Отзыв научного руководителя о диссертационной работе Н.Т. Немеша
«Метрическая и топологическая проективность,
инъективность и плоскость банаховых модулей»,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена актуальной области функционального анализа – гомологической теории банаховых алгебр. В этой теории большое внимание уделяется трем классам банаховых модулей, которые справедливо считаются "гомологически лучшими" – проективным, инъективным и плоским модулям. Говоря чуть упрощенно, можно сказать, что это те модули, для которых имеет положительное решение максимально широкий, в том или ином разумном смысле, класс задач подъема и продолжения морфизмов.

Различные задачи функционального анализа привели к нескольким существенно различным подходам к упомянутым понятиям. Самым старым и до сих пор наиболее известным является так называемый относительный (иногда говорят "традиционный") подход, когда рассматриваются задачи подъема и продолжения, имеющие заведомо положительное решение после "забывания" о модульной структуре, то есть в классе банаховых пространств и ограниченных операторов. В свое время такой подход позволил выделить широкий класс гомологически лучших банаховых модулей, достаточный для построения развитой гомологической теории. С помощью этих методов было решено несколько известных проблем, лежащих на стыке теории банаховых алгебр и ее приложений.

Однако уже давно вызывал интерес следующий естественный вопрос: какие модули останутся "гомологически лучшими", если перейти к рассмотрению гораздо более широкого класса задач подъема и продолжения – подъемов относительно открытых морфизмов и продолжений относительно топологически инъективных морфизмов. При этом, определяя соответствующие классы модулей, можно учитывать только топологию, заданную нормой в рассматриваемом модуле ("топологический подход"), а можно интересоваться точным значением нормы ("метрический подход").

Подобные задачи привлекали внимание уже в геометрической теории банаховых *пространств* (без внешнего умножения), где им были посвящены известные работы Гротендика, Кёте и других математиков (а первым результатом можно при желании считать теорему Хана–Банаха). Что же касается банаховых модулей, то интерес к топологическому подходу появился в связи с теорией аменабельных алгебр, а интерес к метрическому подходу – сравнительно недавно, в связи с некоторыми вопросами теории операторных пространств.

Все же в рамках обоих из этих подходов в контексте модулей было известно очень мало.

Диссертационная работа Н.Т. Немеша представляет собой первое значительное продвижение в обеих версиях гомологической теории – топологической и метрической. В ней преследуются две цели. Первая — построение общей теории для метрической и топологической версий банаховой гомологии, в первую очередь – выражение проективности через приемлемый вариант свободности, инъективности – через косвободность, изучение конструкций, сохраняющих про- и инъективность, и т.п. Вторая цель – это изучение гомологических свойств классических и наиболее популярных банаховых модулей в рамках указанных двух теорий.

Диссертация состоит из введения и трех глав. Во введении дан исторический обзор по теме работы и сформулированы ее основные результаты.

Глава 1 содержит детальное изложение всех необходимых предварительных сведений по геометрии банаховых пространств, банаховым алгебрам, банаховым модулям и оснащенным категориям.

В главе 2 изучается метрическая и топологическая проективность, инъективность и плоскость банаховых модулей над произвольными банаховыми алгебрами. Перечислены категорные конструкции, которые сохраняют эти свойства модулей. Исследованы общие условия проективности идеалов банаховых алгебр и циклических банаховых модулей. Описаны аннуляторные гомологически лучшие модули. Указаны геометрические свойства банаховых алгебр, при которых их проективные, инъективные и плоские модули локально устроены как ℓ_1- или ℓ_∞-пространства, либо обладают свойством Данфорда-Петтиса или свойством l.u.st.

Глава 3 посвящена приложениям общей теории к конкретным и наиболее известным классам модулей функционального анализа. Сначала, что совершенно естественно, изучение начато с простейшего и в то же время чрезвычайно важного класса модулей – идеалов банаховых алгебр. Среди результатов этой главы, на наш взгляд, наиболее сильным и нетривиальным является следующий критерий.

Теорема. Пусть I – левый идеал C^*–алгебры A. Тогда I топологически проективен тогда, и только тогда, когда I метрически проективен и тогда, и только тогда, когда $I = Ap$ для некоторого самосопряженного идемпотента $p \in I$;

Эта теорема на примере важнейшего класса операторных алгебр ясно показывает, насколько узок класс топологически (и метрически) проективных идеалов по сравнению с классом *относительно* проективых идеалов: ведь известно, что всякий левый идеал сепарабельной C^*–алгебры относительно проективен.

Другим заметным результатом является описание топологически инъективных AW^*–алгебр. (Напомним, что последние образуют содержательный промежуточный класс между общими C^*–алгебрами и алгебрами фон Ноймана, характеризуемый в терминах решетки их проекторов). Оказывается, такая алгебра топологически инъективна как правый модуль над собой тогда, и только тогда, когда она “близка к коммутативной” в том смысле, что является произведением конечного числа матричных алгебр с коэффициентами в коммутативных AW^*–алгебрах.

Разработанные в диссертации методы позволили автору получить и ряд других интересных и содержательных результатов. В частности, им показано, что идеал *коммутативной* банаховой алгебры, обладающей ограниченной аппроксимативной единицей, топологически и/или метрически проективен тогда, и только тогда, когда он обладает обычной единицей.

Упомянутые критерии вкупе с результатами второй главы дают необходимые и достаточные условия проективности, инъективности и плоскости классических модулей анализа над алгебрами ограниченных и сходящихся к нулю последовательностей, алгебрами ограниченных и компактных операторов в гильбертовом пространстве, алгебрами мер и групповыми алгебрами локально компактных групп. Конец главы посвящен построению категории, в которой все модули являются проективными, инъективными и плоскими —

поведение совершенно нетипичное для классических категорий функционального анализа.

Таким образом, результаты автора представляют несомненный интерес. Они могут быть использованы и в других вопросах теории банаховых и операторных алгебр, а также смежных дисциплин.

Работа написана четко, ясно и весьма тщательно.

Подведем итог сказанному. На наш взгляд, работа Н.Т. Немеша является серьезным научным исследованием, в котором решены актуальные математические задачи. Эта работа удовлетворяет всем требованиям "Положения присуждении ученых степеней" ВАК, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Научный руководитель
доктор физико-математических наук 01.01.01, профессор,
e-mail: helemskii@rambler.ru
профессор кафедры теории функций и функционального анализа
механико-математического факультета ФГБОУ ВО
"Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова" А.Я.Хелемский

119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, Главное здание,
механико-математический факультет, кафедра теории функций
и функционального анализа, тел. +7 (495) 939-36-80

Подпись Хелемского Александра Яковлевича заверяю.
Ио декана
механико-математического факультета МГУ
профессор В.Н. Чубариков

09.09.2016.