Отзыв официального оппонента
на диссертацию Немеша Норберта Тиборовича
«Метрическая и топологическая проективность,
инъективность и плоскость банаховых модулей»
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертационная работа Немеша Н.Т. посвящена проблемам функционального анализа, которые связаны с гомологическими аспектами модулей над банаховыми алгебрами. Исследуются понятия проективности, инъективности и плоскости банаховых модулей, причем производится переход от абстракно алгебраических понятий к их метрическим и топологическим аналогам. Такого типа подход восходит к классической теореме Хана-Банаха. В 50-е годы для банаховых пространств подобные вопросы изучались Нахбиным, Гуднером, Кэлли, Хасуми, Гротендиком Позднее развивались Хелемским, Шейнбергом, Уайтом.

В диссертации Немеша, с одной стороны, систематизированы уже известные результаты, с другой, – получены оригинальные результаты для классических модулей функционального анализа над такими известными банаховыми алгебрами, как алгебра ограниченных и компактных операторов в гильбертовом пространстве, ограниченных и исчезающих на бесконечности функций, сверточной алгеброй, алгеброй мер локально компактной группы.

Диссертация состоит из трех глав. В первой главе приводятся необходимые сведения из гомологической алгебры, теории банаховых пространств, банаховых алгебр.

Во второй главе устанавливается ряд вспомогательных свойств банаховых алгебр и модулей, используемых затем в главе 3. Определяются понятия топологической и метрической проективности, инъективности и плоскости банаховых модулей.

Доказано, в частности, что замкнутый идеал коммутативной банаховой алгебры обладающий ограниченной аппроксимативной единицей, топологически проективен тогда и только тогда, когда он обладает единицей (теорема 2.1.16).

В утверждениях работы часто фигурируют $\mathscr{L}_p$-gпространства, локально устроенные как ℓ_p-пространства. Для вывода основных результатов важное значение имеют:

Предложение 2.2.8, в котором доказано, что для банахова модуля P над банаховой алгеброй A – (метрически / топологически) изоморфной, как банахово пространство, пространству $L_1(\Theta, \nu)$ для некоторого пространства с мерой (Θ, σ, ν) имеют место свойства:

i) если P – (метрически / топологически) проективный A-модуль, то P – (L_1 - пространство / ретракт L_1-пространства);

ii) если J– (метрически / топологически) инъективный A -модуль), то J – ($C(K)$-пространство для некоторого стоунова пространства K / топологически инъективное банахово пространство);

iii) если F – (метрически / топологически) плоский A -модуль, то F – (L_1-пространство / $\mathfrak{L}_1$-пространство);

Предложение 2.2.9, в котором доказано, что для банахова модуля P над банаховой алгеброй A, являющейся $\mathfrak{L}_1$–пространством,

из топологической проективности P следует, что пространство модуля P имеет тип $\mathfrak{L}_1$;

из инъективности P – тип $\mathfrak{L}_\infty$;

из плоскости P – тип $\mathfrak{L}_1$.

Доказательства Предложений 2.2.8 и 2.2.9 используют результаты, Гротендика, Стигала и Резерфорда, а также Хелемского по гомологиям банаховых алгебр.

Выделен класс банаховых модулей, для которых из свойств топологической проективности, инъективности и плоскости выводится свойство Данфорда-Петиса. (Теорема (2.2.13). Установлено, что это свойство связано со структурой пространства ($\mathfrak{L}_1$ или $\mathfrak{L}_\infty$-пространство) банаховой алгебры, над которой рассматривается модуль.

Для относительно аменабельной банаховой алгебры доказано, что левый банахов модуль, являющийся как банахово пространство

$\mathfrak{L}_1$ -пространством, – топологически плоский (теорема 2.3.9).

В третьей главе рассматриваются C^* алгебры A. Исследуются идеалы I алгебр A как банаховые модули над A. Для левых идеалов доказана эквивалентность:

метрической проективности I ;

топологической проективности I ;

условия $I = Ap$, где p самосопряженный идемпотент из I (теорема 3.1.4).

Доказано также, что I – метрически и топологически плоский A-модуль (Предложение 3.1.12).

Изучаются гомологические свойства классических модулей анализа над банаховыми алгебрами.

Доказана структурная теорема (3.1.11) для класса топологически инъективных банаховых алгебр (AW^*) об их разложении в произведение конечного числа матричных алгебр с коэффициентами в алгебрах непрерывных функций на стоуновых пространствах. Для доказательства автор модифирует результаты Хаманы, Такесаки и получает, что C^*-алгебра метрически инъективна, как правый модуль над собой, если она является коммутативной C^*-алгеброй (Предложение 3.1.7).

В диссертации также имеются результаты, устанавливающие ситуации, когда свойства топологической и(или) метрической проективности, инъективности, плоскости для определенных классов банаховых модулей не имеют место. Перечислм основные из них.

В случае бесконечной локально компактной группы G (Предложение 3.2.11) :

пространство $C_0(G)$ не является ни метрически, ни топологически проективным, инъективным и плоским модулем над банаховой алгеброй функций (мер) с операцией свертки;

пространство $L_1(G)$ не является ни метрически, ни топологически инъективным;

пространство $L_\infty(G)$ не является ни метрически, ни топологически проективным и плоским.

В случае конечной группы G (Предложение 3.2.13):

метрическая инъективность $C_0(G), L_\infty(G)$ имеет место;

метрическая проективность $L_1(G)$ имеет место;

для нетривиальной группы G пространства $C_0(G), L_p(G), 1 < p \leq \infty$ – не являются метрически проективными или плоскими.

Установлено, что пространство L_1-функций на локально компактной группе G как модуль над банаховой алгеброй с тем же пространством с операцией свертки, метрически или топологически проективно тогда и только тогда, когда группа G – дискретна (теорема 3.2.5).

В конце главы 3 приводится пример так называемой «малой» категории, у которой все модули метрически и топологически инъективные, проективные и плоские (Предложение 3.3.25). Это категория модулей вида $L_p(\Omega, \mu)$ на некотором измеримом пространстве (Ω, Σ) над алгеброй измеримых ограниченных функций $B(\Omega, \Sigma)$, для различных σ-конечных положительных мер μ и различных $1 \leq p \leq \infty$.

К диссертации имеются редакционные замечания:

1. Предварительные сведения разнесены по различным главам работы (большая их часть дается в главе 1, другая, – в п.п. 2.2, 3.3).

2. Одна часть основных результатов работы оформлена в виде теорем, другая, не менее важная, – в виде предложений. Например, Предложение 3.3.25 было бы естественнее назвать теоремой.

В диссертации имеются опечатки: 1. В Предложении 3.2.11, пункте ii) термин «проективный» надо заменить на «инъективный».

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут быть полезны в бесконечномерном анализе, теории представлений, теории групп и других областях современной математики.

В целом, несмотря на приведенные замечания, оценка диссертации остается положительной. Результаты диссертации являются новыми и полностью обоснованными. Они относятся к актуальной области исследований, – теории модулей над банаховыми алгебрами. Основные результаты диссертации опубликованы в 3-х статьях в математических журналах, рекомендованных ВАК РФ, и доложены на профильных семинарах. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Полученные результаты могут быть использованы специалистами в Московском, Санкт-Петербургском, новосибирском университетах, Высшей школе экономики, Математическом институте им. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института РАН, Институте математики СО РАН и других учреждениях.

Диссертация удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации, а ее автор, Немеш Норберт Тиборович, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук 01.01.06
ведущий научный сотрудник
отдела теории исследования взаимосвязей
энергетики с экономикой
ФГБУН "Институт энергетических исследований
Российской академии наук"

/Лукацкий Александр Михайлович/

Почтовый адрес: 117186, Москва, ул. Нагорная, д.31, кор. 2.
Телефон: 8(963)660-08-17.
Адрес электронной почты: lukatskii.a.m.math@mail.ru

Подпись Лукацкого А.М. заверяю
Ученый секретарь ИНЭИ РАН
канд. экон. наук Т. В. Новикова
«28» ноября 2016 г.