МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

БУРЛАКОВ Даниил Сергеевич

Оценки колеблемости и блуждаемости решений линейных систем

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор СЕРГЕЕВ Игорь Николаевич

Москва — 2016

Оглавление

Введение

Представленная диссертация является исследовательской работой в области качественной теории дифференциальный уравнений.

Основополагающую роль в качественной теории дифференциальных уравнений играют линейные системы, которые служат основой для изучения нелинейных систем по их линейному приближению. Изучение качественных и асимптотических свойств решений линейных систем, в свою очередь, порождает множество задач теоретического характера.

Актуальность темы исследования

Теория устойчивости и теория колебаний являются одними из основных направлений в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

За более чем вековую историю в теории устойчивости, созданной А.М. Ляпуновым (1892 г.), были предложены и успешно использованы множество показателей, отвечающих за разнообразные асимптотические свойства решений уравнений или систем. Их изучением занимались многие математики. Приведем далеко не полный список тех из них, кто внес значительный вклад в эту теорию: Р.Э. Виноград [23,24], Б.Ф. Былов [19,20], В.М. Миллионщиков [49–51], Н.А. Изобов [34–36], М.И. Рахимбердиев [56,57], И.Н. Сергеев [61,70], Е.К. Макаров [47,48], С.Н. Попова [54,55], Е.А. Барабанов [5,6], О.И. Морозов [52,53], А.С. Фурсов [71,72], А.Н. Ветохин [21,22], В.В. Быков [15,16], Ю.И. Дементьев [27,28] и другие. Приведенный перечень работ авторов не является полным. Подробную библиографию по этим вопросам можно найти в обзорах [30,33] и монографиях [17,29].

В теории колебаний важное место занимают вопросы связанные с колеблемостью решений, восходящие к фундаментальным исследованиям Ж. Штурма [77] и А. Кнезера [76]. Исследования по тематике колеблемости велись многими математиками, среди которых необходимо особо отметить В.А. Кондратьева [42,43], И.Т. Кигурадзе [37–39], Т.А. Чантурия [73,74], А.Н. Левина [44,45], Н.А. Изобова [31,32], И.В. Асташову [2–4], С.Д. Глызина, А.Ю. Колесова, Н.Х. Розова [25,26] и других. Здесь указаны далеко не все работы каждого автора, а более полную библиографию по этим вопросам можно найти в обзоре [45] и монографиях [1,40]. Заметим, что в данных работах, главным образом, исследуются вопросы существования и свойства колеблющихся решений дифференциальных уравнений или, наоборот, изучаются методы поиска и свойства промежутков неосциляции (отрезков, на которых у любого решения дифференциального уравнения количество нулей меньше порядка уравнения) и практически не обсуждаются характеристики, позволяющие сравнивать колеблющиеся решений между собой.

В связи с этим особенно интересной представляется задача о поиске аналогов показателей Ляпунова, которые позволили бы судить о колеблемости решений дифференциальных уравнений и систем. Первая попытка определить такой показатель была предпринята в 2004 г. И.Н. Сергеевым. В его докладе [66] было определено понятие характеристической частоты скалярной функции, геометрический смысл которой — среднее (по всей полупрямой) количество нулей этой функции на отрезках длины π (это можно наглядно продемонстрировать на функции $\sin \omega t$, чья характеристическая частота равна как раз ω). Позже в докладе [63] были введены показатели полной и векторной частоты вектор-функции, являющиеся естественным обобщением понятия характеристической частоты на случай решений систем дифференциальных уравнений.

Особое место в исследовании каждого из показателей ляпуновского типа занимает изучение ее спектра — множества значений показателя на решениях заданной системы. В статье [58] было показано, что спектр полной частоты для систем с постоянными коэффициентами совпадает с множеством модулей мнимых частей собственных значений матрицы, задающей данную систему. Однако оставался открытым аналогичный вопрос о спектре векторной частоты. В данной работе показано, что на решениях систем с постоянными коэффициентами векторная частота совпадает с полной частотой, откуда следует, что для таких систем они имеют одинаковые спектры.

Далее, в 2010 г. в докладе [64] были введены понятия скорости блуждания и показатели блуждания и блуждаемости. Скорость блуждания вектор-функции x имеет простой геометрический смысл — это средняя (по времени t) скорость, с которой движется центральная проекция вектора $x(t)$ на единичную сферу. В свою очередь, показатели блуждания и блуждаемости представляют минимизацию (зависящую или соответственно независящую от времени) скорости блуждания функции x по всем системам координат. Однако на докладе [68] была высказана гипотеза о том, что спектр скорости блуждания автономной системы дифференциальных уравнений инвариантен относительно линейных замен координат. В настоящей работе удалось выразить этот спектр через собственные значения матрицы, задающей данную систему, и следовательно подтвердить озвученную на докладе [68] гипотезу.

В 2012 г. И.Н. Сергеевым и автором настоящей работы, независимо друг от друга, была обнаружена, а затем опубликована в совместном докладе [12] тесная связь между некоторыми характеристиками колеблемости и блуждаемости. Как выяснилось, при незначительном изменении определения векторной частоты, она начинает совпадать с показателем блуждаемости. Причем докладчиками были применены разные подходы к анализу данной связи и потому внесены несколько различающиеся изменения в определение векторной частоты: так, И.Н. Сергеев дополнительно ввел понятие гиперчастоты, а автор настоящей диссертации заменил в прежнем определении точную нижнюю грань на существенную.

Кроме того, известно [58], что скорость блуждания решений линейной системы ограничена сверху равномерной (на полупрямой) нормой задающей ее оператор-функции (в фазовом пространстве фиксирована евклидова структура). Однако данный факт не позволяет для систем, отвечающих линейным однородным уравнениям произвольного порядка с малыми коэффициентами, установить близость к нулю скорости блуждания ее решений. В докладе [46] было показано, что такая близость имеет место для уравнений второго и третьего порядка, а в настоящей работе этот результат распространен уже на уравнения произвольного порядка. Причем в [46] рассматривались уравнения с равномерно малыми коэффициентами, тогда как результат, полученный автором, справедлив также и для малых в среднем (на полупрямой) коэффициентов линейного уравнения.

В 2013 г. в докладе [65] И.Н. Сергеевым были определены и несколько более сложные показатели ориентированной вращаемости. Затем в докладе [59] была указана система с постоянными коэффициентами, для которой спектр этого показателя не совпадает с множеством модулей мнимых частей ее собственных значений. Там же был поставлен вопрос о типичных значениях показателя ориентированной вращаемости и о структуре его возможного спектра. В представленной работе удалось показать, что для большинства (в некотором смысле) систем с постоянными коэффициентами ноль является типичным значением данного показателя, а в случае систем с простыми чисто мнимыми собственными значениями удалось полностью определить его спектр.

В 2016 г. в статье [67] были систематизированы все введенные И.Н. Сергеевым к настоящему моменту показатели ляпуновского типа, что привело к изменению названий некоторых из них. В частности, показатели полной и векторной частоты переименованы в слабый и сильный показатели колеблемости, а показатели блуждания и блуждаемости — в слабый и сильный показатель блуждаемости соответственно.

Цель работы

Целью настоящей диссертационной работы является: изучение взаимосвязи между показателями колеблемости и блуждаемости решений линейных систем, уточнение верхних оценок скорости блуждания для решений линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка, проверка гипотезы о совпадении сильных и слабых показателей колеблемости на решениях линейных автономных систем, а также нахождение спектров скорости блуждания и показателя ориентированной вращаемости линейных автономных систем.

Научная новизна

В диссертации получены следующие основные результаты:

- продемонстрирована тесная взаимосвязь между показателями колеблемости и блуждаемости, а также получена явная формула, связывающая показатели блуждаемости и колеблемости решений линейных систем;
- получены верхние оценки границ спектра скорости блуждаемости линейных неавтономных уравнений произвольного порядка в терминах средней на полупрямой нормы вектора, составленного из коэффициентов уравнения;
- доказано совпадение всех показателей колеблемости для любого решения любой линейной автономной системы;
- определен спектр показателей ориентированной вращаемости для линейных автономных систем с простыми мнимыми собственными значениями;
- для решений широкого класса систем показано, что ноль является типичным значением показателя ориентированной вращаемости;
- получено точное описание спектра скорости блуждания произвольной линейной автономной системы в терминах ее собственных значений.

Методы исследования

В работе применяются аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем и математического анализа.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами по качественной теории дифференциальных уравнений.

Апробация работы

Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- Семинар по Качественной теории дифференциальных уравнений на Механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством проф. И.В. Асташовой, проф. А.В. Боровских, члена-корреспондента РАО проф. Н.Х. Розова, проф. И.Н. Сергеева (неоднократно: 2011–2013);

- Семинар «Избранные задачи динамики» под руководством члена-корреспондента РАН проф. Д.В. Трещева (2014 г.).
- Семинар «Математическое моделирование управляемых систем» под руководством члена-корреспондента РАЕН проф. В.В. Александрова (2016 г.).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- Конференция Кафедры дифференциальных уравнений Механико-математического факультета МГУ по итогам года (г. Москва, декабрь 2015 г.).
- Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова (г. Ижевск, июнь 2015 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 8 работах автора [7–14], в том числе в 3 работах [9, 10, 14] — в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 72 страницы. Библиография включает 77 наименований.

Формулировка основных результатов

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \stackrel{\text{def}}{=} [0, +\infty), \tag{1}$$

отождествляемых каждое со своей непрерывной функцией $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$.

В множестве $\mathcal{M}^n$ выделим подмножество $\mathcal{C}^n$ систем с постоянными коэффициентами. Обозначим через $\mathcal{E}^n$ множество линейных дифференциальных уравнений

$$y^{(n)} = a_1(t)y + \ldots + a_n(t)y^{(n-1)}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{2}$$

отождествляемых с непрерывными вектор-функциями своих коэффициентов

$$a \equiv \big(a_1, \ldots, a_n\big)^T : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n.$$

Множество всех ненулевых решений системы (1) или уравнения (2) будем обозначать через $\mathcal{S}_*(A)$ или $\mathcal{S}_*(a)$ соответственно.

В линейном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ фиксируем базис и связанную с ним стандартную евклидову структуру. Через S^{n-1} обозначим единичную сферу в пространстве $\mathbb{R}^n$ и положим $\mathbb{R}^n_* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Определение 1. Назовем *нижней* (*верхней*) *скоростью блуждания*, *нижним* (*верхним*) *сильным показателем блуждаемости* и *нижним* (*верхним*) *слабым показателем блуждаемости* непрерывно дифференцируемой функции $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n_*$ величины

$$\check{\mu}(x) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\gamma(x,t) \qquad \left(\hat{\mu} = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\gamma(x,t)\right),$$

$$\check{\rho}^{\bullet}(x) = \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \check{\mu}(Lx) \qquad \left(\hat{\rho}^{\bullet}(x) = \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \hat{\mu}(Lx)\right),$$

$$\check{\rho}^{\circ}(x) = \varliminf_{t\to\infty} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\gamma(Lx,t) \qquad \left(\hat{\rho}^{\circ}(x) = \varlimsup_{t\to\infty} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\gamma(Lx,t)\right),$$

где

$$\gamma(x,t) = \int\limits_0^t \left|\frac{d}{d\tau}\left(\frac{x(\tau)}{|x(\tau)|}\right)\right| d\tau.$$

Замечание 1. Величина $\gamma(x,t)$ имеет геометрический смысл длины пути, пройденного концом вектора $x/|x|$ за промежуток времени $[0,t)$.

Определение 2. Для произвольной вектор-функции $x \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)$, момента времени $t>0$ и вектора $m\in\mathbb{R}^n_*$ обозначим через $\nu(x,m,t)$ *количество нулей* функции $\big(x(\cdot),m\big)$ (скалярного произведения) на промежутке $[0,t)$.

Замечание 2. Величина $\nu(x,m,t)$ имеет геометрический смысл количества раз, которое решение $x(\cdot)$ пересекло плоскость, ортогональную вектору m, за промежуток времени $[0,t)$.

Теорема I. *Для произвольной системы $A\in\mathcal{M}^n$ и ее решения $x\in\mathcal{S}_*(A)$ выполнены равенства*

$$\check{\rho}^{\circ}(x) = \varliminf_{t\to\infty} \operatorname*{ess\,inf}_{m\in S^{n-1}} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t), \qquad \hat{\rho}^{\circ}(x) = \varlimsup_{t\to\infty} \operatorname*{ess\,inf}_{m\in S^{n-1}} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t).$$

Определение 3. Для каждой функции $y\in C^n(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ обозначим

$$\psi y \equiv \left(y,\dot{y},\ldots,y^{(n-1)}\right)^T \in C^1\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n\right),$$

а если $|\psi y(t)|\neq 0$ при всех $t\in\mathbb{R}^+$, то назовем *нижней* $\check{\mu}(y)$ и *верхней* $\hat{\mu}(y)$ *скоростью блуждания* функции y величины $\check{\mu}(\psi y)$ и соответственно $\hat{\mu}(\psi y)$ (см. определение 1).

В функциональном пространстве $\mathcal{E}^n$ зададим полунорму

$$\|a\|_I \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |a(\tau)|\,d\tau, \quad a\in\mathcal{E}^n.$$

Из работы [58] вытекает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верхняя $\hat{\mu}(y)$ (а тем более нижняя $\check{\mu}(y)$) скорость блуждания каждого решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ оценивается сверху величиной $1+\|a\|_I$, которая отделена от нуля и потому не позволяет судить о малости скоростей блуждания решений уравнения a при малых значениях $\|a\|_I$. Тем не менее, судить об этом можно, как показывает

Теорема II. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, удовлетворяющего неравенству $\|a\|_I \leqslant 1$, верны оценки*

$$0 \leqslant \check{\mu}(y) \leqslant \hat{\mu}(y) \leqslant \sqrt[2n]{\|a\|_I}\left(2\pi n + e^5\right), \quad y \in \mathcal{S}_*(a).$$

Замечание 3. В докладе [46] при малых значениях n и достаточно малых значениях равномерной нормы

$$\|a\| \equiv \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |a(t)|$$

ограниченного уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ верхняя скорость блуждания всех его ненулевых решений оценена сверху, а именно: в случае $n = 2$ — числом $2\sqrt{\|a\|}$, а в случае $n = 3$ — числом $36\pi\sqrt[4]{\|a\|}$. Приведенная теорема развивает эти результаты.

Из теоремы II вытекают

Следствие 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно утверждение*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}_*(a)} \hat{\mu}(y) \to 0$$

при $a \in \mathcal{E}^n$ и $\|a\|_I \to 0$ (а тем более — $\|a\| \to 0$).

Следствие 2. *Для любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, удовлетворяющего условию $\|a\|_I = 0$ (и в частности, $|a(t)| \to 0$, $t \to \infty$), верны равенства*

$$\check{\mu}(y) = \hat{\mu}(y) = 0, \quad y \in \mathcal{S}_*(a).$$

С другой стороны, оценку сверху, данную в теореме II, нельзя кардинально улучшить, поскольку справедлива

Теорема III. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство*

$$\sup_{\substack{a \in \mathcal{E}^n \\ \|a\|_I \leqslant c}} \sup_{y \in \mathcal{S}_\star(a)} \check{\mu}(y) \geqslant \frac{1}{2}\sqrt[n]{c}.$$

Определение 4. Назовем *спектром* показателя $\varkappa$ для системы $A \in \mathcal{M}^n$ множество его значений на нетривиальных решениях этой системы.

Определение 5. *Вектор-многочленом* степени меньше p назовем вектор, каждая из n координат которого есть многочлен степени меньше p.

Из общих свойств решений линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вытекает

Утверждение 1. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$ рассмотрим множество $\{\lambda_s\}_{s=1}^K$ различных собственных значений матрицы A. Тогда любое решение этой системы можно представить в виде*

$$x(t) = \sum_{s=1}^{K} e^{\operatorname{Re}\lambda_s t} \left(P_s(t) \cos |\operatorname{Im}\lambda_s| \, t + Q_s(t) \sin |\operatorname{Im}\lambda_s| \, t \right), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где P_i, Q_i – некоторые вектор-многочлены.

Определение 6. Будем называть $\lambda \in \mathbb{C}$ *собственным значением* функции x, которая представима в виде (3), если существует такое s, что $\lambda = \lambda_s$ и многочлен P_s не равен тождественно нулю. Множество всех собственных значений функции x, будем обозначать через $\operatorname{Sp}_\lambda(x)$. Набор собственных значений матрицы $A \in \mathcal{C}^n$ будем обозначать через $\operatorname{Sp}_\lambda(A)$.

Определение 7. Назовем *нижним (верхним) сильным показателем колеблемости* и *нижним (верхним) слабым показателем колеблемости* непрерывно дифференцируемой вектор-функции $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n_*$ величины

$$\check{\nu}^\bullet(x) = \inf_{m \in S^{n-1}} \varliminf_{t \to \infty} \frac{\pi}{t} \nu(x, m, t) \qquad \left(\hat{\nu}^\bullet(x) = \inf_{m \in S^{n-1}} \varlimsup_{t \to \infty} \frac{\pi}{t} \nu(x, m, t) \right),$$

$$\check{\nu}^\circ(x) = \varliminf_{t \to \infty} \inf_{m \in S^{n-1}} \frac{\pi}{t} \nu(x, m, t) \qquad \left(\hat{\nu}^\circ(x) = \varlimsup_{t \to \infty} \inf_{m \in S^{n-1}} \frac{\pi}{t} \nu(x, m, t) \right).$$

В случае совпадения верхнего и нижнего значений какого-либо из перечисленных показателей $\check{\varkappa}(x) = \hat{\varkappa}(x)$ будем говорить, что показатель $\varkappa(x)$ является *точным*, а в случае совпадения значений слабого и сильного показателей $\varkappa^\circ(x) = \varkappa^\bullet(x)$ будем говорить, что показатель $\varkappa(x)$ является *абсолютным.*

Теорема IV. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$ и любого ее решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ показатель колеблемости точен и абсолютен, причем имеет место равенство*

$$\nu(x) = \min |\operatorname{Im} \operatorname{Sp}_\lambda(x)| \, .$$

Замечание 4. Равенство $\nu^\bullet(x) = \min |\operatorname{Im} \operatorname{Sp}_\lambda(x)|$, по существу, уже было доказано в статье [58].

Следствие 3. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$ спектр показателя колеблемости и множество модулей мнимых частей собственных значений совпадают*

$$\operatorname{Sp}_\nu(A) = |\operatorname{Im} \operatorname{Sp}_\lambda(A)| \, .$$

Определение 8. Для функции $x \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$ и конечного момента времени $t > 0$ определим функционал $\Theta(x,t)$, как такую непрерывную ветвь *ориентированного угла* между векторами $x(t)$ и $x(0)$, что $\Theta(x, 0) = 0$. Если существует момент времени $\tau \in [0,t]$, для которого $x(\tau)=0$, то по определению кладем $\Theta(x,t)$ равным бесконечности.

Определение 9. Назовем *нижним* (*верхним*) *сильным показателем ориентированной вращаемости* и *нижним* (*верхним*) *слабым показателем ориентированной вращаемости* непрерывно дифференцируемой вектор-функции $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n_*$ величины

$$\check{\theta}^{\bullet}(x) = \inf_{L\in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^2)} \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\,|\Theta(Lx,t)| \qquad \left(\hat{\theta}^{\bullet}(x) = \inf_{L\in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^2)} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\,|\Theta(Lx,t)|\right),$$

$$\check{\theta}^{\circ}(x) = \varliminf_{t\to\infty} \inf_{L\in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^2)} \frac{1}{t}\,|\Theta(Lx,t)| \qquad \left(\hat{\theta}^{\circ}(x) = \varlimsup_{t\to\infty} \inf_{L\in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^2)} \frac{1}{t}\,|\Theta(Lx,t)|\right).$$

Утверждение 2 [58]. *Для произвольной вектор-функции $x \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n_*)$ и показателя $\varkappa \in \{\nu,\rho,\theta\}$ верны неравенства*

$$\begin{array}{ccccc} & & \hat{\varkappa}^{\circ}(x) & \leqslant & \hat{\varkappa}^{\bullet}(x) \\ & & \rotatebox{90}{$\leqslant$} & & \rotatebox{90}{$\leqslant$} \\ 0 & \leqslant & \check{\varkappa}^{\circ}(x) & \leqslant & \check{\varkappa}^{\bullet}(x). \end{array}$$

Показатель θ точен, абсолютен и равен нулю на почти всех решениях почти всех более чем двумерных систем. Более точную формулировку данного факта дает

Теорема V. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$, у которой есть хотя бы одно действительное собственное значение или два собственных значения, мнимые части которых рационально несоизмеримы, ноль служит типичным значением показателя θ.*

Определение 10. Опишем функцию gcd^* от множества неотрицательных чисел $\{a_i\}$. Если числа a_i рационально несоизмеримы, то $\mathrm{gcd}^*\big(\{a_i\}\big) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0$. Иначе рассмотрим такое наибольшее число α, что множество $S = \left\{\frac{a_i}{\alpha}\right\}$ состоит из целых чисел. Если в множестве S есть хотя бы одно четное число, то $\mathrm{gcd}^*\big(\{a_i\}\big) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0$, иначе $\mathrm{gcd}^*\big(\{a_i\}\big) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \alpha$.

Теорема VI. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^{2n}$ с простыми чисто мнимыми собственными значениями $\pm i\omega_1,\ldots,\pm i\omega_n$ показатель θ является точным, абсолютным, а его спектр имеет вид*

$$\mathrm{Sp}_\theta(A) = \{\mathrm{gcd}^*(S)\colon S \neq \varnothing,\ S \subset \{\omega_1,\ldots,\omega_n\}\}\,.$$

Следствие 4. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^{2n}$ с простыми и чисто мнимыми собственными значениями спектр показателя θ дискретный, причем его мощность может достигать $2^n - 1$.*

Для произвольной матрицы $A \in \mathcal{C}^n$ и действительного числа $\delta \in \mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}_\lambda(A)$ введем обозначение $\Lambda_\delta = \{\lambda \in \mathrm{Sp}_\lambda(A) : \mathrm{Re}\,\lambda = \delta\}$.

Теорема VII. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$ верны равенства*

$$\mathrm{Sp}_{\check{\mu}}(A) = \mathrm{Sp}_{\hat{\mu}}(A) = \bigcup_{\delta \in \mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}_\lambda(A)} \left[\min_{\lambda \in \Lambda_\delta} |\mathrm{Im}\,\lambda|\,, \max_{\lambda \in \Lambda_\delta} |\mathrm{Im}\,\lambda| \right].$$

Следствие 5. *Если матрицы систем $A, B \in \mathcal{C}^n$ подобны, то верны равенства*

$$\mathrm{Sp}_{\check{\mu}}(A) = \mathrm{Sp}_{\hat{\mu}}(A) = \mathrm{Sp}_{\check{\mu}}(B) = \mathrm{Sp}_{\hat{\mu}}(B).$$

Следствие 6. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$, у которой все действительные части собственных значений попарно различны, верны равенства*

$$\mathrm{Sp}_{\check{\mu}}(A) = \mathrm{Sp}_{\hat{\mu}}(A) = |\mathrm{Im}\,\mathrm{Sp}_\lambda(A)|\,.$$

Следствие 7. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$, у которой все действительные части совпадают, верны равенства*

$$\mathrm{Sp}_{\check{\mu}}(A) = \mathrm{Sp}_{\hat{\mu}}(A) = \Big[\min |\mathrm{Im}\,\mathrm{Sp}_\lambda(A)|\,, \max |\mathrm{Im}\,\mathrm{Sp}_\lambda(A)| \Big].$$

Используемые обозначения

В главах диссертации принята двойная нумерация формул (первое число обозначает номер главы, второе число — номер формулы), а также сквозная нумерация определений, свойств, лемм, теорем и следствий. Приведем список наиболее часто используемых в работе обозначений:

- $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ — множества натуральных и действительных чисел соответственно;
- $\mathbb{R}^+ = [0, bes)$ — временная полуось;
- $\mathcal{M}^n$ — множество n-мерных линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными на полупрямой $\mathbb{R}^+$ коэффициентами;
- $\mathcal{C}^n \subset \mathcal{M}^n$ — множество систем с постоянными коэффициентами;
- $\mathcal{S}_*(A)$ — множество нетривиальных решений системы $A \in \mathcal{M}^n$;
- $\mathcal{E}^n$ — множество линейных однородных дифференциальных уравнений n-го порядка с непрерывными на полупрямой $\mathbb{R}^+$ коэффициентами;
- $\mathcal{S}_*(a)$ — множество нетривиальных решений уравнения $a \in \mathcal{E}^n$;
- $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — множество всех линейных операторов действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$;

- $\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n \subset \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ — множество всех невырожденных линейных операторов;
- $\nu(y, \Delta)$ — количество нулей функции $y : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ на промежутке $\Delta \subset \mathbb{R}$;
- $\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A)$ — спектр показателя $\varkappa$ для системы $A \in \mathcal{M}^n$;
- $\mathrm{Sp}_{\lambda}(A)$ — множество собственных значений матрицы $A \in \mathcal{C}^n$.

Благодарность

Автор глубоко признателен профессору Игорю Николаевичу Сергееву за научное руководство, постоянное внимание и помощь в работе. Автор также благодарен доценту Быкову Владимиру Владиславовичу за организационную и моральную поддержку.

Глава 1

1 Связь между показателями колеблемости и блуждаемости

Данная глава посвящена изучению связи между показателями колеблемости и блуждаемости. В параграфе 1.1 дается краткое изложение предшествующих результатов, среди которых можно особо отметить соотношение между длиной пути, пройденного проекцией на единичную сферу некоторой вектор-функции x, и функцией, ставящей в соответствие векторам m, количеством раз, что вектор-функция x пересекла плоскость ортогональную вектору m. Данное соотношение очень близко к понятию вариации отображения, введенной Банахом в работе [75], а функция $\nu(x,m,t)$ является прямым аналогом индикатрисы Банаха. Затем в 1.2 рассматривается свойства отображения F_L, которое представляет собой комбинацию линейного отображения L и проекции на единичную сферу. В заключительном параграфе 1.3, на основе выведенных свойств, доказывается теорема I.

1.1 Введение

В работе [58] внутри доказательства теоремы 2 в пунктах 1 и 3 были доказаны следующие утверждения

Утверждение 3 [58]. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{M}^n$, ее решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и конечного момента времени T величину $\nu(x,m,T)$ можно представить в виде*

$$\nu(x,m,T) = \sum_{i=0}^{\infty} i I_{m \in A_i(x,T)}, \qquad m \in S^{n-1} \setminus A_\infty(x,T),$$

где $A_i(x,T) \subset S^{n-1}$ – открытые множества, а $A_\infty(x,T) \subset S^{n-1}$ – множество меры ноль Жордана. Причем функция ν обладает симметрией

$$\nu(x,m,T) = \nu(x,-m,T), \qquad m \in S^{n-1}.$$

Утверждение 4 [58]. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{M}^n$, ее решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и конечного момента времени T величина $\frac{\operatorname{mes} S^{n-1}}{\pi}\gamma(x,T)$ конечна и равна $\mathrm{V}\,|_0^T$ – вариации площади заметаемой плоскостью $P_{x(t)}$, проходящей через ноль и ортогональной вектору $x(t)$, на единичной сфере за время $[0,T)$.*

Последнее утверждение можно переформулировать в несколько более удобном виде, воспользовавшись тем, что вариацию $\mathrm{V}\,|_0^T$ можно представить как интеграл по сфере функции $\nu(x,m,T)$ – то есть количества раз сколько плоскость $P_{x(t)}$ пересекла данную точку m за время $[0,T)$.

Следствие 8. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{M}^n$, ее решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и конечного момента времени T верно тождество*

$$\frac{\operatorname{mes} S^{n-1}}{\pi}\gamma(x,T) = \int\limits_{S^{n-1}} \nu(x,m,T)\,dm. \tag{1.1}$$

1.2 Свойства интегралов колеблемости решений систем дифференциальных уравнений

Теперь сформулируем и докажем несколько свойств интегралов вида

$$\int\limits_{S^{n-1}} \nu(Lx,m,T)\,dm, \qquad L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n.$$

Лемма 1. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{M}^n$, ее решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и конечного момента времени T верно тождество*

$$\nu(Lx,m,T) = \nu\left(x, \frac{L^T m}{|L^T m|}, T\right), \qquad m \in S^{n-1}, L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n.$$

Доказательство. По определению $\nu(Lx,m,T)$ это количество нулей функции $(Lx(t),m)$ на промежутке $[0,T)$. Пользуясь свойствами скалярного произведения, получим

$$(Lx(t),m) = \big(x(t),L^T m\big) = \big|L^T m\big|\left(x(t), \frac{L^T m}{|L^T m|}\right), \qquad m \in S^{n-1}, L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n.$$

Откуда видно, что у функций $(Lx(t),m)$ и $\big(x(t), L^T m/\big|L^T m\big|\big)$ одинаковое число нулей на промежутке $[0,T)$. Следовательно, по определению, получаем, что

$$\nu(Lx,m,T) = \nu\left(x, \frac{L^T m}{|L^T m|}, T\right).$$

Лемма 1 доказана.

Для произвольного $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ введем отображение

$$F_L\colon S^{n-1} \mapsto S^{n-1},$$

определенное по формуле $F_L(m) = Lm/|Lm|$.

Обозначим, через $\mathrm{D}F_L|_m$ дифференциал отображения F_L в точке $m \in S^{n-1}$.

Лемма 2. *Дифференциал отображения F_L в произвольной точке $m \in S^{n-1}$ имеет вид*

$$\mathrm{D}F_L|_m\,[v] = \frac{Lv}{|Lm|} - F_L(m)\left(\frac{Lv}{|Lm|}, F_L(m)\right), \qquad v \in \mathrm{T}_m S^{n-1}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Для произвольного касательного вектора $v \in \mathrm{T}_m S^{n-1}$ рассмотрим кривую

$$s(\tau) = \frac{m + v\tau}{|m + v\tau|} \in S^{n-1}, \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

Пользуясь тем, что $s(0) = m$, $|m| = 1$ и $(v, m) = 0$, получим, что v это касательный вектор данной кривой в точке m

$$\left.\frac{ds}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \left.\left(\frac{v}{|m + v\tau|} - (m + v\tau)\frac{(v, m + v\tau)}{|m + v\tau|^3}\right)\right|_{\tau=0} = \frac{v}{|m|} - m\frac{(v, m)}{|m|^3} = v.$$

Под действием отображения F_L касательный вектор к кривой s перейдет соответственно в касательный вектор к кривой $F_L(s(\tau))$. Таким образом, получаем выражение для дифференциала

$$\mathrm{D}F_L\,|_{s(0)} \left[\left.\frac{ds}{d\tau}\right|_{\tau=0}\right] = \mathrm{D}F_L\,|_m\,[v] = \left.\frac{dF_L(s)}{d\tau}\right|_{\tau=0}.$$

Откуда вытекает требуемая формула

$$\begin{aligned}\mathrm{D}F_L\,|_m\,[v] &= \left.\left(\frac{Lv}{|Lm + Lv\tau|} - L(m + v\tau)\frac{(Lv, Lm + Lv\tau)}{|Lm + Lv\tau|^3}\right)\right|_{\tau=0} = \\ &= \frac{Lv}{|Lm|} - \frac{Lm}{|Lm|}\left(\frac{Lv}{|Lm|}, \frac{Lm}{|Lm|}\right).\end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Якобиан отображения F_L имеет вид*

$$J(m) = \frac{\det L}{|Lm|^n}, \qquad m \in S^{n-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим набор линейно независимых векторов $\{v_i\}_{i=1}^{n-1} \subset \mathrm{T}_m S^{n-1}$ и параллелепипед $\Pi_1 \subset \mathrm{T}_m S^{n-1}$ образованный векторами v_i. Под действием отображения F_L вектора v_i перейдут в вектора

$$\widetilde{v_i} = \mathrm{D}F_L\,|_m\,[v_i] \in \mathrm{T}_{F(m)} S^{n-1},$$

которые образуют параллелепипед Π_2 в плоскости $\mathrm{T}_{F_L(m)} S^{n-1}$. Якобиан отображения F_L в точке m будет равен отношению объемов ($n - 1$ мерных) параллелепипедов Π_2 и Π_1.

Так как вектор m перпендикулярен плоскости $\mathrm{T}_m S^{n-1}$ и длина вектора m равна единице, то объем ($n - 1$ мерного) параллелепипеда Π_1 равен объему (n мерного) параллелепипеда $\hat{\Pi}_1$, образованного векторами m и $\{v_i\}$. Объем которого равен определителю матрицы V_1, составленной из векторов m и $\{v_i\}$. Аналогично можно определить параллелепипед $\hat{\Pi}_2$, образованный векторами $F_L(m)$ и $\{\widetilde{v_i}\}$, и матрицу

V_2, составленную из них. Из этого получаем выражения для якобиана отображения F_L

$$J(m) = \frac{\mathrm{mes}_{n-1}\,\Pi_2}{\mathrm{mes}_{n-1}\,\Pi_1} = \frac{\mathrm{mes}_n\,\hat{\Pi}_2}{\mathrm{mes}_n\,\hat{\Pi}_1} = \frac{\det V_2}{\det V_1}. \tag{1.3}$$

Пользуясь выражением (1.2) для дифференциала отображения F, представим матрицу V_2 в виде

$$V_2 = \begin{pmatrix} F_L(m) & \frac{Lv_1}{|Lm|} - F_L(m)c_1 & \dots & \frac{Lv_{n-1}}{|Lm|} - F_L(m)c_{n-1} \end{pmatrix},$$

где $c_i = \left(\frac{Lv_i}{|Lm|}, F_L(m)\right)$. Пользуясь свойствами определителя и тем, что $F_L(m) = \frac{Lm}{|Lm|}$, получим выражение для определителя матрицы V_2

$$\det V_2 = \det \begin{pmatrix} \frac{Lm}{|Lm|} & \frac{Lv_1}{|Lm|} & \dots & \frac{Lv_{n-1}}{|Lm|} \end{pmatrix} = \frac{\det L \begin{pmatrix} m & v_1 & \dots & v_{n-1} \end{pmatrix}}{|Lm|^n} = \frac{\det L \det V_1}{|Lm|^n}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (1.3) получим требуемый результат

$$J(m) = \frac{\det V_2}{\det V_1} = \frac{\det L}{|Lm|^n}.$$

Лемма 3 доказана.

Следствие 9. *Для произвольного $L \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n$ якобиан отображения F_L нигде не равен нулю. Следовательно, отображение F_L является диффеоморфизмом сферы на себя, причем обратное отображение имеет вид*

$$F_{L^T}^{-1}(m) = \frac{(L^T)^{-1}m}{|(L^T)^{-1}m|} = F_{(L^T)^{-1}}(m).$$

Лемма 4. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{M}^n$, отображения $L \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n$, ее решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и конечного момента времени T верно тождество*

$$\gamma(Lx, T) = \frac{\pi}{\mathrm{mes}\, S^{n-1}} \int\limits_{S^{n-1}} \nu(x, m, T) \frac{\left|\det \left(L^T\right)^{-1}\right|}{\left|\left(L^T\right)^{-1} m\right|^n}\, dm.$$

Доказательство. Из следствия 8 и леммы 1 вытекает, что

$$\frac{\mathrm{mes}\, S^{n-1}}{\pi}\gamma(Lx, T) = \int\limits_{S^{n-1}} \nu(Lx, m, T)\, dm = \int\limits_{S^{n-1}} \nu\left(x, F_{L^T}(m), T\right)\, dm.$$

В последнем интеграле, пользуясь следствием 9, сделаем замену переменных $m = F_{(L^T)^{-1}}(s)$. В результате чего получим следующую цепочку равенств

$$\int\limits_{S^{n-1}} \nu\left(x, F_{L^T}(m), T\right)\, dm = \int\limits_{S^{n-1}} \nu\left(x, s, T\right)\, dF_{L^T}^{-1}(s) = \int\limits_{S^{n-1}} \nu\left(x, s, T\right) |J(s)|\, ds, \tag{1.4}$$

где $J(s)$ якобиан отображения $F_{(L^T)^{-1}}$. Подставляя в (1.4) выражение для якобиана из леммы 3 для автоморфизма $(L^T)^{-1}$, получим

$$\int\limits_{S^{n-1}} \nu\left(x,s,T\right)\left|J(s)\right|\,ds = \int\limits_{S^{n-1}} \nu\left(x,s,T\right)\frac{\left|\det(L^T)^{-1}\right|}{\left|(L^T)^{-1}s\right|^n}\,ds.$$

Откуда вытекает требуемый результат

$$\gamma(Lx,T) = \frac{\pi}{\operatorname{mes} S^{n-1}} \int\limits_{S^{n-1}} \nu(x,s,T)\frac{\left|\det\left(L^T\right)^{-1}\right|}{\left|\left(L^T\right)^{-1}s\right|^n}\,ds.$$

Лемма 4 доказана.

1.3 Альтернативное представление слабого показателя блуждаемости

Лемма 5. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{M}^n$, ее решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$, конечного момента времени T и $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ верно неравенство*

$$\gamma(Lx,T) \geqslant \pi \operatorname*{ess\,inf}_{m\in S^{n-1}} \nu\left(x,m,T\right). \tag{1.5}$$

Доказательство. Из следствия 8 и леммы 1 вытекает равенство

$$\gamma(Lx,T) = \frac{\pi}{\operatorname{mes} S^{n-1}} \int\limits_{S^{n-1}} \nu\big(x,F_{L^T}(m),T\big)\,dm.$$

Откуда, пользуясь свойствами интеграла Лебега, получим

$$\gamma(Lx,T) \geqslant \frac{\pi}{\operatorname{mes} S^{n-1}} \operatorname*{ess\,inf}_{m\in S^{n-1}} \nu\big(x,F_{L^T}(m),T\big) \int\limits_{S^{n-1}} 1\,dm = \pi \operatorname*{ess\,inf}_{m\in S^{n-1}} \nu\big(x,F_{L^T}(m),T\big).$$

Из того, что F_{L^T} диффеоморфизм вытекает, что

$$\operatorname*{ess\,inf}_{m\in S^{n-1}} \nu\big(x,F_{L^T}(m),T\big) = \operatorname*{ess\,inf}_{m\in S^{n-1}} \nu\big(x,m,T\big).$$

Откуда получаем требуемое неравенство. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{M}^n$, ее решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и конечного момента времени T верно неравенство*

$$\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \gamma(Lx,T) \leqslant \pi \operatorname*{ess\,inf}_{m\in S^{n-1}} \nu\left(x,m,T\right). \tag{1.6}$$

Доказательство. Из структуры функции ν (утверждение 3) следует, что существенный инфимум достигается на некотором открытом множестве $A_i \subset S^{n-1}$. Выберем произвольным образом вектор $e \in A_i$ и его окрестность O вида

$$O = \left\{m \in S^{n-1}\colon\ (m,e)^2 > 1-\alpha\right\}$$

так, чтобы она целиком принадлежала множеству A_i (это возможно поскольку A_i открыто и центрально симметрично).

И рассмотрим отображение $L_\delta \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ заданное формулой

$$L_\delta m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\delta} e\,(e,m) + \sqrt[n-1]{\delta}\,(m - e\,(e,m))\,, \qquad m \in S^{n-1}.$$

Из определения L_δ вытекает, что $L_\delta^T = L_\delta$, а также, что $\det L_\delta = 1$. Тогда из леммы 4 следует равенство

$$\gamma(L_\delta x, T) = \frac{\pi}{\operatorname{mes} S^{n-1}} \int\limits_{S^{n-1}} \nu(x,m,T) \left|L_\delta^{-1} m\right|^{-n} dm.$$

Разделим данный интеграл на интеграл по окрестности O и по всей оставшейся сфере. Оценим сверху получившиеся интегралы, пользуясь неотрицательностью функции ν и определением окрестности O

$$\frac{\operatorname{mes} S^{n-1}}{\pi}\gamma(L_\delta x, T) = \int\limits_O \frac{\nu(x,m,T)}{\left|L_\delta^{-1} m\right|^n}\,dm + \int\limits_{S^{n-1}\setminus O} \frac{\nu(x,m,T)}{\left|L_\delta^{-1} m\right|^n}\,dm \leqslant$$

$$\leqslant \nu(x,e,T) \int\limits_O \left|L_\delta^{-1} m\right|^{-n} dm + \sup_{m\in S^{n-1}\setminus O} \left|L_\delta^{-1} m\right|^{-n} \int\limits_{S^{n-1}\setminus O} \nu(x,m,T)\,dm \leqslant$$

$$\leqslant \nu(x,e,T) \int\limits_{S^{n-1}} \left|L_\delta^{-1} m\right|^{-n} dm + \sup_{m\in S^{n-1}\setminus O} \left|L_\delta^{-1} m\right|^{-n} \int\limits_{S^{n-1}} \nu(x,m,T)\,dm.$$

Заметим, что если в интеграле $\int\limits_{S^{n-1}} 1\,dm$ сделать замену переменных $m = F_{L_\delta^{-1}}(s)$, то получится следующее равенство

$$\operatorname{mes} S^{n-1} = \int\limits_{S^{n-1}} 1\,dm = \int\limits_{S^{n-1}} \left|L_\delta^{-1} s\right|^{-n} ds.$$

Откуда вытекает неравенство

$$\gamma(L_\delta x, T) \leqslant \pi\nu(x,e,T) + \sup_{m\in S^{n-1}\setminus O} \left|L_\delta^{-1} m\right|^{-n} \frac{\pi}{\operatorname{mes} S^{n-1}} \int\limits_{S^{n-1}} \nu(x,m,T)\,dm.$$

Преобразуем последнее слагаемое, пользуясь (1.1),

$$\gamma(L_\delta x, T) \leqslant \pi\nu(x,e,T) + \gamma(x,T) \sup_{m\in S^{n-1}\setminus O} \left|L_\delta^{-1} m\right|^{-n}.$$

Из определения оператора L_δ вытекает, что

$$L_\delta^{-1} m = \delta e\,(e,m) + \frac{1}{\sqrt[n-1]{\delta}}\,(m - e\,(e,m))\,, \qquad m \in S^{n-1}.$$

Откуда получим выражение для $\left|L_\delta^{-1} m\right|^{-n}$

$$\left|L_\delta^{-1} m\right|^{-n} = \left(\delta^2 (e,m)^2 + \delta^{-\frac{2}{n-1}}\left(1-(e,m)^2\right)\right)^{-\frac{n}{2}} = \left(\delta^{-\frac{2}{n-1}} + \left(\delta^{-\frac{2}{n-1}} - \delta^2\right)(e,m)^2\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

Так как при $\delta < 1$ величина $\delta^{-\frac{2}{n-1}} - \delta^2$ больше нуля, то $\left|L_\delta^{-1} m\right|^{-n}$ монотонно убывающая функция $(e,m)^2$, и следовательно ее максимум по множеству $S^{n-1} \setminus O$ достигается на границе окрестности O, заданной равенством $(e,m)^2 = 1-\alpha$. Откуда получаем, что

$$\sup_{m \in S^{n-1} \setminus O} \left|L_\delta^{-1} m\right|^{-n} = \left(\delta^2(1-\alpha) + \delta^{-\frac{2}{n-1}}\alpha\right)^{-\frac{n}{2}} \leqslant \left(\delta^{-\frac{2}{n-1}}\alpha\right)^{-\frac{n}{2}} = \delta^{\frac{n}{n-1}}\alpha^{-\frac{n}{2}}.$$

Тем самым, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta < 1$ такое, что будет выполнено неравенство

$$\gamma(x,T) \sup_{m \in S^{n-1} \setminus O} \left|L_\delta^{-1} m\right|^{-n} \leqslant \gamma(x,T)\delta^{\frac{n}{n-1}}\alpha^{-\frac{n}{2}} \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует L_δ такой, что

$$\gamma(L_\delta x, T) \leqslant \pi\nu\left(x,e,T\right) + \varepsilon = \pi \operatorname*{ess\,inf}_{m \in S^{n-1}} \nu\left(x,m,T\right) + \varepsilon.$$

Откуда получаем требуемое неравенство

$$\inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \gamma(Lx,T) \leqslant \pi \operatorname*{ess\,inf}_{m \in S^{n-1}} \nu\left(x,m,T\right).$$

Лемма 6 доказана.

Из лемм 5 и 6 непосредственно вытекает

Следствие 10. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{M}^n$, ее решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и конечного момента времени T выполнено равенство*

$$\inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \gamma(Lx,T) = \pi \operatorname*{ess\,inf}_{m \in S^{n-1}} \nu\left(x,m,T\right).$$

Переходя к нижнему пределу по $T \to \infty$ в точности получим утверждение теоремы

$$\check{\rho}^\circ(x) = \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \gamma(Lx,T) = \varliminf_{T\to\infty} \frac{\pi}{T} \operatorname*{ess\,inf}_{m \in S^{n-1}} \nu\left(x,m,T\right) = \varliminf_{t\to\infty} \operatorname*{ess\,inf}_{m \in S^{n-1}} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t).$$

Теорема I доказана.

Глава 2

2 Непрерывность скорости блуждания в нуле

Основным результатом данной главы является получение заявленных в теореме II верхних оценок на скорость блуждания решений дифференциальных уравнений произвольного порядка. Общая идея получения данных оценок состоит в том, чтобы разбить полупрямую на набор промежутков на каждом из которых приблизить решение рассматриваемого уравнения его рядом Тейлора T. Для произвольного многочлена T можно показать, что путь, который проходит проекция на единичную сферу вектор функции ψT, конечен даже на бесконечных интервалах времени. В завершении главы строится важный для доказательства теоремы III пример уравнения с постоянными коэффициентами и его решения такого, что его скорость блуждания имеет порядок $\sqrt[n]{\|a\|_I}$. Следовательно, полученную оценку, имеющую порядок $\sqrt[2n]{\|a\|_I}$, нельзя кардинально улучшить.

2.1 Оценки на качество приближений полиномами решений дифференциального уравнения

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение, вытекающее из свойств нормы в $\mathbb{R}^n$,

Утверждение 5. *Для произвольных векторов $a, b \in \mathbb{R}^n_*$ верны неравенства*

$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|,$$

$$\left|\frac{a}{|a|} - \frac{b}{|b|}\right| \leqslant 2\frac{|a-b|}{|a|}. \tag{2.1}$$

Лемма 7. *Для любого отрезка $I \subset \mathbb{R}^+$, числа $\gamma \geqslant 1$ и уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, удовлетворяющего неравенству*

$$\int\limits_I |a(\tau)|\, d\tau \leqslant \gamma^{-n}, \tag{2.2}$$

верна оценка

$$|\psi y(t)| \leqslant \gamma^{n-1} |\psi y(t^*)|\, e^{(|t-t^*|+1)/\gamma}, \quad t, t^* \in I.$$

Доказательство. Сделаем в уравнении $a \in \mathcal{E}^n$ замену времени $t = \gamma\tau$, где τ — новое время. Тогда вектор-функция коэффициентов нового уравнения имеет вид

$$\widetilde{a}(\tau) = \gamma^n D^{-1} a(\gamma\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}^+, \quad D \equiv \operatorname{diag}\left\{1, \gamma, \ldots, \gamma^{n-1}\right\},$$

а операторная норма матрицы $\widetilde{A}$ системы дифференциальных уравнений, отвечающей $\widetilde{a}$, удовлетворяет оценке

$$\left\|\widetilde{A}(\tau)\right\| = \sup_{|x|=1}\left|\widetilde{A}(\tau)x\right| \leqslant \sup_{|x|=1}(|Jx| + |(x,\widetilde{a}(\tau))|) \leqslant 1 + |\widetilde{a}(\tau)|\,, \quad \tau \in \mathbb{R}^+,$$

где J – жорданова клетка с нулевыми собственными значениями. Для любого решения $\widetilde{x} \equiv \psi\widetilde{y} \in \mathcal{S}_*(\widetilde{A})$ имеем стандартную [18] оценку

$$|\widetilde{x}(\tau)| \leqslant |\widetilde{x}(\tau^*)|\, e^{\left|\int_{\tau^*}^{\tau}\left\|\widetilde{A}(s)\right\|ds\right|}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \tau^* = \frac{t^*}{\gamma}.$$

Воспользовавшись тем, что

$$\widetilde{x}(\tau) = \psi\widetilde{y}(\tau) = D\psi y(t),$$

получаем

$$|D\psi y(t)| \leqslant |D\psi y(t^*)|\, e^{\left|\int_{t^*/\gamma}^{t/\gamma} 1+\left|\gamma^n D^{-1}a(s\gamma)\right|ds\right|} \leqslant \|D\|\, |\psi y(t^*)|\, e^{\gamma^{-1}\left(|t-t^*|+\gamma^n\left\|D^{-1}\right\|\left|\int_{t^*}^{t}|a(s)|\,ds\right|\right)}.$$

Отсюда, с учетом оценки $\gamma \geqslant 1$ и вытекающих из нее равенств $\|D\| = \gamma^{n-1}$, $\|D^{-1}\| = 1$, а также с учетом оценки (2.2), получаем цепочку неравенств

$$|\psi y(t)| \leqslant |D\psi y(t)| \leqslant \gamma^{n-1}\, |\psi y(t^*)|\, e^{\gamma^{-1}|t-t^*|+\gamma^{n-1}\int\limits_I |a(s)|\,ds} \leqslant \gamma^{n-1}\, |\psi y(t^*)|\, e^{\gamma^{-1}|t-t^*|+\gamma^{-1}}.$$

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Для любого ненулевого многочлена p степени $k < n$ верно неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{d}{d\tau}\frac{\psi p(\tau)}{|\psi p(\tau)|}\right| d\tau \leqslant \pi k.$$

Доказательство. Так как p — многочлен, то $p \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Так как кроме того, $\deg p = k < n$, то вектор-функция ψp нигде не обращается в ноль, поскольку ее координата $p^{(k)}$ есть ненулевая константа. Следовательно, $\psi p \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n_*)$.

Далее, для любого вектора $m \in S^{n-1}$ функция $(\psi p, m)$ является многочленом степени не выше k, а значит, верна оценка $\nu(\psi p, m, \mathbb{R}) \leqslant k$, из которой в силу тождества (1.1) получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{d}{d\tau}\frac{\psi p(\tau)}{|\psi p(\tau)|}\right| d\tau = \frac{\pi}{\operatorname{mes} S^{n-1}} \int\limits_{S^{n-1}} \nu\left(\psi p, m, \mathbb{R}\right)\, dm \leqslant \pi k.$$

Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Для любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ и его решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ вектор-функция $x \equiv |\psi y|^{-1}\,\psi y$ является решением следующей нелинейной системы дифференциальных уравнений*

$$\dot{x} = G(x,t) \equiv Jx - x\,(x, Jx) + (x, a(t))\,(e_n - x\,(x, e_n))\,, \qquad t \in \mathbb{R}^+,$$

где J – жорданова клетка размера n с нулевым собственным числом, вектор e_n задается равенством $e_n = (0, \ldots, 0, 1)^T$.

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{x}$ вектор функцию ψy. Тогда для произвольного момента времени $t \in \mathbb{R}^+$

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\frac{\widetilde{x}(t)}{|\widetilde{x}(t)|} = \dot{\widetilde{x}}(t)|\widetilde{x}(t)|^{-1} - \widetilde{x}(t)\frac{\left(\widetilde{x}(t), \dot{\widetilde{x}}(t)\right)}{|\widetilde{x}(t)|^3}. \tag{2.3}$$

Дифференцируя $\widetilde{x}$ в силу уравнения a, получим

$$\dot{\widetilde{x}}(t) = J\widetilde{x}(t) + e_n\left(\widetilde{x}(t), a(t)\right), \tag{2.4}$$

откуда, подставляя (2.4) в (2.3), получим

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = \left(J\widetilde{x}(t) + e_n\left(\widetilde{x}(t), a(t)\right)\right)|\widetilde{x}(t)|^{-1} - \widetilde{x}(t)\frac{\left(\widetilde{x}(t), J\widetilde{x}(t) + e_n\left(\widetilde{x}(t), a(t)\right)\right)}{|\widetilde{x}(t)|^3} = \\ = Jx(t) + e_n\left(x(t), a(t)\right) - x(t)\left(x(t), Jx(t)\right) - x(t)\left(x(t), e_n\right)\left(x(t), a(t)\right).\end{aligned}$$

Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Для любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ и точек на единичной сфере $x_1, x_2 \in S$ верно неравенство*

$$|G(x_1, t) - G(x_2, t)| \leqslant 4\,|x_1 - x_2| + 2\,|a(t)|, \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

Доказательство. Действительно, для произвольного момента времени $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}G(x_1, t) - G(x_2, t) = J\left(x_1 - x_2\right) + \left(x_1 - x_2\right)\left(x_1, Jx_1\right) + x_2((x_1 - x_2, Jx_2) - \\ - \left(x_1, J\left(x_1 - x_2\right)\right)) + \left(x_1, a(t)\right)\left(e_n - x_1\left(x_1, e_n\right)\right) - \left(x_2, a(t)\right)\left(e_n - x_2\left(x_2, e_n\right)\right),\end{aligned}$$

откуда по модулю получаем

$$\begin{aligned}|G(x_1, t) - G(x_2, t)| \leqslant \|J\|\,|x_1 - x_2| + |x_1|^2\,\|J\|\,|x_1 - x_2| + |x_2|^2\,\|J\|\,|x_1 - x_2| + \\ + |x_1|\,|x_2|\,\|J\|\,|x_1 - x_2| + |x_1|\,|a(t)|\,|e_n - x_1\left(x_1, e_n\right)| + |x_2|\,|a(t)|\,|e_n - x_2\left(x_2, e_n\right)|.\end{aligned}$$

С учетом $\|J\| = |e_n| = |x_1| = |x_2| = 1$, получаем требуемую оценку

$$\begin{aligned}|G(x_1, t) - G(x_2, t)| \leqslant 4\,|x_1 - x_2| + |a(t)|\left(|e_n - x_1\left(x_1, e_n\right)| + |e_n - x_2\left(x_2, e_n\right)|\right) = \\ = 4\,|x_1 - x_2| + |a(t)|\left(\sqrt{1 - \left(x_1, e_n\right)^2} + \sqrt{1 - \left(x_1, e_n\right)^2}\right) \leqslant 4\,|x_1 - x_2| + 2\,|a(t)|.\end{aligned}$$

Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Для любого отрезка $I \subset \mathbb{R}^+$, числа $\gamma \geqslant 1$ и уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, удовлетворяющего условию $\int_I |a(\tau)|\,d\tau \leqslant \gamma^{-n}$, верна оценка*

$$\left|\frac{d^k}{dt^k}\left(y(t) - T_{t^*}^{n-1}(t)\right)\right| \leqslant \frac{\gamma^{n-1}\,|t - t^*|^{n-1-k}}{(n-1-k)!}\,|\psi y(t^*)|\,e^{(1+|t-t^*|)\gamma^{-1}}\int\limits_I |a(s)|\,ds,$$

где y это произвольное ненулевое решение уравнения a; t, t^* – произвольные точки отрезка I; $T_{t^*}^{n-1}$ – многочлен Тейлора функции y степени $n-1$ в точке t^*.

Доказательство. Зафиксируем произвольный момент времени $t^* \in I$. Разложим решение y и его производные в точке t^* в ряд Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Пользуясь тем, что в силу дифференциального уравнения $y^{(n)} = (\psi y, a)$, получим для произвольного момента времени $t \in I$

$$\frac{d^k}{dt^k}y(t) = \frac{d^k}{dt^k}T_{t^*}^{n-1}(t) + \int\limits_{t^*}^{t} \frac{(s-t^*)^{n-1-k}}{(n-1-k)!}\left(\psi y(s), a(s)\right)\, ds.$$

Оценим остаточный член по модулю

$$\left|\frac{d^k}{dt^k}y(t) - \frac{d^k}{dt^k}T_{t^*}^{n-1}(t)\right| \leqslant \int\limits_{t^*}^{t} \frac{|s-t^*|^{n-1-k}}{(n-1-k)!}\left|\psi y(s)\right|\left|a(s)\right|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|t-t^*|^{n-1-k}}{(n-1-k)!}\int\limits_{t^*}^{t} \left|\psi y(s)\right|\left|a(s)\right|\, ds.$$

Воспользовавшись леммой 7 для оценки сверху $|\psi y(s)|$, получим требуемое

$$\left|\frac{d^k}{dt^k}y(t) - \frac{d^k}{dt^k}T_{t^*}^{n-1}(t)\right| \leqslant \frac{|t-t^*|^{n-1-k}}{(n-1-k)!}\gamma^{n-1}\left|\psi y(t^*)\right| e^{(1+|t-t^*|)\gamma^{-1}}\int\limits_{t^*}^{t} |a(s)|\, ds.$$

Лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Для любого числа $\gamma \geqslant 1$, отрезка $I \subset \mathbb{R}^+$ длины не более γ и уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, удовлетворяющего условию $\int\limits_I |a(\tau)|\, d\tau \leqslant \gamma^{-n}$, существует точка $t^* \in I$ такая, что верно неравенство*

$$\left|\frac{\psi y(t)}{|\psi y(t)|} - \frac{\psi T_{t^*}^{n-1}(t)}{\left|\psi T_{t^*}^{n-1}\right|(t)}\right| \leqslant \gamma^{2n-2}e^3\int\limits_I |a(\tau)|\, d\tau, \qquad y \in \mathcal{S}_*(a), t \in I,$$

где $T_{t^*}^{n-1}$ – многочлен Тейлора функции y степени $n-1$ в точке t^*.

Доказательство. Выберем в качестве t^* точку минимума непрерывной функции $|\psi y|$ на отрезке I. Применяя утверждение 5 к векторам ψy и $\psi T_{t^*}^{n-1}$ неравенство (2.1) примет вид

$$\left|\frac{\psi y(t)}{|\psi y(t)|} - \frac{\psi T_{t^*}^{n-1}(t)}{\left|\psi T_{t^*}^{n-1}(t)\right|}\right| \leqslant 2\frac{\left|\psi y(t) - \psi T_{t^*}^{n-1}(t)\right|}{|\psi y(t)|}. \tag{2.5}$$

Используя лемму 11, с учетом неравенства $|t-t^*| \leqslant \gamma$ получим

$$2\frac{\left|\psi y(t) - \psi T_{t^*}^{n-1}(t)\right|}{|\psi y(t)|} \leqslant 2\gamma^{n-1}\frac{|\psi y(t^*)|}{|\psi y(t)|}e^2\int\limits_{t^*}^{t}|a(s)|\, ds\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\gamma^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma^{2n-2}\frac{|\psi y(t^*)|}{|\psi y(t)|}e^3\int\limits_I |a(\tau)|\, d\tau.$$

В силу выбора точки t^* получим, что $\frac{|\psi y(t^*)|}{|\psi y(t)|} \leqslant 1$ для всех $t \in I$. Откуда с учетом неравенства (2.5) следует требуемое. Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Для любого числа $\gamma \geqslant 1$, отрезка $I \subset \mathbb{R}^+$ длины не более γ и уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, удовлетворяющего неравенству $\int\limits_I |a(\tau)|\, d\tau \leqslant \gamma^{-n}$, верна оценка*

$$\int\limits_I \left|\frac{d}{d\tau}\frac{\psi y(\tau)}{|\psi y(\tau)|}\right| d\tau \leqslant \pi(n-1) + \left(2 + 4\gamma^{2n-1}e^3\right) \int\limits_I |a(\tau)|\, d\tau, \qquad y \in \mathcal{S}_*(a).$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\int\limits_I \left|\frac{d}{dt}\frac{\psi y(t)}{|\psi y(t)|}\right| dt \leqslant \int\limits_I \left|\frac{d}{dt}\frac{\psi y(t)}{|\psi y(t)|} - \frac{d}{dt}\frac{\psi T_{t_*}^{n-1}(t)}{\left|\psi T_{t_*}^{n-1}(t)\right|}\right| dt + \int\limits_I \left|\frac{d}{dt}\frac{\psi T_{t_*}^{n-1}(t)}{\left|\psi T_{t_*}^{n-1}(t)\right|}\right| dt,$$

где точка $t^* \in I$ выбрана в соответствии с леммой 12. По лемме 8 второе слагаемое не превосходит $\pi(n-1)$. Из леммы 10 вытекает, что

$$\int\limits_I \left|\frac{d}{dt}\frac{\psi y(t)}{|\psi y(t)|} - \frac{d}{dt}\frac{\psi T_{t_*}^{n-1}(t)}{\left|\psi T_{t_*}^{n-1}(t)\right|}\right| dt \leqslant 4\int\limits_I \left|\frac{\psi y(t)}{|\psi y(t)|} - \frac{\psi T_{t_*}^{n-1}(t)}{\left|\psi T_{t_*}^{n-1}(t)\right|}\right| dt + 2\int\limits_I |a(t)|\, dt.$$

Исходя из леммы 12, получим

$$\int\limits_I \left|\frac{\psi y(t)}{|\psi y(t)|} - \frac{\psi T_{t_*}^{n-1}(t)}{\left|\psi T_{t_*}^{n-1}(t)\right|}\right| dt \leqslant \gamma^{2n-2}e^3 \int\limits_I |a(\tau)|\, d\tau \int\limits_I 1\, d\tau \leqslant \gamma^{2n-1}e^3 \int\limits_I |a(\tau)|\, d\tau,$$

откуда следует

$$\int\limits_I \left|\frac{d}{d\tau}\frac{\psi y(\tau)}{|\psi y(\tau)|}\right| d\tau \leqslant 4\gamma^{2n-1}e^3 \int\limits_I |a(\tau)|\, d\tau + 2\int\limits_I |a(\tau)|\, d\tau + \pi(n-1).$$

Лемма 13 доказана.

2.2 Верхняя оценка на скорость блуждания решений дифференциальных уравнений

Рассмотрим произвольное $\gamma \geqslant 1$ и разбиение T произвольного отрезка $[0, L]$, определенное следующими формулами

$$T = T_1 \cup T_2, \qquad T_1 = \left\{\frac{L}{N_1}k\right\}_{k=0}^{N_1}, \qquad T_2 = \{t_k\}_{k=0}^{N_2},$$

где

$$N_1 = \left\lceil \frac{L}{\gamma} \right\rceil, \quad N_2 = \left\lceil \gamma^n \left(\int_0^L |a(\tau)|\, d\tau + 1 \right) \right\rceil, \quad t_0 = 0, \quad t_{N_2} = L,$$

а t_k удовлетворяют равенствам

$$\int\limits_0^{t_k} |a(\tau)|\, d\tau = \frac{\int_0^L |a(\tau)|\, d\tau}{N_2} k, \qquad 0 < k < N_2.$$

Разбиение T делит отрезок $[0, L]$ на не более чем $N_1 + N_2$ отрезков I_k. Заметим, что каждый отрезок I_k обладает двумя свойствами: длина отрезка I_k не превосходит γ и интеграл $\int\limits_{I_k} |a(\tau)|\; d\tau$ не превосходит γ^{-n}. Действительно, длина отрезка I_k равна $\frac{L}{N_1} = \frac{L}{\lceil L/\gamma \rceil} \leqslant \frac{L}{L/\gamma} = \gamma$, а интеграл $\int\limits_{I_k} |a(\tau)|\; d\tau$ удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_{I_k} |a(\tau)|\; d\tau = \frac{\int_0^L |a(\tau)|\; d\tau}{N_2} = \frac{\int_0^L |a(\tau)|\; d\tau}{\left\lceil \gamma^n \left(\int_0^L |a(\tau)|\; d\tau + 1 \right) \right\rceil} \leqslant \gamma^{-n}.$$

Тем самым, к каждому из отрезков I_k применима лемма 13. После ее применения к произвольному решению $y \in \mathcal{S}_*(a)$ получим

$$\int\limits_{I_k} \left| \frac{d}{d\tau} \frac{\psi y(\tau)}{|\psi y(\tau)|} \right| d\tau \leqslant \pi(n-1) + \left(2 + 4\gamma^{2n-1} e^3\right) \int\limits_{I_k} |a(\tau)|\; d\tau.$$

Просуммировав неравенства для всех индексов k, получим

$$\int\limits_0^L \left| \frac{d}{d\tau} \frac{\psi y(\tau)}{|\psi y(\tau)|} \right| d\tau \leqslant \pi(n-1)(N_1 + N_2) + \left(2 + 4\gamma^{2n-1} e^3\right) \int\limits_0^L |a(\tau)|\; d\tau.$$

Заметим, что верны следующие равенства

$$\varlimsup_{L\to\infty} \frac{1}{L} N_1 = \frac{1}{\gamma}, \qquad \varlimsup_{L\to\infty} \frac{1}{L} N_2 = \gamma^n \varlimsup_{L\to\infty} \frac{1}{L} \left(\int_0^L |a(\tau)|\; d\tau + 1 \right) = \gamma^n \left\| a \right\|_I,$$

откуда получим

$$\hat{\mu}(y) = \varlimsup_{L\to\infty} \frac{1}{L} \int\limits_0^L \left| \frac{d}{d\tau} \frac{\psi y(\tau)}{|\psi y(\tau)|} \right| d\tau \leqslant \pi(n-1) \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma^n \left\| a \right\|_I \right) + \left(2 + 4\gamma^{2n-1} e^3\right) \left\| a \right\|_I. \tag{2.6}$$

Рассмотрим два случая: $\left\| a \right\|_I = 0$ и $0 < \left\| a \right\|_I \leqslant 1$. В первом случае неравенство (2.6) принимает вид

$$\hat{\mu}(y) \leqslant \frac{\pi(n-1)}{\gamma}.$$

Так как это неравенство верно для любого $\gamma \geqslant 1$, то, переходя к пределу по $\gamma \to \infty$, получим $\hat{\mu}(y) = 0$. В случае $0 < \left\| a \right\|_I \leqslant 1$ выберем $\gamma = 1 \big/ \sqrt[2n]{\left\| a \right\|_I} \geqslant 1$, после чего неравенство (2.6) примет вид

$$\hat{\mu}(y) \leqslant \pi(n-1) \left(\sqrt[2n]{\left\| a \right\|_I} + \sqrt{\left\| a \right\|_I} \right) + 2 \left\| a \right\|_I + 4 \sqrt[2n]{\left\| a \right\|_I} e^3.$$

Воспользовавшись неравенствами $\sqrt[2n]{\left\| a \right\|_I} \geqslant \sqrt{\left\| a \right\|_I} \geqslant \left\| a \right\|_I$, получим

$$\hat{\mu}(y) \leqslant \sqrt[2n]{\left\| a \right\|_I} \left(2\pi(n-1) + 2 + 4e^3 \right) \leqslant \sqrt[2n]{\left\| a \right\|_I} \left(2\pi n + e^5 \right).$$

Теорема II доказана.

2.3 Нижняя оценка максимальной скорости блуждания решений дифференциальных уравнений

Рассмотрим уравнение $y^{(n)}+cy=0$ и его частное решение $y_*(t)=\cos\left(|\mathrm{Im}\lambda|\, t\right)e^{\mathrm{Re}\lambda t}$, где λ это корень n степени из $-c$, с наибольшей мнимой частью. Вектор-функция ψy_* будет иметь вид

$$\psi y_*(t)=v_1\cos\left(|\mathrm{Im}\lambda|\, t\right)e^{\mathrm{Re}\lambda t}+v_2\sin\left(|\mathrm{Im}\lambda|\, t\right)e^{\mathrm{Re}\lambda t},$$

где v_1, v_2 некоторые вектора, вообще говоря, зависящие от c. Заметим, что верно следующее равенство

$$\begin{aligned}\check{\mu}(y_*)&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\left|\frac{d}{d\tau}\frac{\psi y_*(\tau)}{|\psi y_*(\tau)|}\right|d\tau=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\left|\frac{d}{d\tau}\frac{\psi y_*(\tau)e^{-\mathrm{Re}\lambda t}}{|\psi y_*(\tau)e^{-\mathrm{Re}\lambda t}|}\right|d\tau=\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\left|\frac{d}{d\tau}\frac{q(t)}{|q(t)|}\right|d\tau,\end{aligned}$$

где q – вектор-функция, задающая параметризацию некоторого эллипса лежащего в плоскости v_1, v_2

$$q(t)=v_1\cos\left(|\mathrm{Im}\lambda|\, t\right)+v_2\sin\left(|\mathrm{Im}\lambda|\, t\right).$$

Лемма 14. *Для произвольных линейно независимых векторов $v,u\in\mathbb{R}^n$ и частоты $\omega>0$ скорость блуждании вектор-функции*

$$q(t)=v\cos\omega t+u\sin\omega t,$$

равна

$$\check{\mu}\left(q\right)=\hat{\mu}\left(q\right)=\omega.$$

Доказательство. Функция q является периодической, с периодом $T=2\pi/\omega$. Заметим, что верхняя и нижняя скорость блуждания совпадают и равны $\gamma(q,T)/T$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\gamma(q,t)\leqslant\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\gamma\left(q,T\left\lceil\frac{t}{T}\right\rceil\right)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\left\lceil\frac{t}{T}\right\rceil\gamma(q,T)=\frac{1}{T}\gamma(q,T),$$

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\gamma(q,t)\geqslant\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\gamma\left(q,T\left\lfloor\frac{t}{T}\right\rfloor\right)=\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\left\lceil\frac{t}{T}\right\rceil\gamma(q,T)=\frac{1}{T}\gamma(q,T).$$

Величина $\gamma(q,T)$ имеет геометрический смысл длины пути, который проходит проекция вектора $q(t)$ на единичную сферу за период. Так как вектор-функция q задает параметризацию эллипса с центром в нуле, то проекция вектора $q(t)$ на единичную сферу за время T описывает окружность единичного радиуса. Тем самым, путь который проходит проекция вектора $q(t)$ равен 2π и следовательно,

$$\check{\mu}(q)=\hat{\mu}(q)=\frac{1}{T}\gamma(q,T)=\frac{2\pi}{T}=\omega.$$

Лемма 14 доказана.

Из леммы 14 вытекает, что

$$\check{\mu}(y_*) = \left|\mathrm{Im}\lambda\right|.$$

Теперь обратим внимание, что множество корней n-ой степени из $-c$ имеет вид

$$\left\{ \sqrt[n]{c} \left(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k\right) \right\}, \qquad \varphi_k = \frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \quad 0 \leqslant k < n.$$

Заметим, что при любом натуральном $n \geqslant 2$ мнимая часть хотя бы одного из них будет не меньше чем $\frac{1}{2}$. Действительно, рассмотрим $k = \left[\left(n-2\right)/4\right]$. Тогда

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\left(\frac{n-2}{4} - \frac{1}{2}\right) \leqslant \varphi_k \leqslant \frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\left(\frac{n-2}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}$$

Откуда при $n \geqslant 3$ следует, что $\varphi_k \in [\pi/6, 5\pi/6]$, а при $n = 2$ получим $\varphi_k = \pi/2$. Тем самым

$$\sup_{\substack{a\in\mathcal{E}^n \\ \|a\|_I \leqslant c}} \sup_{y\in\mathcal{S}_*(a)} \check{\mu}(y) \geqslant \check{\mu}(y_*) = |\mathrm{Im}\lambda| = \sqrt[n]{c}\sin\varphi_k \geqslant \frac{1}{2}\sqrt[n]{c}.$$

Теорема III доказана.

Глава 3

3 Совпадение показателей колеблемости

Основным результатом данной главы является доказательство того, что все показатели колеблемости совпадают между собой на решениях систем с постоянными коэффициентами. Важным промежуточным результатом является вывод двусторонних оценок на количество нулей тригонометрических сумм. Данные оценки будут неоднократно использованы в этой и последующих главах. В параграфе 3.2 оценка снизу на количество нулей обобщается на произвольные суммы квазимногочленов. Завершается данная глава доказательством теоремы IV.

3.1 Некоторые свойства тригонометрических сумм

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение непосредственно вытекающее из теоремы Ролля

Утверждение 6. *Для произвольной непрерывно дифференцируемой функции* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *и промежутка времени* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *имеет место неравенство*

$$\nu(f, \Delta) \leqslant \nu(f', \Delta) + 1, \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

Рассмотрим и зафиксируем произвольный набор чисел $0 < \omega_1 < \ldots < \omega_k$. Определим по нему величину

$$\lambda \overset{\text{def}}{=} \min_{i>j} \frac{\omega_i}{\omega_j} > 1. \tag{3.1}$$

Лемма 15. *Для произвольной константы* $C \geqslant 1$ *и вектора* $m \in S^{k-1}$*, найдется число* $n \in \mathbb{N}$ *и индекс* $p \in \overline{1, k}$ *такие, что будут выполнены неравенства*

$$\left|m_p \omega_p^n\right| \geqslant C \max_{j \neq p} \left|m_j \omega_j^n\right|, \qquad n \leqslant 2k \left\lceil \ln_\lambda C \right\rceil.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию возвращающую номер максимального по модулю элемента в наборе $\{m_i \omega_i^s\}_{i=1}^k$

$$L(s) = \max_i \left\{i\colon\ |m_i \omega_i^s| \geqslant \left|m_j \omega_j^s\right|\ \forall j\right\}.$$

Заметим, что функция L неубывающая. Действительно, покажем, что для произвольного $s \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $L(s) \leqslant L(s+1)$. По определению функции $L(s)$, имеем

$$\left|m_{L(s)} \omega_{L(s)}^s\right| \geqslant \left|m_{L(s+1)} \omega_{L(s+1)}^s\right|, \qquad \left|m_{L(s)} \omega_{L(s)}^{s+1}\right| \leqslant \left|m_{L(s+1)} \omega_{L(s+1)}^{s+1}\right|.$$

Откуда вытекает

$$\omega_{L(s)} = \frac{\left|m_{L(s)}\omega_{L(s)}^{s+1}\right|}{\left|m_{L(s)}\omega_{L(s)}^{s}\right|} \leqslant \frac{\left|m_{L(s+1)}\omega_{L(s+1)}^{s+1}\right|}{\left|m_{L(s+1)}\omega_{L(s+1)}^{s}\right|} = \omega_{L(s+1)}.$$

Пользуясь тем, что, по условию, набор ω_i строго возрастающий, из неравенства $\omega_{L(s)} \leqslant \omega_{L(s+1)}$, получим требуемое.

Обозначим, через M выражение $\min_i \{i\colon \lambda^i > C\} = \lceil \ln_\lambda C \rceil$. Из того, что функция L неубывающая и принимает не более k различных значений вытекает, что в наборе чисел $\{L(sM)\}_{s=0}^{2k}$ найдется последовательная тройка чисел таких, что

$$L\big((s-1)M\big) = L\big(sM\big) = L\big((s+1)M\big) \stackrel{\text{def}}{=} p.$$

Откуда, по определению функции L, получим

$$\left|m_p\omega_p^{(s-1)M}\right| \geqslant \left|m_j\omega_j^{(s-1)M}\right|, \qquad \left|m_p\omega_p^{(s+1)M}\right| \geqslant \left|m_j\omega_j^{(s+1)M}\right|, \qquad j \in \overline{1,k}.$$

Умножая первое и деля второе неравенство на ω_p^M, получим

$$\left|m_p\omega_p^{sM}\right| \geqslant \left|m_j\omega_j^{sM}\right| \frac{\omega_p^M}{\omega_j^M}, \qquad \left|m_p\omega_p^{sM}\right| \geqslant \left|m_j\omega_j^{sM}\right| \frac{\omega_j^M}{\omega_p^M}, \qquad j \in \overline{1,k}.$$

Которые равносильны неравенству

$$\left|m_p\omega_p^{sM}\right| \geqslant \left|m_j\omega_j^{sM}\right| \max\left\{\frac{\omega_p^M}{\omega_j^M}, \frac{\omega_j^M}{\omega_p^M}\right\}, \qquad j \in \overline{1,k} \tag{3.2}$$

Заметим, что по определению чисел λ и M, для произвольных индексов $i > j$ выполнено

$$\frac{\omega_i^M}{\omega_j^M} \geqslant \lambda^M > C.$$

Из неравенства (3.2) для произвольного $j \neq p$ вытекает требуемое неравенство

$$\left|m_p\omega_p^{sM}\right| \geqslant C\left|m_j\omega_j^{sM}\right|.$$

Лемма 15 доказана.

Заменяя набор $\{\omega_i\}$ в лемме 15 на набор $\left\{\omega_i^{-1}\right\}$, придем к утверждению

Следствие 11. *Для произвольной константы $C \geqslant 1$ и вектора $m \in S^{k-1}$, найдется число $n \in \mathbb{N}$ и индекс $p \in \overline{1,k}$ такие, что будут выполнены неравенства*

$$\left|m_p\omega_p^{-n}\right| \geqslant C\max_{j\neq p}\left|m_j\omega_j^{-n}\right|, \qquad n \leqslant 2k\lceil \ln_\lambda C\rceil.$$

Лемма 16. *Для произвольного вектора $m \in S^{k-1}$ и $n \in \mathbb{Z}$ из неравенства*

$$\left|m_p\omega_p^{n}\right| \geqslant 2k\max_{j\neq p}\left|m_j\omega_j^{n}\right|,$$

вытекает

$$\left|m_p\omega_p^n\right| - \sum_{j\neq p}\left|m_j\omega_j^n\right| \geqslant \frac{1}{3}\min\left\{\omega_1^n, \omega_k^n\right\}.$$

Доказательство. Из условий леммы вытекают неравенства

$$\left|m_p\omega_p^n\right| - \sum_{j\neq p}\left|m_j\omega_j^n\right| \geqslant \left|m_p\omega_p^n\right| - \sum_{j\neq p}\frac{1}{2k}\left|m_p\omega_p^n\right| \geqslant \frac{1}{2}\left|m_p\omega_p^n\right|, \tag{3.3}$$

$$|m_p|\,\omega_p^n \geqslant 2k\max_{i\neq p}|m_i|\,\omega_i^n \geqslant 2\sum_{i\neq p}|m_i|\,\omega_i^n. \tag{3.4}$$

Пользуясь тем, что $m \in S^{k-1}$, получим

$$\sum_{i=1}^{k}|m_i| \geqslant \sum_{i=1}^{k} m_i^2 = 1.$$

Из упорядоченности набора $\{\omega_i\}$ следует, что

$$\omega_i^n \geqslant \min_i \omega_i^n = \min\left\{\omega_1^n, \omega_k^n\right\}.$$

Откуда прибавляя к обоим частям неравенства (3.4) величину $2\,|m_p|\,\omega_p^n$, придем к неравенству

$$3\,|m_p|\,\omega_p^n \geqslant 2\sum_{i=1}^{k}|m_i|\,\omega_i^n \geqslant 2\min\left\{\omega_1^n, \omega_k^n\right\}\sum_{i=1}^{k}|m_i| \geqslant 2\min\left\{\omega_1^n, \omega_k^n\right\}.$$

В итоге, подставляя данное неравенство в (3.3), получим требуемое

$$|m_p|\,\omega_p^n - \sum_{i\neq p}|m_i|\,\omega_i^n \geqslant \frac{1}{2}\left|m_p\omega_p^n\right| \geqslant \frac{1}{3}\min\left\{\omega_1^n, \omega_k^n\right\}.$$

Лемма 16 доказана.

Определим функцию

$$F(\tau) = m_1\cos(\omega_1\tau + \alpha_1) + \ldots + m_k\cos(\omega_k\tau + \alpha_k), \quad \alpha, m \in \mathbb{R}^k, \tag{3.5}$$

а под выражением $F^{(s)}$ будем понимать ее s-ю производную (или первообразную если $s < 0$) вида

$$F^{(s)}(\tau) = m_1\omega_1^s\cos(\omega_1\tau + \widetilde{\alpha}_1) + \ldots + m_k\omega_k^s\cos(\omega_k\tau + \widetilde{\alpha}_k), \quad m \in \mathbb{R}^k,$$

где $\widetilde{\alpha}_i = \alpha_i + \pi s/2$.

А также определим число

$$N \overset{\text{def}}{=} 2k\left\lceil \ln_\lambda 2k\right\rceil, \tag{3.6}$$

где величина λ определялась выше по формуле (3.1).

Лемма 17. *Для произвольных векторов $m \in S^{k-1}, \alpha \in \mathbb{R}^k$ и промежутка $\Delta \subset \mathbb{R}$ выполнено неравенство*

$$\nu(F,\Delta) \leqslant \left\lceil \frac{|\Delta|\,\omega_k}{\pi} \right\rceil + N.$$

Доказательство. Из леммы 15 при $C = 2k\omega_k/\omega_1$ вытекает, что для некоторого номера $n \in \overline{0,N}$ и индекса $p \in \overline{1,k}$ будет выполнено неравенство

$$\left|m_p\omega_p^n\right| \geqslant 2k\frac{\omega_k}{\omega_1}\max_{j\neq p}\left|m_j\omega_j^n\right| \geqslant 2\frac{\omega_k}{\omega_1}\sum_{j\neq p}\left|m_j\omega_j^n\right|.$$

Пользуясь, упорядоченностью набора $\{\omega_i\}$ получим неравенства

$$\left|m_p\omega_p^n\right| \geqslant 2\frac{\omega_k}{\omega_1}\sum_{j\neq p}\left|m_j\omega_j^n\right| \geqslant 2\sum_{j\neq p}\left|m_j\omega_j^n\right|. \tag{3.7}$$

$$\left|m_p\omega_p^{n+1}\right| \geqslant \omega_1\left|m_p\omega_p^n\right| \geqslant 2\omega_k\sum_{j\neq p}\left|m_j\omega_j^n\right| \geqslant 2\sum_{j\neq p}\left|m_j\omega_j^{n+1}\right|, \tag{3.8}$$

Разобьем числовую прямую на отрезки I_i и J_i, заданные формулами

$$I_i = \left[\frac{\pi i - \widetilde{\alpha}_p - \pi/4}{\omega_p}, \frac{\pi i - \widetilde{\alpha}_p + \pi/4}{\omega_p}\right], \qquad J_i = \left[\frac{\pi i - \widetilde{\alpha}_p + \pi/4}{\omega_p}, \frac{\pi i - \widetilde{\alpha}_p + 3\pi/4}{\omega_p}\right],$$

где $\widetilde{\alpha}_p = \alpha_p + \pi n/2$. Заметим, что на отрезках I_i выполнено неравенство

$$|\cos(\omega_p\tau + \widetilde{\alpha}_p)| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tau \in I_i, \forall i.$$

Тогда для $\tau \in I_i$, пользуясь неравенством (3.7), получим неравенство

$$\begin{aligned}\left|F^{(n)}(\tau)\right| &\geqslant \left|m_p\omega_p^n\cos(\omega_p\tau + \widetilde{\alpha}_p)\right| - \sum_{j\neq p}\left|m_j\omega_j^n\cos(\omega_j\tau + \widetilde{\alpha}_j)\right| \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left|m_p\omega_p^n\right| - \sum_{j\neq p}\left|m_j\omega_j^n\right| \geqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)\left|m_p\omega_p^n\right| > 0.\end{aligned}$$

Из которого вытекает, что на отрезках I_i нет нулей функции $F^{(n)}$. Аналогично, на отрезках J_i будет выполнено неравенство

$$|\sin(\omega_p\tau + \widetilde{\alpha}_p)| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tau \in J_i, \forall i.$$

Из которого для $\tau \in J_i$, пользуясь (3.8), получим

$$\begin{aligned}\left|F^{(n+1)}(\tau)\right| &\geqslant \left|m_p\omega_p^{n+1}\sin(\omega_p\tau + \widetilde{\alpha}_p)\right| - \sum_{j\neq p}\left|m_j\omega_j^{n+1}\sin(\omega_j\tau + \widetilde{\alpha}_j)\right| \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left|m_p\omega_p^{n+1}\right| - \sum_{j\neq p}\left|m_j\omega_j^{n+1}\right| \geqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)\left|m_p\omega_p^{n+1}\right| > 0.\end{aligned}$$

Тем самым на отрезках J_i нет нулей функции $F^{(n+1)}$. Из теоремы Ролля (утверждение 6) вытекает, что на отрезке J_i не более одного нуля функции $F^{(n)}$.

В результате такого построения получаем, что прямая разбита на отрезки $I_i \cup J_i$ на которых функция $F^{(n)}$ имеет не более одного нуля. Так как длины отрезков $I_i \cup J_i$ равны π/ω_p, то промежуток Δ пересекается не более чем с $\lceil |\Delta|\, \omega_p/\pi \rceil$ такими отрезками. И следовательно верно неравенство

$$\nu\left(F^{(n)}, \Delta\right) \leqslant \left\lceil \frac{|\Delta|\, \omega_p}{\pi} \right\rceil.$$

Тогда последовательно применяя теорему Ролля (утверждение 6) к данному неравенству, а так же пользуясь тем, что, по построению, $n \leqslant N$, получим требуемое утверждение

$$\nu(F, \Delta) \leqslant \nu\left(F^{(n)}, \Delta\right) + n \leqslant \left\lceil \frac{|\Delta|\, \omega_p}{\pi} \right\rceil + N \leqslant \left\lceil \frac{|\Delta|\, \omega_k}{\pi} \right\rceil + N.$$

Лемма 17 доказана.

Для произвольного промежутка времени $\Delta \subset \mathbb{R}$, функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и чисел δ, h, n обозначим через $\mathrm{Seq}_\Delta(f, n, \delta, h)$ множество всех строго возрастающих последовательностей $\{\tau_i\} \subset \Delta$ из не менее чем n элементов таких, что для любого i выполнены неравенства

$$|f(\tau_i)| \geqslant \delta, \qquad f(\tau_i) f(\tau_{i+1}) < 0, \qquad |\tau_i - \tau_{i+1}| \leqslant h.$$

Непосредственно из данного определения вытекают следующие свойства.

Утверждение 7. *Для произвольного промежутка времени $\Delta \subset \mathbb{R}$, функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ и чисел $\delta_1 \geqslant \delta_2, h_1 \leqslant h_2, n_1 \geqslant n_2$ верно*

$$\mathrm{Seq}_\Delta(f, n_1, \delta_1, h_1) \subset \mathrm{Seq}_\Delta(f, n_2, \delta_2, h_2).$$

Утверждение 8. *Если для промежутка времени $\Delta \subset \mathbb{R}$, непрерывной функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ и чисел δ, h, n множество $\mathrm{Seq}_\Delta(f, n, \delta, h)$ непусто, то функция f имеет не менее $n - 1$ нуля на внутренности Δ.*

Верно даже более сильное утверждение

Лемма 18. *Пусть для произвольных чисел δ, h, k, C и непрерывных функций $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $t \in \mathbb{R}^+$ множество $\mathfrak{S}(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Seq}_{[0,t)}(f, \lceil kt - C \rceil, \delta, h)$ не пусто, а также функция g удовлетворяет неравенству $|g(t)| < \delta$, тогда верна цепочка неравенств*

$$\varlimsup_{\tau\to\infty} \frac{\pi}{t} \nu\big(f + g, [0, t)\big) \geqslant \varliminf_{\tau\to\infty} \frac{\pi}{t} \nu\big(f + g, [0, t)\big) \geqslant \pi k.$$

Доказательство. Для произвольного $t \in \mathbb{R}^+$ из не пустоты $\mathfrak{S}(t)$ вытекает, что существует последовательность $\{\tau_i\} \in \mathfrak{S}(t)$. По определению последовательности

$\{\tau_i\}$, выполнено неравенство $|f(\tau_i)| \geqslant \delta$. Тогда пользуясь неравенством $|g(t)| < \delta$ получим

$$|f(\tau_i) + g(\tau_i)| \geqslant |f(\tau_i)| - |g(\tau_i)| > 0.$$

Следовательно, функция $f + g$ имеет тот же знак в точке τ_i что и функция f. Последовательность $\{f(\tau_i)\}$ знакочередующаяся, следовательно последовательность $\{f(\tau_i) + g(\tau_i)\}$ также знакочередующаяся. Из непрерывности функций f и g, вытекает, что на каждом интервале (τ_i, τ_{i+1}) будет хотя бы один ноль функции $f + g$. По определению последовательности $\{\tau_i\}$, в ней хотя бы $\lceil kt - C \rceil$ членов принадлежит промежутку $[0, t)$ и следовательно у функции $f + g$ будет хотя бы $\lceil kt - C \rceil - 1$ ноль на интервале $(0, t)$.

В силу произвольности выбора t получим

$$\varliminf_{\tau\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu\bigl(f + g, [0, t)\bigr) \geqslant \varliminf_{\tau\to\infty} \frac{\pi}{t}\bigl(\lceil kt - C \rceil - 1\bigr) = \pi k.$$

Лемма 18 доказана.

Лемма 19. *Для произвольных векторов $m \in S^{k-1}, \alpha \in \mathbb{R}^k$ и промежутка времени $\Delta \subset \mathbb{R}$ найдется номер $s \leqslant N$ такой, что множество*

$$\mathfrak{S} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Seq}_\Delta\left(F^{(-s)}, \left\lfloor \frac{|\Delta|\,\omega_1}{\pi} \right\rfloor, \frac{1}{3}\omega_k^{-s}, \frac{\pi}{\omega_1}\right) \neq \varnothing.$$

Доказательство. Из лемм 15 и 16 вытекает, что существует номер $s \in \overline{0, N}$ и индекс $p \in \overline{1, k}$, что выполнено неравенство

$$|m_p|\,\omega_p^{-s} - \sum_{i\neq p} |m_i|\,\omega_i^{-s} \geqslant \frac{1}{3}\omega_k^{-s}.$$

Рассмотрим последовательность

$$\tau_i = \frac{\pi i - \widetilde{\alpha}_p}{\omega_p}, \qquad \widetilde{\alpha}_p = \alpha_p + \frac{\pi s}{2}.$$

Покажем, что $\{\tau_i\} \in \mathfrak{S}$. Расстояние между соседними членами последовательности $|\tau_i - \tau_{i+1}| = \pi/\omega_p \leqslant \pi/\omega_1$. Также не менее чем $\lfloor |\Delta|\,\omega_1/\pi \rfloor$ ее членов принадлежит промежутку Δ. Заметим, что

$$\cos\left(\omega_p \tau_i + \widetilde{\alpha}_p\right) = (-1)^i.$$

Откуда получим

$$\bigl|F^{(-s)}(\tau_i)\bigr| \geqslant \bigl|m_p \omega_p^{-s} \cos\left(\omega_p \tau_i + \widetilde{\alpha}_p\right)\bigr| - \left|\sum_{i\neq p} m_i \omega_i^{-s} \cos\left(\omega_i \tau_i + \widetilde{\alpha}_i\right)\right| \geqslant$$
$$\geqslant |m_p|\,\omega_p^{-s} - \sum_{i\neq p} |m_i|\,\omega_i^{-s} \geqslant \frac{1}{3}\omega_k^{-s}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sgn} F^{(-s)}(\tau_i) = \operatorname{sgn}\Big(m_p \omega_p^{-s} \cos\left(\omega_p \tau_i + \widetilde{\alpha}_p\right)\Big) = (-1)^i \operatorname{sgn} m_p.$$

Тем самым, последовательность $\{F^{(-s)}(\tau_i)\}$ знакочередующаяся. Откуда вытекает, что последовательность $\{\tau_i\} \in \mathfrak{S}$. Лемма 19 доказана.

Лемма 20. *Если для дифференцируемой функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, промежутка времени $\Delta \subset \mathbb{R}$ и чисел δ, h, n множество $\operatorname{Seq}_\Delta\big(f, n, \delta, h\big)$ непусто, то и множество $\operatorname{Seq}_\Delta\big(f', n-1, \delta/h, 2h\big)$ также непусто.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{\tau_i\} \in \operatorname{Seq}_\Delta\big(f, n, \delta, h\big)$ и интервал (τ_i, τ_{i+1}). Построим точку $t_i \in (\tau_i, \tau_{i+1})$ такую, что

$$|f'(t_i)| \geqslant \frac{\delta}{h}, \qquad \operatorname{sgn} f'(t_i) = \operatorname{sgn} f(\tau_{i+1}).$$

Действительно, рассмотрим случай $f(\tau_{i+1}) > 0$ (случай $f(\tau_{i+1}) < 0$ рассматривается аналогично) и предположив противное, а именно, что все точки отрезка $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ удовлетворяют неравенству $f'(\tau) < \delta/h$, придем к противоречию

$$2\delta \leqslant f(\tau_{i+1}) - f(\tau_i) = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f'(\tau)\, d\tau < (\tau_{i+1} - \tau_i)\frac{\delta}{h} \leqslant \delta.$$

Следовательно на каждом из интервалов (τ_i, τ_{i+1}) найдется точка t_i с требуемыми свойствами. В результате получим последовательность точек $\{t_i\}$, состоящую не менее чем из $N-1$ элементов, причем расстояния между ними будут не превосходить $2h$. Из того, что последовательность $\{f(\tau_{i+1})\}$ знакочередующаяся вытекает, что последовательность $\{f'(t_i)\}$ также будет знакочередующейся.

Откуда вытекает, что $\{t_i\} \in \operatorname{Seq}_\Delta\big(f', N-1, \delta/h, 2h\big)$. Лемма 20 доказана.

Лемма 21. *Для произвольных векторов $m \in S^{k-1}, \alpha \in \mathbb{R}^k$ и промежутка времени $\Delta \subset \mathbb{R}$ множество*

$$\mathfrak{S} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Seq}_\Delta\left(F, \left\lfloor \frac{|\Delta|\,\omega_1}{\pi} \right\rfloor - N, \left(2^N \pi \frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^{-N}, \frac{\pi}{\omega_1} 2^N\right) \neq \varnothing.$$

Доказательство. По лемме 19 имеем, что для некоторого $s \leqslant N$ множество

$$\operatorname{Seq}_\Delta\left(F^{(-s)}, \left\lfloor \frac{|\Delta|\,\omega_1}{\pi} \right\rfloor, \frac{1}{3}\omega_k^{-s}, \frac{\pi}{\omega_1}\right) \neq \varnothing. \tag{3.9}$$

Последовательно применяя s раз, лемму 20 к множеству (3.9) получим, что

$$\mathfrak{S}_s \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Seq}_\Delta\left(F, \left\lfloor \frac{|\Delta|\,\omega_1}{\pi} \right\rfloor - s, \frac{1}{3} 2^{-\frac{s(s-1)}{2}} \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^{-s} \pi^{-s}, 2^s \frac{\pi}{\omega_1}\right) \neq \varnothing.$$

Заметим, что $N \geqslant 2$, откуда имеем

$$\frac{1}{3} 2^{-\frac{s(s-1)}{2}} \geqslant 2^{-\frac{s(s-1)}{2}+2} \geqslant 2^{-N^2}.$$

Тогда, применяя утверждение 7, получим, что для любого $s \leqslant N$ верно вложение

$$\mathfrak{S}_s \subset \mathfrak{S} = \mathrm{Seq}_\Delta\left(F, \left\lfloor \frac{|\Delta|\,\omega_1}{\pi} \right\rfloor - N, \left(2^N \pi \frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^{-N}, 2^N \frac{\pi}{\omega_1}\right).$$

И следовательно, множество $\mathfrak{S}$ не пусто. Лемма 21 доказана.

Соединяя вместе леммы 17 и 21, а также утверждение 8 получим

Следствие 12. *Для произвольных векторов $m \in \mathbb{R}^k_*, \alpha \in \mathbb{R}^k$ и момента времени $t \in \mathbb{R}^+$ имеет место неравенство*

$$\left\lfloor \frac{t\omega_1}{\pi} \right\rfloor - N - 1 \leqslant \nu\big(F, [0,t)\big) = \nu\left(\frac{F}{|m|}, [0,t)\right) \leqslant \left\lceil \frac{t\omega_k}{\pi} \right\rceil + N.$$

3.2 Нижняя оценка колеблемости суммы квазимногочленов

Лемма 22. *Для произвольных чисел $n, P \in \mathbb{N}$, набора $\{\delta_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ и произвольной ненулевой функции*

$$f(\tau) = \sum_{i=1}^{n} e^{\delta_i \tau} P_i(\tau), \qquad \tau \in \mathbb{R}, \tag{3.10}$$

где P_i – многочлены степени не выше P, функция f имеет менее $n(P+1)$ нулей (с учетом кратности) на числовой прямой $\mathbb{R}$.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_n$, а также, что многочлены P_i – ненулевые.

Будем проводить доказательство по индукции относительно размера набора показателей экспонент $\{\delta_i\}_{i=1}^n$. База индукции (при $n = 1$) вытекает из того, что функция $f(\tau)$ будет произведением функции $e^{\delta_1 \tau}$, нигде не равной нулю, на ненулевой многочлен степени не выше P, который, по основной теореме алгебры, имеет не более P корней.

Предположим, что утверждение доказано для всех наборов $\{\delta_i\}$ размера не более $n-1$. Заметим, что число нулей функции f не изменяется при умножении на функции нигде не равные нулю. То есть на число нулей функции f всей числовой прямой совпадает с числом нулей функции

$$f(\tau)e^{-\delta_n \tau} = P_n(\tau) + \sum_{i=1}^{n-1} e^{(\delta_i - \delta_n)\tau} P_i(\tau), \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

продифференцировав которую $P+1$ раз, получим функцию

$$\widetilde{f}(\tau) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Big(f(\tau)e^{-\delta_n \tau}\Big)^{(P+1)} = \sum_{i=1}^{n-1} \Big(e^{(\delta_i - \delta_n)\tau} P_i(\tau)\Big)^{(P+1)} = \sum_{i=1}^{n-1} e^{(\delta_i - \delta_n)\tau} \widetilde{P}_i(\tau), \qquad \tau \in \mathbb{R},$$

где многочлены $\widetilde{P}_i$ являются линейной комбинацией многочлена P_i и его производных

$$\widetilde{P}_i(\tau) = \sum_{j=0}^{P} C_P^j (\delta_i - \delta_n)^j P_i^{(P-j)}(\tau).$$

Откуда вытекает, что многочлены $\widetilde{P}_i$ имеют степень не выше P, а так же будут отличными от тождественного нуля. Тогда у функции $\widetilde{f}$, по предположению индукции, не более $(n-1)(P+1)$ нулей. По теореме Ролля, после дифференцирования функции $P+1$ раз количество ее нулей, если и уменьшится, то не более чем на $P+1$. Следовательно, у функции f не более $n(P+1)$ нулей, что завершает индукционный переход. Лемма 22 доказана.

Для фиксированных чисел $k, n, P \in N$ и наборов $\{\omega_i\}_{i=1}^k$, $\{\delta_i\}_{i=1}^n$ таких, что выполнены неравенства

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_k, \qquad \delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_n.$$

Определим ненулевые вектор-функции $\widetilde{\Upsilon} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{2k}$ и $\Psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{2k}$

$$\widetilde{\Upsilon}_i(\tau) = \sum_{s=1}^{n} e^{\delta_s \tau} P_{s,i}(\tau), \qquad \Psi_i(\tau) = \begin{cases} \cos(\omega_i \tau), & i \vdots 2, \\ \sin(\omega_i \tau), & i \not\vdots 2, \end{cases} \qquad \tau \in \mathbb{R}, i \in \overline{1, 2k},$$

где $P_{s,i}$ – произвольные многочлены степени меньше P. Через $\mathfrak{P} \in \mathbb{R}_*^{2nkP}$ будем обозначать вектор, представляющий совокупность коэффициентов всех многочленов $P_{s,i}$.

В дальнейшем будем изучать количество нулей функции

$$G(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\widetilde{\Upsilon}(\tau), \Psi(\tau)\right), \qquad \tau \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Замечание 5. Функция F, определенная в (3.5), является частным случаем функции G, когда $P = 1, n = 1, \delta_1 = 0$.

Заметим, что функция $\left|\widetilde{\Upsilon}(\tau)\right|$ имеет нулей не больше чем у любой из ее координат, которые, в свою очередь, по лемме 22 имеют не более nP нулей. Обозначим разбиение числовой прямой нулями функции $\left|\widetilde{\Upsilon}(\tau)\right|$ через $\mathbb{T}_0$, которое будем отождествлять с набором точек его образующего. Тогда функция

$$\Upsilon(\tau) = \frac{\widetilde{\Upsilon}(\tau)}{|\Upsilon(\tau)|}, \qquad \tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}_0,$$

определена и непрерывно дифференцируема всюду за исключением точек разбиения $\mathbb{T}_0$. Откуда вытекает

Утверждение 9. *Для произвольного промежутка времени Δ количество нулей у функций G и $(\Upsilon(\cdot), \Psi(\cdot))$ удовлетворяет следующему неравенству*

$$\nu\big(G, \Delta\big) \geqslant \nu\big((\Upsilon(\cdot), \Psi(\cdot)), \Delta\big), \qquad \nu\big(G, \Delta\big) \leqslant \nu\big((\Upsilon(\cdot), \Psi(\cdot)), \Delta\big) + nP.$$

Лемма 23. *Для произвольного вектора $\mathfrak{P} \in \mathbb{R}_*^{2nkP}$ и индекса $i \in \overline{1,2k}$ существует разбиение числовой прямой состоящее не более чем из $4n^3P$ точек такое, что на каждом интервале данного разбиения функция Υ_i будет непрерывно дифференцируемой и монотонной по τ.*

Доказательство. Рассмотрим производную функции Υ_i

$$\Upsilon_i'(\tau) = \left(\frac{\widetilde{\Upsilon}_i(\tau)}{\left|\widetilde{\Upsilon}_i(\tau)\right|} \right)' = \frac{\widetilde{\Upsilon}_i'(\tau) \left|\widetilde{\Upsilon}_i(\tau)\right|^2 - \frac{1}{2}\widetilde{\Upsilon}_i(\tau) \left(\left|\widetilde{\Upsilon}_i(\tau)\right|^2 \right)'}{\left|\widetilde{\Upsilon}_i(\tau)\right|^3} =$$

$$= \frac{1}{\left|\widetilde{\Upsilon}_i(\tau)\right|^3} \sum_{j=1}^{2k} \left(\widetilde{\Upsilon}_i'(\tau) \left|\widetilde{\Upsilon}_j(\tau)\right|^2 - \widetilde{\Upsilon}_i(\tau) \left(\widetilde{\Upsilon}_j(\tau) \widetilde{\Upsilon}_j'(\tau) \right) \right), \qquad \tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}_0.$$

Заметим, что числитель представим в виде (3.10). Действительно, все возможные показатели экспонент будут иметь вид $\{s_1 + s_2 + s_3 : s_1, s_2, s_3 \in \{\delta_i\}_{i=1}^n\}$ и следовательно их число не превосходит $C_{n+2}^3 \leqslant n^3$, а полиномы при них будут иметь степень меньше $3P$. Откуда по лемме 22 числитель имеет не более $3n^3P$ нулей, которые, совместно с точками $\mathbb{T}_0$, образуют разбиение состоящее не более чем из $3n^3P + nP \leqslant 4n^3P$ точек. На каждом из интервалов этого разбиения функция Υ_i будет непрерывно дифференцируемой и иметь фиксированный знак производной. Лемма 23 доказана.

Лемма 24. *Для произвольного вектора $\mathfrak{P} \in \mathbb{R}_*^{2nkP}$ вариация функции Υ на всей числовой прямой не превосходит $24kn^3P$.*

Доказательство. Для произвольного $i \in \overline{1,2k}$ рассмотрим функцию Υ_i. Из того, что $\Upsilon \in S^{2k-1}$ вытекает неравенство $|\Upsilon_i| \leqslant 1$. По лемме 23, для Υ_i существует разбиение на каждом интервале которого она монотонна. Следовательно, ее вариация на любом интервале данного разбиения не превосходит 2. Заметим, что функция Υ_i имеет не более nP точек разрыва. Откуда вытекает, что вариация функции Υ_i удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{V}_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon_i \leqslant 2nP + 2\left(4n^3P + 1\right) \leqslant 12n^3P.$$

Вариация функции Υ не превосходит суммы вариаций всех ее координат Υ_i. Откуда получим требуемое

$$\mathrm{V}_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon \leqslant \sum_{i=1}^{2k} \mathrm{V}_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon_i \leqslant 24kn^3P.$$

Лемма 24 доказана.

Лемма 25. *Для произвольного вектора $\mathfrak{P} \in \mathbb{R}_*^{2nkP}$ и промежутка времени $\Delta \subset$*

$\mathbb{R}$ *верно неравенство*

$$\left\lfloor \frac{|\Delta|\,\omega_1}{\pi} \right\rfloor - (N+2)\left\lceil \frac{24k^2n^3P}{\varepsilon} + np \right\rceil \leqslant \nu\,(G,\Delta)\,, \qquad t \in \mathbb{R}^+,$$

где $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \left(2^N\pi\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^{-N}$*, а число* N *задается равенством* (3.6).

Доказательство. Из леммы 24 вытекает, что существует подразбиение $\mathbb{T}_\Upsilon$ разбиения $\mathbb{T}_0$ такое, чтобы вариация Υ на каждом из интервалов не превосходила ε/k, причем количество точек в разбиении $\mathbb{T}_\Upsilon$ будет удовлетворять неравенству

$$\#\mathbb{T}_\Upsilon \leqslant \#\mathbb{T}_0 + \left\lceil k\varepsilon^{-1}\mathrm{V}_{-\infty}^{+\infty}\Upsilon \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{24k^2n^3P}{\varepsilon} \right\rceil + nP.$$

Рассмотрим произвольный интервал $I = (I_a, I_b)$ разбиения $\mathbb{T}_\Upsilon$. По построению, вариация функции Υ на нем не превосходит ε/k. Рассмотрим точку τ_I заданную уравнением

$$\mathrm{V}_{I_a}^{\tau_I}\Upsilon = \mathrm{V}_{\tau_I}^{I_b}\Upsilon \leqslant \frac{\varepsilon}{2k}, \qquad \tau_I \in I.$$

Тогда, по определению вариации, для произвольной точки $\tau \in (I_a, \tau_I)$ получим (для случая $\tau \in (\tau_I, I_b)$ аналогично)

$$|\Upsilon(\tau_I) - \Upsilon(\tau)| \leqslant |\Upsilon(I_a) - \Upsilon(\tau)| + |\Upsilon(\tau) - \Upsilon(\tau_I)| \leqslant \mathrm{V}_{I_a}^{\tau_I} \leqslant \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Откуда, пользуясь тождеством $|\Psi| \equiv \sqrt{k}$, получим неравенство

$$\big|\big(\Upsilon(\tau), \Psi(\tau)\big) - \big(\Upsilon(\tau_I), \Psi(\tau)\big)\big| \leqslant |\Upsilon(\tau) - \Upsilon(\tau_I)|\,|\Psi(\tau)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2k}\sqrt{k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \tau \in I. \quad (3.12)$$

Заметим, что функция $\big(\Upsilon(\tau_I), \Psi(\cdot)\big)$ имеет вид (3.5) и следовательно, к ней применима лемма 21 для отрезка I. Из которой вытекает, что существует последовательность $\{t_i\}$ такая, что выполнены неравенства

$$\big|\big(\Upsilon(\tau_I), \Psi(t_i)\big)\big| \geqslant \varepsilon, \qquad \big(\Upsilon(\tau_I), \Psi(t_i)\big)\big(\Upsilon(\tau_I), \Psi(t_{i+1})\big) < 0, \qquad \forall i. \qquad (3.13)$$

Из неравенств (3.12) и (3.13) вытекает, что

$$\big|\big(\Upsilon(t_i), \Psi(t_i)\big)\big| \geqslant \big|\big(\Upsilon(\tau_I), \Psi(t_i)\big)\big| - \big|\big(\Upsilon(t_i), \Psi(t_i)\big) - \big(\Upsilon(\tau_I), \Psi(t_i)\big)\big| \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall i.$$

Таким образом,

$$\operatorname{sgn}\left(\Upsilon(t_i), \Psi(t_i)\right) = \operatorname{sgn}\left(\Upsilon(\tau_I), \Psi(t_i)\right), \qquad \forall i.$$

Следовательно, последовательность $\big\{(\Upsilon(t_i), \Psi(t_i))\big\}$ является знакочередующейся. Согласно лемме 21, в последовательности $\{t_i\}$ не менее $\lfloor |\Delta|\,\omega_1/\pi \rfloor - N$ элементов. Откуда получим, что у функции $(\Upsilon(\cdot), \Psi(\cdot))$ не менее $|I|\,\omega_1/\pi - N - 2$ нулей на интервале I. Складывая количество нулей полученных на всех элементах разбиения получим

$$\nu\big((\Upsilon(\cdot), \Psi(\cdot))\,, \Delta\big) \geqslant \left\lfloor \frac{|\Delta|\,\omega_1}{\pi} \right\rfloor - (N+2)\#\mathbb{T}_\Upsilon.$$

Тогда из утверждения 9 вытекает требуемое неравенство

$$\nu\big(G,\Delta\big) \geqslant \nu\big(\left(\Upsilon(\cdot),\Psi(\cdot)\right),\Delta\big) \geqslant \left\lfloor \frac{|\Delta|\,\omega_1}{\pi} \right\rfloor - (N+2)\left\lceil \frac{24k^2n^3P}{\varepsilon} + np \right\rceil.$$

Лемма 25 доказана.

3.3 Точность и абсолютность показателя колеблемости автономной системы дифференциальных уравнений

Из утверждения 1 и линейной независимости векторов жорданового базиса вытекает

Следствие 13. *В обозначениях утверждения 1 для произвольного решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и комплексного числа $\lambda \in \mathrm{Sp}_\lambda(x)$ существует вектор m такой, что*

$$(x(t),m) = e^{\mathrm{Re}\,\lambda t}\cos|\mathrm{Im}\,\lambda|\,t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Лемма 26. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$ и ее решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ верно неравенство*

$$\hat{\nu}^\bullet(x) \leqslant \min|\mathrm{Im}\,\mathrm{Sp}_\lambda(x)|\,.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\lambda \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathop{\arg\min}_{a\in\mathrm{Sp}_\lambda(x)}|\mathrm{Im}\,a|\,,$$

в случае, если минимум достигается сразу на нескольких собственных значениях, то в качестве λ выбираем любое из них. Пользуясь свойствами решений линейных автономных систем (следствие 13), получим, что существует вектор $m_* \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$f(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (x(t),m_*) = e^{\mathrm{Re}\,\lambda t}\cos|\mathrm{Im}\,\lambda|\,t.$$

Нули функции f имеют вид $\tau_i = (\pi i + \pi/2)\,/\,|\mathrm{Im}\,\lambda|$ при $|\mathrm{Im}\,\lambda| > 0$, следовательно, на промежутке $[0,t)$ у функции f будет $\lfloor (t\,|\mathrm{Im}\,\lambda| + \pi/2)\,/\pi \rfloor$ нулей. Откуда получим требуемое неравенство

$$\hat{\nu}^\bullet(x) = \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{\pi}{t}\nu(x,m,t) \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{\pi}{t}\nu(x,m_*,t) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{\pi}{t}\nu\big(\left(x(\cdot),m_*\right),[0,t)\big) =$$
$$= \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{\pi}{t}\left\lfloor \frac{t}{\pi}\,|\mathrm{Im}\,\lambda| + \frac{1}{2} \right\rfloor = |\mathrm{Im}\,\lambda|\,.$$

Лемма 26 доказана.

Лемма 27. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$ и ее решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ верно неравенство*

$$\check{\nu}^\circ(x) \geqslant \min\left|\operatorname{Im}\operatorname{Sp}_\lambda(x)\right|.$$

Доказательство. В случае, если $|\operatorname{Im}\operatorname{Sp}_\lambda(x)| = 0$, то утверждение леммы напрямую следует из утверждения 2. Пусть теперь $|\operatorname{Im}\operatorname{Sp}_\lambda(x)| > 0$. Рассмотрим произвольный вектор $m \in \mathbb{R}^n_*$. Заметим, что проекцию решения x на вектор m можно представить в виде (3.11). Действительно, из представления (3) вытекает, что функция $(x(\cdot), m)$ имеет вид

$$(x(t), m) = \sum_{i=1}^{\#\operatorname{Sp}_\lambda(x)/2} e^{\delta_i t}\left(P_i(t)\cos\omega_i t + Q_i(t)\sin\omega_i t\right), \qquad t \in \mathbb{R},$$

где P_i, Q_i некоторые многочлены, степень которых, можно грубо оценить размерностью системы A. Возможно, что в результате такой проекции функция $(x(\cdot), m)$ получится тождественно равной нулю (коэффициенты всех многочленов P_i, Q_i равны нулю), в таком случае, для произвольного $t \in \mathbb{R}^+$ имеет место равенство $\nu(x, m, t) = \infty$. В противном случае (не все многочлены P_i, Q_i нулевые), к функции $(x(\cdot), m)$ применима лемма 25, из которой вытекает неравенство

$$\nu(x, m, t) = \nu\big((x(\cdot), m), [0, t)\big) \geqslant \left\lfloor \frac{t\min\left|\operatorname{Im}\operatorname{Sp}_\lambda(x)\right|}{\pi} \right\rfloor - C,$$

где величина C, определенная в лемме 25, зависит только от набора собственных чисел матрицы A, входящих в решение x, и размерности системы A. Из которого получим требуемое утверждение

$$\check{\nu}^\circ(x) = \varliminf_{t\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu(x, m, t) \geqslant \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\left(\left\lfloor \frac{t\min\left|\operatorname{Im}\operatorname{Sp}_\lambda(x)\right|}{\pi} \right\rfloor - C\right) = \min\left|\operatorname{Im}\operatorname{Sp}_\lambda(x)\right|.$$

Лемма 27 доказана.

Соединяя вместе леммы 26 и 27, а также утверждения 2 получим утверждение теоремы

$$\begin{array}{ccccc} & & \hat{\nu}^\circ(x) & \leqslant & \hat{\nu}^\bullet(x) & \leqslant & \min\left|\operatorname{Im}\operatorname{Sp}_\lambda(x)\right| \\ & & \rotatebox{90}{$\leqslant$} & & \rotatebox{90}{$\leqslant$} & & \\ \min\left|\operatorname{Im}\operatorname{Sp}_\lambda(x)\right| & \leqslant & \check{\nu}^\circ(x) & \leqslant & \check{\nu}^\bullet(x) & & \end{array}.$$

Теорема IV доказана.

Глава 4

4 Спектр показателя ориентированной вращаемости

Данная глава посвящена изучению свойств показателя ориентированной вращаемости. В начале главы приводится техника вычисления значений данного показателя. Откуда, пользуясь базовыми утверждениями эргодической теории (теорема Вейля [41]), выводится теорема V. Завершается четвертая глава доказательством точности и абсолютности показателя ориентированной вращаемости, а также выводом его спектра для автономных систем дифференциальных уравнений с простыми чисто мнимыми собственными значениями, то есть доказательством теоремы VI.

4.1 Методика вычисления значений показателей ориентированной вращаемости

Утверждение 10 [65]. *Для произвольной вектор-функции*

$$\widetilde{x}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} g_1(\tau) \\ g_2(\tau) \end{pmatrix} \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2\right)$$

и момента времени $t \in \mathbb{R}^+$ такого, что на отрезке $[0, t]$ нет нулей $\widetilde{x}$, функционал Θ можно представить в виде

$$\Theta(\widetilde{x}, t) = \int\limits_0^t \frac{d}{dt} \arctan \frac{g_2(\tau)}{g_1(\tau)}\, dt = \int\limits_0^t \frac{\dot{g}_2(\tau) g_1(\tau) - g_2(\tau)\dot{g}_1(\tau)}{g_1^2(\tau) + g_2^2(\tau)}\, dt.$$

Лемма 28. *Рассмотрим вектор функцию*

$$\widetilde{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2\right),$$

такую, что $|\widetilde{x}(t)| \neq 0$, $g_1(0) = 0$ и все нули функции g_1 простые. Обозначим через t_k нули функции g_1, начиная с $t_0 = 0$. Тогда верно тождество

$$|\Theta(\widetilde{x}, t_k)| = \left| \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \Big(\operatorname{sgn} g_2(t_i) - \operatorname{sgn} g_2(t_{i-1}) \Big) \right|, \qquad k > 0. \tag{4.1}$$

Доказательство. Обозначим ориентированный угол, на который повернется вектор $\widetilde{x}$ за время $[t_{i-1}, t_i]$ через $\Delta_i \stackrel{\text{def}}{=} \Theta(\widetilde{x}, t_i) - \Theta(\widetilde{x}, t_{i-1})$. Тогда функционал Θ можно представить в виде

$$\Theta(\widetilde{x}, t_k) = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i. \tag{4.2}$$

Рассмотрим произвольный отрезок времени $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ не содержащий нулей функции g_1. Тогда ориентированный угол, на который повернется вектор $\widetilde{x}$ за время $[a, b]$ равен $\arctan \frac{g_2(b)}{g_1(b)} - \arctan \frac{g_2(a)}{g_1(a)}$. Тем самым Δ_i можно представить как

$$\Delta_i = \lim_{t \to t_i - 0} \arctan \frac{g_2(t)}{g_1(t)} - \lim_{t \to t_{i-1} + 0} \arctan \frac{g_2(t)}{g_1(t)}.$$

По условию $g_2(t_i), g_2(t_{i-1}) \neq 0$, то следовательно, Δ_i равно

$$\Delta_i = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} g_2(t_i) \operatorname{sgn} g_1(t_i - 0) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} g_2(t_{i-1}) \operatorname{sgn} g_1(t_{i-1} + 0).$$

Пользуясь тем, что g_1 непрерывна, то есть ее знак сохраняется на отрезке между последовательными нулями, а так же тем, что по условию нули функции g_1 простые, получим

$$\operatorname{sgn} g_1(t_i - 0) = \operatorname{sgn} g_1(t_{i-1} + 0) = - \operatorname{sgn} g_1(t_{i-1} - 0).$$

Откуда вытекает

$$\Delta_i = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} g_1(t_i - 0) \Big(\operatorname{sgn} g_2(t_i) - \operatorname{sgn} g_2(t_{i-1}) \Big) =$$
$$= \frac{\pi}{2} (-1)^i \operatorname{sgn} g_1(t_0 - 0) \Big(\operatorname{sgn} g_2(t_i) - \operatorname{sgn} g_2(t_{i-1}) \Big).$$

Подставляя полученное выражение в (4.2) получим требуемый результат. Лемма 28 доказана.

Лемма 29. *В обозначениях предыдущей леммы, для произвольного момента времени $t \in \mathbb{R}^+$ верно неравенство*

$$\left| |\Theta(\widetilde{x}, t)| - \left| \pi \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \operatorname{sgn} g_2(t_i) \right| \right| \leqslant 2\pi,$$

где k это максимальный индекс такой, что $t_k \leqslant t$.

Доказательство. Если в выражении (4.1) раскрыть скобки и сгруппировать слагаемые получим следующее равенство

$$|\Theta(\widetilde{x}, t_k)| = \left| \pi \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \operatorname{sgn} g_2(t_i) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} g_2(t_0) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} g_2(t_k) \right|, \qquad k > 0.$$

Откуда, пользуясь тем, что, по определению момента t_k, на интервале (t_k, t) нет нулей функции g_1, получим цепочку неравенств

$$\left| |\Theta(\widetilde{x}, t)| - \left| \pi \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \operatorname{sgn} g_2(t_i) \right| \right| \leqslant \Big| |\Theta(\widetilde{x}, t)| - |\Theta(\widetilde{x}, t_k)| \Big| +$$
$$+ \left| |\Theta(\widetilde{x}, t_k)| - \left| \pi \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \operatorname{sgn} g_2(t_i) \right| \right| \leqslant \left| \lim_{\tau \to t - 0} \arctan \frac{g_2(\tau)}{g_1(\tau)} - \lim_{\tau \to t_k + 0} \arctan \frac{g_2(\tau)}{g_1(\tau)} \right| +$$
$$+ \left| \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} g_2(t_0) + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} g_2(t_k) \right| \leqslant 2\pi.$$

Лемма 29 доказана.

4.2 Типичное значение показателя для систем дифференциальных уравнений общего вида

Утверждение 11. *Решение $x \in \mathcal{S}_*(A)$ можно представить в виде*

$$x(t) = \sum_{i=1}^{l} v_i f_i(t), \tag{4.3}$$

где v_i – вектора в $\mathbb{R}^n$, а $f_i\colon \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ – линейно независимые в совокупности функции вида $t^k e^{\alpha t}\cos\beta t$ или $t^k e^{\alpha t}\sin\beta t$. Причем все вектора v_i являются линейно независимыми.

Утверждение 12. *Если в разложении* (4.3) *присутствует одна из функций*

$$t^k e^{\alpha t}\cos\beta t, \qquad t^k e^{\alpha t}\sin\beta t$$

при $\beta \neq 0$, то обязательно присутствует и вторая.

Утверждение 13. *В разложении* (4.3) *типичного решения присутствуют все функции вида $e^{\operatorname{Re}\lambda t}\cos\operatorname{Im}\lambda t$, где λ это любое из собственных значений матрицы A.*

Из линейной независимости векторов v_i в разложении (4.3) вытекает

Следствие 14. *Для любой вектор-функции x представимой в виде* (4.3) *и любого выражения вида*

$$\widetilde{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{l} \widetilde{v}_i f_i(t),$$

где $\widetilde{v}_i$ – произвольные вектора в $\mathbb{R}^2$, существует гомоморфизм $L \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2)$ такой, что $\widetilde{x} = Lx$.

Лемма 30. *Для произвольной вектор-функции $x \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ представимой в виде* (4.3) *и содержащей в своем разложении функцию вида $e^{\lambda t}$ верно равенство $\hat{\theta}^\bullet(x) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм L (из следствия 14 следует, что он существует) такой, что вектор-функция Lx будет иметь вид

$$Lx = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что по определению функционала Θ получим

$$\Theta(Lx, t) = 0, \qquad t \geqslant 0.$$

Тем самым, получаем требуемое равенство

$$0 \leqslant \hat{\theta}^\bullet(x) \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\,|\Theta(Lx, t)| = 0.$$

Лемма 30 доказана.

Лемма 31. *Для произвольной вектор-функции $x \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ представимой в виде (4.3) и содержащей в своем разложении функции вида $e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t$ и $e^{\alpha_2 t} \cos \beta_2 t$ такие, что β_1 рационально не соизмеримо с β_2 (в частности они оба не равны нулю) верно равенство $\hat{\theta}^\bullet(x) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм L (из следствия 14 следует, что он существует) такой, что вектор-функция Lx будет иметь вид

$$Lx = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t \\ e^{\alpha_2 t} \cos \beta_2 t \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим последовательность моментов времени $t_k = \pi k / \beta_1$. Из леммы 29 вытекает следующая оценка для функционала $\Theta(Lx, t)$

$$\left| |\Theta(Lx,t)| - \left| \pi \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \operatorname{sgn} e^{\alpha_2 t_i} \cos \beta_2 t_i \right| \right| =$$

$$= \left| |\Theta(Lx,t)| - \left| \pi \sum_{i=1}^{K(t)} \operatorname{sgn} \cos \left(\beta_2 \frac{\pi i}{\beta_1} + \pi i \right) \right| \right| \leqslant 2\pi,$$

где $K(t)$ – это максимальный индекс такой, что $t_{K(t)} \leqslant t$. Заметим, так же что по определению момента времени $t_{K(t)}$ имеем $\left|\Theta(Lx,t) - \Theta(Lx, t_{K(t)})\right| \leqslant \pi$. Откуда, переходя к пределу по t, получим цепочку равенств

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} |\Theta(Lx,t)| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{t_k} |\Theta(Lx,t_k)| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \frac{\pi}{t_k} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} \cos \omega i \right|, \tag{4.4}$$

где $\omega = \pi(1 + \beta_2/\beta_1)$.

Из того, что β_1 и β_2 рационально несоизмеримы, вытекает, что ω рационально несоизмеримо с π. Рассмотрим интегрируемую по Риману функцию $f(s) = \beta_1 \operatorname{sgn} \cos s$ и отображение $T(\alpha) = \alpha + \omega \mod 2\pi$, являющееся поворотом окружности на иррациональный угол. Заметим, что правую часть равенства (4.4) можно представить как временно́е среднее последовательности $f(T^k 0)$, а именно

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} f(T^i 0) = \frac{\beta_1}{k} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} \cos \omega i = \frac{\pi}{t_k} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} \cos \omega i, \qquad k \geqslant 0.$$

Применяя теорему Вейля [41] к последовательности $f(T^k 0)$, получим

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} f(T^i 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)\, ds = \frac{\beta_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn} \cos s\, ds = 0.$$

Из существования предела временного среднего последовательности $f(T^k 0)$ и непрерывности функции модуль, вытекает требуемое равенство

$$0 \leqslant \hat{\theta}^\bullet(x) \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} |\Theta(Lx,t)| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\pi}{t_k} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} \cos \omega i \right| = \left| \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} f(T^i 0) \right| = 0.$$

Лемма 31 доказана.

Рассмотрим случай, когда у матрицы A есть действительное собственное значение λ, то в представлении (4.3) типичного решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ будет присутствовать функция $e^{\lambda t}$. Тогда из леммы 30 вытекает, что $\hat{\theta}(x) = 0$.

Аналогично, если у матрицы A есть два собственных значения с несоизмеримыми мнимыми частями, то в представлении (4.3) типичного решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ будет присутствовать функции $e^{\operatorname{Re}\lambda_1 t}\sin\operatorname{Im}\lambda_1 t$ и $e^{\operatorname{Re}\lambda_2 t}\cos\operatorname{Im}\lambda_2 t$ откуда по лемме 31 получим, что $\hat{\theta}(x) = 0$.

Из утверждения 2, в обоих случаях, вытекает, что показатель ориентированной вращаемости типичного решения точен, абсолютен и равен нулю. Теорема V доказана.

4.3 Спектр показателя для автономных систем с простыми мнимыми собственными значениями

Лемма 32. *Для периодической вектор-функции $\widetilde{x} \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$ с периодом T, не проходящей через ноль верно равенство*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left|\Theta(\widetilde{x}, t)\right| = \frac{1}{T}\left|\Theta(\widetilde{x}, T)\right|.$$

Доказательство. Действительно, из утверждения 10 и периодичности функции $\widetilde{x}$ вытекает равенство

$$\Theta(\widetilde{x}, t) = \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor \Theta(\widetilde{x}, T) + \Theta\left(\widetilde{x}, t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right).$$

Из того, что кривая $\widetilde{x}$ не проходит через ноль следует, что максимум

$$M = \max_{t\in[0,T]} \Theta(\widetilde{x}, t)$$

существует и конечен. Откуда получаем неравенство

$$\left|\frac{1}{t}\Theta(\widetilde{x}, t) - \frac{1}{T}\Theta(\widetilde{x}, T)\right| \leqslant \frac{2M}{t}.$$

Переходя к переделу по t, получим требуемый результат

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left|\Theta(\widetilde{x}, t)\right| = \frac{1}{T}\left|\Theta(\widetilde{x}, T)\right|.$$

Лемма 32 доказана.

Лемма 33. *Для произвольной вектор-функции $x \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ представимой в виде (4.3) и содержащей в своем разложении функции вида $\sin\omega_1 t$ и $\cos\omega_2 t$ такие, что $\omega_2/\omega_1 = 2p/q$, где p/q – несократимая дробь, причем q нечетное, верно равенство $\hat{\theta}^\bullet(x) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм L (из следствия 14 следует, что он существует) такой, что вектор-функция Lx будет иметь вид

$$Lx = \begin{pmatrix} \sin \omega_1 t \\ \cos \omega_2 t \end{pmatrix}.$$

Заметим, что вектор-функция Lx является периодической с периодом $T = \frac{2\pi q}{\omega_1} = \frac{4\pi p}{\omega_2}$. Рассмотрим последовательность моментов времени $t_k = \pi k/\omega_1$. Из леммы 28 и периодичности функции Lx вытекает равенство

$$|\Theta(Lx, T)| = \left| \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{\frac{T\omega_1}{\pi}} (-1)^i \big(\operatorname{sgn} \cos \omega_2 t_i - \operatorname{sgn} \cos \omega_2 t_{i-1} \big) \right| = \left| \pi \sum_{i=1}^{2q} (-1)^i \operatorname{sgn} \cos \omega_2 t_i \right|.$$

Преобразуем данную сумму

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2q} (-1)^i \operatorname{sgn} \cos \omega_2 t_i &= \sum_{i=1}^{2q} \operatorname{sgn} \cos \left(\frac{2p\pi i}{q} + \pi i \right) = \sum_{i=1}^{2q} \operatorname{sgn} \cos \frac{2p+q}{q} \pi i = \\ &= \sum_{i=1}^{q} \operatorname{sgn} \cos \frac{2p+q}{q} \pi i + \sum_{i=q+1}^{2q} \operatorname{sgn} \cos \frac{2p+q}{q} \pi i = \\ &= \sum_{i=1}^{q} \operatorname{sgn} \cos \frac{2p+q}{q} \pi i + \sum_{i=1}^{q} \operatorname{sgn} \cos \left(\frac{2p+q}{q} \pi i + (2p+q)\,\pi \right). \end{aligned}$$

Откуда, пользуясь нечетностью q, получим

$$\sum_{i=1}^{2q} (-1)^i \operatorname{sgn} \cos \omega_2 t_i = \sum_{i=1}^{q} \operatorname{sgn} \cos \frac{2p+q}{q} \pi i - \sum_{i=1}^{q} \operatorname{sgn} \cos \frac{2p+q}{q} \pi i = 0.$$

Тогда из леммы 32 вытекает требуемое равенство

$$0 \leqslant \hat{\theta}^{\bullet}(x) \leqslant \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \left| \Theta(Lx, t) \right| = \frac{1}{T} \left| \Theta(Lx, T) \right| = 0.$$

Лемма 33 доказана.

В случае чисто мнимых и простых собственных значений матрицы A общее решение $x \in \mathcal{S}_*(A)$ имеет вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i a_i + \beta_i b_i) \sin \widetilde{\omega}_i t + (\beta_i a_i - \alpha_i b_i) \cos \widetilde{\omega}_i t,$$

где a_i, b_i набор линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^{2n}$, а α_i, β_i произвольные константы. Тем самым, любому решению можно сопоставить набор частот $\widetilde{\omega}_i$, которые участвуют в его записи, то есть для которых хотя бы одно из чисел α_i, β_i будет отличным от нуля. В результате получим отношение эквивалентности на множестве решений: два решения назовем эквивалентными, если им соответствуют одинаковые наборы частот. Из следствия 14 вытекает, что показатели ориентированной вращаемости совпадают на эквивалентных решениях.

Для произвольного непустого набора частот Ω обозначим через $x_\Omega \in \mathcal{S}_*(A)$, произвольное решение из класса эквивалентности, заданного набором частот Ω. Тогда для того, чтобы доказать утверждение теоремы VI достаточно проверить равенство

$$\theta(x_\Omega) = \gcd^*(\Omega). \tag{4.5}$$

Начнем доказательство равенства (4.5) с рассмотрения случая, когда $\gcd^*(\Omega) = 0$, а именно, когда выполнено одно из следующий условий

- в наборе Ω есть нулевая частота;
- в наборе Ω есть две рационально не соизмеримых частоты;
- в наборе Ω есть две частоты ω_i и ω_j такие, что $\omega_i/\omega_j = p/q$, где p/q – несократимая дробь, и при этом p четное.

Из лемм 30, 31 и 33 вытекает, что в перечисленных выше случаях имеет место равенство

$$\theta(x_\Omega) = 0 = \gcd^*(\Omega).$$

Теперь перейдем к рассмотрению случая, когда $\gcd^*(\Omega) \neq 0$.

Лемма 34. *Для произвольной вектор-функции $x \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n_*)$, числа $\alpha > 0$ и функции y заданной равенством $y(t) = x(\alpha t)$ верно*

$$\varkappa(y) = \alpha\varkappa(x),$$

где $\varkappa$ – это один из показателей ориентированной вращаемости $\check\theta^\circ, \hat\theta^\circ, \check\theta^\bullet, \hat\theta^\bullet$.

Доказательство. Из определения функционала Θ, следует, что он не зависит от параметризации функции, а только от ее траектории. Откуда для любого гомоморфизма $L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2)$ имеем

$$\Theta(Ly, t) = \Theta(Lx, \alpha t), \qquad t > 0.$$

Осталось только подставить данное равенство в определение показателя ориентированной вращаемости. Сделаем это для $\check\theta^\circ$ (для остальных показателей аналогично)

$$\begin{aligned}\check\theta^\circ(y) &= \varliminf_{t\to\infty} \inf_{L\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^2)} \frac{1}{t}\,|\Theta(Ly,t)| = \varliminf_{t\to\infty} \inf_{L\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^2)} \frac{\alpha}{\alpha t}\,|\Theta(Lx,\alpha t)| = \\ &= \varliminf_{\tau\to\infty} \inf_{L\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^2)} \frac{\alpha}{\tau}\,|\Theta(Lx,\tau)| = \alpha\check\theta^\circ(x).\end{aligned}$$

Лемма 34 доказана.

Рассмотрим вектор функцию ψ определенную равенством

$$\psi(t) = x_\Omega\left(\frac{t}{\mathrm{gcd}^*(\Omega)}\right) = \sum_{i=1}^{|\Omega|}(\alpha_i a_i + \beta_i b_i)\sin\omega_i t + (\beta_i a_i - \alpha_i b_i)\cos\omega_i t, \qquad t > 0,$$

где $\omega_i = \widetilde{\omega}_i/\mathrm{gcd}^*(\Omega)$ – нечетные натуральные числа такие, что наибольший общий делитель их равен единице. Из леммы 34 вытекает

$$\varkappa(x) = \mathrm{gcd}^*(\Omega)\varkappa(\psi), \qquad \varkappa \in \left\{\check{\theta}^\circ, \hat{\theta}^\circ, \check{\theta}^\bullet, \hat{\theta}^\bullet\right\}.$$

Следовательно, для доказательства равенства (4.5) достаточно показать, что $\theta(\psi) = 1$.

Заметим, что так определенная функция ψ является 2π периодической.

Лемма 35. *Для произвольного гомоморфизма $L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^2)$ такого, что кривая $L\psi$ не проходит через ноль, выполнено неравенство*

$$|\Theta(L\psi, 2\pi)| \geqslant 2\pi.$$

Доказательство. Так как ω_i нечетные целые числа, то $\psi(t+\pi) = -\psi(t)$. Откуда получаем, что кривая $L\psi$ на отрезке $[\pi, 2\pi]$ центрально симметрична кривой $L\psi$ на отрезке $[0, \pi]$, то есть получается из нее поворотом на 180 градусов, тем самым выполнено равенство $\Theta(L\psi, 2\pi) = 2\Theta(L\psi, \pi)$. Заметим также, что угол между векторами $L\psi(\pi)$ и $L\psi(0)$ равен π. Тогда, по определению функционала Θ получим, что для некоторого целого C выполнено равенство $\Theta(L\psi, \pi) = \pi + 2\pi C$ и следовательно

$$\Theta(L\psi, 2\pi) = 2\pi + 4\pi C,$$

откуда вытекает утверждение леммы. Лемма 35 доказана.

Лемма 36. *Существует гомоморфизм $L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^2)$ такой, что выполнено равенство*

$$|\Theta(L\psi, 2\pi)| = 2\pi.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность моментов времени $t_i = \pi i/\omega_1$ и функцию Γ определенную равенством

$$\Gamma(t) = \sum_{i=2}^{|\Omega|} a_i \sin\omega_i t,$$

где a_i некоторые числа, которые мы определим позже. Заметим, что для функции Γ имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{2\omega_1}(-1)^i \,\mathrm{sgn}\,\Gamma(t_i) = 0. \tag{4.6}$$

Действительно, для произвольного момента времени t_s и частоты ω_l верно тождество

$$(-1)^{2\omega_1-s}\sin\omega_l t_{2\omega_1-s} = \sin\Big(\omega_l t_{2\omega_1-s} + (2\omega_1-s)\,\pi\Big) = \sin\Big(\omega_l\frac{(2\omega_1-s)\,\pi}{\omega_1} - s\pi\Big) = \\ = \sin\Big(2\omega_l\pi - \omega_l\frac{\pi s}{\omega_1} - s\pi\Big) = -(-1)^s\sin\omega_l t_s.$$

Из которого вытекает

$$(-1)^{2\omega_1-s}\Gamma(t_{2\omega_1-s}) = -(-1)^s\Gamma(t_s).$$

Заметим также, что для произвольного $C \in \mathbb{Z}$ верно равенство

$$\Gamma(t_{\omega_1 C}) = \Gamma(\pi C) = 0. \tag{4.7}$$

Откуда получим

$$\sum_{i=1}^{2\omega_1}(-1)^i\operatorname{sgn}\Gamma(t_i) = \sum_{i=1}^{\omega_1-1}(-1)^i\operatorname{sgn}\Gamma(t_i) + \sum_{i=\omega_1+1}^{2\omega_1-1}(-1)^i\operatorname{sgn}\Gamma(t_i) = \\ = \sum_{i=1}^{\omega_1-1}(-1)^i\operatorname{sgn}\Gamma(t_i) + \sum_{i=1}^{\omega_1-1}(-1)^{2\omega_1-i}\operatorname{sgn}\Gamma(t_{2\omega_1-i}) = \\ = \sum_{i=1}^{\omega_1-1}(-1)^i\operatorname{sgn}\Gamma(t_i) - \sum_{i=1}^{\omega_1-1}(-1)^i\operatorname{sgn}\Gamma(t_i) = 0.$$

Заметим, что для любого t_s такого, что s не делится нацело на ω_1, существует $l \in \overline{1,n}$ такое, что выражение $\sin\omega_l t_s$ отлично от нуля. Действительно, предположим противное: найдется точка t_s такая, что $\sin\omega_l t_s = 0$, для любого l. Из того, что s не делится на ω_1 следует, что существует простое число p такое, что $\omega_1 \vdots p$ и $s \not\vdots p$. Из равенства $\sin\omega_l t_s = 0$ вытекает, что

$$\omega_l t_s = \pi\frac{\omega_l s}{\omega_1} = \pi C, \qquad C \in \mathbb{Z}.$$

То есть $\omega_l s$ делится нацело на ω_1. Из того, что $s \not\vdots p$ вытекает, что $\omega_l \vdots p$ для любого l. Откуда получаем противоречие с тем, что по определению частот ω_l их наибольший общий делитель равен единице. Следовательно, среди чисел $\sin\omega_l t_s$ будет хотя бы одно не равное нулю.

Тогда равенство $\Gamma(t_s) = 0$, является нетривиальной линейной комбинацией a_i, и следовательно задает гиперплоскость в пространстве параметров a_i. То есть, чтобы функция Γ была отлична от нуля в точках t_s достаточно, чтобы набор параметров a_i не лежал на конечном наборе гиперплоскостей. Выберем и зафиксируем параметры a_i таким образом, чтобы функция Γ была отлична от нуля в точках t_s.

Рассмотрим функцию $\widetilde{\Gamma}(t) = \Gamma(t) + \frac{\delta}{2}\cos\omega_1 t$, где $\delta = \min\limits_{s \not\vdots \omega_1} |\Gamma(t_s)|$. Заметим, что добавка $\frac{\delta}{2}\cos\omega_1 t$ мала и не изменит знак функции Γ в точках t_i, в которых она была отлична от нуля. То есть для любого $s \not\vdots \omega_1$ верно $\operatorname{sgn}\widetilde{\Gamma}(t_s) = \operatorname{sgn}\Gamma(t_s)$. Из равенства (4.7) вытекает

$$\widetilde{\Gamma}(t_{\omega_1 C}) = \frac{\delta}{2}\cos\omega_1 t_{\omega_1 C} = \frac{\delta}{2}\cos\pi\omega_1 C \neq 0.$$

Следовательно, функция $\widetilde{\Gamma}$ отлична от нуля во всех точках t_i.

Согласно следствию 14, существует такой гомоморфизм $L \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2)$, что

$$L\psi = \begin{pmatrix} \sin\omega_1 t \\ \widetilde{\Gamma}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\omega_1 t \\ \frac{\delta}{2}\cos\omega_1 t + \sum\limits_{i=2}^{|\Omega|} a_i \sin\omega_i t \end{pmatrix}.$$

Из доказанного выше следует, что $L\psi$ является 2π-периодической вектор функцией не проходящей через ноль. Применяя лемму 28 к $L\psi$, получим

$$|\Theta(L\psi, 2\pi)| = \pi \left| \sum_{i=1}^{2\omega_1} (-1)^i \operatorname{sgn}\widetilde{\Gamma}(t_i) \right| =$$

$$= \pi \left| \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2\omega_1 \\ i \not\vdots \omega_1}} (-1)^i \operatorname{sgn}\widetilde{\Gamma}(t_i) + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2\omega_1 \\ i \vdots \omega_1}} (-1)^i \operatorname{sgn}\widetilde{\Gamma}(t_i) \right|.$$

Пользуясь тем, что $\operatorname{sgn}\widetilde{\Gamma}(t_s) = \operatorname{sgn}\Gamma(t_s)$ для $s \not\vdots \omega_1$ и равенством (4.7), получим

$$|\Theta(L\psi, 2\pi)| = \pi \left| \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2\omega_1 \\ i \not\vdots \omega_1}} (-1)^i \operatorname{sgn}\Gamma(t_i) + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2\omega_1 \\ i \vdots \omega_1}} (-1)^i \operatorname{sgn}\frac{\delta}{2}\cos(\omega_1 t_i) \right| =$$

$$= \pi \left| \sum_{i=1}^{2\omega_1} (-1)^i \operatorname{sgn}\Gamma(t_i) + (-1)^{\omega_1} \operatorname{sgn}\cos(\omega_1 t_{\omega_1}) + (-1)^{2\omega_1} \operatorname{sgn}\cos(\omega_1 t_{2\omega_1}) \right|.$$

Пользуясь равенством (4.6), а также нечетностью ω_1, получим

$$|\Theta(L\psi, 2\pi)| = \pi \left| -\operatorname{sgn}\cos(\pi\omega_1) + \operatorname{sgn}\cos(2\pi\omega_1) \right| = 2\pi.$$

Лемма 36 доказана.

Лемма 37. *Существует $C > 0$ такое, что для любого гомоморфизма*

$$L \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^2)$$

такого, что кривая $L\psi$ не проходит через ноль, выполнено неравенство

$$|\Theta(L\psi, t)| \leqslant C, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Доказательство. Из определения функционала Θ следует, что существует такое $N \in \mathbb{Z}$, что при фиксированном t имеет место

$$\Theta(L\psi, t) = \delta + 2\pi N,$$

где $\delta \in [-\pi, \pi)$ – ориентированный угол между векторами $L\psi(t)$ и $L\psi(0)$, а $|N|$ характеризует полное число оборотов, которое совершил вектор $L\psi(\tau)$ за время t. Чтобы совершить один полный оборот вектор $L\psi(\tau)$ должен хотя бы дважды пересечь все прямые проходящие через начало координат. В частности, за время полного оборота необходимо, чтобы у первой координаты вектора $L\psi(\tau)$ было хотя бы два нуля. Первую координату вектора $L\psi(\tau)$ можно представить в виде (ψ, m), где m это некоторый вектор в $\mathbb{R}^{2n}$. Откуда получаем неравенство

$$|\Theta(L\psi, t)| \leqslant |\delta| + \pi\,|2N| \leqslant \pi + \pi\nu(\psi, m, t) \leqslant \pi + \pi\nu(\psi, m, 2\pi).$$

Из леммы 17 следует, что величина $\nu(\psi, m, 2\pi)$ равномерно ограничена по m, откуда вытекает утверждение леммы. Лемма 37 доказана.

Лемма 38. *Показатель ориентированной вращаемости вектор-функции ψ точен, абсолютен и удовлетворяет равенству*

$$\theta(\psi) = 1.$$

Доказательство. Из леммы 36 вытекает, что существует гомоморфизм L такой, что

$$\frac{1}{2\pi}\Theta(L\psi, 2\pi) = 1.$$

Тогда пользуясь леммой 32, получим оценку сверху на показатель ориентированной вращаемости

$$\hat{\theta}^{\bullet}(\psi) \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\,|\Theta(L\psi, t)| = \frac{1}{2\pi}\,|\Theta(L\psi, 2\pi)| = 1.$$

Для доказательства аналогичной оценки снизу изучим величину $\frac{1}{t}\,|\Theta(L\psi, t)|$ для произвольного гомоморфизма $L \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2)$, для которого кривая $L\psi$ не проходит через ноль. Действительно, пользуясь 2π-периодичностью функции ψ, имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\,|\Theta(L\psi, t)| &= \frac{1}{t}\left|\left\lfloor\frac{t}{2\pi}\right\rfloor\Theta(L\psi, 2\pi) + \Theta\left(L\psi, t - 2\pi\left\lfloor\frac{t}{2\pi}\right\rfloor\right)\right| \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{t}\left\lfloor\frac{t}{2\pi}\right\rfloor|\Theta(L\psi, 2\pi)| - \frac{1}{t}\left|\Theta\left(L\psi, t - 2\pi\left\lfloor\frac{t}{2\pi}\right\rfloor\right)\right|.\end{aligned}$$

Из леммы 37 следует, что существует $C > 0$ такое, что для любого $L \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2)$ и $\tau \in [0, 2\pi]$ верно неравенство $|\Theta\,(L\psi, \tau)| < C$. Откуда

$$\frac{1}{t}\,|\Theta(L\psi, t)| \geqslant \frac{1}{t}\left\lfloor\frac{t}{2\pi}\right\rfloor|\Theta(L\psi, 2\pi)| - \frac{1}{t}C \geqslant \frac{1}{2\pi}\,|\Theta(L\psi, 2\pi)| - \frac{2}{t}C.$$

Используя оценку из леммы 35, получим

$$\check{\theta}^{\circ}(x) = \varliminf_{t\to\infty} \inf_{L\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^2)} \frac{1}{t}\,|\Theta(L\psi, t)| \geqslant \varliminf_{t\to\infty} \inf_{L\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^2)} \frac{1}{2\pi}\,|\Theta(L\psi, 2\pi)| - \frac{2}{t}C =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\,|\Theta(L\psi, 2\pi)| \geqslant 1.$$

Из утверждения 2 и неравенства

$$1 \leqslant \check{\theta}^{\circ}(x) \leqslant \hat{\theta}^{\bullet} \leqslant 1,$$

вытекает требуемое утверждение. Лемма 38 доказана.

Теорема VI доказана.

Глава 5

5 Спектр показателя скорости блуждания

В данной главе определяется спектр скорости блуждания для систем с постоянными коэффициентами. В параграфе 5.1 доказывается, что спектр скорости блуждания для систем с простыми и чисто мнимыми собственными значениями представляет собой отрезок от минимальной до максимальной по модулю мнимой части собственных значений. Откуда, в последнем параграфе данной главы, выводится теорема VII.

5.1 Оценки скорости блуждания решений автономных систем с простыми мнимыми собственными значениями

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение непосредственно вытекающее из определения скорости блуждания

Утверждение 14. *Для произвольной непрерывно дифференцируемой вектор-функции $x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n_*$, положительной функции $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ имеют место равенства*

$$\check{\mu}(x) = \check{\mu}(fx), \qquad \hat{\mu}(x) = \hat{\mu}(fx).$$

Лемма 39. *Для произвольных вектор-функций $f, g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n_*)$ таких, что начиная с некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$ для некоторых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1/2)$ и $C \in \mathbb{R}^+$ верны неравенства*

$$\frac{|f(t) - g(t)|}{|f(t)|} \leqslant \varepsilon_1, \qquad \frac{\left|\dot{f}(t) - \dot{g}(t)\right|}{|f(t)|} \leqslant \varepsilon_2, \qquad \frac{\left|\dot{f}(t)\right|}{|f(t)|} \leqslant C, \qquad t \geqslant t_0,$$

то также верны и неравенства

$$|\check{\mu}(f) - \check{\mu}(g)| \leqslant 8C\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2, \qquad |\hat{\mu}(f) - \hat{\mu}(g)| \leqslant 8C\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2.$$

Доказательство. Для краткости в формулах будем опускать аргумент t. Заметим, что из условия вытекает цепочка неравенств

$$\frac{|f|}{|g|} \leqslant \frac{|f|}{|f + g - f|} \leqslant \frac{|f|}{|f| - |g - f|} \leqslant \frac{1}{1 - |f - g| \,/\, |f|} \leqslant \frac{1}{1 - \varepsilon_2} \leqslant 2.$$

Так же из утверждения 5 получим, что

$$\left|\frac{f}{|f|} - \frac{g}{|g|}\right| \leqslant 2\frac{|f - g|}{|f|} \leqslant 2\varepsilon_1.$$

Откуда выведем неравенство

$$\left|\frac{\dot f}{|f|}-\frac{\dot g}{|g|}\right|\leqslant\left|\frac{\dot f}{|f|}-\frac{\dot f}{|g|}\right|+\left|\frac{\dot f}{|g|}-\frac{\dot g}{|g|}\right|\leqslant\left|\dot f\right|\left|\frac{1}{|f|}-\frac{1}{|g|}\right|+\frac{\left|\dot f-\dot g\right|}{|f|}\frac{|f|}{|g|}\leqslant$$
$$\leqslant\left|\dot f\right|\left|\frac{1}{|f|}-\frac{1}{|g|}\right|+2\varepsilon_2\leqslant\frac{\left|\dot f\right|}{|g|}\frac{||g|-|f||}{|f|}+2\varepsilon_2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\dot f}{|f|}\frac{|f-g|}{|f|}\frac{|f|}{|g|}+2\varepsilon_2\leqslant 2C\varepsilon_1+2\varepsilon_2.$$

Заметим, что имеет место тождество

$$\frac{d}{dt}\frac{f}{|f|}=\frac{\dot f}{|f|}-\frac{f\big(f,\dot f\big)}{|f|^3}.$$

Откуда получим неравенство

$$\left|\left|\frac{d}{dt}\frac{f}{|f|}\right|-\left|\frac{d}{dt}\frac{g}{|g|}\right|\right|\leqslant\left|\frac{d}{dt}\frac{f}{|f|}-\frac{d}{dt}\frac{g}{|g|}\right|\leqslant\left|\frac{\dot f}{|f|}-\frac{\dot g}{|g|}\right|+\left|\frac{f\big(f,\dot f\big)}{|f|^3}-\frac{g\big(g,\dot g\big)}{|g|^3}\right|.$$

Оценим последнее слагаемое следующим образом

$$\left|\frac{f\big(f,\dot f\big)}{|f|^3}-\frac{g\big(g,\dot g\big)}{|g|^3}\right|\leqslant G_1+G_2+G_3,$$

где выражения G_1, G_2, G_3 определяются и оцениваются с использованием неравенства (2.1),

$$G_1=\left|\frac{f}{|f|}\left(\frac{f}{|f|},\frac{\dot f}{|f|}\right)-\frac{g}{|g|}\left(\frac{f}{|f|},\frac{\dot f}{|f|}\right)\right|=\left|\frac{f}{|f|}-\frac{g}{|g|}\right|\left|\left(\frac{f}{|f|},\frac{\dot f}{|f|}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|f-g|}{|f|}\left|\frac{f}{|f|}\right|\left|\frac{\dot f}{|f|}\right|\leqslant 2C\varepsilon_1,$$
$$G_2=\left|\frac{g}{|g|}\left(\frac{f}{|f|},\frac{\dot f}{|f|}\right)-\frac{g}{|g|}\left(\frac{g}{|g|},\frac{\dot f}{|f|}\right)\right|=\left|\frac{g}{|g|}\left(\frac{f}{|f|}-\frac{g}{|g|},\frac{\dot f}{|f|}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\frac{g}{|g|}\right|\left|\frac{f}{|f|}-\frac{g}{|g|}\right|\left|\frac{\dot f}{|f|}\right|\leqslant 2C\varepsilon_1,$$
$$G_3=\left|\frac{g}{|g|}\left(\frac{g}{|g|},\frac{\dot f}{|f|}\right)-\frac{g}{|g|}\left(\frac{g}{|g|},\frac{\dot g}{|g|}\right)\right|=\left|\frac{g}{|g|}\left(\frac{g}{|g|},\frac{\dot f}{|f|}-\frac{\dot g}{|g|}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\frac{g}{|g|}\right|^2\left|\frac{\dot f}{|f|}-\frac{\dot g}{|g|}\right|\leqslant 2C\varepsilon_1+2\varepsilon_2.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\left|\left|\frac{d}{dt}\frac{f}{|f|}\right|-\left|\frac{d}{dt}\frac{g}{|g|}\right|\right|\leqslant 8C\varepsilon_1+4\varepsilon_2.$$

Откуда вытекает

$$\frac{1}{t}\big|\gamma(f,t)-\gamma(g,t)\big| = \frac{1}{t}\left|\int_0^t \left|\frac{d}{d\tau}\frac{f(\tau)}{|f(\tau)|}\right| d\tau - \int_0^t \left|\frac{d}{d\tau}\frac{g(\tau)}{|g(\tau)|}\right| d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{t}\int_0^t \left|\left|\frac{d}{d\tau}\frac{f(\tau)}{|f(\tau)|}\right| - \left|\frac{d}{d\tau}\frac{g(\tau)}{|g(\tau)|}\right|\right| d\tau \leqslant 8C\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2.$$

Пользуясь непрерывностью функции модуль, получим требуемое неравенство для верхних пределов

$$|\hat\mu(f)-\hat\mu(g)| = \left|\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\gamma(f,t) - \varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\gamma(g,t)\right| =$$
$$= \varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\big|\gamma(f,t)-\gamma(g,t)\big| \leqslant 8C\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2.$$

Для нижних пределов выкладки аналогичны. Лемма 39 доказана.

Рассмотрим и зафиксируем размерность пространства $n\in\mathbb{N}$, числа $k,l\in\mathbb{N}$ такие, что $2k+l\leqslant n$, произвольный набор $0<\omega_1\leqslant\ldots\leqslant\omega_k$ и матрицу $L\in\mathcal{M}^{n\times 2k+l}$ максимального ранга. Определим также величины $\sigma_{\min},\sigma_{\max}$, как минимальное и максимальное сингулярное значение матрицы L соответственно. Из того, что матрица L имеет максимальный ранг вытекает, что $\sigma_{\min}>0$. Введем обозначение $\omega_{\min}$ равное нулю, если $l\neq 0$ и равное ω_1 в противном случае.

Для произвольного вектора $p\in\mathbb{R}^{2k+l}$ обозначим через ψ_p функцию

$$\psi_p(t) = \sum_{i=1}^{k}(p_{2i-1}L_{2i-1}+p_{2i}L_{2i})\cos\omega_i t + (p_{2i-1}L_{2i}-p_{2i}L_{2i-1})\sin\omega_i t + \sum_{i=2k+1}^{2k+l} p_i L_i, \quad (5.1)$$

где L_i – столбцы матрицы L. Заметим, что функция ψ_p представима в матричном виде

$$\psi_p(t) = LU(t)p, \qquad t\in\mathbb{R}, \quad (5.2)$$

где $U(t)$ ортогональная матрица

$$U(t) = \begin{pmatrix}
\cos\omega_1 t & -\sin\omega_1 t & & & & & & \\
\sin\omega_1 t & \cos\omega_1 t & & & & 0 & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & \cos\omega_k t & -\sin\omega_k t & & & \\
 & & & \sin\omega_k t & \cos\omega_k t & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & 0 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & 1
\end{pmatrix}.$$

Непосредственно из представления (5.2) вытекает

Утверждение 15. *Для произвольного вектора* $p \in \mathbb{R}^{2k+l}$ *производную* ψ_p *можно представить в виде*

$$\frac{d}{dt}\psi_p(t) = \psi_{\widetilde{p}}(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

где $\widetilde{p} = \begin{pmatrix} -\omega_1 p_2 & \omega_1 p_1 & \dots & -\omega_k P_{2k} & \omega_k P_{2k-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Утверждение 16. *Для произвольных векторов* $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^{2k+l}$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\psi_{p_1}(t) - \psi_{p_2}(t)| \leqslant \sigma_{\max} |p_1 - p_2| .$$

Лемма 40. *Для произвольного вектора* $p \in \mathbb{R}_*^{2k+l}$ *имеет место неравенство*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} |\psi_p(t)| \geqslant \sigma_{\min} |p| > 0.$$

Доказательство. Из свойств ортогональных матриц вытекает, что $|U(t)p| = |p|$. И следовательно имеет место вложение

$$B_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{U(t)p : t \in \mathbb{R}\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^{2k+l} : |x| = |p|\right\} \stackrel{\text{def}}{=} B_2.$$

Откуда, пользуясь свойствами сингулярного разложения матрицы L, получим требуемое утверждение

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} |\psi_p(t)| = \inf_{t\in\mathbb{R}} |LU(t)p| = \inf_{x\in B_1} |Lx| \geqslant \inf_{x\in B_2} |Lx| = |p| \inf_{x\in S^{2k-1}} |Lx| = \sigma_{\min} |p| .$$

Лемма 40 доказана.

Покажем, что выражения $\check{\mu}(\psi_p), \hat{\mu}(\psi_p)$ удовлетворяют условию липшицевости, как функции параметра p на сфере S^{2k+l-1}.

Лемма 41. *Для произвольных векторов* $p_1, p_2 \in S^{2k+l-1}$ *имеют место неравенства*

$$|\hat{\mu}(\psi_{p_1}) - \hat{\mu}(\psi_{p_2})| \leqslant C |p_1 - p_2| , \qquad |\check{\mu}(\psi_{p_1}) - \check{\mu}(\psi_{p_2})| \leqslant C |p_1 - p_2| ,$$

где $C = 12\omega_k \sigma_{\max}^2/\sigma_{\min}^2$.

Доказательство. Из утверждений 15, 16 и леммы 40 для произвольного $t \in \mathbb{R}$ вытекают неравенства

$$\frac{|\psi_{p_1}(t) - \psi_{p_2}(t)|}{|\psi_{p_1}(t)|} \leqslant \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} |p_1 - p_2| , \qquad \frac{\left|\dot{\psi}_{p_1}(t)\right|}{|\psi_{p_1}(t)|} = \frac{|\psi_{\widetilde{p}_1}(t)|}{|\psi_{p_1}(t)|} \leqslant \omega_k \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}},$$

$$\frac{\left|\dot{\psi}_{p_1}(t) - \dot{\psi}_{p_2}(t)\right|}{|\psi_{p_1}(t)|} = \frac{|\psi_{\widetilde{p}_1}(t) - \psi_{\widetilde{p}_2}(t)|}{|\psi_{p_1}(t)|} \leqslant \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} |\widetilde{p}_1 - \widetilde{p}_2| \leqslant \omega_k \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} |p_1 - p_2| ,$$

где $\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2$ определяются в соответствии с утверждением 15.

Применяя лемму 39, получим

$$|\hat{\mu}(\psi_{p_1}) - \hat{\mu}(\psi_{p_2})| \leqslant 8\left(\omega_k \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}\right)\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}|p_1 - p_2| + 4\omega_k \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}|p_1 - p_2| \leqslant$$
$$\leqslant 12\omega_k \frac{\sigma^2_{\max}}{\sigma^2_{\min}}|p_1 - p_2| = C\,|p_1 - p_2|\,.$$

Для нижних пределов выкладки аналогичны. Лемма 41 доказана.

Лемма 42. *Для произвольного вектора* $p \in \mathbb{R}^{2k+l}_*$ *выполнена цепочка неравенств*

$$\omega_{\min} \leqslant \check{\mu}(\psi_p) \leqslant \hat{\mu}(\psi_p) \leqslant \omega_k.$$

Доказательство. Из следствия 8 для произвольного $t \in \mathbb{R}$ вытекают неравенства

$$\pi \operatorname*{ess\,inf}_{m \in S^{n-1}} \nu(\psi_p, m, t) \leqslant \gamma(\psi_p, t) \leqslant \pi \operatorname*{ess\,sup}_{m \in S^{n-1}} \nu(\psi_p, m, t). \tag{5.3}$$

Заметим, что для произвольного $m \in S^{n-1}$ проекция вектор-функции ψ_p на вектор m имеет вид

$$(\psi_p(t), m) = F(t) + z_0, \qquad t \in \mathbb{R},$$

где $z_0 = \sum_{i=2k+1}^{2k+l} (L_i, m)\, p_i$, функция F имеет вид (3.5), а именно

$$F(t) = \sum_{j=1}^{k} |z_j| \cos(\omega_j t + \arg z_j),$$

где комплексные числа z_j имеют вид

$$z_j = p_{2j-1}\,(L_{2j-1}, m) + p_{2j}\,(L_{2j}, m) + ip_{2j-1}\,(L_{2j}, m) - ip_{2j}\,(L_{2j-1}, m)\,.$$

Для применения следствия 12 к функции $(\psi_p(\cdot), m)$ необходимо, чтобы среди чисел z_j было хотя бы одно отличное от нуля. Заметим, что если все z_j равны нулю, то выражение (ψ_p, m) тождественно равно нулю. Тогда множество векторов m, для которых все z_j равны нулю содержится в множестве $\{m : (\psi_p(0), m) = 0\}$, которое представляет из себя гиперплоскость. И следовательно, мера множества таких векторов $m \in S^{n-1}$ равна нулю.

Тогда для почти всех векторов $m \in S^{n-1}$ к функции $(\psi_p(\cdot), m)$ применимо следствие 12 из которого, пользуясь неравенством (5.3), получим

$$\pi\left(\left\lfloor \frac{t\omega_1}{\pi} \right\rfloor - N - 1\right) \leqslant \gamma(\psi_p, t) \leqslant \pi\left(\left\lceil \frac{t\omega_k}{\pi} \right\rceil + N\right),$$

где N определяется формулой (3.6). Откуда немедленно вытекает утверждение леммы

$$\omega_1 = \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\left(\left\lfloor \frac{t\omega_1}{\pi} \right\rfloor - N - 1\right) \leqslant \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\gamma(\psi_p, t) \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\gamma(\psi_p, t) \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\left(\left\lceil \frac{t\omega_k}{\pi} \right\rceil + N\right) = \omega_k.$$

Перейдем к случаю $l \neq 0$. Тогда первое неравенство $0 = \omega_{\min} \leqslant \check{\mu}(\psi_p)$ выполнено автоматически. Из утверждения 15 вытекает, что $\dot{\psi}_p = \psi_{\widetilde{p}}$, причем последние l координат вектора $\widetilde{p}$ равны нулю. Следовательно, для тех параметров p, для которых $\widetilde{p} \neq 0$ (то есть хотя бы одна из первых $2k$ координат вектора p не равна нулю), к функции $\dot{\psi}_p$ применимо предыдущее рассуждение для случая $l = 0$. Откуда, пользуясь утверждением 6, получим оценку

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\gamma(\psi_p, t) \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t} \operatorname*{ess\,sup}_{m\in S^{n-1}} \nu(\psi_p, m, t) \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{m\in S^{n-1}} \nu(\dot{\psi}_p, m, t) + 1 \right) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t} \left(\left\lceil \frac{t\omega_k}{\pi} \right\rceil + N + 1 \right) = \omega_k.$$

Для тех параметров p, для которых $\widetilde{p} = 0$ (то есть первые $2k$ координат вектора p равны нулю), вектор-функция ψ_p является постоянным вектором и следовательно,

$$\hat{\mu}(\psi_p) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \frac{\psi_p(\tau)}{|\psi_p(\tau)|} \right| d\tau = 0.$$

Лемма 42 доказана.

Лемма 43. *Существуют вектора $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^{2k+l}$ такие, что верны равенства*

$$\check{\mu}(\psi_{p_1}) = \hat{\mu}(\psi_{p_1}) = \omega_{\min}, \qquad \check{\mu}(\psi_{p_2}) = \hat{\mu}(\psi_{p_2}) = \omega_k.$$

Доказательство. Рассмотрим для произвольного $j \in \overline{1,k}$ вектор p, заданный равенствами $p_{2j} = 1$ и $p_i = 0, \forall i \neq 2j$. Тогда вектор-функция ψ_p будет периодической, с периодом $T = 2\pi/\omega_j$

$$\psi_p(t) = L_{2j-1}\cos\omega_j t + L_{2j}\sin\omega_j t.$$

Применив к ψ_p лемму 14, получим, что $\check{\mu}(\psi_p) = \hat{\mu}(\psi_p) = \omega_j$. Тем самым, в качестве вектора p_2 можно взять вектор p при $j = k$. Аналогично, если $l = 0$, то в качестве вектора p_1 можно взять вектор p при $j = 1$. Если $l \neq 0$, то в качестве p_1 рассмотрим вектор, у которого все координаты равны нулю кроме последней. Тогда вектор-функции ψ_p будет постоянным вектором и следовательно, $\check{\mu}(\psi_{p_1}) = \hat{\mu}(\psi_{p_1}) = \omega_{\min} = 0$. Лемма 43 доказана.

Из лемм 41, 42 и 43 вытекает

Лемма 44. *Имеет место равенство*

$$\left\{\check{\mu}(\psi_p) : p \in S^{2k+l-1}\right\} = \left\{\hat{\mu}(\psi_p) : p \in S^{2k+l-1}\right\} = [\omega_{\min}, \omega_k].$$

Доказательство. Определим функцию $f : S^{2k+l-1} \mapsto \mathbb{R}$ по формуле $f(p) = \hat{\mu}(\psi_p)$. Тогда из леммы 41 вытекает, что функция f липшицева, а следовательно непрерывна на области определения. Откуда вытекает, что множество значений функции f

будет отрезком, который мы обозначим его через $D(f)$. Согласно лемме 42 верно включение $D(f) \subset [\omega_{\min}, \omega_k]$. А в лемме 43 показано, что $\omega_{\min}, \omega_k \in D(f)$. Следовательно, множество значений функции f совпадает с отрезком $[\omega_{\min}, \omega_k]$. Равенство для нижних пределов доказывается заменой функции f на $f(p) = \check{\mu}(\psi_p)$. Лемма 44 доказана.

Из леммы 44, утверждения 14 и того, что произвольное решение системы $A \in \mathcal{C}^n$ с простыми и чисто мнимыми коэффициентами представимо в виде (5.1), вытекает

Следствие 15. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$ с простыми и чисто мнимыми коэффициентами имеет место равенство*

$$\mathrm{Sp}_{\check{\mu}}(A) = \mathrm{Sp}_{\hat{\mu}}(A) = \Big[\min\left|\mathrm{Im}\,\mathrm{Sp}_\lambda(A)\right|, \max\left|\mathrm{Im}\,\mathrm{Sp}_\lambda(A)\right|\Big].$$

5.2 Спектр скорости блуждания решений автономных систем

Определение 11. Для произвольной функции x, которая представима в виде (3), назовем *главной частью* функции x сумму членов разложения (3) с наибольшими показателями экспоненты и максимальной степени свободной переменной. То есть сумму тех членов, которые содержат $e^{\delta t}t^k$ в качестве множителя, где $\delta = \max \mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}_\lambda(x)$, а число k определяется как максимальная степень многочленов P_i, Q_i таких, что $\delta_i = \delta$. Главную часть функции x будем обозначать через $M[x]$.

Из утверждения 1 немедленно вытекает

Следствие 16. *В обозначениях утверждения 1 в произвольном решении $x \in \mathcal{S}(A)$ имеет место представление*

$$x(t) = M[x](t) + o(e^{\delta t}t^k), \qquad t \to \infty,$$

$$M[x](t) = e^{\delta t}t^k \left(\sum_i \widetilde{v}_i \cos\omega_i t + \widetilde{u}_i \sin\omega_i t + \widetilde{e}\right),$$

где вектора $\widetilde{v}_i, \widetilde{u}_i, \widetilde{e}$ являются линейными комбинациями векторов жорданово базиса матрицы A.

Следствие 17. *В обозначениях утверждения 1 в $\mathcal{S}(A)$ есть подпространство решений вида*

$$\sum_i e^{\delta_i t}\Big((\alpha_i v_i + \beta_i u_i)\cos\omega_i t + (\alpha_i u_i - \beta_i v_i)\sin\omega_i t\Big) + \sum_i e^{\delta_i t}\gamma_i e_i, \qquad t \in \mathbb{R},$$

задающееся произвольными постоянными $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

Утверждение 17. *Для произвольной системы* $A \in \mathcal{C}^n$ *и ее решения* $x \in \mathcal{S}_*(A)$ *существуют числа* $k, l \in \mathbb{N}$, *набор векторов* $\{L_i\}_{i=1}^{2k+l} \subset \mathbb{R}^n$, *являющийся подмножеством векторов жорданового базиса матрицы* A, *набор частот* $\{\omega_i\}_{i=1}^{k} \subset |\mathrm{Im}\,\mathrm{Sp}_\lambda(A)|$, *вектор* $p \in \mathbb{R}_*^{2k+l}$ *и числа* $\delta \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{N}$ *такие, что главную часть решения* x *можно представить в виде*

$$M[x](t) = e^{\delta t} t^s \psi_p(t),$$

где вектор-функция ψ_p *имеет вид* (5.1).

Лемма 45. *В обозначениях утверждения 17, имеет место включение*

$$[\omega_{\min}, \omega_k] \subset \left[\min_{\lambda \in \Lambda_\delta} |\mathrm{Im}\,\lambda|\,, \max_{\lambda \in \Lambda_\delta} |\mathrm{Im}\,\lambda|\right],$$

где $\Lambda_d e$ *определяется, как множество всех собственных значений чья действительная часть равна* δ.

Доказательство. По построению чисел ω_j, множество $\{\delta + i\omega_j\}_{j=1}^{k}$, а также комплексное число $\delta + i\omega_{\min}$ содержатся в множестве Λ_δ, откуда и вытекает требуемое включение. Лемма 45 доказана.

Лемма 46. *Для произвольной системы* $A \in \mathcal{C}^n$ *и ее решения* $x \in \mathcal{S}_*(A)$ *верны равенства*

$$\check{\mu}(x) = \check{\mu}(M[x]), \qquad \hat{\mu}(x) = \hat{\mu}(M[x]).$$

Доказательство. Пользуясь утверждением 17 представим главную часть решения x в виде

$$M[x](t) = e^{\delta t} t^s \psi_p(t).$$

По определению главной части решения x

$$M[x](t) - x(t) = o(e^{\delta t} t^s), \qquad t \to \infty.$$

Заметим, что в функцию $\dot{M[x]} - \dot{x}$, которая также представима в виде (3), будут входить только члены, либо с меньшим показателем экспоненты, чем δ, либо с тем же показателем, но меньшей степенью свободной переменной t. Откуда имеем

$$\dot{M[x]}(t) - \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(M[x](t) - x(t)\right) = o(e^{\delta t} t^s), \qquad t \to \infty.$$

Из утверждений 15 и 16 вытекает, что

$$\left|\dot{M[x]}\right| \leqslant \left|\frac{d}{dt}\left(e^{\delta t} t^s\right)\right| |\psi_p(t)| + e^{\delta t} t^s \left|\dot{\psi}_p(t)\right| \leqslant (1 + s + |\delta|)\, e^{\delta t} t^s \sigma_{\max} |p|\,, \qquad t \geqslant 1.$$

С другой стороны, из леммы 40 получим, что

$$|M[x](t)| = e^{\delta t} t^s |\psi_p(t)| \geqslant e^{\delta t} t^s \sigma_{\min} |p|\,, \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $t_0 \geqslant 1$, что для любого $t \geqslant t_0$ имеют место неравенства

$$\frac{|M[x](t) - x(t)|}{|M[x](t)|} \leqslant \varepsilon, \qquad \frac{\left|\dot{M[x]}(t) - \dot{x}(t)\right|}{|M[x](t)|} \leqslant \varepsilon, \qquad \frac{\left|\dot{M[x]}(t)\right|}{|M[x](t)|} \leqslant (1 + s + |\delta|)\,\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}.$$

Применяя лемму 39 к функциям $M[x]$ и x получим, что

$$|\check{\mu}(x) - \check{\mu}(M[x])| \leqslant C\varepsilon, \qquad |\hat{\mu}(x) - \hat{\mu}(M[x])| \leqslant C\varepsilon,$$

где $C = 8\,(1 + s + |\delta|)\,\sigma_{\max}/\sigma_{\min} + 4$. В силу произвольности выбора ε получаем требуемое утверждение. Лемма 46 доказана.

Лемма 47. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$ верно включение*

$$\mathrm{Sp}_{\check{\mu}}(A), \mathrm{Sp}_{\hat{\mu}}(A) \subset \bigcup_{\delta \in \mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}_{\lambda}(A)} \left[\min_{\lambda \in \Lambda_\delta} |\mathrm{Im}\,\lambda|\,, \max_{\lambda \in \Lambda_\delta} |\mathrm{Im}\,\lambda|\right]. \tag{5.4}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и заметим, что скорость блуждания вектор-функции не изменяется при умножении ее на положительную скалярную функцию. Откуда, пользуясь леммой 46, получим

$$\check{\mu}\,(x) = \check{\mu}\,(M[x]) = \check{\mu}\,(\psi_p)\,, \qquad \hat{\mu}\,(x) = \hat{\mu}\,(M[x]) = \hat{\mu}\,(\psi_p)\,,$$

где ψ_p определяется в утверждении 17. Тогда из леммы 42 немедленно вытекает неравенство

$$\omega_{\min} \leqslant \check{\mu}\,(M[x]) = \check{\mu}\,(x) \leqslant \hat{\mu}\,(x) = \hat{\mu}\,(M[x]) \leqslant \omega_k.$$

Откуда, пользуясь леммой 45, получим требуемое включение. Лемма 47 доказана.

Лемма 48. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$ верно включение*

$$\mathrm{Sp}_{\check{\mu}}(A), \mathrm{Sp}_{\hat{\mu}}(A) \supset \bigcup_{\delta \in \mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}_{\lambda}(A)} \left[\min_{\lambda \in \Lambda_\delta} |\mathrm{Im}\,\lambda|\,, \max_{\lambda \in \Lambda_\delta} |\mathrm{Im}\,\lambda|\right]. \tag{5.5}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $\delta \in \mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}_{\lambda}(A)$ и обозначим, через

$$\omega_{\delta,\min} = \min_{\lambda \in \Lambda_\delta} |\mathrm{Im}\,\lambda|\,, \qquad \omega_{\delta,\max} = \max_{\lambda \in \Lambda_\delta} |\mathrm{Im}\,\lambda|\,.$$

Пользуясь следствием 17, построим множество решений такое, что множество значений показателя скорости блуждания на нем совпало с отрезком $[\omega_{\delta,\min}, \omega_{\delta,\max}]$. Для этого рассмотрим следующие возможные случаи

- Множество Λ_δ состоит только из одного вещественного числа δ. Тогда рассмотрим произвольное решение вида

  $$x(t) = ve^{\delta t}.$$

  Проекция вектора x на единичную сферу представляет собой постоянный вектор и следовательно, $\check{\mu}(x) = \hat{\mu}(x) = 0$.

- Множество Λ_δ состоит только из двух комплексно сопряженных чисел.

$$x(t) = e^{\delta t}\big(v_1 \cos\omega_{\delta,\min} t + u_1 \sin\omega_{\delta,\min} t\big).$$

Из леммы 14 получим, что $\check{\mu}(x) = \hat{\mu}(x) = \omega_{\delta,\min}$.

- Множество Λ_δ содержит несколько пар комплексно сопряженных чисел. Тогда из следствия 17 вытекает, что существуют линейно независимые вектора $v_1, u_1, v_2, u_2 \in \mathbb{R}^n$ такие, что для произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ выражения

$$\begin{aligned} x(t) =&e^{\delta t}\Bigg((\alpha_1 v_1 + \beta_1 u_1)\cos\omega_{\delta,\min} t + (\alpha_1 u_1 - \beta_1 v_1)\sin\omega_{\delta,\min} t\Bigg) + \\ &+ e^{\delta t}\Bigg((\alpha_2 v_2 + \beta_2 u_2)\cos\omega_{\delta,\max} t + (\alpha_2 u_2 - \beta_2 v_2)\sin\omega_{\delta,\max} t\Bigg) \end{aligned}$$

будут решениями системы A. Заметим, что так как скорость блуждания вектор-функции не изменяется при умножении ее на положительную скалярную функцию, то к набору вектор-функций x применима лемма 44, по которой

$$\big\{\hat{\mu}(x) : (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4_*\big\} = [\omega_{\delta,\min}, \omega_{\delta,\max}],$$

и аналогичное равенство для нижней скорости блуждания.

- И последний случай, когда Λ_δ содержит, как действительное число δ, так и невещественные значения. Из следствия 17 вытекает, что существуют линейно независимые вектора $v, u, e \in \mathbb{R}^n$ такие, что для произвольных постоянных α, β, γ выражения

$$x(t) = e^{\delta t}\Bigg(\gamma e + (\alpha v + \beta u)\cos\omega_{\delta,\max} t + (\alpha u - \beta v)\sin\omega_{\delta,\max} t\Bigg).$$

будут решениями системы A. Применяя лемму 44, получим

$$\big\{\hat{\mu}(x) : (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3_*\big\} = [0, \omega_{\delta,\max}].$$

и аналогичное равенство для нижней скорости блуждания.

Лемма 48 доказана.

Из лемм 47 и 48 вытекает утверждение теоремы. Теорема VII доказана.

6 Заключение

В работе проведено подробное исследование свойств спектров характеристик колеблемости, блуждаемости и ориентированной вращаемости для линейных систем дифференциальных уравнений (с ограниченными коэффициентами), а также изучена тесная связь между показателями колеблемости и блуждаемости.

В работе показано, что верхний (нижний) слабый показатель блуждаемости оценивает сверху верхний (нижний) слабый показатель колеблемости и совпадает с ним при незначительном изменении определения последнего (замене точной нижней грани на существенную). Для сильных показателей блуждаемости и колеблемости данное равенство, вообще говоря, не имеет места. Однако в статье [58] было показано, что нижний сильный показатель колеблемости меньше, чем нижний сильный показатель блуждаемости. Несколько позже, в докладе [62] была установлена неупорядоченность верхних сильных показателей блуждаемости и колеблемости. Дальнейшее развитие техники первой главы настоящей диссертации позволяет установить, что, тем не менее, для широкого класса систем (колеблемость решений которых ограничена) верхний слабый показатель блуждаемости меньше, чем упомянутый незначительно измененный верхний сильный показатель колеблемости.

Показано совпадение сильных и слабых показателей колеблемости на решениях линейных автономных систем. Интересным остается вопрос о точности и спектре частот нулей решений линейных автономных систем.

Определен спектр показателя скорости блуждания линейных автономных систем. В частности, был получен ответ на вопрос поставленный в докладе [68] о совпадении спектров скорости блуждания у подобных систем. Однако открытым остается вопрос точности скорости блуждания решений линейных систем с постоянными коэффициентами.

Уточнены оценки сверху для скорости блуждания решений линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка. Из них, в частности, вытекает близость показателей блуждаемости и скорости блуждания к нулю для решений уравнений с малыми коэффициентами. На данный результат можно посмотреть, как на изучение свойств спектра скорости блуждания уравнения, полученного возмущением уравнения $y^{(n)} = 0$. Его спектр скорости блуждания состоит только из нуля, а решениями являются многочлены, для которых имеют место тривиальные равномерные оценки колеблемости (количество действительных корней многочлена не превосходит его степени). Тогда результаты третей, пятой глав, а также техника второй главы диссертации может послужить фундаментом для изучения свойств спектра скорости блуждания систем, полученных возмущением произвольной системы с постоянными коэффициентами.

Установлено, что для широкого класса систем с постоянными коэффициентами (у которых есть либо действительные собственные значения, либо два комплексных с несоизмеримыми мнимыми частями) ноль является типичным значением показателя ориентированной вращаемости. Также показано, что спектр этого показателя существенным образом определяется теоретико-числовыми свойствами набора мнимых частей собственных значений системы и может содержать (в отличие от показателей колеблемости и блуждаемости) значения, отличные и от нуля, и от мнимых частей собственных значений системы, причем мощность этого спектра может быть экспоненциально велика по сравнению с размерностью пространства. Из этого можно сделать вывод, что показатель ориентированной вращаемости, несмотря на его простое и естественное определение, не является в теории колебаний аналогом показателя Ляпунова.

Список литературы

[1] Асташова И.В. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа // И.В. Асташова и др.; под ред. И.В. Асташовой — М.: ЮНИТИ-ДАНА. 2012.

[2] Асташова И.В. О задаче Н.А. Изобова для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференц. уравнения. 2012. 48. № 6. С. 898–899.

[3] Асташова И.В. О поведении на бесконечности решений квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 2009. 45. № 11. С. 1671.

[4] Асташова И.В. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений четного порядка // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 25. М.: Изд-во Моск. ун-та. 2005. С. 3–17.

[5] Барабанов Е.А. О вычислении показателей решений линейных дифференциальных систем по временным геометрическим прогрессиям // Дифференц. уравнения. 1997. 33. №12. С. 1592–1600.

[6] Барабанов Е.А. Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1986. 22. №11. С. 1843–1853.

[7] Бурлаков Д.С. Верхняя оценка колеблемости решений некоторого класса линейных систем // Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием «теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова 2015 С. 37–38.

[8] Бурлаков Д.С. К вопросу о спектре скоростей блуждания неортогонального произведения двух поворотов // Дифференц. уравнения. 2012, 48, № 6. С. 906—907.

[9] Бурлаков Д.С. Оценки скорости блуждания решений линейного дифференциального уравнения через его коэффициенты // Дифференц. уравнения. 2016. 52. №8. С. 1003–1010.

Burlakov D.S. Estimates for the Wandering Rate of Solution of a Linear Differential Equation via Its Coefficients // Дифференц. уравнения. 2016. 52. №8. С. 1003–1010.

[10] Бурлаков Д.С. Спектр скоростей блуждания неортогонального произведения двух поворотов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2015, № 2 С. 49–53.

[11] Бурлаков Д.С. Спектры показателей вращения и вращаемости автономных систем с простыми чисто мнимыми собственными числами // Дифференц. уравнения. 2013, 49, № 6 С. 845.

[12] Бурлаков Д.С., Сергеев И.Н. Замечательные равенства, связывающие колеблемость и блуждаемость решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2012, 48, № 6 С. 899.

[13] Бурлаков Д.С., Цой С.В. Равенство полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Дифференц. уравнения. 2011, 47, № 11. С. 1662—1663.

[14] Бурлаков Д.С., Цой С.В. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Труды семинара им. И.Г.Петровского. 2014, Т. 30 С. 75–93.

Burlakov D.S., Tsoii S.V. Coincidence of Complete and Vector Frequencies of Solutions of a Linear Autonomous System // Journal of Mathematical Sciences, October 2015, Volume 210, № 2, С. 155–167.

[15] Быков В.В. Классификация Бэра σ-показателей Изобова // Дифференц. уравнения. 1997. 33. №11. С. 1574.

[16] Быков В.В. Некоторые свойства минорант показателей Ляпунова // Успехи матем. наук. 1996. 51. Вып. 5. С. 186.

[17] Былов Б.Ф. Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. // М.: Наука, 1966.

[18] Былов Б.Ф. О приведении систем линейных уравнений к диагональному виду // Матем. сборник 1965. 67. №3. С. 339-344.

[19] Былов Б.Ф. Почти приводимые системы. Автореф. дисс. докт. физ.-мат. наук. Мн.: АН БССР, 1966.

[20] Былов Б.Ф. Приведение к блочно-треугольному виду и необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1970. 6. №2. С. 243–252.

[21] Ветохин А.Н. О классах Бэра остаточных функционалов // Дифференц. уравнения. 1995. 31. №5. С. 909–910.

[22] Ветохин А.Н. Точный класс Бэра экспоненциального показателя Изобова в равномерной топологии // Дифференц. уравнения. 1999. 35. №11. С. 1578–1579.

[23] Виноград Р.Э. Неустойчивость характеристических показателей правильных систем // Докл. АН СССР. 1953. 91. №5. С. 999–1002.

[24] Виноград Р.Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Матем. сборник. 1957. 42. №2. С. 207–222.

[25] Глызин Д.С., Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференц. уравнения. 2005. 41. №2. С. 268–273.

[26] Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Теория неклассических релаксационных колебаний в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием // Матем. сборник. 205:6 (2014). С. 21—86.

[27] Дементьев Ю.И. О классах Бэра старшего показателя Ляпунова систем, линейно зависящих от параметра // Научн. вест. МГТУ ГА. Серия Матем. 1999. № 16. С. 5–10.

[28] Дементьев Ю.И. Частичные пределы показателей Ляпунова и их достижимость на кривых в окрестности данной системы // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 11. С. 1577.

[29] Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.

[30] Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. 1993. 29. №12. С. 2034–2055.

[31] Изобов Н.А. О кнезеровских решениях // Дифференц. уравнения. 1985. 21. № 4. С. 581–588.

[32] Изобов Н.А. Об уравнениях Эмдена–Фаулера с неограниченными бесконечно продолжимыми решениями // Матем. заметки. 1984. 35. № 2. С. 189–199.

[33] Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. Т.12. С. 71–146.

[34] Изобов Н.А. Минимальный показатель двумерной диагональной системы // Дифференц. уравнения. 1976. 12. №11. С. 1954–1966.

[35] Изобов Н.А. О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1965. 1. №4. С. 469–477.

[36] Изобов Н.А. Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление // Докл. АН БССР. 1982. 26. №1. С. 5–8.

[37] Кигурадзе И.Т. Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1992. 28. № 6. С. 207–219.

[38] Кигурадзе И.Т. О колеблемости решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1962. 144. Ш. С. 33–36.

[39] Кигурадзе И.Т. Об условиях колеблемости решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1974. 10. № 8. С. 11387–1398. и № 9. С. 1586–1594.

[40] Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Ассимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Наука. 1990.

[41] Козлов В.В. Весовые средние, строгая эргодичность и равномерное распределение // Матем. заметки 2005. Т. 78. № 3. С. 358–367.

[42] Кондратьев В.А. О колеблемости решений дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков // Докл. АН СССР. 1968. 118.№ 1. С. 22–24.

[43] Кондратьев В.А. О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} - p(x)y = 0$ // Тр. Моск. матем. об-ва. 1961. 10. С. 419–436.

[44] Левин А.Ю. Избранные труды. Ярославль, Рыбинск: Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 2010.

[45] Левин А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+p_n(t)x = 0$ // Успехи матем. наук. 1969. Т. 24 № 2. С. 43–96.

[46] Лысак М.Д. Оценки скорости блуждания для уравнений второго и третьего порядка // Дифференц. уравнения. 2015. 51. № 6. С. 821.

[47] Макаров Е.К. О линейных системах с множествами неправильности полной меры // Дифференц. уравнения. 1989. 25. №2. С. 209–212.

[48] Макаров Е.К. О реализации частичных показателей решений линейных дифференциальных систем на геометрических прогрессиях // Дифференц. уравнения. 1996. 32. №12. С. 1710–1711.

[49] Миллионщиков В.М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференц. уравнения. 1980. 16. №8. С. 1408–1416.

[50] Миллионщиков В.М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. 5. № 10. С. 1775–1784.

[51] Миллионщиков В.М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сибирск. матем. журнал. 1969. 10. №1. С. 99–104.

[52] Морозов О.И. Достаточные условия полуустойчивости сверху показателей Ляпунова неоднородных систем // Дифференц. уравнения. 1991. 27. №11. С. 2012.

[53] Морозов О.И. Критерий полуустойчивости сверху старшего показателя Ляпунова неоднородной линейной системы // Дифференц. уравнения. 1990. 26. №12. С. 2181.

[54] Попова С.Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференц. уравнения. 2007. 43. №8. С. 1048–1054.

[55] Попова С.Н., Тонков Е.Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1997. 33. №2. С. 226–235.

[56] Рахимбердиев М.И. О бэровском классе показателей Ляпунова // Матем. заметки. 1982. 31. №6. С. 925–931.

[57] Рахимбердиев М.И. О центральных показателях линейных систем // Дифференц. уравнения. 1983. 19. №2. С. 253–259.

[58] Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Известия РАН. Серия математическая. 2012, **76**:1, 149–172.

[59] Сергеев И.Н. Вопросы о спектрах показателей вращаемости и блуждаемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 6. С. 844–845.

[60] Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. сборник. 204:1 (2013). С. 119–138.

[61] Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 9. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1983. С. 111–166.

[62] Сергеев И.Н. О неупорядоченности характеристик колеблемости вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2015. 51. № 11. С. 1550–1552.

[63] Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2009. 45. №6. С. 908.

[64] Сергеев И.Н. Определение характеристик блуждаемости решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2010. 46. №6. С. 902.

[65] Сергеев И.Н. Определение характеристик вращаемости решений дифференциальных систем и уравнений // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1501–1503.

[66] Сергеев И.Н. Определение характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2004. 40. №11. С. 1573.

[67] Сергеев И.Н. Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. заметки 2016. Т. 99, № 5. С. 732–751.

[68] Сергеев И.Н. Сравнение полных частот и показателей блуждаемости решений линейной системы // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 11. С. 1667–1668.

[69] Сергеев И.Н. Сравнение полных частот и показателей блуждаемости решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2010. 46. № 11. С. 1667–1668.

[70] Сергеев И.Н. Формула для вычисления минимального показателя трехмерной системы // Дифференц. уравнения. 2000. 36. №3. С. 345–354.

[71] Фурсов А.С. Критерий существования решения с малым ростом у линейной неоднородной системы // Дифференц. уравнения. 1993. 29. №11. С. 2011-–2012.

[72] Фурсов А.С. Размерность пространства решений медленного роста линейной неоднородной системы // Успехи матем. наук. 1994. 49. Вып. 4. С. 143.

[73] Чантурия Т.А. Интегральные признаки колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференц. уравнения. 1980. 16. № 3. С. 470–482.

[74] Чантурия Т.А. О колеблемости решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения общего вида // Дифференц. уравнения. 1986. 22. № 11. С. 1905–1915.

[75] Banach S. Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie // Fundamenta Mathematicae. 1925. T. 7. C. 225—236.

[76] Kneser A. J. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Di erentialgleichungen beigrosser reclen // Wethen der Arguments I. J. Reine und angew. Math. 1898. T. 116 C. 173–212.

[77] Sturm J.C.F. Memoire sur les equations diferentielles lineaires du second ordre // J. Math. Pures Appl. 1836. T. 1. C. 106–186.