (стр.20), «доказательство основного результата» (стр. 28), «топологическое доказательство» (стр. 32) не помогают восприятию результатов – куда лучше и информативнее выглядела бы, например, фраза «доказательство теоремы 11».
6) В формуле для A_{max} (стр. 1 автореферата и стр. 3 диссертации) стоит обозначение («°» - как оказалось, знак суперпозиции), которое поначалу не очень понятное, объяснение ему дается только на стр. 10 диссертации – без него формула вполне понятная и стандартная.
7) В тексте автореферата и диссертации имеются опечатки.

Однако эти мелкие недостатки не влияют в целом на весьма высокое научное содержание диссертационной работы.

Заключение.

Диссертационная работа Минкова Станислава Сергеевича выполнена на высоком научном уровне. Автором получены новые содержательные результаты, имеющие актуальное значение; они обоснованы строгими математическими доказательствами. Автореферат соответствует содержанию диссертации. Результаты соответствуют специальности 01.01.02 - "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление".

Таким образом, работа отвечает требованиям Положения о порядке присуждения учёных степеней, а её автор заслуживает присуждения степени кандидата физико-математических наук по вышеуказанной специальности.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
федеральный профессор в области математики,
ведущий научный сотрудник НИИ суперкомпьютерных технологий федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
Адрес: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23.
тел. (831) 462-30-03
E-mail: rector@unn.ru

Гонченко Сергей Владимирович

15.11.2016

Подпись Гонченко С.В.
Заверяю. Ученый секретарь ННГУ
Л.Ю. Черноморская
Тел. 462-30-21