МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

БУРЛАКОВ Даниил Сергеевич

ОЦЕНКИ КОЛЕБЛЕМОСТИ И БЛУЖДАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Сергеев Игорь Николаевич
Официальные оппоненты:	Глызин Сергей Дмитриевич доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерных сетей ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»;
	Ширяев Кирилл Евгеньевич кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики ФГБОУ ВПО «Костромской государственный технологический университет».
Ведущая организация:	Институт математики НАН Беларуси

Защита диссертации состоится 2 декабря 2016 г. в 16 ч 45 мин на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su/.

Автореферат разослан «__» октября 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 на базе МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В.В. Власов

Актуальность темы исследования

Представленная диссертация является исследовательской работой в области качественной теории дифференциальный уравнений.

Основополагающую роль в качественной теории дифференциальных уравнений играют линейные системы, которые служат основой для изучения нелинейных систем по их линейному приближению. Изучение качественных и асимптотических свойств решений линейных систем, в свою очередь, порождает множество задач теоретического характера.

Теория устойчивости и теория колебаний являются одними из основных направлений в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

За более чем вековую историю в теории устойчивости, созданной А.М. Ляпуновым (1892 г.), были предложены и успешно использованы множество показателей, отвечающих за разнообразные асимптотические свойства решений уравнений или систем. Их изучением занимались многие математики. Приведем далеко не полный список тех из них, кто внес значительный вклад в эту теорию: Р.Э. Виноград, Б.Ф. Былов, В.М. Миллионщиков, Н.А. Изобов, М.И. Рахимбердиев, И.Н. Сергеев, Е.К. Макаров, С.Н. Попова, Е.А. Барабанов, О.И. Морозов, А.С. Фурсов, А.Н. Ветохин, К.Е. Ширяев, В.В. Быков, Ю.И. Дементьев и другие. Приведенный перечень работ авторов не является полным. Подробную библиографию по этим вопросам можно найти в обзорах[1,2] и монографиях[3,4].

В теории колебаний важное место занимают вопросы связанные с колеблемостью решений, восходящие к фундаментальным исследованиям Ж. Штурма и А. Кнезера. Исследования по тематике колеблемости велись многими математиками, среди которых необходимо особо отметить В.А. Кондратьева, И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия, А.Н. Левина, Н.А. Изобова, И.В. Асташову, С.Д. Глызина, А.Ю. Колесова, Н.Х. Розова и других. Более полную библиографию по этим вопросам можно найти в обзоре[5] и монографиях[6,7]. Заметим, что в данных работах, главным образом, исследуются вопросы существования и свойства колеблющихся решений дифференциальных уравнений или, наоборот, изучаются методы поиска и свойства промежутков неосцилляции (отрезков, на которых у любого решения дифференциального уравнения количество нулей меньше порядка уравнения) и практически не обсуждаются характеристики, позволяющие сравнивать колеблющиеся решения между со-

[1] Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. Т.12. С. 71–146.

[2] Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. 1993. 29. №12. С. 2034–2055.

[3] Былов Б.Ф. Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. // М.: Наука, 1966.

[4] Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.

[5] Левин А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$ // Успехи матем. наук. 1969. Т. 24 № 2. С. 43–96.

[6] Асташова И.В. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа // И.В. Асташова и др.; под ред. И.В. Асташовой — М.: ЮНИТИ-ДАНА. 2012.

[7] Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Наука. 1990.

бой.

В связи с этим особенно интересной представляется задача о поиске аналогов показателей Ляпунова, которые позволили бы судить о колеблемости решений дифференциальных уравнений и систем. Первая попытка определить такой показатель была предпринята в 2004 г. И.Н. Сергеевым. В его докладе[8] было определено понятие характеристической частоты скалярной функции, геометрический смысл которой — среднее (по всей полупрямой) количество нулей этой функции на отрезках длины π (это можно наглядно продемонстрировать на функции $\sin \omega t$, чья характеристическая частота равна как раз ω). Позже в докладе[9] были введены показатели полной и векторной частоты вектор-функции, являющиеся естественным обобщением понятия характеристической частоты на случай решений систем дифференциальных уравнений.

Особое место в исследовании каждого из показателей ляпуновского типа занимает изучение ее спектра — множества значений показателя на решениях заданной системы. В статье[10] было показано, что спектр полной частоты для систем с постоянными коэффициентами совпадает с множеством модулей мнимых частей собственных значений матрицы, задающей данную систему. Однако оставался открытым аналогичный вопрос о спектре векторной частоты. В данной диссертации показано, что на решениях систем с постоянными коэффициентами векторная частота совпадает с полной частотой, откуда следует, что для таких систем они имеют одинаковые спектры.

Далее, в 2010 г. в докладе[11] были введены понятия скорости блуждания и показатели блуждания и блуждаемости. Скорость блуждания вектор-функции x имеет простой геометрический смысл — это средняя (по времени t) скорость, с которой движется центральная проекция вектора $x(t)$ на единичную сферу. В свою очередь, показатели блуждания и блуждаемости представляют минимизацию (зависящую или соответственно независящую от времени) скорости блуждания функции x по всем системам координат. На докладе[12] была высказана гипотеза о том, что спектр скорости блуждания автономной системы дифференциальных уравнений инвариантен относительно линейных замен координат. В данной диссертации удалось выразить этот спектр через собственные значения матрицы, задающей данную систему, и следовательно подтвердить озвученную на докладе[12] гипотезу.

В 2012 г. И.Н. Сергеевым и автором настоящей работы, независимо друг от друга, была обнаружена, а затем опубликована в совместном докладе[13] тесная связь между некоторы-

[8] Сергеев И.Н. Определение характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2004. 40. №11. С. 1573.

[9] Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2009. 45. №6. С. 908.

[10] Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Известия РАН. Серия математическая. 2012, **76**:1, 149–172.

[11] Сергеев И.Н. Определение характеристик блуждаемости решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2010. 46. №6. С. 902.

[12] Сергеев И.Н. Сравнение полных частот и показателей блуждаемости решений линейной системы // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 11. С. 1667–1668.

[13] Бурлаков Д.С., Сергеев И.Н. Замечательные равенства, связывающие колеблемость и блуждаемость решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2012, 48, № 6 С. 899.

ми характеристиками колеблемости и блуждаемости. Как выяснилось, при незначительном изменении определения векторной частоты, она начинает совпадать с показателем блуждаемости. Причем докладчиками были применены разные подходы к анализу данной связи и потому внесены несколько различающиеся изменения в определение векторной частоты: так, И.Н. Сергеев дополнительно ввел понятие гиперчастоты, а автор настоящей диссертации заменил в прежнем определении точную нижнюю грань на существенную.

Кроме того, известно[10], что скорость блуждания решений линейной системы ограничена сверху равномерной (на полупрямой) нормой задающей ее оператор-функции (в фазовом пространстве фиксирована евклидова структура). Однако данный факт не позволяет для систем, отвечающих линейным однородным уравнениям произвольного порядка с малыми коэффициентами, установить близость к нулю скорости блуждания ее решений. В докладе[14] было показано, что такая близость имеет место для уравнений второго и третьего порядка, а в настоящей работе этот результат распространен уже на уравнения произвольного порядка. Причем в докладе[14] рассматривались уравнения с равномерно малыми коэффициентами, тогда как результат, полученный автором, справедлив также и для малых в среднем (на полупрямой) коэффициентов линейного уравнения.

В 2013 г. в докладе[15] И.Н. Сергеевым были определены и несколько более сложные показатели ориентированной вращаемости. Затем в докладе[16] была указана система с постоянными коэффициентами, для которой спектр этого показателя не совпадает с множеством модулей мнимых частей ее собственных значений. Там же был поставлен вопрос о типичных значениях показателя ориентированной вращаемости и о структуре его возможного спектра. В представленной работе удалось показать, что для большинства (в некотором смысле) систем с постоянными коэффициентами ноль является типичным значением данного показателя, а в случае систем с простыми чисто мнимыми собственными значениями удалось полностью определить его спектр.

В 2016 г. в статье[17] были систематизированы все введенные И.Н. Сергеевым к настоящему моменту показатели ляпуновского типа, что привело к изменению названий некоторых из них. В частности, показатели полной и векторной частоты переименованы в слабый и сильный показатели колеблемости, а показатели блуждания и блуждаемости — в слабый и сильный показатель блуждаемости соответственно.

Цель работы

Целью настоящей диссертационной работы является: изучение взаимосвязи между показателями колеблемости и блуждаемости решений линейных систем, уточнение верхних

[14]Лысак М.Д. Оценки скорости блуждания для уравнений второго и третьего порядка // Дифференц. уравнения. 2015. 51. № 6. С. 821.

[15]Сергеев И.Н. Определение характеристик вращаемости решений дифференциальных систем и уравнений // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1501–1503.

[16]Сергеев И.Н. Вопросы о спектрах показателей вращаемости и блуждаемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 6. С. 844–845.

[17]Сергеев И.Н. Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 732–751.

оценок скорости блуждания для решений линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка, проверка гипотезы о совпадении сильных и слабых показателей колеблемости на решениях линейных автономных систем, а также нахождение спектров скорости блуждания и показателя ориентированной вращаемости линейных автономных систем.

Научная новизна

В диссертации получены следующие основные результаты:

- продемонстрирована тесная взаимосвязь между показателями колеблемости и блуждаемости, а также получена явная формула, связывающая показатели блуждаемости и колеблемости решений линейных систем;
- получены верхние оценки границ спектра скорости блуждаемости линейных неавтономных уравнений произвольного порядка в терминах средней на полупрямой нормы вектора, составленного из коэффициентов уравнения;
- доказано совпадение всех показателей колеблемости для любого решения любой линейной автономной системы;
- определен спектр показателей ориентированной вращаемости для линейных автономных систем с простыми мнимыми собственными значениями;
- для решений широкого класса систем показано, что ноль является типичным значением показателя ориентированной вращаемости;
- получено точное описание спектра скорости блуждания произвольной линейной автономной системы в терминах ее собственных значений.

Методы исследования

В работе применяются аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем и математического анализа.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами по качественной теории дифференциальных уравнений.

Апробация работы

Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- Семинар по Качественной теории дифференциальных уравнений на Механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством проф. И.В. Асташовой, проф. А.В. Боровских, члена-корреспондента РАО проф. Н.Х. Розова, проф. И.Н. Сергеева (неоднократно: 2011–2013);

- Семинар «Избранные задачи динамики» под руководством члена-корреспондента РАН проф. Д.В. Трещева (2014 г.).
- Семинар «Математическое моделирование управляемых систем» под руководством члена-корреспондента РАЕН проф. В.В. Александрова (2016 г.).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- Конференция Кафедры дифференциальных уравнений Механико-математического факультета МГУ по итогам года (г. Москва, декабрь 2015 г.).
- Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова (г. Ижевск, июнь 2015 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 8 работах автора, в том числе в 3 работах — в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 72 страницы. Библиография включает 77 наименований.

Краткое содержание диссертации

В кратком введении описывается история вопроса, обосновывается актуальность работы и формулируются цели исследования. Даются основные определения и излагаются основные результаты диссертации.

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \stackrel{\mathrm{def}}{=} [0, +\infty), \tag{1}$$

отождествляемых каждое со своей непрерывной функцией $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$.

В множестве $\mathcal{M}^n$ выделим подмножество $\mathcal{C}^n$ систем с постоянными коэффициентами. Обозначим через $\mathcal{E}^n$ множество линейных дифференциальных уравнений

$$y^{(n)} = a_1(t)y + \ldots + a_n(t)y^{(n-1)}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{2}$$

отождествляемых с непрерывными вектор-функциями своих коэффициентов

$$a \equiv \big(a_1, \ldots, a_n\big) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n.$$

Множество всех ненулевых решений системы (1) или уравнения (2) будем обозначать через $\mathcal{S}_*(A)$ или $\mathcal{S}_*(a)$ соответственно.

В линейном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ фиксируем базис и связанную с ним стандартную евклидову структуру. Через S^{n-1} обозначим единичную сферу в пространстве $\mathbb{R}^n$ и положим $\mathbb{R}^n_* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Определение 1. Назовем *нижней* (*верхней*) *скоростью блуждания*, *нижним* (*верхним*) *сильным показателем блуждаемости* и *нижним* (*верхним*) *слабым показателем блуждаемости* непрерывно дифференцируемой функции $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n_*$ величины

$$\check{\mu}(x) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\gamma(x,t) \qquad \left(\hat{\mu} = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\gamma(x,t)\right),$$

$$\check{\rho}^\bullet(x) = \inf_{L\in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \check{\mu}(Lx) \qquad \left(\hat{\rho}^\bullet(x) = \inf_{L\in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \hat{\mu}(Lx)\right),$$

$$\check{\rho}^\circ(x) = \varliminf_{t\to\infty} \inf_{L\in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\gamma(Lx,t) \qquad \left(\hat{\rho}^\circ(x) = \varlimsup_{t\to\infty} \inf_{L\in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\gamma(Lx,t)\right),$$

где

$$\gamma(x,t) = \int\limits_0^t \left|\frac{d}{d\tau}\left(\frac{x(\tau)}{|x(\tau)|}\right)\right| d\tau.$$

Определение 2. Для произвольной вектор-функции $x \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$, момента времени $t > 0$ и вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ обозначим через $\nu(x,m,t)$ *количество нулей* функции $\big(x(\cdot), m\big)$ (скалярного произведения) на промежутке $[0,t)$ и назовем *нижним* (*верхним*) *сильным показателем колеблемости* и *нижним* (*верхним*) *слабым показателем колеблемости* непрерывно дифференцируемой вектор-функции $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n_*$ величины

$$\check{\nu}^\bullet(x) = \inf_{m\in S^{n-1}} \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t) \qquad \left(\hat{\nu}^\bullet(x) = \inf_{m\in S^{n-1}} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t)\right),$$

$$\check{\nu}^\circ(x) = \varliminf_{t\to\infty} \inf_{m\in S^{n-1}} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t) \qquad \left(\hat{\nu}^\circ(x) = \varlimsup_{t\to\infty} \inf_{m\in S^{n-1}} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t)\right).$$

Определение 3. Для функции $x \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2\right)$ и момента времени $t > 0$ определим функционал $\Theta(x,t)$, как такую непрерывную (по t) ветвь *ориентированного угла* между векторами $x(t)$ и $x(0)$, что $\Theta(x,0) = 0$. Если существует момент времени $\tau \in [0,t]$, для которого $x(\tau) = 0$, то по определению кладем $\Theta(x,t)$ равным бесконечности.

Определение 4. Назовем *нижним* (*верхним*) *сильным показателем ориентированной вращаемости* и *нижним* (*верхним*) *слабым показателем ориентированной вращаемости* непрерывно дифференцируемой вектор-функции $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n_*$ величины

$$\check{\theta}^\bullet(x) = \inf_{L\in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^2)} \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left|\Theta(Lx,t)\right| \qquad \left(\hat{\theta}^\bullet(x) = \inf_{L\in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^2)} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left|\Theta(Lx,t)\right|\right),$$

$$\check{\theta}^\circ(x) = \varliminf_{t\to\infty} \inf_{L\in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^2)} \frac{1}{t}\left|\Theta(Lx,t)\right| \qquad \left(\hat{\theta}^\circ(x) = \varlimsup_{t\to\infty} \inf_{L\in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^2)} \frac{1}{t}\left|\Theta(Lx,t)\right|\right).$$

Определение 5. Назовем *спектром* показателя $\varkappa$ для системы $A \in \mathcal{M}^n$ множество его значений на нетривиальных решениях этой системы

$$\operatorname{Sp}_{\varkappa}(A) = \varkappa(\mathcal{S}_*(A)) = \{\varkappa(x) \mid x \in \mathcal{S}_*(A)\}.$$

В случае совпадения верхнего и нижнего значений какого-либо из перечисленных показателей $\check{\varkappa}(x) = \hat{\varkappa}(x)$ будем говорить, что показатель $\varkappa(x)$ является *точным*, а в случае совпадения значений слабого и сильного показателей $\varkappa^\circ(x) = \varkappa^\bullet(x)$ будем говорить, что показатель $\varkappa(x)$ является *абсолютным*.

Связь между показателями колеблемости и блуждаемости

Глава 1 посвящена изучению связи между показателями колеблемости и блуждаемости. В параграфе 1.1 дается краткое изложение предшествующих результатов, среди которых можно особо отметить

Следствие 1. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{M}^n$, ее решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и момента времени $T > 0$ верно тождество*

$$\frac{\operatorname{mes} S^{n-1}}{\pi}\gamma(x,T) = \int\limits_{S^{n-1}} \nu(x,m,T)\,dm. \tag{3}$$

Данное соотношение очень близко к понятию вариации отображения, введенной Банахом в работе[18], а функция $\nu(x,m,t)$ является прямым аналогом индикатрисы Банаха.

Затем в параграфе 1.2 рассматриваются свойства отображения F_L, которое представляет собой комбинацию линейного отображения L и проекции на единичную сферу. Из этих свойств вытекает

Лемма 1. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{M}^n$, отображения $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$, ее решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и момента времени $T > 0$ верно тождество*

$$\gamma(Lx,T) = \frac{\pi}{\operatorname{mes} S^{n-1}} \int\limits_{S^{n-1}} \nu(x,m,T) \frac{\left|\det\left(L^T\right)^{-1}\right|}{\left|\left(L^T\right)^{-1} m\right|^n}\,dm.$$

В заключительном параграфе 1.3, на основе выведенных свойств, доказывается

Теорема I. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{M}^n$ и ее решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ выполнены равенства*

$$\check{\rho}^\circ(x) = \varliminf_{t\to\infty} \operatorname*{ess\,inf}_{m\in S^{n-1}} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t), \qquad \hat{\rho}^\circ(x) = \varlimsup_{t\to\infty} \operatorname*{ess\,inf}_{m\in S^{n-1}} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t).$$

Непрерывность скорости блуждания в нуле

В функциональном пространстве $\mathcal{E}^n$ зададим полунорму

$$\|a\|_I \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |a(\tau)|\,d\tau, \quad a \in \mathcal{E}^n.$$

[18]Banach S. Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie // Fundamenta Mathematicae. 1925. Т. 7. С. 225—236.

Определение 6. Для каждой функции $y \in C^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ обозначим

$$\psi y \equiv \left(y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}\right)^{\mathtt{T}} \in C^1\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n\right),$$

а если $|\psi y(t)| \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$, то назовем *нижней* $\check{\mu}(y)$ и *верхней* $\hat{\mu}(y)$ *скоростью блуждания* функции y величины $\check{\mu}(\psi y)$ и соответственно $\hat{\mu}(\psi y)$ (см. определение 1).

Основным результатом главы 2 является получение оценок, которые утверждает

Теорема II. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, удовлетворяющего неравенству $\|a\|_I \leqslant 1$, верны оценки*

$$0 \leqslant \check{\mu}(y) \leqslant \hat{\mu}(y) \leqslant \sqrt[2n]{\|a\|_I}\left(2\pi n + e^5\right), \quad y \in \mathcal{S}_*(a).$$

Общая идея получения данных оценок состоит в том, чтобы разбить полупрямую на набор промежутков, на каждом из которых приблизить решение рассматриваемого уравнения его рядом Тейлора p. Для произвольного многочлена p можно показать, что путь, который проходит проекция на единичную сферу вектор функции ψp, конечен даже на бесконечных интервалах времени.

В завершении главы 2 доказывается

Теорема III. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство*

$$\sup_{\substack{a \in \mathcal{E}^n \\ \|a\|_I \leqslant c}} \sup_{y \in \mathcal{S}_\star(a)} \check{\mu}(y) \geqslant \frac{1}{2}\sqrt[n]{c}.$$

Из этой теоремы вытекает, что данную в теореме II оценку нельзя кардинально улучшить.

Совпадение показателей колеблемости

Основным результатом главы 3 является доказательство того, что все показатели колеблемости совпадают между собой на решениях систем с постоянными коэффициентами. Важным промежуточным результатом является вывод следующих двусторонних оценок на количество нулей тригонометрических сумм.

Лемма 2. *Для произвольного $k \in \mathbb{N}$, набора чисел $0 < \omega_1 < \ldots < \omega_k$, векторов $m \in \mathbb{R}^k_*$, $\alpha \in \mathbb{R}^k$ и момента времени $t \in \mathbb{R}^+$ имеет место неравенство*

$$\left\lfloor \frac{t\omega_1}{\pi} \right\rfloor - N \leqslant \nu\big(F, [0, t)\big) \leqslant \left\lceil \frac{t\omega_k}{\pi} \right\rceil + N,$$

где функция F задается равенством

$$F(\tau) = m_1 \cos(\omega_1 \tau + \alpha_1) + \ldots + m_k \cos(\omega_k \tau + \alpha_k), \quad \alpha, m \in \mathbb{R}^k,$$

и

$$N \stackrel{\text{def}}{=} 2k \left\lceil \frac{\ln 2k}{\ln \min\limits_{i>j} \frac{\omega_i}{\omega_j}} \right\rceil + 1.$$

Данные оценки используются в третьей, четвертой и пятой главах.

В параграфе 3.2 оценка снизу из леммы 2 обобщается на произвольные суммы квазимногочленов.

Определение 7. Будем называть $\lambda \in \mathbb{C}$ *собственным значением* функции

$$x(t) = \sum_{s=1}^{K} e^{\mathrm{Re}\,\lambda_s t}\left(P_s(t)\cos|\mathrm{Im}\,\lambda_s|\,t + Q_s(t)\sin|\mathrm{Im}\,\lambda_s|\,t\right), \qquad t \in \mathbb{R},$$

где P_i, Q_i — некоторые вектор-многочлены, если существует такое s, что $\lambda = \lambda_s$ и многочлен P_s не равен тождественно нулю. Множество всех собственных значений функции x, будем обозначать через $\mathrm{Sp}_\lambda(x)$. Набор собственных значений матрицы $A \in \mathcal{C}^n$ будем обозначать через $\mathrm{Sp}_\lambda(A)$.

Главу 3 завершает

Теорема IV. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$ и любого ее решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ показатель колеблемости точен и абсолютен, причем имеет место равенство*

$$\nu(x) = \min|\mathrm{Im}\,\mathrm{Sp}_\lambda(x)|\,.$$

Спектр показателя ориентированной вращаемости

Глава 4 посвящена изучению свойств показателя ориентированной вращаемости. В начале главы приводится техника вычисления значений данного показателя. Откуда, с помощью базовых утверждений эргодической теории (теорема Вейля[19]), выводится

Теорема V. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$, у которой есть хотя бы одно действительное собственное значение или два собственных значения, мнимые части которых рационально несоизмеримы, ноль служит типичным значением показателя θ.*

Определение 8. Опишем функцию $\gcd^*$ от множества неотрицательных чисел $\{a_i\}$. Если числа a_i рационально несоизмеримы, то $\gcd^*\big(\{a_i\}\big) \overset{\mathrm{def}}{=} 0$. Иначе рассмотрим такое наибольшее число α, что множество $S = \left\{\frac{a_i}{\alpha}\right\}$ состоит из целых чисел. Если в множестве S есть хотя бы одно четное число, то $\gcd^*\big(\{a_i\}\big) \overset{\mathrm{def}}{=} 0$, иначе $\gcd^*\big(\{a_i\}\big) \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha$.

Завершается глава 4 доказательством точности и абсолютности показателя ориентированной вращаемости, а также выводом его спектра для автономных систем дифференциальных уравнений с простыми чисто мнимыми собственными значениями.

Теорема VI. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^{2n}$ с простыми чисто мнимыми собственными значениями $\pm i\omega_1, \ldots, \pm i\omega_n$ показатель θ является точным, абсолютным, а его спектр имеет вид*

$$\mathrm{Sp}_\theta(A) = \{\gcd^*(S)\colon S \neq \varnothing,\ S \subset \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}\}\,.$$

Спектр показателя скорости блуждания

В главе 5 определяется спектр скорости блуждания для систем с постоянными коэффициентами. В параграфе 5.1 доказывается, что спектр скорости блуждания для систем

[19] Козлов В.В. Весовые средние, строгая эргодичность и равномерное распределение // Матем. заметки 2005. Т. 78. № 3. С. 358–367.

с простыми и чисто мнимыми собственными значениями представляет собой отрезок от минимальной до максимальной по модулю мнимой части собственных значений.

В последнем параграфе главы 5 выводится

Теорема VII. *Для произвольной системы* $A \in \mathcal{C}^n$ *верны равенства*

$$\mathrm{Sp}_{\check{\mu}}(A) = \mathrm{Sp}_{\hat{\mu}}(A) = \bigcup_{\delta \in \mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}_\lambda(A)} \left[\min_{\lambda\in\Lambda_\delta} |\mathrm{Im}\,\lambda|\,, \max_{\lambda\in\Lambda_\delta} |\mathrm{Im}\,\lambda|\right],$$

$$\Lambda_\delta = \{\lambda \in \mathrm{Sp}_\lambda(A) : \mathrm{Re}\,\lambda = \delta\}\,.$$

Заключение

В работе проведено подробное исследование свойств спектров характеристик колеблемости, блуждаемости и ориентированной вращаемости для линейных систем дифференциальных уравнений (с ограниченными коэффициентами), а также изучена тесная связь между показателями колеблемости и блуждаемости.

В работе показано, что верхний (нижний) слабый показатель блуждаемости оценивает сверху верхний (нижний) слабый показатель колеблемости и совпадает с ним при незначительном изменении определения последнего (замене точной нижней грани на существенную). Для сильных показателей блуждаемости и колеблемости данное равенство, вообще говоря, не имеет места. Однако в статье[10] было показано, что нижний сильный показатель колеблемости меньше, чем нижний сильный показатель блуждаемости. Несколько позже, в докладе[20] была установлена неупорядоченность верхних сильных показателей блуждаемости и колеблемости. Дальнейшее развитие техники первой главы настоящей диссертации позволяет установить, что, тем не менее, для широкого класса систем (колеблемость решений которых ограничена) верхний слабый показатель блуждаемости меньше, чем упомянутый незначительно измененный верхний сильный показатель колеблемости.

Показано совпадение сильных и слабых показателей колеблемости на решениях линейных автономных систем. Интересным остается вопрос о точности и спектре частот нулей решений линейных автономных систем.

Определен спектр показателя скорости блуждания линейных автономных систем. В частности, был получен ответ на вопрос поставленный в докладе[12] о совпадении спектров скорости блуждания у подобных систем. Однако открытым остается вопрос точности скорости блуждания решений линейных систем с постоянными коэффициентами.

Уточнены оценки сверху для скорости блуждания решений линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка. Из них, в частности, вытекает близость показателей блуждаемости и скорости блуждания к нулю для решений уравнений с малыми коэффициентами. На данный результат можно посмотреть, как на изучение свойств спектра скорости блуждания уравнения, полученного возмущением уравнения $y^{(n)} = 0$. Его спектр скорости блуждания состоит только из нуля, а решениями являются многочлены,

[20]Сергеев И.Н. О неупорядоченности характеристик колеблемости вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2015. 51. № 11. С. 1550–1552.

для которых имеют место тривиальные равномерные оценки колеблемости (количество действительных корней многочлена не превосходит его степени). Тогда результаты третей, пятой глав, а также техника второй главы диссертации может послужить фундаментом для изучения свойств спектра скорости блуждания систем, полученных возмущением произвольной системы с постоянными коэффициентами.

Установлено, что для широкого класса систем с постоянными коэффициентами (у которых есть либо действительные собственные значения, либо два комплексных с несоизмеримыми мнимыми частями) ноль является типичным значением показателя ориентированной вращаемости. Также показано, что спектр этого показателя существенным образом определяется теоретико-числовыми свойствами набора мнимых частей собственных значений системы и может содержать (в отличие от показателей колеблемости и блуждаемости) значения, отличные и от нуля, и от мнимых частей собственных значений системы, причем мощность этого спектра может быть экспоненциально велика по сравнению с размерностью пространства. Из этого можно сделать вывод, что показатель ориентированной вращаемости, несмотря на его простое и естественное определение, не является в теории колебаний аналогом показателя Ляпунова.

Благодарность

Автор глубоко признателен профессору Игорю Николаевичу Сергееву за научное руководство, постоянное внимание и помощь в работе. Автор также благодарен доценту Быкову Владимиру Владиславовичу за организационную и моральную поддержку.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах из перечня ВАК

1. Бурлаков Д.С., Цой С.В. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Труды семинара им. И.Г.Петровского. 2014, Т. 30 С. 75–93.

Burlakov D.S., Tsoii S.V. Coincidence of Complete and Vector Frequencies of Solutions of a Linear Autonomous System // Journal of Mathematical Sciences, October 2015, Volume 210, № 2, С. 155–167

2. Бурлаков Д.С. Спектр скоростей блуждания неортогонального произведения двух поворотов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2015, № 2 С. 49–53.

3. Бурлаков Д.С. Оценки скорости блуждания решений линейного дифференциального уравнения через его коэффициенты // Дифференц. уравнения. 2016. 52. №8. С. 1003–1010.

D.S. Burlakov. Estimates for the Wandering Rate of Solution of a Linear Differential Equation via Its Coefficients // Дифференц. уравнения. 2016. 52. №8. С. 1003–1010.

Статьи в других научных журналах и тезисы докладов в материалах научных конференций

4. Бурлаков Д.С., Цой С.В. Равенство полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Дифференц. уравнения. 2011, 47, № 11. С. 1662—1663.

5. Бурлаков Д.С. К вопросу о спектре скоростей блуждания неортогонального произведения двух поворотов // Дифференц. уравнения. 2012, 48, № 6. С. 906—907.

6. Бурлаков Д.С., Сергеев И.Н. Замечательные равенства, связывающие колеблемость и блуждаемость решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2012, 48, № 6 С. 899.

7. Бурлаков Д.С. Спектры показателей вращения и вращаемости автономных систем с простыми чисто мнимыми собственными числами // Дифференц. уравнения. 2013, 49, № 6 С. 845.

8. Бурлаков Д.С. Верхняя оценка колеблемости решений некоторого класса линейных систем // Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием «теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова 2015 С. 37–38.

Теорема доказанная в статье 1 и изложенная на докладе 4 является результатом совместной научной работы и в равной степени принадлежит обоим авторам.

Результаты доклада 6 получены его авторами независимо друг от друга.