МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

**Адамов Борис Игоревич**

# Применение аппарата неголономных связей в задачах идентификации параметров и управления движением

Специальность 01.02.01 —
«Теоретическая механика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники федерального государственного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ»

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | Кобрин Александр Исаакович,<br>доктор физико-математических наук, профессор |
| Официальные оппоненты: | Шамолин Максим Владимирович,<br>доктор физико-математических наук, профессор,<br>ведущий научный сотрудник лаборатории навигации и управления Института механики МГУ имени М. В. Ломоносова, |
| | Колесниченко Елена Юрьевна,<br>кандидат физико-математических наук,<br>научный сотрудник учебно-научного центра интеллектуальной робототехники РГГУ. |
| Ведущая организация: | Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов». |

Защита состоится «16» декабря 2016 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д.501.001.22, созданного на базе Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: Ломоносовский проспект, д. 27 и на сайте
`http://mech.math.msu.su/~snark/files/diss/0136diss.pdf`

Автореферат разослан «      » октября 2016 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.22 Прошкин Владимир Александрович

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы и степень её разработанности.** Разработка и исследование мобильных роботизированных платформ является перспективным и динамично развивающимся научно-техническим направлением. Многочисленные проблемы, возникающие в процессе человеческой деятельности, стимулируют развитие и внедрение разработок этой области науки. Потребность в мобильных робототехнических системах возникает в связи с организацией работы в опасной или недоступной для человека среде, а также с выполнением рутинных операций. Вопросы динамики, управления, стабилизации движения, навигации мобильных роботов рассмотрены, в частности, в работах Ю. В. Болотина, А. А. Голована, Е. А. Девянина, А. В. Карапетяна, А. И. Кобрина, А. В. Ленского, Ю. Г. Мартыненко, В. Е. Павловского, Л. Б. Раппопорта, Д. Е. Охоцимского, А. М. Формальского.

Комплектование мобильной платформы робота манипулятором позволяет существенно расширить функциональные возможности аппарата. Вопросы динамики и управления манипуляционными роботами, в том числе мобильными манипуляторами, рассматривались такими авторами, как В. В. Белецкий, С. Л. Зенкевич, Ю. Г. Мартыненко, И. В. Орлов, Е. И. Юревич, А. С. Ющенко, М. Вукобратович (*M. Vukobratović*), М. Спонг (*M. W. Spong*), М. Шахинпур (*M. Shahinpoor*), Дж. Янг (*J. F. Young*).

Особенностью некоторых мобильных роботов является возможность осуществления всенаправленного движения платформ этих устройств. Это свойство достигается, в частности, за счёт их оснащения роликонесущими колёсами. Мобильные платформы всенаправленного движения прекрасно подходят для работы в стеснённых средах со специально подготовленными подстилающими поверхностями, таких как складские и производственные помещения. Исследования механики систем с роликонесущими колёсами различных типов проводились А. Д. Бобыкиным, А. А. Зобовой, А. А. Килиным, Ю. Г. Мартыненко, В. Е. Павловским, Я. В. Татариновым, А. М. Формальским, И. Дорофтеи (*I. Doroftei*), П. Мьюром (*P. F. Muir*), Ч. Ньюманом (*C. P. Neuman*).

Роботизированная платформа всенаправленного движения *KUKA youBot* является системой с открытым программным обеспечением, поддержка которого осуществляется широким кругом разработчиков. Это делает удобным использование рассматриваемого робота для научно-исследовательских и образовательных целей. Среди публикаций, посвящённых применению робота *youBot* в прикладных задачах, отметим работы Р. Кнеппера (*R. A. Knepper*), Д. Расс (*D. Russ*) и их соавторов.

В задачах реализации мобильным роботом движения по требуемой траектории, перемещения в стеснённой среде с использованием карты препятствий важную роль играет система навигации, определяющая текущее положение платформы. В качестве датчика инерциальной навигации мобильных роботизированных платформ могут, в частности, использоваться волновые твердотельные гироскопы. Это — перспективные компактные приборы среднего и низкого классов точности. Исследованию волновых твердотельных гироскопов посвящены работы М. А. Басараба, Н. Е. Егармина, Ю. К. Жбанова, В. Ф. Журавлёва, Д. М. Климова, В. Ф. Кравченко, Е. П. Кубышкина, Ю. Г. Маркова, Ю. Г. Мартыненко, В. А. Матвеева, И. В. Меркурьева, В. В. Подалкова, Д. Линча (*D. D. Lynch*).

Разработка алгоритмов управления мобильными роботами требует использования детализированной и проработанной теоретико-механической модели для повышения качества регулирования и его точности, оптимизации переходных процессов и энергозатрат, стабилизации программных движений. Аналогичное требование возникает и в задаче повышения точности гироскопического датчика, поскольку для этого необходима модель погрешностей, источники которых весьма разнообразны.

Зачастую значения некоторых коэффициентов в уравнениях движения рассматриваемых систем неизвестны и могут медленно изменятся в процессе функционирования системы. Величины этих коэффициентов подлежат определению с целью их дальнейшего использования для расчёта управляющих воздействий и алгоритмической компенсации погрешностей.

Таким образом, возникает задача идентификации параметров математических моделей рассматриваемых систем. Алгоритмы, позволяющие оценить искомые значения параметров в процессе работы системы, а также отслеживать их медленные эволюции, разрабатываются в рамках теорий оценивания и адаптивной идентификации. Этой проблематике посвящены работы Б. Р. Андриевского, С. В. Арановского, А. А. Бобцова, Ю. В. Болотина, А. А. Голована, А. И Матасова, В. А. Терехова, И. Ю. Тюкина, А. Л. Фрадкова, П. Ионанноу (*P. Ioannou*), Л. Льюнга (*L. Ljung*), С. Састри (*S. Sastry*), Ж.-Ж. Слотина (*J. J. E. Slotine*).

Количество оцениваемых коэффициентов в уравнениях движения мобильного робота всенаправленного движения и резонатора волнового твердотельного гироскопа может быть настолько большим, что реализация алгоритмов идентификации параметров на бортовом компьютере робота в реальном времени становится затруднительной.

В некоторых задачах удаётся установить дополнительные зависимости, которым удовлетворяют искомые параметры. Организовав алгоритм идентификации таким образом, чтобы оценки параметров также удовлетворяли этим дополнительным соотношениям, можно добиться не только улучшения точности работы алгоритма, но и снизить его размерность.

Примеры алгоритмов адаптивной идентификации параметров и калмановской фильтрации, учитывающих такого рода ограничения на оценки приведены в работах П. Ионанноу (*P. Ioannou*), С. Састри (*S. Sastry*), Д. Саймона (*D. Simon*).

Для синтеза новых алгоритмов идентификации параметров, учитывающих ограничения (связи) в виде равенств на вырабатываемые оценки, можно использовать теоретические результаты, полученные в области аналитической механики. С точки зрения уменьшения размерности дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют оценки параметров, подход оправдан, поскольку он подразумевает возможность представить эти уравнения в псевдоскоростях.

Аппарат связей используется также и для решения задач управления робототехническими системами: управляющие обобщённые силы ищутся в виде реакций кинематических связей, согласующихся с требуемым движением системы. Экстремальные свойства реакций связей, проистекающие из законов механики, делают такой способ реализации программного движения в некотором смысле оптимальным.

Исследованию динамики и синтезу систем со связями посвящены работы Ю. В. Болотина, А. С. Галиуллина, Я. И. Грдины, Н. П. Еругина, С. А. Зегжды, В. В. Козлова, И. А. Мухаметзянова, Р. Г. Мухарлямова, Н. Н. Поляхова, М. П. Юшкова, Баумгарта (*J. Baugarte*), А. Бегена (*H. Béghin*), Р. Калабы (*R. E. Kalaba*), Р. Лэйтона (*R. A. Layton*), Ф. Удвадиа (*F. E. Udwadia*).

Отметим, что Я. И. Грдина использовал методы аналитической механики для получения уравнений динамики живого организма, положив в основу своих исследований принцип наименьшего принуждения Гаусса. В работах С. А. Зегжды, М. П. Юшкова и их соавторов обоснованно применение теории движения систем с неголономными связями высокого порядка и обобщённого принципа Гаусса в задаче оптимального терминального управления.

Таким образом, задачи управления и идентификации параметров мехатронных систем можно решать, применяя математический аппарат аналитической механики неголономных систем. В задаче параметрической идентификации такой подход позволяет уменьшить размерность алгоритма нахождения оценок, а в задаче реализации требуемых движений приводит к оптимальной в некотором смысле организации движения системы.

**Целью** данной работы является построение алгоритмов идентификации параметров мехатронных систем с ограничениями в виде равенств на оценки параметров, а также алгоритмов управления движением с использованием математического аппарата неголономной механики. Программное движение или ограничения на оценки параметров интерпретируются как наложение на исследуемый объект неголономных связей. Метод неопределённых множителей и представление уравнений в псевдоскоростях используются для описания динамики систем с такими связями. Этот подход позволяет уменьшить размерность задачи и, тем самым, снизить объём необходимых вычислений.

Задача идентификации параметров с дополнительными ограничениями на вырабатываемые оценки ставится для систем различной физической природы с линейной параметрической моделью. Алгоритмы управления разрабатываются для мобильной роботизированной платформы всенаправленного движения *KUKA youBot*.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать подходящие алгоритмы оперативной идентификации (оценивания) параметров динамической системы с линейной параметрической моделью и дополнительными нелинейными ограничениями на оцениваемые величины в виде равенств.
2. Обосновать и продемонстрировать на примерах конкретных механических систем работоспособность полученных алгоритмов идентификации параметров с ограничениями в виде равенств.
3. Построить математическую модель движения мобильного робота *youBot* и оценить неизвестные коэффициенты в уравнениях движения.
4. Разработать алгоритм управления мобильным роботом *youBot* с целью отработки требуемого движения произвольной точки его платформы.

**Научная новизна:**

1. Получены алгоритмы идентификации параметров системы с линейной параметрической моделью с использованием принципа наименьшего принуждения при выводе определяющих соотношений для оценок параметров, а также представления ограничений на оценки параметров в виде неинтегрируемых уравнений связей (уравнений в псевдоскоростях).
2. С использованием представления ограничений на оценки параметров в виде неинтегрируемых уравнений связей (в псевдоскоростях) получены алгоритмы идентификации параметров, оптимальные по методу наименьших квадратов с ограничениями в виде равенств.
3. Предложена модификация интегрального квадратичного функционала ошибки, позволяющая получить более компактные алгоритмы идентификации параметров с ограничениями в виде равенств как в непрерывном, так и в дискретном времени.
4. Разработаны алгоритмы идентификации параметров математической модели робота *youBot*.
5. Выявлены особенности динамики платформы робота *youBot* при организации управления в виде реакций неголономных связей, согласующихся с заданным программным движением.

**Теоретическая и практическая значимость**. Работа носит теоретический характер. В ней показано, что применение методов аналитической механики в задаче идентификации параметров с ограничениями в виде равенств приводит к уменьшению её размерности, и, следовательно, количества необходимых вычислений. В работе демонстрируется, что введение неинтегрируемых связей позволяет получить новые классы решений задач, в постановке которых связи не фигурируют. Речь идёт о задаче стабилизации аффинных управляемых систем и задаче оценивания для некоторых нелинейно параметризованных систем.

Разработанные алгоритмы идентификации параметров с ограничениями в виде равенств на оценки могут быть использованы для исследования и управления системами различной физической природы, в частности многозвенных систем с податливыми шарнирами.

Полученные алгоритмы организации управления в виде реакций связей применимы для реализации требуемых движений механическими и мехатронными системами, в частности мобильными платформами с роликонесущими колёсами. Для задачи реализации равномерного движения точки такого робота по окружности найдены условия существования и устойчивости стационарных вращений платформы. Удовлетворение таких условий позволяет организовать простое и интуитивно предсказуемое поведение системы, что является полезным при реализации платформой требуемого движения в стеснённой среде.

**Методология и методы исследования.** Для решения поставленных задач в работе использовались методы аналитической механики, в том числе механики неголономных систем и управляемых систем с дополнительными связями; методы теории адаптивных систем управления и идентификации; детерминированные методы теории оценивания. Для наглядного представления результатов работы алгоритмов идентификации и управления использовались численные методы математического моделирования.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Для мехатронных систем с линейными параметрическими моделями построено семейство алгоритмов идентификации параметров с ограничениями на оценки в виде равенств, полученное с помощью математического аппарата неголономной механики (использования принципа наименьшего принуждения и представления уравнений связей в терминах псевдоскоростей), позволившего снизить размерность задачи.
2. Разработаны оптимальные с точки зрения метода наименьших квадратов алгоритмы идентификации с ограничениями на оценки параметров, представленные в терминах псевдоскоростей и множителей связей.
3. Построены оптимальные с точки зрения модифицированной интегральной квадратичной ошибки алгоритмы идентификации с ограничениями на оценки параметров, представленные в терминах псевдоскоростей.
4. Создана математическая модель роботизированной платформы всенаправленного движения *KUKA youBot*, учитывающая силы вязкого трения в подшипниках механических передач и опорах роликов колёс, упругую податливость элементов. Разработан алгоритм идентификации параметров такой модели, использующий одометрическую информацию и измерения управляющих моментов двигателей.

5. Разработан алгоритм управления роботом *KUKA youBot* с целью отработки программного движения, которое реализуется путём воздействия на систему управляющих обобщённых сил, отождествлённых с реакциями неголономных связей. Получены условия существования и асимптотической устойчивости стационарных вращений платформы робота в процессе реализации равномерного движения произвольной точки платформы по окружности.

**Достоверность** обуславливается применением строгих математических методов, проиллюстрированных компьютерным моделированием, и обеспечивается подробным изложением промежуточных результатов в тексте работы. Разработанные в диссертации методы и подходы практически опробованы при идентификации параметров резонатора волнового твердотельного гироскопа, характеристик его установившихся колебаний, а также параметров роботизированной платформы всенаправленного движения *KUKA youBot*. Результаты диссертационной работы согласуются с результатами, ранее полученными другими авторами.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на:
1. XV конференции молодых учёных «Навигация и управление движением», 12–15 марта 2013 г., Санкт-Петербург, Россия;
2. II международной научно-практической конференции «Инновационные информационные технологии», 22–26 апреля 2013 г., Прага, Чешская республика;
3. Международной конференции по механике и баллистике «VIII Окуневские чтения», 25–28 июня 2013 г., Санкт-Петербург, Россия;
4. XX международной научно-технической конференции студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика», 27–28 февраля 2014 г., Москва, Россия;
5. The 58-th Ilmenau Scientific Colloquium — Shaping the Future by Engineering, 8–12 сентября 2014 г., Ильменау, Германия;
6. XIII международной научно-практической конференции «*NIDays*–2014», 19–20 ноября 2014 г., Москва, Россия;
7. XXI международной научно-технической конференции студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика», 26–27 февраля 2015 г., Москва, Россия;
8. XVII конференции молодых учёных «Навигация и управление движением», 17–20 марта 2015 г., Санкт-Петербург, Россия;
9. XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 20–24 августа 2015 г., Казань, Россия;
10. XVIII конференции молодых учёных «Навигация и управление движением», 15–18 марта 2016 г., Санкт-Петербург, Россия;
11. LII Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, Москва, 17–19 мая 2016 г.;

12. Заседании научного семинара «Математическое моделирование процессов динамики», 23 марта 2016 г., Москва, Российский университет дружбы народов;
13. Заседании научного семинара кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, 30 марта 2016 г., Москва;
14. Заседании научного семинара кафедры теоретической механики и мехатроники НИУ МЭИ, 16 мая 2016 г., Москва.

Автор награждён дипломом за лучший доклад молодого учёного на секции «Общая и прикладная механика» XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики.

Результаты работы были использованы при составлении заявки № 16-01-00429-а, поддержанной на конкурсе проектов РФФИ.

**Личный вклад.** Постановка задачи выполнена автором совместно с научным руководителем д.ф.-м.н. А. И. Кобриным, который осуществлял общий контроль над процессом выполнения исследования. Все основные результаты работы получены автором лично.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 15 печатных изданиях [1–15], 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–3], 12 — в материалах конференций и тезисах докладов [4–15]. Публикации по теме диссертации в журналах перечня ВАК выделены в списке литературы полужирным начертанием.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объем диссертации **206** страниц машинописного текста с **35** рисунками и 4 таблицами. Список литературы содержит **129** наименований.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

**Первая глава** посвящена разработке алгоритмов идентификации параметров с ограничениями в виде равенств с применением математического аппарата неголономной механики. Проводится обзор публикаций, посвящённых задачам адаптивной идентификации, задачам оценивания с ограничениями в виде равенств и неравенств, исследованию и синтезу систем различной физической природы со связями.

Ставится задача идентификации постоянных параметров системы с линейной параметрической моделью

$$y(t) = N^{\mathrm{T}}(t)\vartheta, \tag{1}$$

где $y$ — $l$-мерный выходной вектор параметрической модели; $N$ — сигнальная или регрессионная матрица; $t \geqslant 0$ — непрерывное время; $\vartheta$ — $s$-мерный $(s > l)$ вектор неизвестных постоянных параметров, удовлетворяющих независимым уравнениям связей $\psi(\vartheta) = 0$. Здесь $\psi$ — $r$-мерная $(r + l < s)$ гладкая векторная функция связи.

Требуется разработать алгоритм идентификации параметров модели (1) с ограничениями на вектор оценок параметров $\hat{\vartheta}$ в виде равенств $\psi(\hat{\vartheta}) = 0$ — параметрическими связями.

Представление уравнений связей в дифференциальной форме

$$D_\psi^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\vartheta}} = 0, \quad \psi(\hat{\vartheta})\big|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

где $D_\psi^{\mathrm{T}}$ — матрица Якоби функции связи $\psi$, позволяет применить для поставленной задачи синтеза аппарат неголономной механики. Для того, чтобы вектор $\dot{\hat{\vartheta}}$ удовлетворял соотношению (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta}) \cdot \dot{\hat{\pi}}, \tag{3}$$

где $\dot{\hat{\pi}}$ — вспомогательный $(s - r)$-мерный вектор с независимыми элементами, а матрица $C$ такова, что $D_\psi^{\mathrm{T}} C = 0$. По аналогии с неголономной механикой, будем называть $\dot{\hat{\pi}}$ вектором параметрических *псевдоскоростей*.

Таким образом, задача синтеза алгоритма идентификации со связями (2) сведена к построению вектора псевдоскоростей $\dot{\hat{\pi}}$, а вычисление вектора оценок искомых параметров $\hat{\vartheta}$ — к решению уравнения (3).

Использование интегрируемых псевдоскоростей, таких что $\hat{\vartheta} = \Theta(\hat{\pi})$, уменьшает размерность рассматриваемой задачи, поскольку для её решения потребуется только алгоритм расчёта $\dot{\hat{\pi}}$.

Для получения оценок параметров, удовлетворяющих связям (2), в предлагается процедура видоизменения алгоритмов идентификации, описываемых уравнениями

$$M_f \dot{\hat{\vartheta}} = f\big(\hat{\vartheta}, y\big), \quad M_f = M_f^{\mathrm{T}} > 0. \tag{4}$$

Оценки параметров строятся из условия минимума меры принуждения

$$\mathcal{Z}\big[M_f, f\big] = \frac{1}{2}\left(\dot{\hat{\vartheta}} - M_f^{-1} f\big(\hat{\vartheta}, y\big)\right)^{\mathrm{T}} \cdot M_f \cdot \left(\dot{\hat{\vartheta}} - M_f^{-1} f\big(\hat{\vartheta}, y\big)\right)$$

по независимым линейным комбинациям компонент вектора $\dot{\hat{\vartheta}}$. Здесь $\mathcal{Z}$ является аналогом принуждения по Гауссу, а алгоритм (4) — аналогом уравнений движения, освобождённого от связей.

Из условия $(\partial \mathcal{Z}/\partial \dot{\pi}) = 0$ построен класс алгоритмов идентификации с *проекцией*:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\pi}, \quad \dot{\pi} = \left[C^{\mathrm{T}} M_f C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} \cdot f. \tag{5}$$

Показано, что невырожденная замена параметрических псевдоскоростей не влияет на вектор оценок $\hat{\vartheta}$, найденный в силу соотношений (5).

Установлено, что минимуму принуждения $\mathcal{Z}$ удовлетворяет алгоритм идентификации с вектором неопределённых множителей $\Lambda$:

$$M_f \dot{\hat{\vartheta}} = f + D_\psi \Lambda, \quad \Lambda = -\left[D_\psi^{\mathrm{T}} M_f^{-1} D_\psi\right]^{-1} D_\psi^{\mathrm{T}} M_f^{-1} \cdot f.$$

Рассмотрены конкретные примеры алгоритмов идентификации с проекцией, построенных на основе алгоритмов класса (4):

- градиентного алгоритма $\dot{\hat{\vartheta}} = -M_g^{-1}\dfrac{\partial Q}{\partial \hat{\vartheta}}$, где $Q = Q(e)$ — скалярная дважды непрерывно дифференцируемая положительно определённая целевая функция вектора ошибки прогноза $e(t) = y(t) - N^{\mathrm{T}}(t)\hat{\vartheta}(t)$; $M_g = M_g^{\mathrm{T}} = \mathrm{const} > 0$.
- метода наименьших квадратов $\dot{\hat{\vartheta}} = M^{-1}Ne, \quad \dot{M} = NN^{\mathrm{T}}$.

Для построенных *градиентного алгоритма с проекцией* и *метода наименьших квадратов с проекцией* в линейном приближении проведено исследование сходимости вырабатываемых оценок к истинным значениям параметров.

Решена задача синтеза алгоритма идентификации параметров со *стабилизированным* условием связи. Оценки параметров находятся таким образом, чтобы функция связи $\psi$ удовлетворяла дифференциальному уравнению $\dot{\psi} = F(\psi)$, имеющему тривиальное асимптотически устойчивое по Ляпунову решение $\psi \equiv 0$. Такая стабилизация условия связи требуется для парирования влияния погрешностей численного интегрирования, а также в случае, если нарушено соотношение $\psi(\hat{\vartheta})\big|_{t=0} = 0$.

Стабилизированное условие связи в дифференциальной форме задаётся соотношением

$$D_\psi^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\vartheta}} = F\big(\psi(\hat{\vartheta})\big). \tag{6}$$

В рассматриваемой задаче вектор $\dot{\hat{\vartheta}}$, удовлетворяющий условию связи (6), имеет вид

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta}) \cdot \dot{\pi} + B(\hat{\vartheta}) \cdot F\big(\psi(\hat{\vartheta})\big). \tag{7}$$

где матрицы $C$ и $B$ таковы, что $D_\psi^{\mathrm{T}} C = 0$, $D_\psi^{\mathrm{T}} B = E$.

Алгоритм идентификации параметров со связями (6) получен на основе соотношений (4) из условия $\delta\mathcal{Z} = 0$ при $\delta\dot{\hat{\vartheta}} = C\delta\dot{\hat{\pi}}$, $\delta\hat{\vartheta} = 0$. Вектор параметрических псевдоскоростей рассчитывается по формуле

$$\dot{\hat{\pi}} = \left[C^{\mathrm{T}} M_f C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} \cdot \left[f - M_f B F\right]. \tag{8}$$

Установлено, что в рассматриваемой задаче минимуму принуждения $\mathcal{Z}$ удовлетворяет алгоритм идентификации (4) с вектором неопределённых множителей $\Lambda$:

$$M_f \dot{\hat{\vartheta}} = f + D_\psi \Lambda, \quad \Lambda = \left[D_\psi^{\mathrm{T}} M_f^{-1} D_\psi\right]^{-1} \left\{F - D_\psi^{\mathrm{T}} M_f^{-1} f\right\}.$$

После сопоставления с последними результатами, был построен алгоритм стабилизации требуемого стационарного вектора состояния $x \equiv x^*$ аффинной управляемой системы

$$\dot{x} = f(x) + D(x)u,$$

где $x$ — $n$-мерный вектор состояния; $u$ — $m$-мерный вектор управляющих воздействий ($n > m$); $f(x)$ и $D(x)$ — гладкие функции.

В соответствии с предложенным алгоритмом, $u$ отождествляется со столбцом неопределённых множителей, соответствующих связям

$$D^{\mathrm{T}}(x)\dot{x} = g(x), \tag{9}$$

где $g(x)$ — неизвестная гладкая функция, такая, что $g(x^*) = 0$.

Удовлетворив условие связи (9), получаем закон управления вида

$$u(x) = \left[D^{\mathrm{T}}(x) D(x)\right]^{-1} \left\{g(x) - D^{\mathrm{T}}(x) f(x)\right\}.$$

Неизвестная функция $g(x)$ подбирается из условия устойчивости системы управления с приведённым законом обратной связи.

Описанный алгоритм был использован в работе [1] для стабилизации стационарного движения перевёрнутого маятника на подвижном основании.

**Вторая глава** посвящена разработке оптимальных алгоритмов идентификации со связями в дифференциальной форме (2).

Ставится задача построения оценок параметров модели (1) из условия минимума интегральной квадратичной ошибки

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t \left\| y(\tau) - N^{\mathrm{T}}(\tau)\hat{\vartheta}(t) \right\|_2^2 \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2} \left\| \hat{\vartheta}(t) - \vartheta_0 \right\|_{M_0}^2 \tag{10}$$

при выполнении ограничений $\psi(\hat{\vartheta}) = 0$. Здесь $\vartheta_0$ — постоянный вектор; $M_0 = M_0^{\mathrm{T}} > 0$ — постоянная матрица; $\|\ldots\|_2^2$ — квадрат евклидова нормы, а $\|\ldots\|_{M_0}^2 = (\ldots)^{\mathrm{T}} M_0 (\ldots)$ — квадрат взвешенной евклидова нормы.

Необходимые и достаточные условия минимума функционала $J$ в силу связей имеют вид:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\hat{\pi}}, \quad \dot{\hat{\pi}} = M_{LSM}^{-1}C^{\mathrm{T}}Ne, \quad \dot{M} = NN^{\mathrm{T}}, \quad M_{LSM} + M_{LSM}^{\mathrm{T}} > 0, \tag{11}$$

где $e = y - N^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta}$ — вектор ошибок прогноза. Получено два способа построения матрицы $M_{LSM}$:

– из условия $\delta J = \delta\hat{\pi}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} \cdot (\partial J/\partial\hat{\vartheta}) = 0$ имеем:

$$M_{LSM} = C^{\mathrm{T}}MC + K, \quad K = (k_{ij}), \quad \dot{z} = Ny, \tag{12}$$

где $z$ — $s$-мерный вспомогательный вектор; $k_{ij} = c_j^{\mathrm{T}}\frac{\partial c_i^{\mathrm{T}}}{\partial\hat{\vartheta}}\left(M\hat{\vartheta} - z\right)$, $c_i$ и $c_j$ — $i$-й и $j$-й столбцы матрицы $C$;

– из условия стационарности функции Лагранжа $J_\lambda = J + \psi^{\mathrm{T}}\lambda = J + \sum_i \lambda_i\psi_i$ имеем:

$$M_{LSM} = C^{\mathrm{T}}M_\lambda C, \quad \dot{\lambda} = B^{\mathrm{T}} \cdot \left(E - M_\lambda C\left[C^{\mathrm{T}}M_\lambda C\right]^{-1}C^{\mathrm{T}}\right)Ne, \tag{13}$$

где $\lambda$ — $r$-мерный вектор неопределённых множителей; $M_\lambda = M + \sum_i \lambda_i R_{\psi_i}$, $R_{\psi_i}$ — матрица Гессе функции связи $\psi_i(\hat{\vartheta})$.

Оптимальный алгоритм идентификации в форме (11), (13) задаётся меньшим дифференциальных уравнений, чем (11) и (12), поскольку вместо $s$–мерного вектора $z$ для построения (11), (13) используется $r$–мерный вектор $\lambda$. Отметим, что в размерность системы (11), (13) в переменных ($\dot{\hat{\pi}}$,$\lambda$,$M$) не зависит от числа связей $r$.

Аддитивные погрешности параметрической модели (1) способны так повлиять на поведение множителей $\lambda_i$, что произойдёт вырождение $M_\lambda$. Для парирования этого эффекта предложена процедура регуляризации уравнения для вектора $\lambda$:

$$\dot{\lambda} = A_\lambda\lambda + B^{\mathrm{T}} \cdot \left(E - M_\lambda C\left[C^{\mathrm{T}}M_\lambda C\right]^{-1}C^{\mathrm{T}}\right)Ne, \tag{14}$$

где $A_\lambda$ — постоянная гурвицева матрица.

Показано, что в предельном случае $A_\lambda \to -\infty E$ вектор $\lambda \to 0$ и регуляризованный алгоритм идентификации (11), (14) принимает вид алгоритма наименьших квадратов с проекцией.

Проведены аналогии между задачами идентификации параметров со связями и задачами динамики механических систем с сервосвязями[1]. В качестве аналога кинетической энергии рассмотрена квадратичная ошибка (10). Установлено, что алгоритму наименьших квадратов с проекцией соответствует способ реализации сервосвязей с помощью регулирования обобщённых сил;

[1]В. В. Козлов, Принципы динамики и сервосвязи, Нелинейная динам., 2015, том 11, номер 1, 169–178

оптимальному алгоритму в переменных $(\hat{\vartheta},\lambda,M)$ — способ реализации сервосвязей с помощью регулирования инерционных свойств системы; а регуляризованному алгоритму наименьших квадратов — способ реализации сервосвязей с помощью регулирования инерционных свойств и обобщённых сил.

С целью уменьшения размерности уравнений алгоритма оптимальной идентификации, предложен способ расчёта вектора оценок $\hat{\vartheta}$ из условия минимума модифицированной квадратичной ошибки

$$J_\pi\big[\hat{\vartheta}(t,\tau)\big] = \frac{1}{2}\int_0^t \Big\|y(\tau) - N^{\mathrm{T}}(\tau)\hat{\vartheta}(t,\tau)\Big\|_2^2 \,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\left\|\hat{\pi}(t) - \pi_0\right\|^2_{M_{\pi 0}},$$

где $\hat{\vartheta}(t,\tau) = \hat{\vartheta}(\tau) + C\big(\hat{\vartheta}(\tau)\big)\cdot(\hat{\pi}(t) - \hat{\pi}(\tau))$; $M_{\pi 0} = M_{\pi 0}^{\mathrm{T}} > 0$ — постоянная матрица, а $\pi_0$ — постоянный вектор.

Построены уравнения оптимального по *модифицированному методу наименьших квадратов* алгоритма идентификации в непрерывном времени:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\hat{\pi}}, \quad \dot{\hat{\pi}} = P_\pi C^{\mathrm{T}} N e, \quad \dot{P}_\pi = -P_\pi C^{\mathrm{T}} N N^{\mathrm{T}} C P_\pi. \tag{15}$$

В случае интегрируемых псевдоскоростей при $\hat{\vartheta} = \Theta(\hat{\pi})$ алгоритм (15) является частным случаем расширенного фильтра Калмана.

Для случая интегрируемых параметрических псевдоскоростей предложен алгоритм расчёта вектора оценок $\hat{\vartheta} = \Theta(\hat{\pi})$ в дискретном времени из условия минимума величины

$$J_\pi^D\left[\hat{\pi}_{[k]}\right] = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\Big\|y_{[j]} - N_{[j]}^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta}_{[k,j-1]}\Big\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\|\hat{\pi}_{[k]} - \pi_0\right\|^2_{M_{\pi 0}},$$

где $\hat{\vartheta}_{[k,j]} \equiv \hat{\vartheta}_{[j]} + C_{[j]}(\hat{\pi}_{[k]} - \hat{\pi}_{[j]})$; а индекс $[k]$ указывает на момент времени $t_k$.

Построен алгоритм модифицированного метода наименьших квадратов в дискретном времени, являющийся частным случаем расширенного фильтра Калмана:

$$\begin{cases} \hat{\pi}_{[k]} = \hat{\pi}_{[k-1]} + P_{\pi[k]} N_{C[k]} e_{[k]}, \quad \hat{\pi}_{[0]} = \pi_0, \\ P_{\pi[k]} = \left[E - P_{\pi[k-1]} N_{C[k]}\big(N_{C[k]}^{\mathrm{T}} P_{\pi[k-1]} N_{C[k]} + E\big)^{-1} N_{C[k]}^{\mathrm{T}}\right] P_{\pi[k-1]}, \\ e_{[k]} = y_{[k]} - N_{[k]}^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta}_{[k-1]}, \quad N_{C[k]} = C_{[k-1]}^{\mathrm{T}} N_{[k]}, \quad P_{\pi[0]} = M_{\pi 0}^{-1}. \end{cases} \tag{16}$$

В линейном приближении получены достаточные условия параметрической сходимости алгоритмов идентификации со связями, построенными путём минимизации функционалов $J$, $J_\pi$, $J_\pi^D$.

Изучена взаимосвязь задачи идентификации параметров со связями и задачи оценивания параметров нелинейной модели $y = N^{\mathrm{T}}\Theta(\varpi)$ с $(s-r)$-мерным вектором искомых параметров $\varpi$.

При $\dot{\hat{\pi}} = \dot{\widehat{\varpi}}$ и $\hat{\vartheta} = \Theta(\widehat{\varpi})$ условие $\partial J / \partial \widehat{\varpi} = 0$ приводит к оптимальному алгоритму вычисления оценок в форме (11), (12).

Предположение, что взаимозависимость элементов $\Theta$ есть результат наложения на параметрическую модель (1) $r$ неявных параметрических связей, позволяет использовать для вектора оценок $\widehat{\varpi}$ оптимальный алгоритм в более компактной форме (11), (13), а также его регуляризованную модификацию и метод наименьших квадратов с проекцией.

**Третья глава** посвящена разработке алгоритмов идентификации параметров математической модели и характеристик колебаний резонатора волнового твердотельного гироскопа. Приводится обзор источников, посвящённых исследованию динамики и идентификации параметров гироскопов рассматриваемого класса, а также задачам адаптивной идентификации характеристик колебаний: частоты, амплитуды, фазового сдвига.

В **§3.1** описывается физический принцип возбуждения колебаний кольцевого резонатора исследуемого гироскопа. Приводится математическая модель колебаний резонатора по второй основной форме в одномодовом приближении:

$$\ddot{x} + \omega_* \cdot H_\zeta \cdot \dot{x} + \omega_*^2 \cdot \big(E + H_\varkappa\big) \cdot x - f(x) = u,$$

где $x = (x_1 \;\; x_2)^{\mathrm{T}}$ — столбец обобщённых координат; $u$ — столбец управляющих воздействий; $\omega_*$ — номинальная резонансная частота; $H_\zeta$ и $H_\varkappa$ — безразмерные $(2 \times 2)$-матрицы малых возмущающих линейных сил; $f(x)$ — столбец нелинейных сил. Элементы матриц $H_\zeta$ и $H_\varkappa$, а также коэффициенты в выражении нелинейных сил $f(x)$ неизвестны и подлежат оцениванию.

Исследован случай вынужденных колебаний системы, возбуждаемых гармоническими силами $u = \omega_*^2 \cdot (u_q \cos \omega t + u_p \sin \omega t)$. Рассмотрено приближение установившихся колебаний одной гармоникой ряда Фурье:

$$x \approx q \cos \omega t + p \sin \omega t, \quad f(x) \approx -\omega_*^2 \cdot \big(f_q(q,p) \cos \omega t + f_p(q,p) \sin \omega t\big).$$

Здесь $q$, $p$, $u_q$, $u_p$, $f_q$, $f_p$ — постоянные двумерные столбцы. Они удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 2\delta_\omega q = \phantom{-}(1+\delta_\omega) H_\zeta \, p + H_\varkappa \, q + f_q(q,p) - u_q, \\ 2\delta_\omega p = -(1+\delta_\omega) H_\zeta \, q + H_\varkappa \, p + f_p(q,p) - u_p, \end{cases}$$

где $\delta_\omega = \omega \cdot \omega_*^{-1} - 1$ — относительная частотная расстройка.

Используя последние соотношения, в **§3.2** построена линейная параметрическая модель вида (1) установившихся колебаний резонатора с нелинейными консервативными силами

$$f(x) = -\frac{\partial \Pi_f}{\partial x}, \quad \Pi_f = \frac{\omega_*^2}{24} \left(\nu_{40} x_1^4 + 4\nu_{31} x_1^3 x_2 + 6\nu_{22} x_1^2 x_2^2 + 4\nu_{13} x_1 x_2^3 + \nu_{04} x_2^4\right).$$

Семнадцатимерный столбец $\vartheta$ искомых параметров этой модели состоит из элементов матриц $H_\varkappa$ и $H_\zeta$, элементов столбцов $u_q$ и $u_p$, коэффициентов нелинейных сил $\nu_{i,4-i}$, $i = \overline{0,4}$.

Перечисленные параметры были оценены по экспериментальным данным о наблюдении колебаний системы, возбуждаемых с различными частотами. Установлено, что упрощение модели нелинейных сил $f(x)$ приводит к снижению точности описания экспериментальных данных.

Исходные данные для процедуры идентификации параметров рассматриваемой системы являются результатом гармонического анализа измерений колебаний резонатора. При этом частота таких колебаний $\omega$ считается известной. В противном случае $\omega$ подлежит оцениванию. Решению такой задачи посвящён **§3.3**.

В **§3.3.1** поставлена задача идентификации частоты $\omega$ установившихся нелинейных колебаний, описываемых функцией

$$Y(t) = b_0 + b_1 \cos\omega t + d_1 \sin\omega t + b_2 \cos 2\omega t + d_2 \sin 2\omega t,$$

где $b_k$ и $d_k$, $k = \overline{0,2}$ — неизвестные постоянные коэффициенты.

Показано, что поставленная задача сводится к идентификации параметров динамического объекта пятого порядка

$$\overset{(5)}{Y} + 5\omega^2 \dddot{Y} + 4\omega^4 \dot{Y} = 0.$$

Построена параметрическая модель этого объекта

$$y = N^{\mathrm{T}}\vartheta + \varepsilon,$$

не содержащая производных $Y(t)$ по времени. Здесь:

$$y = Y - a_{f4}\overset{(4)}{\mu} - a_{f2}\ddot{\mu} - a_{f0}\mu, \quad N = \begin{pmatrix} \dddot{\mu} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix}, \qquad \vartheta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{f3} - 5\omega^2 \\ a_{f1} - 4\omega^4 \end{pmatrix};$$

функции $\mu(t)$ и $\varepsilon(t)$ удовлетворяют асимптотически устойчивым дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами $a_{fi}$:

$$\overset{(5)}{\mu} + a_{f4}\overset{(4)}{\mu} + a_{f3}\dddot{\mu} + a_{f2}\ddot{\mu} + a_{f1}\dot{\mu} + a_{f0}\mu = Y, \quad \overset{(5)}{\varepsilon} + a_{f4}\overset{(4)}{\varepsilon} + \ldots + a_{f0}\varepsilon = 0.$$

Далее экспоненциально затухающей функции $\varepsilon$ пренебрегаем.

Оцениваемые коэффициенты $\vartheta_1$ и $\vartheta_2$ удовлетворяют скалярному уравнению связи

$$\psi(\vartheta) = 25(\vartheta_2 - a_{f1}) + 4(\vartheta_2 - a_{f3})^2 = 0.$$

Выполнение условия $\psi(\hat{\vartheta}) = 0$ позволяет однозначно вычислить оценку частоты $\widehat{\omega}$ по оценкам $\hat{\vartheta}_1$ и $\hat{\vartheta}_2$.

В **§3.3.2** оценки частоты строятся градиентными алгоритмами идентификации. Результаты моделирования демонстрируют, что градиентный алгоритм с проекцией, учитывающий связь $\psi(\hat{\vartheta}) = 0$, вырабатывает существенно более точные оценки $\widehat{\omega}$, чем градиентный алгоритм идентификации, игнорирующий параметрическую связь.

В **§3.3.3** оценки частоты строятся алгоритмом наименьших квадратов с проекцией; алгоритмами (11),(12); (11), (14); (15). Результаты моделирования демонстрируют, указанные алгоритмы, вырабатывают более точные оценки $\widehat{\omega}$, чем рекуррентный метод наименьших квадратов, игнорирующий параметрическую связь $\psi(\hat{\vartheta}) = 0$. Показано, что алгоритм наименьших квадратов с проекцией наименее чувствителен к аддитивным погрешностям параметрической модели. Продемонстрирован положительный эффект регуляризации уравнения для неопределённого множителя (14).

В **§3.4** построен алгоритм идентификации частоты колебаний $Y(t)$ и коэффициентов $b_k$ и $d_k$. Оценивается малая поправка $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ к номинальному значению $\omega_0$. Для построения алгоритма идентификации использовалась параметрическая модель

$$Y(t) = b_0 + b_1 \cos\omega_0 t + d_1 \sin\omega_0 t + b_2 \cos 2\omega_0 t + d_2 \sin 2\omega_0 t -$$
$$- b_1 \Delta\omega\, t \sin\omega_0 t + d_1 \Delta\omega\, t \cos\omega_0 - 2b_2 \Delta\omega\, t \sin 2\omega_0 t + 2d_2 \Delta\omega\, t \cos 2\omega_0 t.$$

Девять коэффициентов этой линейной комбинации зависят от шести независимых параметров $b_0, b_1, d_1, b_2, d_2, \Delta\omega$. Таким образом, имеют место три неявные параметрические связи.

Идентификация параметров колебаний $Y(t)$ проводилась с учётом этих связей с помощью рекуррентного модифицированного метода наименьших квадратов (16) в дискретном времени.

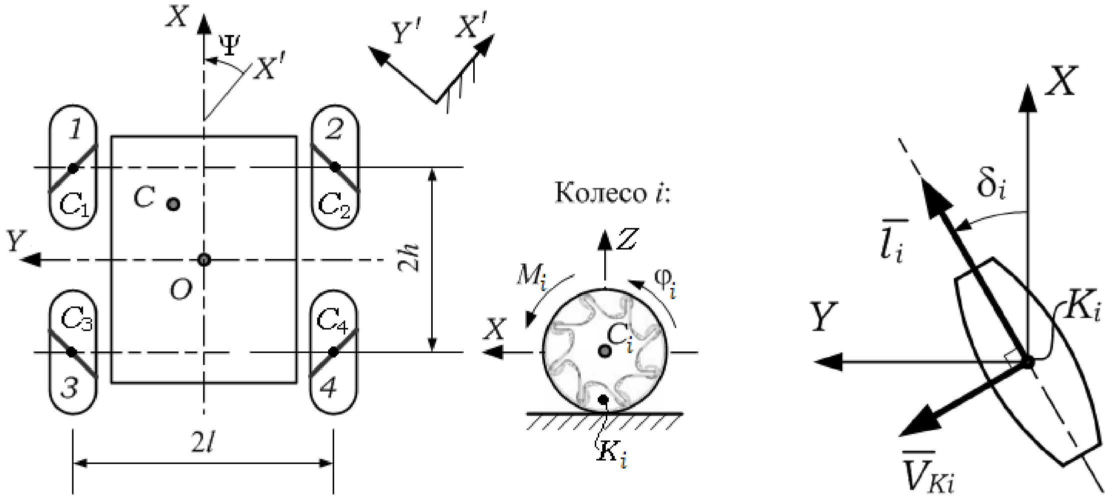
В **§3.5** производится сравнение точностей оценок частоты, полученных перечисленными выше алгоритмами. Из всех рассмотренных способов построения оценок частоты $\omega$ алгоритм, описанный в §3.4, оказался наиболее точным.

**Четвёртая глава** посвящена исследованию динамики, разработке алгоритмов идентификации параметров, алгоритмов управления для мобильного робота всенаправленного движения *KUKA youBot*.

Проведён обзор публикаций, посвящённых задачам реализации программных движений робототехническими системами, идентификации параметров мехатронных систем, исследованию динамики и управлению мобильными всенаправленными платформами с роликонесущими колёсами.

В **§4.1** приводится описание конструкции мобильного робота *youBot*, оснащённого меканум-колёсами. На периферии диска такого колеса расположено несколько симметричных тел вращения — роликов, оси которых составляют с его плоскостью угол 45°.

В **§4.2** исследуется кинематика всенаправленной платформы робота *youBot*. Движение платформы описывается с помощью координат $X'_O$ и $Y'_O$ её геометрического центра $O$ в неподвижной системе координат $X'Y'Z'$, курсового угла $\Psi = \angle(X', X)$ (см. рисунок 1а), углов поворотов колеса $\varphi_i$ ($i = \overline{1,4}$) относительно корпуса робота.




а) Платформа б) Ролик

Рис. 1 — Кинематическая схема мобильного робота *youBot*

Из условия ортогональности вектора скорости центра ролика его оси (см. рисунок 1б) получены следующие соотношения для относительных угловых скоростей колёс:

$$\dot\varphi_1 = R^{-1}\big[V_X - V_Y - (l+h)\Omega\big], \quad \dot\varphi_2 = R^{-1}\big[V_X + V_Y + (l+h)\Omega\big],$$
$$\dot\varphi_3 = R^{-1}\big[V_X + V_Y - (l+h)\Omega\big], \quad \dot\varphi_4 = R^{-1}\big[V_X - V_Y + (l+h)\Omega\big].$$

Здесь $V_X$, $V_Y$ — проекции вектора скорости центра платформы $O$ на подвижные оси, $\Omega = \dot\Psi$, $l$ и $h$ — характерные размеры платформы (см. рисунок 1а), $R$ — радиус меканум-колеса.

С помощью формализма Аппеля в **§4.3** получены уравнения движения мобильной всенаправленной платформы по горизонтальной плоскости в псевдоскоростях $V_X$, $V_Y$, $\Omega$:

$$m_{\text{рб}}(\dot V_X - \Omega V_Y) + \frac{4I_{\text{к}Y}}{R^2}\dot V_X - m a_Y \dot\Omega - m a_X \Omega^2 + \frac{4\mu_{\text{к}}}{R^2} V_X = F_X, \tag{17}$$

$$m_{\text{рб}}(\dot V_Y + \Omega V_X) + \frac{4I_{\text{к}Y}}{R^2}\dot V_Y + m a_X \dot\Omega - m a_Y \Omega^2 + \left(\frac{4\mu_{\text{к}}}{R^2} + \frac{8\mu_{\text{р}}}{R_{\text{р}}^2}\right) V_Y = F_Y, \tag{18}$$

$$\begin{aligned}(I_{\text{рб}} + 4I_{\text{к}Y}\eta_{\text{к}}^2)\dot\Omega - m a_Y(\dot V_X - \Omega V_Y) + m a_X(\dot V_Y + \Omega V_X) + \\ +\big(4\mu_{\text{к}}\eta_{\text{к}}^2 + 8\mu_{\text{р}}\eta_{\text{р}_1}^2\big)\Omega = M_\Omega,\end{aligned} \tag{19}$$

где $m$ — масса платформы; $m_{\text{рб}}$ — общая масса робота; $I_{\text{рб}}$ — его момент инерции относительно вертикальной оси $OZ$; $I_{\text{к}_Y}$ — момент инерции колеса относительно оси собственного вращения; $a_X$ и $a_Y$ — смещения центра масс платформы в продольном и поперечном направлениях; $\mu_{\text{к}}$ и $\mu_{\text{р}}$ — коэффициенты вязкого трения в сочленениях колёс с платформой и подшипниках роликов; $R_{\text{р}}$ — радиус ролика; $\eta_{\text{к}} = \frac{l+h}{R}$, $\eta_{\text{р}_1} = \frac{h}{R_{\text{р}}}$; $F_X = \frac{1}{R}\left[M_2 + M_1 + M_4 + M_3\right]$, $F_Y = \frac{1}{R}\left[M_2 - M_1 - M_4 + M_3\right]$ и $M_\Omega = \eta_{\text{к}} \cdot \left[M_2 - M_1 + M_4 - M_3\right]$ — управляющие обобщённые силы; $M_i$, $i = \overline{1,4}$ — моменты, развиваемые приводами колёс.

Значения коэффициентов в полученных уравнениях движения неизвестны и подлежат определению.

В **§4.4** разработан алгоритм оперативной идентификации параметров математической модели движения робота (17)–(19). Исходной информацией служат измерения угловых скоростей колёс $\dot{\varphi}_i$ и управляющих моментов $M_i$ ($i = \overline{1,4}$), произведённые в процессе функционирования робота. Используя экспериментальные зависимости указанных величин от времени были построены оценки параметров математической модели робота.

В **§4.5** построен алгоритм управления мобильной платформой *youBot* с целью реализации требуемого вектора скорости произвольной точки платформы $B$

$$V_{BX} = V_{BX}^*, \quad V_{BY} = V_{BY}^*,$$

где $V_{BX}$, $V_{BY}$, $V_{BX}^*$ и $V_{BY}^*$ — соответственно, проекции вектора скорости на подвижные оси $OX$ и $OY$ и их законы изменения на программном движении.

В **§4.5.1** построен алгоритм расчёта управляющих обобщённых сил, реализующих программное движение. Управляющие воздействия приравниваются к реакциям неголономных связей

$$V_X - b_Y\Omega = V_{BX}^*, \quad V_Y + b_X\Omega = V_{BY}^*, \tag{20}$$

с которыми согласуется программное движение. Здесь $b_X$ и $b_Y$ — смещения точки $B$ в продольном и поперечном направлениях.

В рассматриваемом способе реализации программного движения законы изменения обобщённых координат и псевдоскоростей удовлетворяют уравнениям динамики с неопределёнными множителями $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Эти уравнения строятся путём замены в (17)–(19) обобщённых управляющих сил $F_X$, $F_Y$, $M_\Omega$ на обобщённые реакции связей (20) $\lambda_1$, $\lambda_2$ и $b_X\lambda_2 - b_Y\lambda_1$ соответственно. Полученные уравнения с неопределёнными множителями дополняются соотношениями (20).

По найденному закону изменения $\lambda_1$ и $\lambda_2$ на программном движении формируются управляющие силы:

$$F_X = \lambda_1, \quad F_Y = \lambda_2, \quad M_\Omega = b_X\lambda_2 - b_Y\lambda_1.$$

Уравнение, которому удовлетворяет угловая скорость платформы при рассматриваемом способе организации программного движения, имеет вид

$$\dot{\Omega} + \varkappa_{12}\dot{V}^*_{BX} - \varkappa_{11}\dot{V}^*_{BY} - \varkappa_{21}\Omega V^*_{BX} - \varkappa_{22}\Omega V^*_{BY} + \xi_2 V^*_{BX} - \xi_1 V^*_{BY} + \xi_3\Omega = 0.$$

Выражения для постоянных коэффициентов $\varkappa_{ij}$, $\xi_k$ в этом уравнении ввиду громоздкости здесь не приводятся.

В **§4.5.2** приведён пример описанной процедуры расчёта управляющих сил. Требуется реализовать равномерное движение точки платформы $B$ по окружности радиуса $R_B$ с циклической частотой $\omega_B$ и начальной фазой $\varphi_B$. На таком движении

$$V^*_{BX} = R_B\omega_B\sin(\Psi - \omega_B t - \varphi_B), \quad V^*_{BY} = R_B\omega_B\cos(\Psi - \omega_B t - \varphi_B).$$

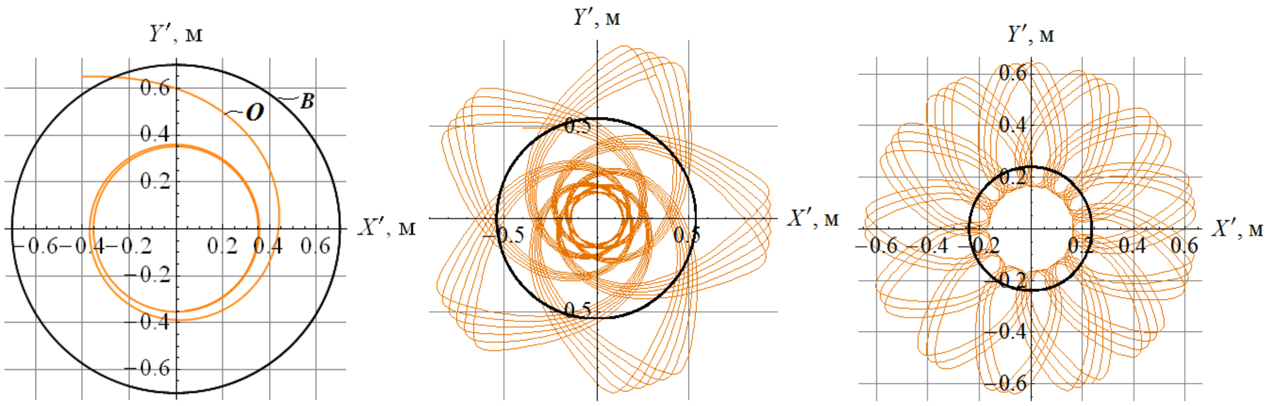
Установлено, что при

$$R_B > R'_B \equiv \xi_3/\sqrt{(\xi_1 + \varkappa_{22}\omega_B)^2 + (\xi_2 - \varkappa_{21}\omega_B)^2}.$$

платформа, реализующая рассматриваемое программное движение, может двигаться с постоянной угловой скоростью $\Omega = \omega_B$ (см. рисунок 2). Достаточное условие асимптотической устойчивости некоторых из таких стационарных вращений состоит в выполнении неравенства

$$R_B|\omega_B| < V''_B \equiv \xi_3/\sqrt{(\varkappa_{11} - \varkappa_{21})^2 + (\varkappa_{12} - \varkappa_{22})^2}.$$

Установлено, что рассматриваемые стационарные вращения платформы перестают быть устойчивыми из-за влияния инерционности колёс.




а) $R_B > R'_B$ б) $R_B < R'_B$ в) $R_B < R'_B$

Рис. 2 — Траектории центра платформы $O$ и точки $B$ при $R_B|\omega_B| < V''_B$

Проведено математическое моделирование динамики мобильного робота с рассматриваемым способом реализации программного движения. Установлено, что работа управляющих сил, отождествлённых с реакциями связей (20), меньше работы управляющих сил, реализующих поступательное движение платформы вдоль окружности с указанными характеристиками.

В **§4.5.3** приведён пример рассматриваемой процедуры расчёта управляющих сил в задаче погони мобильной платформы за подвижным объектом в соответствии с алгоритмом сближения

$$\begin{cases} V_{BX}^* = k_0 u_X, \quad \dot{u}_X - \Omega u_Y = k_0\big(-k_2 u_X - k_1 \varrho_X\big), \\ V_{BY}^* = k_0 u_Y, \quad \dot{u}_Y + \Omega u_X = k_0\big(-k_2 u_Y - k_1 \varrho_Y\big), \end{cases}$$

где $\varrho_X$ и $\varrho_Y$ — абсцисса и ордината точки $B$ относительно центра преследуемого тела в подвижных осях $XYZ$; $u_X$, $u_Y$ — вспомогательные функции; $k_i > 0$, $i = \overline{0{,}2}$ — постоянные коэффициенты. Работоспособность такого алгоритма сближения изучена в [11–13].

Рассматриваемый способ $V_{BX}^*$ и $V_{BY}^*$ не требует дифференцирования измерительной информации об относительном положении преследуемого объекта в процессе расчёта неопределённых множителей.

В **§4.6** построен алгоритм идентификации параметров модели робота *youBot*, учитывающей податливость деталей механических передач и элементов колёс. Рассмотрен случай поступательно продольного движения платформы.

После исключения неизмеряемых переменных состояния, уравнения движения системы приобретают вид:

$$\frac{m_1(\zeta_1 + \zeta_s)}{k_s}\ddot{V}_X^s + \left(m_1 + \frac{\zeta_1 \zeta_s}{k_s}\right)\dot{V}_X^s + \zeta_1 V_X^s = \frac{m_1}{k_s}\ddot{F}_X + \frac{\zeta_s}{k_s}\dot{F}_X + F_X,$$

где $V_X^s$ — значение продольной скорости центра платформы, вычисленное по одометрической информации; $m_1 = m_{\text{рб}} + \frac{4}{R^2} I_{\text{к}Y}$; $\zeta_1 = \frac{4}{R^2}\mu_{\text{к}}$; $\zeta_s$, $k_s$ — приведённые коэффициенты вязкости и упругости для податливых элементов.

В представленном уравнении пять коэффициентов линейной комбинации функций зависят от четырёх параметров $m_1$, $\zeta_1$, $\zeta_s$ и $k_s$. Таким образом, в рассматриваемой задаче имеет место параметрическая связь, которая была учтена при синтезе алгоритма идентификации (15).

Учёт податливости элементов робота привёл к снижению ошибки прогноза параметрической модели в установившемся режиме оценивания по сравнению со случаем, когда податливостью пренебрегали.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Для мехатронных систем с линейными параметрическими моделями построено семейство алгоритмов идентификации параметров с ограничениями на оценки в виде равенств, полученное с помощью математического аппарата неголономной механики, позволившего снизить размерность задачи.

2. Разработаны оптимальные с точки зрения метода наименьших квадратов алгоритмы идентификации с ограничениями-равенствами на оценки параметров, представленные в терминах псевдоскоростей и множителей связей.
3. Построены оптимальные с точки зрения модифицированной интегральной квадратичной ошибки алгоритмы идентификации с ограничениями-равенствами на оценки параметров.
4. Показано, что введение неинтегрируемых связей позволяет получить новые классы решений задач, в первоначальной постановке которых связи не фигурируют. Это задача стабилизации аффинных управляемых систем и задача оценивания для систем с нелинейной параметрической моделью (с разделяющимися временем и параметрами).
5. Найден класс многозвенных мехатронных систем с податливыми шарнирами, у которых коэффициенты линейных параметрических моделей удовлетворяют дополнительным соотношениям — параметрическим связям. Для идентификации параметров таких систем применимы перечисленные выше алгоритмы.
6. Разработаны алгоритмы идентификации параметров нелинейной математической модели резонатора волнового твердотельного гироскопа и оценивания характеристик его установившихся колебаний.
7. Создана математическая модель роботизированной платформы всенаправленного движения *KUKA youBot*, учитывающая силы вязкого трения в подшипниках механических передач и опорах роликов колёс. Разработан алгоритм идентификации параметров такой модели, использующий одометрическую информацию и измерения управляющих моментов двигателей.
8. Разработан алгоритм управления роботом *KUKA youBot* с целью отработки программного движения, которое реализуется путём воздействия на систему управляющих обобщённых сил, отождествлённых с реакциями неголономных связей. Получены условия существования и асимптотической устойчивости стационарных вращений платформы робота в процессе реализации равномерного движения произвольной точки платформы по окружности.

## Публикации автора по теме диссертации


1. ***Адамов Б. И.*** **Нелинейная стабилизация движения одноколёсного робота** // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки.* — 2011. — № 1. — С. 51–54.

2. ***Адамов Б. И.***, ***Орлов И. В.*** **Управление мобильным манипулятором, работающим в цилиндрической системе координат** // *Вестник МЭИ.* — 2012. — № 1. — С. 28–35.

3. ***Адамов Б. И.**, **Кобрин А. И.*** **Методы аналитической механики в задаче адаптивной идентификации со связями** // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика.* — 2016. — № 5. — С. 63–67.

4. *Адамов Б. И.* Моделирование движения робота с меканум-колёсами в системе Mathematica 7.0 // *Инновационные информационные технологии.* — 2013. — Т. 2, № 2. — С. 105–109.

5. An approach to the kinematics and dynamics of a four-wheeled mecanum vehicles / B. Adamov, M. Abdelrahman, F. Becker et al. // *Scientific Journal of IfToMM „Problems of Mechanics", special issue.* — 2013. — no. 2(55). — Pp. 27–37.

6. *Адамов Б. И., Орлов И. В.* Решение обратной задачи динамики мобильного манипулятора методом неопределённых множителей // Международная молодёжная научно-практической конференция «Мобильные роботы и мехатронные системы» / НИИ Механики МГУ. — М.: Изд-во Московского университета, 2011. — С. 14–18.

7. *Адамов Б. И.* Стабилизация движения сигвея с параметрической неопределённостью и повышение комфортабельности езды пассажира // XV конференция молодых учёных «Навигация и управление движением» / ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Международная общественная организация «Академия навигации и управления движением». — СПб.: Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор», 2013. — С. 339–343.

8. *Адамов Б. И.* Стабилизация движения сигвея с параметрической неопределённостью // Международная конференция «Восьмые окуневские чтения» / Балт. гос. техн. ун-т. — СПб.: 2013. — С. 44–46.

9. *Адамов Б. И., Кобрин А. И., Орлов И. В.* О некоторых задачах управления мобильным манипулятором // XX междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика». — Т. 4. — М.: Издательский дом МЭИ, 2014. — С. 228.

10. A Description of the Dynamics of a Four-Wheel Mecanum Mobile System as a Basis for a Platform Concept for Special Purpose Vehicles for Disabled Persons [Электронный ресурс] / B. Adamov, M. Abdelrahman, F. Becker at al. // 58-th Ilmenau Scientific Colloquium — Shaping the Future by Engineering. — Ilmenau: 2014. — Режим доступа: `http://www.db-thueringen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-30822/ilm1-2014iwk-041.pdf`, свободный. — (Дата обращения: 30.05.2016).

11. *Адамов Б. И., Князев А. В.* Реализация алгоритма преследования для мобильного робота в среде LabView // XIII международная научно-практическая конференция: «Инженерные и научные приложения на базе технологий NI NIDays–2014». — М.: ДМК Пресс, 2014. — С. 179–181.

12. *Адамов Б. И., Князев А. В., Кобрин А. И.* Применение алгоритма фильтрации в задаче погони // XXI междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика». — Т. 4. — М.: Издательский дом МЭИ, 2015. — С. 150–151.

13. *Адамов Б. И., Князев А. В.* Асимптотический алгоритм погони для мобильного робота // XVII конференция молодых учёных «Навигация и управление движением» / ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Международная общественная организация «Академия навигации и управления движением». — СПб.: Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор», 2015. — С. 516–524.

14. *Адамов Б. И.* Идентификация параметров динамического объекта при наличии параметрических связей // XVII конференция молодых учёных «Навигация и управление движением» / ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Международная общественная организация «Академия навигации и управления движением». — СПб.: Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор», 2015. — С. 497–508.

15. *Адамов Б. И.* Идентификация параметров механической системы при наличии параметрических связей // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2015. — С. 82–83.