Отзыв официального оппонента Амосова Григория Геннадьевича на диссертацию Немеша Норберта Тиборовича "Метрическая и топологическая проективность, инъективность и плоскость банаховых модулей", представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – действительный, комплексный и функциональный анализ

В 50ые годы XX века, благодаря работам Нахбина, Гудвина, Гротендика и других возникла гомологическая теория банаховых пространств. Были частично исследованы проективные, инъективные и плоские банаховы пространства. В своей основополагающей статье 1970 года А.Я. Хелемский заложил основы гомологической теории банаховых алгебр. Для перенесения определения проективности, инъективности и плоскости на алгебраический случай нужно определить, какие морфизмы в комплексе следует считать допустимыми. В упомянутой работе Хелемского в качестве таких морфизмов были предложены обладающие (в смысле геометрии банаховых пространств) дополняемым ядром и образом. Определяя допустимые морфизмы по другому, можно получить и другую гомологическую теорию. Так в 1979 году Гравен ввёл понятия метрически инъективного, проективного и плоского банаховых модулей. Топологическое определение допустимых морфизмов дали Хелемский и Шейнберг в 1984 году. В 2008 году Хелемский начал систематическое исследование метрической гомологии банаховых модулей. Возможные определения проективности, инъективности и плоскости были вписаны в общекатегорную схему. В диссертационной работе проведено подробное исследование метрических и топологических гомологических свойств трёх типов модулей: модулей над алгебрами ограниченных и компактных операторов, модулей над алгебрами ограниченных и исчезающих в бесконечности функций и модулей над сверточной алгеброй и алгеброй мер на локально компактной группе. Таким образом, проведённое исследование представляет из себя естественное продолжение деятельности научной школы Хелемского и является **актуальным**.

Диссертация состоит из Введения, трех глав, Заключения и списка литературы из 101 наименования. Объём диссертации составляет 118 страниц. Во введении дан подробный исторический обзор, обоснована актуальность темы, сформулированы цели работы и основные положения, выносимые на защиту. Первая глава полностью посвящена введению многочисленных понятий, определений и обозначений, таких как инъективные, сюрьективные, коизометрические операторы, введённые Линденштраусом и Пельчинским в 1968 г. "близкие к конечномерным" пространства $\mathcal{L}_p$, относительная гомология в смысле школы А.Я. Хелемского.

Вторая глава посвящена метрически и топологически проективным, инъективным и плоским модулям над банаховой алгеброй. То есть, в смысле определений, данных Хелемским в 2011 и 2013 гг., и отличном от относительной проективности, инъективности и плоскости. Значительное внимание уделено тому, как свойство банаховой алгебры быть банаховым пространством $\mathcal{L}_p$ в смысле Линденштрауса-Пельчинского влияет на саойство модулей над этой алгеброй.

Третья глава состоит из трёх частей. Первая часть посвящена модулям над C^*-алгебрами. Показано, что для топологически инъективных модулей важную роль играет свойство банаховых пространств $l.u.st.$ (local unconditional structure), связанное с возможность введения в пространстве базиса. Во второй части третьей главы изучаются классические модули $L_1(G)$, соответствующей локально компактной группе G. В третьей части третьей главы изучаются операторы умножения на функции, действующие между пространствами $L_p(\Omega, \mu)$. Эти свойства позволяют исследовать пространства $L_p(\Omega, \mu)$ как модули над алгеброй ограниченных функций.

В коротком Заключении подведены итоги работы.

Сформулируем основные результаты диссертации, определяющие её **научную новизну**.

Во второй главе:

- Доказано, что идеал коммутативной алгебры, обладающий (сжимающей /ограниченной) аппроксимативной единицей является (метрически/ топологически) проективным модулем тогда и только тогда когда обладает (единицей нормы один/ единицей).

- Установлена связь гомологических свойств с пространствами Линденштрауса-Пельчинского. Оказалось, что если банахова алгебра является пространством $\mathcal{L}_1$ или $\mathcal{L}_\infty$, тогда все проективные, инъективные и плоские модули над ней имеют свойство Данфорда-Петтиса.

- Установлено, что если A – относительно аменабельная банахова алгебра и F – её левый A-модуль, являющийся $\mathcal{L}_1$ пространством, тогда F – топологически плоский A-модуль.

В третьей главе:

- Показано, что левый идеал I C^*-алгебры A является метрически и топологически проективным тогда и только тогда, когда для некоторого идемпотента $p \in I$ получаем $I = p\mathrm{A}$. Как следствие этого, для алгебры функций на локально компактном Хаусдорфовом пространстве, исчезающих в бесконечности, метрическая и топологическая проективность I эквивалентна тому, что спектр $Spec(I)$ компактен.

- Показано, что AW^*-алгебра является топологически инъективным модулем над собой тогда и только тогда, когда она изоморфна сумме алгебр конечномерных матриц, коэффициентами которых являются функции на некотором наборе стоуновых пространств. Следует отметить, что из результатов Хаманы и Такесаки немедленно вытекает, что C^*-алгебра является метрически инъективным модулем тогда и только тогда, когда она является коммутативной AW^*-алгеброй. Этот результат также получен автором, но его обобщение на топологически инъективные модули является абсолютно нетривиальным.

- Доказано, что модуль $L_1(G)$ над локально компактной группой G метрически и топологически проективен тогда и только тогда, когда G дискретна.

- Установлено, при каких условиях операторы умножения на функцию, действующие между пространствами $L_p(\Omega, \mu)$ являются топологически инъективными, сюръективными, изометрическими, коизометрическими. Как следствие получено, что модули $L_p(\Omega, \mu)$ являются метрически и топологически проективными, инъективными и плоскими в категории, где в качестве допустимых морфизмов выступают соответствующие операторы умножения на функцию.

В работе есть **незначительные недостатки:**

- Автор настолько погрузился в исследуемую тему, что уже с первых страниц диссертации использует без определения некоторые термины, не являющиеся общепринятыми. Например, "гомологически тривиальные объекты". Можно только догадаться по контексту, что такими словами автор называет как раз проективные, инъективные и плоские модули.

- В первой главе автор определяет относительно гомологически тривиальные, в смысле его терминологии, модули, в начале же второй главы читатель с удивлением обнаруживает другое определение, которое и используется в дальнейшем, что сбивает с толку неподготовленного читателя.

- Третья глава вполне могла бы быть разбита на три независимых главы. При такой организации текста третья глава не была бы столь перегружена разнородными результатами.

Приведённые недостатки, конечно, не сказываются на высокой оценке работы.

Все утверждения, содержащиеся в диссертационной работе, снабжены подробными доказательствами. Основные результаты своевременно опубликованы в трёх статьях из списка ВАК и апробированы в ходе докладов на научных семинарах. Таким образом, положения, выносимые на защиту, **обоснованы и достоверны**. Автореферат отвечает содержанию диссертации.

Диссертация представляет из себя научно-квалификационную работу, в которой содержится решение научной задачи, имеющей значение для развития гомологической теории банаховых модулей и соответствует критериям, предъявляемым Положением ВАК для кандидатских диссертаций. Диссертационная работа соответствует паспорту специальности 01.01.01 – действительный, комплексный и функциональный анализ, а её автор, Норберт Тиборович Немеш, заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по данной специальности.

Ведущий научный сотрудник
отдела теории вероятностей
и математической статистики
ФГБУН "Математическй институт
им. В.А. Стеклова РАН"
доктор физико-математических наук Г.Г. Амосов
(01.01.01, 01.04.02)

119991 Москва, ул. Губкина, 8
тел. +7 919 721 64 83
E-mail: gramos@mi.ras.ru

Подпись Г.Г. Амосова заверяю
Ученый секретарь
ФГБУН "Математическй институт
им. В.А. Стеклова РАН"
кандидат физико-математических наук П.А. Яськов